

# یک رویکرد کارآ برای مسأله جایابی تسهیلات غیر مشابه در فضای ناپیوسته

داود شیشه‌بری<sup>۱</sup>; مهدی مهنام<sup>۲</sup>; علی شاهنده<sup>۲</sup>

## چکیده

مسأله جایابی تسهیلات (MFLP) مکان‌یابی تعداد معینی تسهیل برای خدمت‌رسانی به مجموعه‌ای از مشتریان با نیازها و مکان‌های مشخص است. اگر محیط مورد نظر ناپیوسته باشد مسأله به صورت مکان‌یابی تسهیلات در محیط غیر پیوسته (DMFLP) مطرح می‌گردد. در این مقاله حالت خاصی از مسأله DMFLP با هدف استقرار تسهیلات غیر مشابه در محیط ناپیوسته و با در نظر گرفتن تسهیلات موجود مورد بررسی قرار می‌گیرد. مسأله مورد نظر در دو حالت وجود و عدم وجود ارتباط میان تسهیلات قابل بررسی است. در این مقاله یک الگوریتم حل دقیق بر پایه روش شاخه‌وکران و یک الگوریتم ابتکاری برای حل مسأله ارائه شده است. در هر دو حالت وجود و عدم وجود ارتباط، با افزایش تعداد تسهیلات و مکان‌ها زمان حل مسأله برای رسیدن به جواب بهینه به طور قابل توجهی افزایش می‌یابد. بدین لحاظ یک الگوریتم ابتکاری کارآ توسعه داده شده و برای حل مسأله برای هر دو دیدگاه به کار گرفته شد. با تولید مسائل تصادفی کارآیی روش ابتکاری در مقایسه با الگوریتم حل دقیق بررسی و نشان داده شده است.

## کلمات کلیدی

جایابی تسهیلات، الگوریتم شاخه‌وکران، روش ابتکاری.

## *An Efficient Approach to Discrete Multiple Different Facility Location Problem*

D. Shishebori; M. Mahnam; A. Shahandeh

### ABSTRACT

The Multiple Facility Location Problem (MFLP) is to locate certain facilities so as to serve a given set of customers, whose locations and requirements are known. When the locations have to be selected from a given set of candidate locations, the problem becomes a Discrete Multiple Facility Location Problem (DMFLP). In this study, a special case of DMFLP is discussed where multiple facilities that are of different type are to be placed (location decision) and assign customers to these facilities (allocation or assignment). Both cases with and without interactions among new facilities are considered in this problem. In this paper, efficient lower and upper bounds are used to propose a branch-and-bound scheme as an exact method. Also, new heuristic method is provided for both cases and compared for large-job sizes. Computational results on randomly generated data in comparison with optimal solutions indicate that the heuristic method is accurate and efficient.

### KEYWORDS

Facility location, Branch and Bound, Heuristic.

<sup>۱</sup> کارشناس ارشد مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی اصفهان: Email: shishebori@in.iut.ac.ir

<sup>۲</sup> کارشناس ارشد مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی اصفهان: Email: mahnam@in.iut.ac.ir

<sup>۲</sup> دانشیار دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی اصفهان: Email: ali-nook@cc.iut.ac.ir



DMDFLP خود می‌تواند مشتمل بر دو حالت باشد؛ در حالت اول ارتباطی میان تسهیلات جدید وجود ندارد و در حالت دوم، علاوه بر ارتباط با تسهیلات موجود، تسهیلات جدید نیز با یکدیگر مرتبط می‌باشند. با مرور به ادبیات مسائل مکان‌یابی و تخصیص و براساس اطلاعات نویسندگان روش حل دقیق یا ابتکاری به منظور حل این مسأله ارائه نشده است [۱۲، ۱۴]. همچنین برخلاف مطالعات انجام شده در ارتباط با مسأله  $p$  میانه نمی‌توان از روش‌های حل این مسأله برای جایابی تسهیلات متفاوت با فرض ارتباط بین تسهیلات استفاده نمود. با توجه به اینکه تسهیلات جدید با یکدیگر متفاوتند بنابراین یک بُعد جدید به مسأله اضافه می‌شود و همین امر منجر به عدم توانایی روش‌های قبلی حل مسأله  $p$  میانه برای مدل یاد شده می‌گردد. علاوه بر این، با توجه به فروض و ماهیت مسأله مورد بررسی در این مقاله، نمی‌توان از روش‌های ابتکاری و حل دقیقی که برای حل مسائل مختلف مکان‌یابی و تخصیص ارائه شده استفاده نمود.

