

حل مساله انتقال حرارت هدایتی معکوس در کانال حاوی ماده متخلخل در حالت نداشتن تعادل حرارتی

محسن نظری^۱؛ فرشاد کوثری^۲

چکیده

در این مقاله به بررسی انتقال حرارت هدایتی معکوس گذرا در کانال حاوی ماده متخلخل پرداخته شده است. برای تحلیل مساله از شرط نداشتن تعادل حرارتی بین دو فاز جامد و سیال استفاده شده و به کمک دو روش جداگانه معکوس تخمین متوالی تابع (SFSM) و گرادیان مزدوج به تخمین شار حرارتی سطحی نسبت به زمان پرداخته می‌شود. استفاده از دو معادله انرژی در حالت نداشتن تعادل حرارتی و به کار بردن آن در مسایل معکوس حرارتی از ویژگی‌های برجسته این پژوهش بوده و کاری نو در این زمینه می‌باشد. استخراج معادلات الحاقی از معادلات حاکم بر مواد متخلخل در حالت نداشتن تعادل حرارتی و استفاده از آن به منظور تخمین شار حرارتی مجهول از دیگر برجستگی‌های این مقاله است. گفتنی است که تاثیر پارامترهایی مثل ضریب توالی (τ) در روش تخمین متوالی تابع مجهول، خطای دماهای اندازه‌گیری شده در محل سنسور و محل قرار گیری حسگرها، بر توزیع شار تخمین زده شده مورد بحث قرار گرفته است. همچنین مقایسه کاملی بین دو روش معکوس در تخمین شار حرارتی ارائه شده است.

کلمات کلیدی

انتقال حرارت معکوس - محیط متخلخل - عدم تعادل حرارتی - تخمین متوالی تابع - معادله الحاقی

Inverse Conduction Heat Transfer in a Channel Filled with Porous Material under Local Thermal Non-Equilibrium Condition

M. Nazari; F. Kowsari

ABSTRACT

This paper is concerned with the inverse heat transfer between two parallel plates filled with a porous medium under a non-equilibrium condition. Sequential Function Specification Method (SFSM) and Conjugate Gradient Method (CGM) with Adjoint equations are employed to estimate the transient wall heat flux at the porous boundary. Combination of the non-thermal equilibrium model and inverse heat transfer methods is the novelty of this paper. Results showed that sensor locations and existing noise in the measured data have important effects on the calculated heat flux.

KEYWORDS

Inverse Heat Transfer, Porous Medium, Non-Thermal Equilibrium, SFSM, Adjoint Problem.

^۱ دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران: Email: mohsennazari@ut.ac.ir

^۲ استاد دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران: Email: fkowsari@ut.ac.ir



معکوس تخمین پارامتر Levenberg-Marquardt در مرجع [۶] مورد استفاده قرار گرفته و در آن به محاسبه انتقال حرارت و جرم در داخل محیط متخلخل پرداخته می‌شود. مولفین برای حل عددی از معادلات لوییکوف استفاده کرده و مساله فیزیکی شامل خشک کردن یک محیط متخلخل مرطوب یک بعدی می‌باشد. در این مساله از اندازه گیری های وابسته به زمان دما و رطوبت در داخل ناحیه محاسباتی استفاده شده است. محاسبه و تخمین عدد بایوت نیز با استفاده از روش گرادیانهای مزدوج در مرجع [۷] ارایه شده و از داده های اندازه گیری شده دما و رطوبت در داخل محیط متخلخل بهره گرفته شده است. شایان گفتن است که معادلات استفاده شده دارای فرض تعادل دمایی است. تخمین شار حرارتی به روش معکوس انتقال حرارت به کمک معادلات الحاقی و روش گرادیانهای مزدوج در مرجع [۸] مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله فرض می‌شود که یک محفظه مستطیلی متخلخل در حالت جابجایی طبیعی در معرض شار حرارتی نامشخص قرار دارد و در اعداد رایلی متفاوت به حل مساله اقدام شده است. بررسی انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه بسته حاوی ماده متخلخل در حالت پایا و با روش معکوس گرادیانهای مزدوج در مرجع [۹] انجام شده است که در آن از معادلات الحاقی برای حل عددی نیز استفاده شده است. محفظه حاوی ماده متخلخل در مجاورت شار حرارتی نامشخص قرار دارد و برای تخمین آن اقدام شده است.

در این پژوهش معادله انرژی هر یک از فازها با فرض نداشتن تعادل حرارتی بین آنها مورد مطالعه قرار گرفته است و با روش های معکوس هدایت حرارتی تخمین متوالی تابع (SFSM)^۲ و روش گرادیان مزدوج و معادله الحاقی در حالت عدم تعادل حرارتی به تخمین شار حرارتی روی دیواره اقدام شده است. یکی از مواردی که حل معکوس را در شرایط عدم تعادل حرارتی مشکل می کند این است که در هنگام آزمایش، دماهای اندازه‌گیری شده توسط حسگرهای دما را نمی‌توان به طور مشخص به فاز جامد یا فاز سیال نسبت داد. بنابراین انجام آزمایش تنها با اندازه گیری دما روی یک سطح مرزی مشخص در ناحیه متخلخل مورد بررسی، امکان‌پذیر است. در این مقاله، امکان پذیری دست یابی به نتایج قابل قبول، به کمک روش های انتقال حرارت هدایتی معکوس برای محیط متخلخل، در شرایط عدم تعادل گرمایی مورد بررسی قرار گرفته است. استخراج معادلات الحاقی در حالت عدم تعادل حرارتی و محاسبه تابع گرادیان از معادلات کوپله شده مربوطه از ویژگی های برجسته دیگر این مقاله است. در این مقاله فرض