## ۲- مدل ریاضی مسأله

فرض می‌شود  $J = \{1, 2, \dots, n\}$  مجموعه مکان‌های نامزد و  $K = \{1, 2, \dots, p\}$  مجموعه تسهیلات جدید بوده و  $K = \{1, 2, \dots, q\}$  مجموعه تسهیلات موجود (مشتریان) را نشان دهد. همچنین فرض بر آن است که هر تسهیل موجود  $k$  برای تامین تقاضای خود فقط به نزدیک‌ترین (کم‌هزینه‌ترین) تسهیل جدید اختصاص یابد. بنابراین در این مدل به طور همزمان جایابی و تخصیص در نظر گرفته شده است. مدل ریاضی مسأله DMFLP در حالت مشابه بودن تسهیلات جدید در قالب روابط (۱) تا (۵) خواهد بود [۱۲، ۵]:

PMP:

$$\text{Min } Z = \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} (w_k d_{kj}) \cdot z_{kj} + \sum_{j \in J} f c_j y_j \quad (1)$$

$$s.t. \quad \sum_{j \in J} z_{kj} = 1 \quad \forall k \in K \quad (2)$$

$$z_{kj} - y_j \leq 0 \quad \forall k \in K, \forall j \in J \quad (3)$$

$$\sum_{j \in J} y_j = p \quad (4)$$

$$z_{kj}, y_j \in \{0, 1\}, \quad \forall k \in K, \forall j \in J \quad (5)$$

که در آن  $z_{kj}$  یک متغیر تصمیم دودویی است که مقدار یک به معنای تخصیص مکان  $z_{kj}$  به تسهیل جدید و مقدار صفر بیانگر

مسأله جایابی تسهیلات ( $MFLP^1$ ) از جمله مسائل مطرح در طراحی استقرار است که در مباحث پژوهش عملیاتی از جایگاه ویژه‌ای برخوردار بوده و توجه زیادی را به خود اختصاص داده است [۲۰۱]. به طور کلی این مسأله را می‌توان در دو حالت پیوسته ( $CMFLP^2$ ) و غیر پیوسته ( $DMFLP^3$ ) مورد بررسی قرار داد [۳]. در حالت پیوسته تسهیلات جدید می‌توانند در هر نقطه‌ای از محیط مستقر شوند در حالی که در محیط گسسته به دلیل محدودیت فضا، تسهیلات جدید فقط می‌توانند در مکان‌های از پیش تعیین شده استقرار یابند [۴]. از جمله نمونه‌های کاربردی این دسته از مسائل، استقرار ماشین‌آلات صنعتی و مکان‌یابی مراکز خدماتی نظیر مراکز اورژانس و آتش‌نشانی در محیط‌های شهری است. با توجه به محدودیت‌های موجود در محیط‌های صنعتی و شهری، تحلیل جایابی تسهیلات در محیط گسسته از نقطه نظر کاربردی دارای اهمیت زیادی است که در این مقاله نیز مورد توجه قرار می‌گیرد.

مسأله DMFLP را می‌توان از دو دیدگاه تسهیلات جدید مشابه و متفاوت مورد بررسی قرار داد. این مسأله در حالتی که تسهیلات جدید مشابه بوده و ارتباطی بین تسهیلات موجود نباشد به مسأله  $p$  میانه کاهش می‌یابد. مسأله  $p$  میانه، جایابی  $p$  تسهیل مشابه در مجموعه مکان‌های نامزد ( $J$ ) با هدف کمینه‌نمودن هزینه برای پاسخگویی به نیاز مجموعه مشتریان ( $K$ ) بوده و یکی از مسائل کلاسیک در جایابی تسهیلات در محیط گسسته است [۵، ۶]. این مسأله اولین بار توسط رول و سوین [۷] در سال ۱۹۷۰ به عنوان یک مسأله برنامه ریزی خطی عدد صحیح فرمول‌بندی شد. سپس کاریو و حکیمی [۸] نشان دادند که این مسأله NP-hard است. روش‌های دقیق و ابتکاری متعددی برای حل مسأله  $p$  میانه ارائه شده است [۹-۱۲]. دلیلی [۱۳] نیز این مسأله را از دیدگاه طراحی استقرار مورد بررسی قرار داده و الگوریتم شاخه‌وکرانی برای آن ارائه نموده است. رویکرد او برای مسائل با مقیاس کوچک کارآست، اما با بزرگ شدن ابعاد مسائل، زمان حل به صورت چشمگیری افزایش می‌یابد. اخیراً نیز الگوریتم‌های فرا ابتکاری نظیر الگوریتم ژنتیک و جستجوی ممنوع به منظور بهبود جواب‌های اولیه ارائه شده‌اند [۳].

در این مقاله هدف آن است تا با ارائه یک رویکرد کارآ، مسأله جایابی چند تسهیل جدید ناهمسان در مکان‌های غیر پیوسته و چگونگی تخصیص تقاضای تسهیلات موجود به تسهیلات جدید مورد بررسی (DMDFLP) قرار گیرد. مسأله

$$\text{Min } Z = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} (S_{ikj} \cdot z_{ikj}) + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} f_{c_{ij}} \cdot y_{ij} + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} (y_{ij} \cdot \sum_{j' \in J - \{j\}} \sum_{i' \in I - \{i\}} y_{i'j'} \cdot f_{i'j'} \cdot d_{ij'}) \quad (11)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in J} z_{ikj} = 1 \quad \forall k \in K, \forall i \in I \quad (12)$$

$$z_{ikj} - y_{ij} \leq 0 \quad \forall k \in K, \forall j \in J, \forall i \in I \quad (13)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} y_{ij} = p \quad (14)$$

$$z_{ikj}, y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall k \in K, \forall j \in J, \forall i \in I \quad (15)$$

مدل یاد شده مشابه حالت عدم وجود ارتباط بوده با این تفاوت که هزینه ارتباط میان تسهیلات جدید به تابع هدف اضافه شده و باعث غیرخطی شدن مدل می شود. این عبارت نشان می دهد که اگر تسهیل جدید  $i$  در مکان  $j$  استقرار یابد ( $y_{ij}=1$ ) آنگاه بایستی مجموع هزینه های ارتباط دیگر تسهیلات جدید ( $i'$ ) با این تسهیل به تابع هدف افزوده شود.

به منظور بررسی ساده تر مساله، فرض می شود که هر یک از تسهیلات موجود با کلیه تسهیلات جدید در ارتباط است. در حقیقت با در نظر گرفتن این فرض تنها جاییابی تسهیلات مورد بررسی قرار گرفته و خللی نیز به کاربرد مساله در محیط های واقعی وارد نمی گردد. با این فرض ماتریس هزینه  $S$  به ماتریس دوبعدی  $C$  - نشان دهنده هزینه ارتباط تسهیل جدید  $i$  در مکان  $j$  با کلیه تسهیلات موجود - تبدیل می شود.