انتقال حرارت در محیط متخلخل دارای کاربردهای بسیاری است. مدلسازی سیستم های ژئوترمال، مبدل‌های حرارتی فشرده، عایق‌های ساختمان و مخازن نفتی از جمله کاربردهای آن می‌باشند. گفتنی است که انتقال حرارت هدایتی در مواد متخلخل نیز دارای کاربردهای فراوانی است که از آن جمله می‌توان به بررسی انتقال حرارت در بافت های زنده اشاره کرد. استفاده از روشهای معکوس حرارتی برای تخمین پارامترهای موثر در مواد متخلخل می تواند راه حل موثری برای مدلسازی بهینه در این زمینه باشد. روشهای معکوس حرارتی در مواد متخلخل در حالت تعادل حرارتی بین فازهای سیال و جامد توسط تعداد زیادی از مولفین به کار رفته است که از آن جمله می‌توان به روش معکوس گرادیانهای مزدوج و معادلات الحاقی^۱ در مرجع [۱] اشاره کرد که در آن با در نظر گرفتن انتقال حرارت جابجایی طبیعی به بررسی منبع حرارتی بیو شیمیایی در داخل محیط متخلخل پرداخته می‌شود و هدف از آن یافتن منبع حرارتی داخلی طبق مدل مونود با استفاده از اندازه‌گیری‌های دمایی است. در مرجع [۲] نیز پارامترهای موثر در مواد متخلخل با روش معکوس Levenberg-Marquardt تخمین زده شده است. ضریب هدایت حرارتی موثر و ضریب ظرفیت حرارتی حجمی از جمله موارد بدست آمده از حل مولفین با استفاده از فرض تعادل حرارتی بین دو فاز می‌باشد. روش معکوس ارایه شده در مرجع [۳] بر مبنای گرادیانهای مزدوج و معادلات الحاقی بوده و در آن با روش عددی معکوس به بررسی انتقال حرارت در محیط های متخلخل پرداخته شده است. در این مقاله با استفاده از روش عددی حجم محدود نسبت به تعیین منبع حرارتی نامشخص (که وابسته به غلظت نیز است) در داخل محیط متخلخل با وجود جابجایی طبیعی اقدام شده است. مساله دیفیوژن حرارتی معکوس در یک محفظه مربعی متخلخل دوبعدی با روش گرادیانهای مزدوج و استفاده از معادلات الحاقی در مرجع [۴] مورد بررسی قرار گرفته است. حل عددی با روش حجم محدود انجام شده است. در این مساله پروفیل غلظت بر روی دیواره نامشخص فرض شده و برای تخمین آن اقدام شده است. در تحقیق دیگری [۵]، انتقال حرارت جابجایی آزاد در داخل ماده متخلخل مورد بررسی قرار گرفته و با روش گرادیانهای مزدوج و استفاده از اندازه گیری دما در داخل میدان محاسباتی، شار حرارتی حجمی تخمین زده می‌شود. اعداد بی بعد قابل توجه در این طرح، اعداد رایلی و لوییس هستند. روش

$$\theta = \frac{T - T_0}{\Delta T_{ref}}, y^* = \frac{y}{H}, t^* = \frac{\alpha_f t}{H^2} \quad (10)$$

شرایط مرزی بدون بعد به صورت روابط (۱۱) الی (۱۳) نوشته می‌شوند:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial \theta_f}{\partial y^*} \right)_{y^*=0} + (1 - \varepsilon) k \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial y^*} \right)_{y^*=0} = 0 \quad (11)$$

$$\theta_f(t^* = 0) = \theta_s(t^* = 0) = 0. \quad (12)$$

$$Q = \varepsilon \left(\frac{\partial \theta_f}{\partial y^*} \right)_{y^*=1} + (1 - \varepsilon) k \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial y^*} \right)_{y^*=1} \quad (13)$$

که در آن $Q(t^*) = \frac{q''(t)H}{k_f \Delta T_{ref}}$ است.

۳- روش معکوس SFSM

بر اساس انتگرال دوهمال، اگر $\phi(x, t)$ پاسخ سیستم به اختلال واحد بوده و q تابع اختلال باشد آنگاه پاسخ سیستم به صورت رابطه (۱۴) است [۱۲]:

$$T(x, t) - T_0 = \int_{\lambda=0}^t q(\lambda) \frac{\partial \phi(x, t - \lambda)}{\partial \lambda} d\lambda \quad (14)$$

اگر عبارت داخل انتگرال به صورت تفاضل پیشرو گسسته‌سازی شود، نتیجه رابطه (۱۵) بدست می‌آید:

$$T(x, t) - T_0 = \sum_{n=1}^M q_n [\Delta \phi_{M-n}] \quad (15)$$

کسه در آن $\Delta \phi_{M-n} = \phi_{M-n+1} - \phi_{M-n}$ و $q_n = q(\lambda_n)$. در شکل گسسته شده، $\Delta \phi$ ها، ضرایب حساسیت می‌باشند و به عبارت دیگر $\Delta \phi_{i-j} = \partial T_i / \partial q_j$. ایده روش SFSM بر این اصل استوار است که برای تخمین شار حرارتی مجهول، از دماهایی استفاده شود که از نظر زمانی نزدیک شار اتفاق افتاده باشند زیرا ضریب حساسیت نسبت به شار q_r در زمانهای خیلی جلوتر از t_r به سمت صفر میل می‌کند [۱۲]. فرض کنید که تا مولفه $M-1$ ام شار حرارتی تخمین زده شده است و هدف بدست آوردن مولفه M ام شار حرارتی باشد. اگر از r زمان بعد از زمان M ام برای تعیین q_M استفاده شود، با فرض اینکه که شار حرارتی از زمان M ام تا r زمان بعد ثابت بماند، در این صورت (۱۵) به رابطه (۱۶) تبدیل می‌شود:

$$T_{M+r-1} = T_0 + q_1 \Delta \phi_{M+r-2} + q_2 \Delta \phi_{M+r-3} + \dots + q_{M-1} \Delta \phi_r + q_M \phi_r \quad (16)$$

حال اگر تابع خطای S نسبت به q_M مینیمم شود، نتیجه مورد نظر بدست خواهد آمد.

$$S = \sum_{i=1}^r [Y_{M+i-1} - T_{M+i-1}]^2 \quad (17)$$

که در آن Y مقادیر اندازه گیری شده است. با قرار دادن

می‌شود که شار حرارتی دیواره به هر دو فاز سیال و جامد که در مجاورت دیوار هستند منتقل شده است. استفاده از مدل های معکوس در حالت عدم تعادل حرارتی در مواد متخلخل کاری نو در این زمینه می‌باشد و کاربردهای صنعتی فراوانی دارد.