### ۳- روش حل دقیق

به منظور حل دقیق مساله DMDFLP از الگوریتم شاخه و کران با استفاده از روش جستجوی عمقی استفاده و در این ارتباط حدود بالا و پایین مناسب به کار گرفته شد. در این روش، گره در پایین ترین سطح درخت بررسی و بسط داده می شود. بنابراین جستجو فقط زمانی که به بن بست برسد برگشت داده شده و به گره هایی در سطوح کم عمق تر می رود. به دلیل تفاوت میان تسهیلات جدید، تمام جایگشت های ممکن موقعیت ها بررسی و جایگشت با کمترین هزینه انتخاب می شود. تعداد حالت های مورد بررسی  $n!/(n-p)!$  است که  $n$  تعداد موقعیت های نامزد و  $p$  تعداد تسهیلات جدید می باشد. در روش ارائه شده،  $\Psi$  مجموعه تسهیلات تخصیص یافته،  $k$  تعداد این تسهیلات و  $\Psi'$  مجموعه تسهیلات تخصیص نیافته است. همچنین  $\gamma$  و  $\gamma'$  به ترتیب مجموعه مکان های تخصیص داده شده و نشده در نظر گرفته شده اند.

در الگوریتم شاخه و کران یک ترتیب جزئی از  $k$  موقعیت به صورت  $\sigma = J_{[1]}, J_{[2]}, \dots, J_{[k]}$  و با حد پایینی معادل  $LB(\sigma)$

عدم تخصیص آن است.  $Z_{kj}$  نیز یک متغیر صفر-یک است که نشانگر تخصیص و یا عدم تخصیص تسهیل موجود  $k$  به تسهیل جدید مستقر در مکان  $j$  می باشد.  $d_{kj}$  فاصله بین تسهیلات موجود  $k$  و تسهیل جدید مستقر در مکان  $j$  و  $w_k$  میزان جریان یا تقاضای تسهیل موجود  $k$  و  $f_{c_j}$  هزینه ثابت استقرار تسهیل جدید در مکان  $j$  می باشد. از آنجا که تسهیلات جدید مشابه هستند، خروجی مدل مکان های مناسب برای استقرار ماشین آلات جدید ( $y_j$ ) خواهد بود، ضمن آنکه  $z_{kj}$  نیز تخصیص تسهیلات موجود به تسهیلات جدید استقرار یافته را نشان می دهد.

در حالتی که تسهیلات جدید با یکدیگر مشابه نبوده و ارتباطی نیز میان آن ها وجود نداشته باشد، مدل ریاضی مساله DMDFLP به شکل روابط (۶) تا (۱۰) خواهد بود:

$$\text{DMDFLP1:} \quad \text{Min } Z = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} (w_{ik} d_{kj} \cdot z_{ikj}) + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} f_{c_{ij}} y_{ij} \quad (6)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in J} z_{ikj} = 1 \quad \forall k \in K, \forall i \in I \quad (7)$$

$$z_{ikj} - y_{ij} \leq 0 \quad \forall k \in K, \forall j \in J, \forall i \in I \quad (8)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} y_{ij} = p \quad (9)$$

$$z_{ikj}, y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall k \in K, \forall j \in J, \forall i \in I \quad (10)$$

با مقایسه مدل PMP و DMDFLP1 تسهیل  $i$  به عنوان یک بعد جدید به مدل افزوده شده است. بنابراین در مدل DMDFLP1،  $y_{ij}$  یک متغیر تصمیم دودویی است که در صورت تخصیص تسهیل جدید  $i$  به مکان  $j$  برابر یک قرار می گیرد و در غیر این صورت برابر صفر است. متغیر صفر-یک  $Z_{ikj}$  نیز نشانگر تخصیص و یا عدم تخصیص تسهیل موجود  $k$  به تسهیل جدید  $i$  مستقر در مکان  $j$  است. همچنین  $w_{ik}$  میزان تقاضای (جریان) تسهیل موجود  $k$  را نشان می دهد که توسط تسهیل جدید  $i$  برآورده می شود و  $f_{c_{ij}}$  هزینه ثابت استقرار تسهیل جدید  $i$  در مکان  $j$  است.