۲- معادلات حاکم و شرایط مرزی

کانال حاوی ماده متخلخل در شکل (۱) به نمایش در آمده است که شار حرارتی وابسته به زمان q'' به دیواره جامد وارد می‌شود. با استفاده از فرض عدم تعادل حرارتی بین دو فاز معادلات انرژی در حالت گذرا به صورت روابط (۱) و (۲) خواهند بود [۱۰]:

$$\varepsilon (\rho c)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} = \nabla \cdot (\varepsilon k_f \nabla T_f) + h(T_s - T_f) \quad (1)$$

$$(1 - \varepsilon) (\rho c)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \nabla \cdot ((1 - \varepsilon) k_s \nabla T_s) - h(T_s - T_f) \quad (2)$$

که ε معرف نسبت تخلخل، k_s و k_f ضرایب هدایت حرارتی در فازهای سیال و جامد و h معرف ضریب انتقال حرارت جابجایی در داخل محیط متخلخل است. با فرض پوشش عایق در $y = 0$ و ضریب هدایت حرارتی بزرگ جداره خارجی (یا سطح فعال)، شرایط مرزی برابرندبا (شکل (۱)):

$$T_s(x, y = H, t) = T_f(x, y = H, t) = T_w(t) \quad (3)$$

$$0 = \varepsilon k_f \left(\frac{\partial T_f}{\partial y} \right)_{y=0} + (1 - \varepsilon) k_s \left(\frac{\partial T_s}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (4)$$

$$T_f(x, y, t = 0) = T_s(x, y, t = 0) = T_0 \quad (5)$$

مدل های مختلف برای بیان شار حرارتی دیواره در مواد متخلخل ارایه شده است [۱۱]، که مدل استفاده شده در این حل معکوس به صورت رابطه (۶) است:

$$q''(t) = \varepsilon k_f \left(\frac{\partial T_f}{\partial y} \right)_{y=H} + (1 - \varepsilon) k_s \left(\frac{\partial T_s}{\partial y} \right)_{y=H} \quad (6)$$

شکل بی بعد معادلات حاکم همراه شرایط مرزی یاد شده به صورت روابط (۷) و (۸) خلاصه می‌شوند:

$$\varepsilon \frac{\partial \theta_f}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\varepsilon \frac{\partial \theta_f}{\partial y^*} \right) + A(\theta_s - \theta_f) \quad (7)$$

$$(1 - \varepsilon) \frac{(\rho c)_s}{(\rho c)_f} \frac{\partial \theta_s}{\partial t^*} = k \frac{\partial}{\partial y^*} \left((1 - \varepsilon) \frac{\partial \theta_s}{\partial y^*} \right) - A(\theta_s - \theta_f) \quad (8)$$

که در آنها کمیت های بدون بعد عبارتند از:

$$k = \frac{k_s}{k_f}, A = \frac{hH^2}{k_f} \quad (9)$$

$\partial S / \partial q_M = 0$ رابطه (۱۸) بدست می‌آید:

$$q_M = \frac{\sum_{i=1}^r \phi_i \left[Y_{M+i-1} - \hat{T}_{M+i-1} \right]}{\sum_{i=1}^r \phi_i^2} \quad (18)$$

که در آن:

$$\hat{T}_{M+i-1} = T_0 + q_1 \Delta \phi_{M+i-2} + q_2 \Delta \phi_{M+i-1} + \dots + q_{M-1} \Delta \phi_i \quad (19)$$

در مساله انتقال حرارت در کانال حاوی ماده متخلخل با معادلات (۷) و (۸)، با مشتق‌گیری از مولفه دمای θ نسبت به شار مجهول Q ، مساله حساسیت به صورت روابط (۲۰) و (۲۱) خواهد بود:

$$\varepsilon \frac{\partial Z_f}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\varepsilon \frac{\partial Z_f}{\partial y^*} \right) + A(Z_s - Z_f) \quad (20)$$

$$(1-\varepsilon) \frac{(\rho c)_s}{(\rho c)_f} \frac{\partial Z_s}{\partial t^*} = k \frac{\partial}{\partial y^*} \left((1-\varepsilon) \frac{\partial Z_s}{\partial y^*} \right) - A(Z_s - Z_f) \quad (21)$$

و

$$Z_f(t^*_{M-1}) = Z_s(t^*_{M-1}) = 0. \quad (22)$$

$$0 = \varepsilon \left(\frac{\partial Z_f}{\partial y^*} \right)_{y^*=0} + (1-\varepsilon) k \left(\frac{\partial Z_s}{\partial y^*} \right)_{y^*=0} \quad (23)$$

$$1 = \varepsilon \left(\frac{\partial Z_f}{\partial y^*} \right)_{y^*=1} + (1-\varepsilon) k \left(\frac{\partial Z_s}{\partial y^*} \right)_{y^*=1} \quad (24)$$

که در آن $Z = \partial T_k / \partial Q_M$ بوده و k محل سنسور است. همانگونه که مشخص است معادله حساسیت مستقل از شار مجهول می‌باشد. اگر Q^* شاری حدس زده شده باشد و θ^* دما در محل سنسور به‌ازای این شار باشد، در این صورت با توجه به (۱۸) می‌توان شار مجهول را به صورت رابطه (۲۵) محاسبه کرد:

$$Q_M = Q^* + \frac{\sum_{i=1}^r Z_{k,i} \left[Y_k^{M+i-1} - \theta_k^{*M+i-1} \right]}{\sum_{i=1}^r Z_{k,i}^2} \quad (25)$$

پس از تخمین شار حرارتی، توزیع دما در لحظه M با حل معادلات انرژی در دو فاز بدست می‌آیند. در مساله هدایت معکوس گفته شده، حسگرها روی جداره جامد تحت اثر شار حرارتی و یا روی دیواره عایق قرار داده شده و دماهای اندازه‌گیری شده (Y) از این نقاط بدست می‌آیند. شار حرارتی اعمال شده به دیواره به صورت پالس مثلثی مطابق شکل (۱) بوده و دماهای بدست آمده از این شار حرارتی در محل دیواره از حل عددی معادلات (۸ و ۷) به همراه شرایط مرزی (۱۱-۱۳) حاصل

می‌شوند. دماهای بدست آمده در محل سنسور، با خطاهایی با توزیع نرمال و انحراف معیار $S.D.$ ، نویزی شده است. خطای نویز با روش مونت کارلو ایجاد می‌شود.

۴- روش گرادیانهای مزدوج و معادلات الحاقی

برای یافتن شارحرارتی با روش گرادیانهای مزدوج، تابع خطا مشابه حالت قبل، به صورت رابطه (۲۶) تعریف می‌شود:

$$S(Q) = \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^n (\theta(t) - Y(t))_i^2 dt \quad (26)$$

که در آن Y مقادیر اندازه‌گیری شده در محل سنسور و θ مقادیر تخمین زده شده برای یافتن Q در محل سنسور است. گفتنی است که $n=1$ برای یک عدد سنسور می‌باشد. در این روش برای یافتن شار حرارتی معکوس از روش تکرار استفاده می‌شود که به صورت رابطه (۲۷) قابل بیان است:

$$Q^{k+1} = Q^k - \beta^k d^k \quad (27)$$

که در آن β ، اندازه قدم^۲ و d جهت مزدوج^۱ می‌باشد. گفتنی است که جهت جستجو در این روش، متناسب با گرادیان S نسبت به Q است. برای یافتن این گرادیان از معادله الحاقی استفاده می‌شود. می‌توان حساسیت دما^۳ ($\tilde{\theta}$) را به عنوان مشتق جهتی θ نسبت به Q در جهت ΔQ تعریف کرد. در این صورت، می‌توان معادله حساسیت^۱ را از معادلات (۷ و ۸) استخراج کرد. معادله حساسیت بدست آمده از این روش، مشابه (۲۰) و (۲۱) بوده و کافی است در این معادلات، $Z = \tilde{\theta}$ قرار داده شود. شرایط مرزی مربوطه عبارتند از:

$$\tilde{\theta}_f(t^*_{M-1}) = \tilde{\theta}_s(t^*_{M-1}) = 0. \quad (28)$$

$$0 = \varepsilon \left(\frac{\partial \tilde{\theta}_f}{\partial y^*} \right)_{y^*=0} + (1-\varepsilon) k \left(\frac{\partial \tilde{\theta}_s}{\partial y^*} \right)_{y^*=0} \quad (29)$$

$$\Delta Q = \varepsilon \left(\frac{\partial \tilde{\theta}_f}{\partial y^*} \right)_{y^*=1} + (1-\varepsilon) k \left(\frac{\partial \tilde{\theta}_s}{\partial y^*} \right)_{y^*=1} \quad (30)$$

$$\tilde{\theta}_f(y^*=1) = \tilde{\theta}_s(y^*=1) \quad (31)$$

همانگونه که پیشتر گفته شد مشتق جهتی S را می‌توان برای تعریف گرادیان (∇S) نسبت به Q به کار برد.

$$D_{\Delta Q} S(Q) \approx \nabla S | \Delta Q > \quad (32)$$

رابطه (۳۲)، برای هر جفت تابع برداری F و G با m مولفه به صورت رابطه (۳۳) قابل تعریف است:

$$< F | G > \approx \sum_{i=1}^m \int_0^{t_f} \int_A F_i G_i dA dt \quad (33)$$

که اگر F و G توابعی اسکالر فرض شوند، m را می‌توان در (۳۳) مساوی واحد قرار داد. با توجه به (۲۶)، مشتق جهتی S به صورت رابطه (۳۴) است:

$$\left(\varepsilon \frac{\partial \bar{\theta}_f}{\partial y^*}\right)_0 + ((1-\varepsilon)k \frac{\partial \bar{\theta}_s}{\partial y^*})_0 = 0 \quad (40)$$

$$\left(\varepsilon \frac{\partial \bar{\theta}_f}{\partial y^*}\right)_1 + ((1-\varepsilon)k \frac{\partial \bar{\theta}_s}{\partial y^*})_1 = 0 \quad (41)$$

و در این صورت:

$$D_{\Delta Q} S(Q) = \quad (42)$$

$$\int_0^{t_f} - \left(\varepsilon \frac{\partial \tilde{\theta}_f}{\partial y^*} \right)_1 + ((1-\varepsilon)k \frac{\partial \tilde{\theta}_s}{\partial y^*})_1 \bar{\theta}(1, t^*) dt^* \\ = \int_0^{t_f} -\Delta Q \bar{\theta}(y_0, t^*) dt^*$$

و گرادیان S به صورت رابطه (43) تعریف می‌شود:

$$\nabla S(Q) = -\bar{\theta}(1, t^*) \quad (43)$$

با توجه به معادله (43) بدست می‌آید:

$$d^k = \nabla S(Q^k) + \gamma^k d^{k-1} \quad (44)$$

و ضریب مزدوج γ از معادله Fletcher-Reeves محاسبه خواهد شد [14]:

$$\gamma^k = \frac{\int_{t=0}^{t_f} \{\nabla S(Q^k)\}^2 dt}{\int_{t=0}^{t_f} \{\nabla S(Q^{k-1})\}^2 dt} \quad (45)$$

بطوریکه $\gamma^0 = 0$. اگر در معادله حساسیت (30)، قرار داده شود، آنگاه مقادیر $\tilde{\theta}$ در محل سنسور محاسبه خواهد شد و در این صورت ضریب β در (27) قابل محاسبه است.