در صورتی که تسهیلات جدید غیر مشابه، با یکدیگر مرتبط بوده و  $S_{ikj}$  بیانگر هزینه ارتباط تسهیل جدید  $i$  در مکان  $j$  با تسهیل موجود  $k$ ،  $d$  ماتریس فاصله بین مکان های نامزد و  $f$  ماتریس میزان ارتباط میان تسهیلات جدید باشد؛ آنگاه مدل ریاضی مساله DMDFLP با فرض وجود ارتباط بین تسهیلات جدید به صورت روابط (۱۱) تا (۱۵) قابل تعریف است:

$$\text{DMDFLP2:}$$

نمایش داده می‌شود که  $J_{[k]}$  نشان‌دهنده موقعیت تخصیص داده شده به تسهیل جدید  $k$  ام است. در این ترتیب جزئی با اضافه کردن هر یک موقعیتهای تخصیص داده نشده مجموعه  $\gamma'$  به انتهای  $\sigma$  یک شاخه جدید ایجاد می‌شود. بنابراین  $k$  یک واحد افزایش یافته، تسهیل اضافه شده به  $\sigma$  از مجموعه  $\Psi'$  برداشته و به مجموعه  $\Psi$  اضافه می‌شود. هنگامیکه  $k$  برابر تعداد تسهیلات ( $p$ ) شود،  $\sigma$  یک جایابی کامل است و گره بسته می‌شود. در طول رویه جستجو، بهترین جایابی کامل در  $\sigma^*$  و هزینه مرتبط با آن در  $Z^*$  بهنگام می‌شود.

### رویه شاخه و کران

- (۰) یافتن یک جایابی مناسب با استفاده از حد بالا و قرار دادن آن به عنوان جواب اولیه
- (۱) ایجاد گره اولیه به صورت  $(\sigma, k, \gamma', Z)$  که در آن  $Z = 0$  و  $\sigma = \emptyset, k = 0, \gamma' = \{\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_n\}$  است.
- (۲) گره‌هایی که  $k = p$  هستند قطع شده و در صورتیکه هزینه گره مربوطه از  $Z^*$  کمتر باشد، مقادیر  $\sigma^*$  و  $Z^*$  بهنگام شوند.
- (۳) گره‌هایی در لیست که  $Z^* \geq LB(\sigma)$  قطع شوند.
- (۴) در صورتی که لیست خالی نیست، با استفاده از قاعده عمق اول و بر مبنای توالی حد بالا شاخه‌های جدید زده شود.
- (۵) حدود پایین متناسب با هر شاخه جدید محاسبه و در  $LB(\sigma)$  ذخیره شود.
- (۶) تا زمانی که لیست درخت جستجو تهی نیست قدم‌های (۲) تا (۵) تکرار شود.

چنانچه اشاره شد، مسأله DMDFLP در دو حالت وجود و عدم وجود ارتباط میان تسهیلات جدید مطرح می‌شود که در ادامه حدود بالا و پایین متناسب با هر حالت بررسی می‌شود.

### ۳-۱- عدم ارتباط میان تسهیلات جدید

به دلیل آن‌که در این حالت هیچ ارتباطی میان تسهیلات جدید وجود ندارد استقرار هر تسهیل در هر مکان دارای هزینه مشخص  $c_{ij}$  با کلیه تسهیلات موجود است. در این حالت برای به دست آوردن حد بالا از یک الگوریتم حریصانه استفاده می‌شود. بدین صورت که تسهیلات به ترتیب به موقعیتی با کمترین هزینه تخصیص یافته، سپس آن موقعیت از بین مکان‌های نامزد حذف می‌گردد. این الگوریتم به طور کامل در بخش ۴ تشریح می‌شود.