$$\beta^k = \quad (46)$$

$$\frac{\int_{t=0}^{t_f} \left\{ \theta(y_0, t, Q^k) - Y(t) \times \tilde{\theta}(y_0, t, d^k) \right\} dt}{\int_{t=0}^{t_f} [\tilde{\theta}(y_0, t, d^k)]^2 dt}$$

5- نتایج و بحث

شار حرارتی اعمال شده به دیواره کانال در روش انتقال حرارت معکوس شار مثلثی مطابق شکل (1) است. این شار حرارتی در زمانهای $\tau > 3$ و $\tau < 1$ برابر صفر است. در شکل (2)، شار حرارتی گفته شده، با روش SFSM تخمین زده شده است. در این مورد، داده های اندازه گیری شده دما از محل دیواره عایق انتخاب شده اند و فرض شده است که این مقادیر اندازه گیری شده بدون نویز هستند. تخمین شار حرارتی با در نظر گرفتن مقادیر مختلفی برای عدد τ صورت گرفته است. همانگونه که انتظار می‌رود استفاده از ضریب $\tau = 1$ در این روش منجر به تخمین دقیق شار حرارتی مثلثی (Exact-

$$D_{\Delta Q} S(Q) = 2 \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^n (\theta - Y)_i^2 \tilde{\theta}_i dt \quad (34)$$

که تمام متغیرها در محل سنسور محاسبه می‌شوند. طرف سمت راست معادله (34) را می‌توان با استفاده از خواص تابع دلتای دیراک به صورت انتگرال روی سطح و زمان نوشت.

$$D_{\Delta Q} S(Q) = \quad (35)$$

$$2 \int_0^{t_f} \int_A (\theta - Y) \tilde{\theta} \sum_{i=1}^n \delta(r - r_i) dA dt$$

حال اگر متغیرهای الحاقی $\bar{U} = (\bar{\theta}_f, \bar{\theta}_s)$ به عنوان ضرایب

لاگرانژ در معادلات حساسیت تعریف شوند، در این صورت با توجه به معادلات حاکم (7) و (8) و مقداری عملیات ریاضی، معادله (35) به شکل رابطه (36) قابل تبدیل است:

$$D_{\Delta Q} S(Q) = \quad (36)$$

$$\int_0^{t_f} \int_0^1 (2(\theta - Y) \delta(y^* - y_0) \\ - \varepsilon \frac{\partial (\bar{\theta}_f)}{\partial t^*} - \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon \frac{\partial \bar{\theta}_f}{\partial y^*}) + \\ A(\bar{\theta}_f - \bar{\theta}_s)) \tilde{\theta}_f dy^* dt^* + \\ + \int_0^{t_f} \int_0^1 (- (1-\varepsilon) \frac{(\rho c)_s}{(\rho c)_f} \frac{\partial (\bar{\theta}_s)}{\partial t^*} \\ - k \frac{\partial}{\partial y} ((1-\varepsilon) \frac{\partial \bar{\theta}_s}{\partial y^*}) + \\ A(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_f)) \tilde{\theta}_s dy^* dt^* + \\ + \int_0^{t_f} (\varepsilon \bar{\theta}_f \tilde{\theta}_f) dy^* + \int_0^{t_f} ((1-\varepsilon) \bar{\theta}_s \tilde{\theta}_s) dy^* \\ - \int_0^{t_f} ((\varepsilon \frac{\partial \bar{\theta}_f}{\partial y^*} \tilde{\theta}_f)_0 + ((1-\varepsilon)k \frac{\partial \bar{\theta}_s}{\partial y^*} \tilde{\theta}_s)_0) dt^* \\ + \int_0^{t_f} ((\varepsilon \frac{\partial \bar{\theta}_f}{\partial y^*} \tilde{\theta}_f)_1 + ((1-\varepsilon)k \frac{\partial \bar{\theta}_s}{\partial y^*} \tilde{\theta}_s)_1) dt^* \\ - \int_0^{t_f} ((\varepsilon \bar{\theta}_f \frac{\partial \tilde{\theta}_f}{\partial y^*})_1 + ((1-\varepsilon)k \bar{\theta}_s \frac{\partial \tilde{\theta}_s}{\partial y^*})_1) dt^*$$

و معادله دیفرانسیل الحاقی به صورت روابط (37) و (38) خواهد بود:

$$2(\theta - Y) \delta(y^* - y_0) - \varepsilon \frac{\partial (\bar{\theta}_f)}{\partial t^*} \quad (37)$$

$$- \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon \frac{\partial \bar{\theta}_f}{\partial y^*}) + A(\bar{\theta}_f - \bar{\theta}_s) = 0$$

$$- (1-\varepsilon) \frac{(\rho c)_s}{(\rho c)_f} \frac{\partial (\bar{\theta}_s)}{\partial t^*} - k \frac{\partial}{\partial y} ((1-\varepsilon) \frac{\partial \bar{\theta}_s}{\partial y^*}) \quad (38)$$

$$+ A(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_f) = 0$$

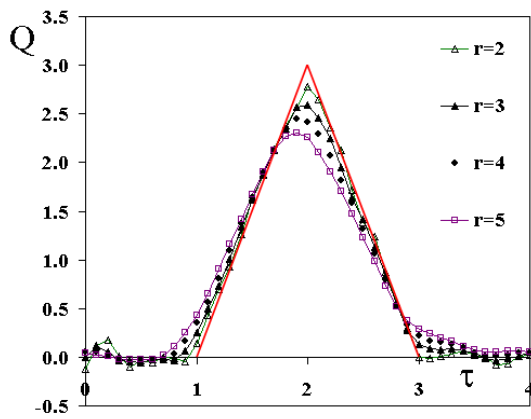
$$\bar{\theta}_f(t_f) = 0, \quad \bar{\theta}_s(t_f) = 0 \quad (39)$$