برای به دست آوردن حد پایین فرض می‌شود که هر موقعیت قادر است بیش از یک تسهیل را در درون خود جای دهد. بنابراین هر یک از تسهیلات باقیمانده بدون در نظر گرفتن محدودیت فضا به نزدیک‌ترین موقعیت با کمترین هزینه

$$LB_1 = \sum_{i \in \Psi', j \in \gamma'} \min(c_{ij}) \quad (16)$$

### ۳-۲- حالت وجود ارتباط میان تسهیلات جدید

در این حالت علاوه بر هزینه میان تسهیلات جدید و موجود، بین تسهیلات جدید نیز ارتباط وجود داشته و هزینه آن با توجه به میزان ارتباط و فاصله مکانی تسهیلات به دست می‌آید. حد بالا در این حالت نیز با استفاده از یک الگوریتم حریصانه تعیین می‌گردد، ضمن آنکه هزینه ارتباط میان تسهیلات جدید نیز در نظر گرفته می‌شود. چارچوب این الگوریتم در بخش ۴ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

برای تعیین حد پایین علاوه بر محاسبه هزینه ارتباط تسهیلات جدید و موجود علاوه بر آنکه محدودیت پذیرش بیش از یک تسهیل در هر موقعیت برداشته می‌شود، ارتباط میان تسهیلات جدید با یکدیگر نیز بایستی در نظر گرفته شود. بنابراین کمترین فاصله مکانی تخصیص داده شده ( $i$ ) تا موقعیت‌های تخصیص نیافته (مجموعه  $\gamma'$ ) مشخص شده و با این فرض که کلیه تسهیلات باقیمانده حداقل در این فاصله قرار گرفته‌اند حد پایین بر اساس رابطه (۱۷) محاسبه می‌گردد.

$$LB_2 = \sum_{i \in \Psi', j \in \gamma'} \min(c_{ij}) + \sum_{i \in \Psi} \sum_{i' \in \Psi'} f_{i'i'} \times (\min(d_{l(i), j})) \quad (17)$$

که در این رابطه  $l(i)$  مکان استقرار ماشین جدید  $i$ ،  $d_{l(i), j}$  بیان‌کننده فاصله تسهیل  $i$  از موقعیت  $j$ ،  $f_{i'i'}$  میزان ارتباط تسهیل  $i$  با تسهیل  $i'$  تخصیص نیافته  $i'$  و  $c_{ij}$  میزان هزینه ارتباط ماشین تخصیص نیافته  $i$  با مکان نامزد باقیمانده  $j$  است.

### ۴- الگوریتم ابتکاری

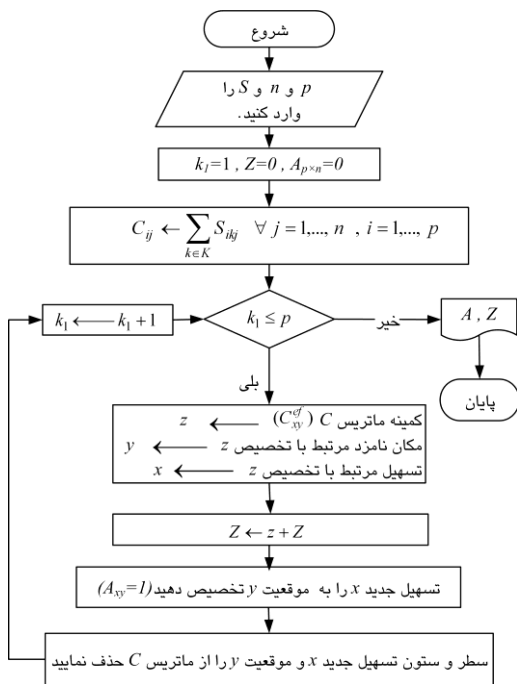
همان‌گونه که پیش از این اشاره شد، در روش‌های حل دقیق با افزایش ابعاد مسأله، زمان حل مسأله بصورت چشمگیری افزایش یافته و کارایی آن کاهش می‌یابد. بنابراین بکارگیری روش‌های ابتکاری برای حل مسأله در اندازه‌های بزرگ اجتناب ناپذیر به نظر می‌رسد.

#### حالت اول (عدم وجود ارتباط میان تسهیلات جدید)

با توجه به اینکه ورودی مسأله، هزینه ارتباط تسهیلات جدید در هر یک از مکان‌های نامزد با هر یک از تسهیلات موجود ( $d_{ikj}$ ) و وجود این فرض که هر یک از تسهیلات موجود



افزوده می‌شود. در ادامه، برای محاسبه  $L_{ij}^{eff_1}$ ، نزدیکترین موقعیت‌های نامزد باقیمانده نسبت به مکان  $j$  را به صورت نزولی مرتب شده (به تعداد تسهیلات استقرار داده نشده) و در بردار  $\vec{d}$  قرار داده می‌شود. همچنین میزان جریان تسهیلات باقیمانده با تسهیل  $i$  را به صورت صعودی مرتب و در  $\vec{f}$  قرار داده می‌شود. با ضرب برداری  $\vec{f} \times \vec{d}$  مقدار کمینه ارتباط بین تسهیل جدید  $i$  در مکان نامزد  $j$  با بقیه تسهیلات استقرار نیافته به دست می‌آید. مقدار  $L_{ij}^{eff_2}$  نیز بر اساس قاعده ضرب برداری صعودی و نزولی مقادیر فاصله و ارتباط تسهیلات مجموعه  $\mathcal{V}$  و مکان‌های مجموعه  $\mathcal{V}'$  به دست می‌آید. بر اساس ماتریس به دست آمده، در مورد تسهیل و موقعیت آن مطابق رویه قبل تصمیم‌گیری می‌شود. لازم به ذکر است که  $C_{ij}^{ef}$  و  $C_{ij}^{lf}$  هزینه‌های مشخص و ثابت بوده که در هزینه کل نیز در نظر گرفته می‌شوند ولی  $L_{ij}^{eff_1}$  و  $L_{ij}^{eff_2}$  دو حد پایین هستند که تنها در هر مرحله برای تصمیم‌گیری بهتر و کارآتر مورد استفاده قرار می‌گیرند.



شکل (۱): روش ابتکاری در حالت عدم وجود ارتباط بین تسهیلات جدید

با کلیه تسهیلات جدید در ارتباط است، ماتریس سه بعدی  $S$  به ماتریس دوبعدی  $C$  تبدیل می‌شود. از آنجا که هدف، کمینه نمودن هزینه استقرار تسهیلات جدید در مکان‌های نامزد است؛ در ادامه، حداقل هزینه ارتباط میان تسهیلات جدید و مکان‌های نامزد در ماتریس هزینه "تسهیلات جدید-مکان‌های نامزد" ( $C$ ) به دست آورده می‌شود. سپس این مقدار کمینه به تابع هدف افزوده شده و تسهیل جدید و مکان نامزد مربوط به آن از ماتریس هزینه حذف می‌شود. عملیات کمینه‌یابی بار دیگر بر روی ماتریس صورت گرفته و این رویه تا جایی که ماشین‌های جدید ادامه می‌یابد. فرایند به کار گرفته شده در حالت اول در شکل (۱) نشان داده شده است.