(Matching) شده است. با افزایش عدد Γ انحراف شار حرارتی تخمین زده شده از شار حرارتی واقعی افزایش می‌یابد که این افزایش به دلیل اضافه شدن خطای بایاس^۷ ناشی از مرتب‌سازی^۸ به دلیل افزایش Γ است. با نویزدار شدن داده‌ها، تخمین شار حرارتی نیاز به مرتب‌سازی دارد تا از نوسانات شار حرارتی تخمین زده شده جلوگیری شود. در شکل (۳)، شارحرارتی به ازای مقادیر مختلف Γ و با استفاده از داده‌های نویزدار تخمین زده شده است. در این مورد سنسور در محل دیواره عایق قرار گرفته است. همانگونه که مشخص است، با افزایش ضریب Γ نوسانات شار تخمین زده شده نسبت به شار واقعی کمتر بوده ولی خطای بایاس افزایش خواهد یافت. با بیان دیگر با افزایش این ضریب، خطای واریانس کاهش خواهد یافت. ترکیب دو خطای یاد شده معیاری مناسب برای بیان خطای شار تخمین زده شده است. به طور مشابه می‌توان حسگر را در محل دیواره فعال (دیواره تحت اثر شار حرارتی) قرار داده و نسبت به تخمین شار واقعی وابسته به زمان اقدام کرد. در شکل (۴) شار حرارتی تخمین زده شده در مقادیر مختلف Γ و با وجود داده‌های اندازه‌گیری شده نویزدار در محل دیواره فعال به نمایش در آمده است. با افزایش ضریب Γ نوسانات شار تخمین زده شده نسبت به شار واقعی کمتر بوده و خطای واریانس کم کم کاهش یافته است. خطای کلی که اثرات واریانس و بایاس ناشی از مرتب‌سازی را در خود دارد، به صورت $\sqrt{(Q-\hat{Q})^2}/N$ محاسبه شده بطوریکه Q شار تخمین زده شده با اندازه‌گیری‌های آلوده با نویز و \hat{Q} شار حرارتی واقعی مورد انتظار می‌باشد. همچنین N تعداد مولفه‌های شار تخمین‌زده‌شده است. اگر Q شار تخمین‌زده‌شده با اندازه‌گیری‌های بدون نویز باشد، خطای بدست آمده همان بایاس ناشی از مرتب‌سازی می‌باشد. خطای واریانس نیز از کم کردن خطای اضافه شده بایاس در روش Regularization بدست خواهد آمد. شکل (۵) خطای روش انتقال حرارت معکوس را در هر دو حالت وجود سنسور نشان داده است. همانگونه که از شکل مشخص است در این روش تخمین شار حرارتی یک نقطه بهینه برای انتخاب ضریب Γ وجود دارد. به بیان دیگر تغییرات خطای بایاس و خطای واریانس در روش انتخاب شده در مقابل یکدیگر قرار دارد و افزایش یکی منجر به کاهش دیگری خواهد شد. این نقطه بهینه در هر دو حالت در شکل (۵) نشان داده شده است. توانایی روش SFSM در تخمین شار پله ای در شکل (۶) نشان داده شده است. در این شکل شار حرارتی تخمین زده شده در مقادیر مختلف Γ و با وجود

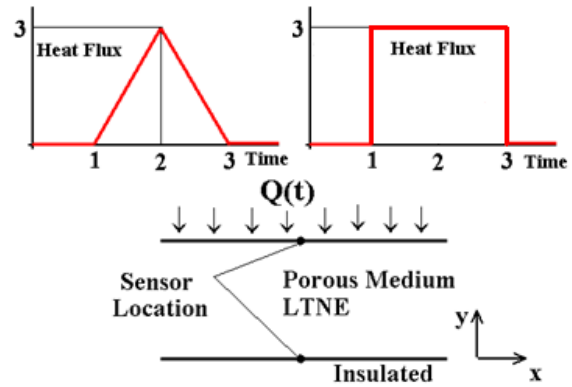
داده‌های اندازه‌گیری شده نویزدار در محل دیواره فعال به نمایش در آمده است. نقطه بهینه در این حالت ضریب $\Gamma = 2$ می‌باشد.

شکل (۷) و شکل (۸) تخمین شار حرارتی با استفاده از روش گرادیان‌های مزدوج و معادله الحاقی می‌باشند. همانگونه که پیشتر گفته شد، معادلات حاکم در حالت عدم تعادل حرارتی به دو معادله مزدوج الحاقی منجر شدند و حل این معادلات به محاسبه تابع گرادیان منجر خواهد شد. حل این معادلات الحاقی در مواد متخلخل در حالت عدم تعادل حرارتی بین دو فاز جامد و سیال کار جدیدی در این زمینه است. از دشواری‌های این روش در مواد متخلخل این است که معادلات الحاقی می‌بایست به درستی استخراج و حل شوند. زیرا در غیر این صورت تابع گرادیان و جهت جستجوی مربوطه نادرست بوده و شار حرارتی تخمین‌زده‌شده تحت تاثیر قرار خواهد گرفت. نکته حایز اهمیت این است که در صورت بروز هر گونه خطا در استخراج و یا حل معادلات الحاقی و برآورد نادرست تابع گرادیان، زمان مورد نیاز برای تخمین مجهول به شدت طولانی خواهد شد. روش گرادیان‌های مزدوج و معادلات الحاقی در مقایسه با روش SFSM سریع‌تر به تخمین شار حرارتی مجهول منجر خواهد شد. نکته جالب در این روش اینجاست که در حل معادلات مواد متخلخل، اگر دما‌های اندازه‌گیری شده دارای اغتشاشات زیادتری باشند، روش معکوس گرادیانهای مزدوج بسیار کارتر خواهد بود. شکل (۷) و شکل (۸) شار حرارتی تخمین زده شده را در حالت‌های مختلف داده‌های اندازه‌گیری شده نویز دار نشان می‌دهد. این شکل به خوبی نشان می‌دهد که حتی با افزایش اختلالات اندازه‌گیری، روش معادلات الحاقی روشی مفید است. همانگونه که گفته شد، اطمینان از درستی محاسبه تابع گرادیان در معادلات الحاقی بسیار مهم است بطوریکه محاسبه جهت نادرست کمینه‌سازی خطا، منجر به نوسانات شدید و گاهی غیر کاهنده تابع خطا می‌شود. به منظور اطمینان از درستی داده‌های بدست آمده، تابع گرادیان را می‌توان از روش مستقیم مشتق‌گیری عددی نیز محاسبه کرد و با مقادیر خروجی روش استفاده شده مقایسه نمود. روش مستقیم تخمین گرادیان بسیار زمان‌بر بوده و تمامی مولفه‌های تابع گرادیان می‌بایست بصورت مجزا از مولفه‌های شار حرارتی استخراج شوند. در شکل (۹) تابع گرادیان در سه مرحله از محاسبات شار حرارتی، ارائه شده است. مقایسه بین مقادیر خروجی روش CGM و روش مستقیم تخمین شار حرارتی، درستی نتایج بدست آمده از روش معادلات الحاقی را اثبات میکند. جدول (۱) نیز نشان دهنده مقادیر خطا در هر دو حالت

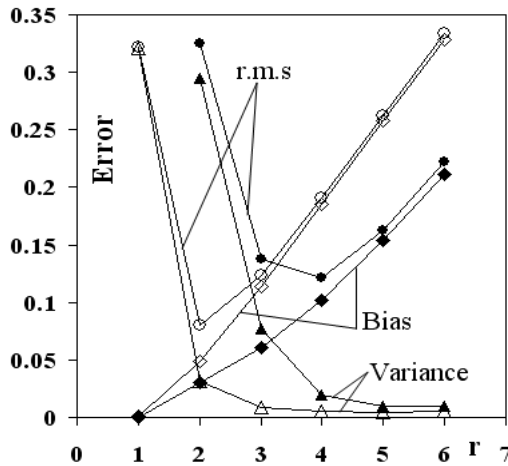
وجود حسگر است.



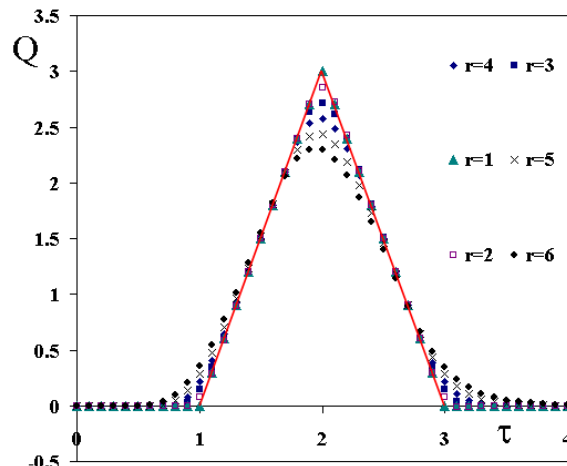
شکل (۴): تخمین شار حرارتی مثلثی با روش SFSM با داده های نویز دار $S.D. = 0,05$ ، سنسور در محل دیواره تحت اثر شار



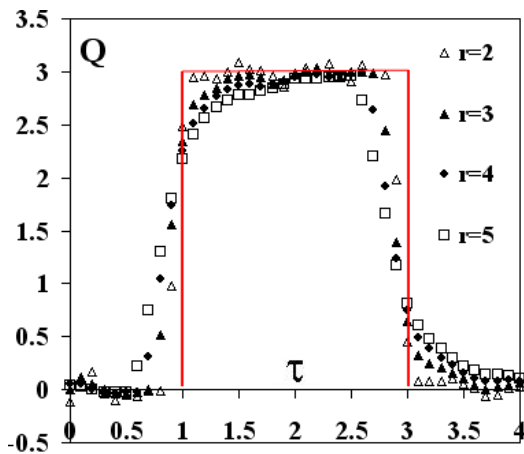
شکل (۱): هندسه مساله و دستگاه مختصات



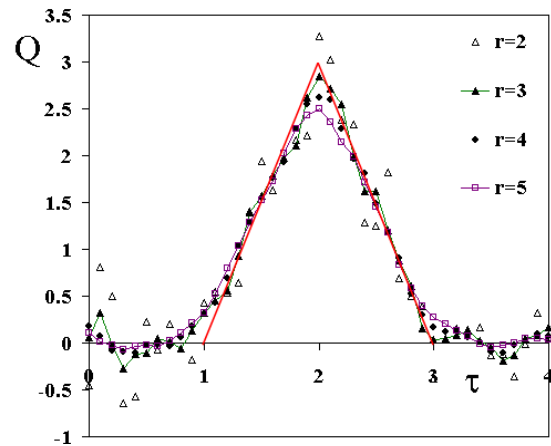
شکل (۵): مقایسه خطا در روش SFSM در حالت $S.D. = 0,05$ ، داده های تو خالی مربوط به سنسور در محل دیواره تحت اثر شار، داده های توپر مربوط به سنسور در محل دیواره عایق



شکل (۲): تخمین شار حرارتی مثلثی با روش SFSM با داده های بدون نویز، سنسور در محل دیواره عایق



شکل (۶): تخمین شار حرارتی پله ای با روش SFSM با داده های نویز دار $S.D. = 0,05$ ، سنسور در محل دیواره تحت اثر شار



شکل (۳): تخمین شار حرارتی مثلثی با روش SFSM با داده های نویز دار $S.D. = 0,05$ ، سنسور در محل دیواره عایق

Engineering Science, vol. 61, pp. 1667-1675, 2006.

Znaidia, S.; Mzali, F.; Sassi, L.; Mhimid, A.; Jemni, A.; Ben Nasrallah, S.; Petit, D.; "Inverse problem in a porous medium: estimation of effective thermal properties", Inverse Problems in Science and Engineering, vol. 13:6, pp. 581 – 593, 2005.

Jasmin, S.; Prud'homme, M.; "Inverse determination of a heat source from a solute concentration generation model in porous medium", Int. Communications in Heat and Mass Transfer, vol. 32, pp. 43–53, 2005.

Prud'homme, M.; Jiang, H.; "inverse determination of concentration in porous medium with thermosolutal convection", International Communications in Heat and Mass Transfer, vol. 30, no. 3, pp. 303-312, 2003.

Prud'homme, M.; Jasmin, S.; "Determination of a heat source in porous medium with convective mass diffusion by an inverse method", Int. J. Heat and Mass Transfer, vol. 46, pp. 2065–2075, 2003.

Dantas, L.B.; Orlande, H.R.B.; Cotta, R.M.; "An inverse problem of parameter estimation for heat and mass transfer in capillary porous media", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 46, pp. 1587–1598, 2003.

Cheng-Hung Huang; Chun-Ying Yeh; "An inverse problem in simultaneous estimating the Biot numbers of heat and moisture transfer for a porous material", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 45, pp. 4643–4653, 2002.

Prud'homme, M.; Nguyen, Hung; "Solution of the inverse steady state convection problem in a porous medium by Adjoint equations", Int. Comm. Heat Mass Transfer, vol. 28, no. 1, pp. 11-21, 2001.

Prud'homme, M.; Jasmin, S.; "Component analysis of a steady inverse convection problem solution in a porous medium", Int. Comm. Heat Mass Transfer, vol. 28, no. 7, pp. 911-921, 2001.

Kaviany, M.; Principle of heat transfer in porous media, 2nd ed., Springer, Berlin, 1995.

Alazmi, B.; Vafai, K.; "Constant wall heat flux boundary conditions in porous media under local thermal non-equilibrium conditions", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 45, pp. 3071–3087, 2002.

Beck, J. V.; Blackwell, B.; Charles R.; Jr. St. Clair; Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems, Wiley-Interscience, 1985.

Kurpisz, K.; Nowak, A. J.; Inverse Thermal Problems, 2nd ed., Computational Mechanics Publications, Southampton, 1995.

Necati Ozisik, M.; Orlande, H. R. B.; Inverse Heat Transfer-Foundation and Applications, Taylor & Francis, USA, 2000.

۷- زیر نویس ها

^۱ Adjoint Equation

^۲ Sequential Function Specification Method

^۳ Step Size

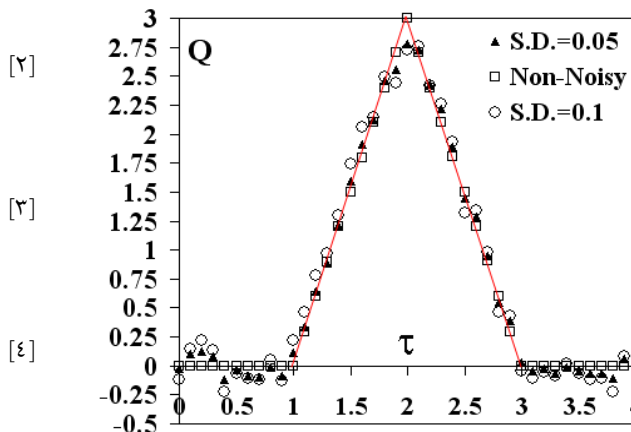
^۴ Conjugate Search Direction

^۵ Temperature Sensitivity

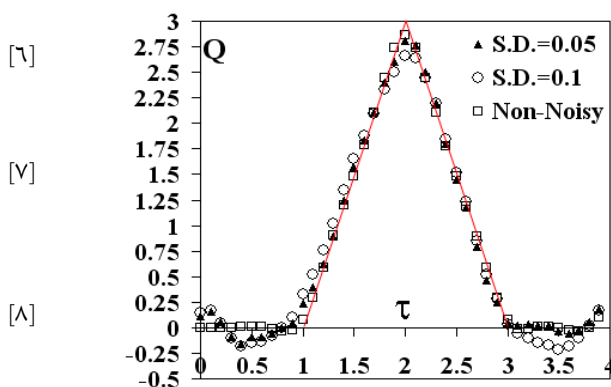
^۶ Sensitivity Equation

^۷ Bias Error

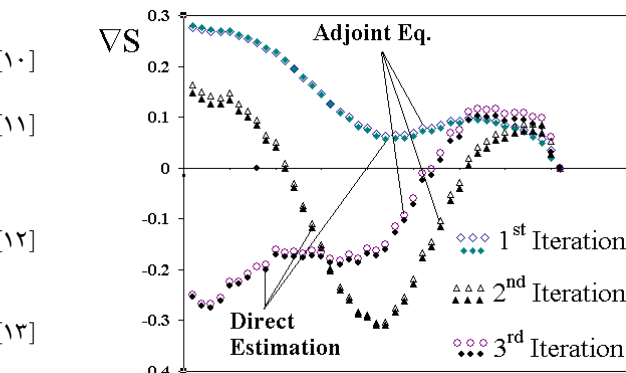
^۸ Regularization



شکل (۷): تخمین شار حرارتی مثلثی با روش گرادیانهای مزدوج و معادلات الحاقی، سنسور در محل دیواره تحت اثر شار



شکل (۸): تخمین شار حرارتی مثلثی با روش گرادیانهای مزدوج و معادلات الحاقی، سنسور در محل دیواره عایق



شکل (۹): بررسی درستی مقادیر مولفه های گرادیان در روش معادلات الحاقی با استفاده از روش محاسبه مستقیم

جدول (۱): مقایسه خطا ها در روش گرادیان های مزدوج

Error	S.D. = ۰,۰۵	S.D. = ۰,۱	Non-Noisy
Active wall	۰,۰۸۱۵۷	۰,۱۴۵۶۷	۰,۰۰۱۸۷
Inactive wall	۰,۰۹	۰,۱۲۹۱۸	۰,۰۳۶۸۲

۶- مراجع

Prud'homme, M.; Jasmin, S.; "Inverse solution for a biochemical heat source in a porous medium in the presence of natural convection", Chemical [۱]