### حالت دوم (وجود ارتباط میان تسهیلات جدید)

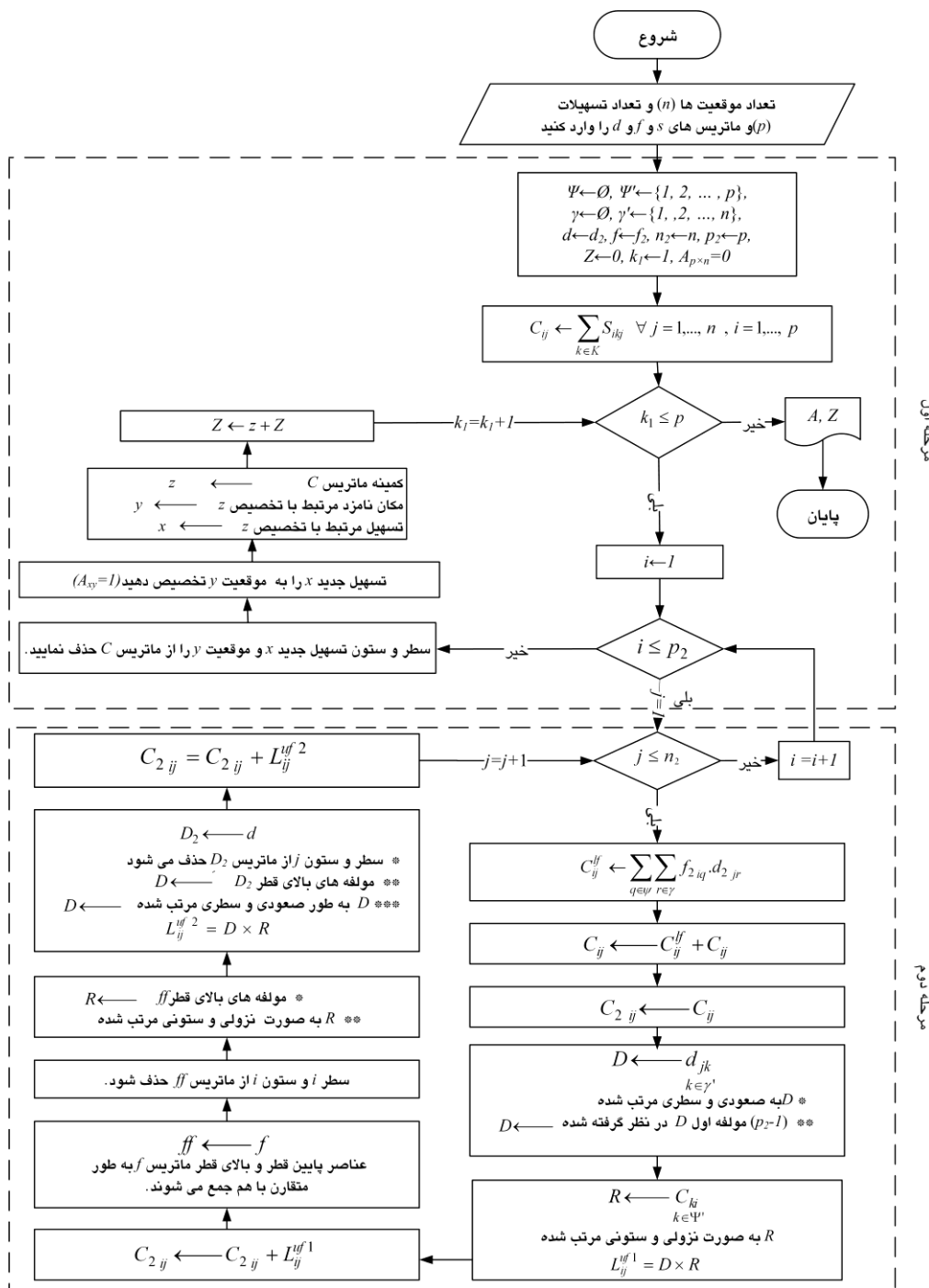
در این حالت نیز از یک الگوریتم حریصانه مشابه حالت اول استفاده شده با این تفاوت که در ماتریس هزینه، علاوه بر هزینه استقرار تسهیلات جدید در مکان‌های نامزد، ارتباط میان تسهیلات جدید نیز در نظر گرفته می‌شود. فرایند الگوریتم ابتکاری در حالت دوم در شکل (۲) نشان داده شده است.

به طور کلی الگوریتم ابتکاری در این حالت شامل دو مرحله است. در مرحله اول، ماتریس هزینه به گونه‌ای اصلاح می‌شود که هزینه ارتباط میان تسهیلات جدید مستقر شده و استقرار نیافته و حد پایینی از هزینه ارتباط تسهیلات استقرار نیافته با یکدیگر را در بر بگیرد. در مرحله دوم مشابه الگوریتم ابتکاری حالت اول، بر اساس ماتریس هزینه‌ها یک تسهیل جدید به بهترین موقعیت نامزد تخصیص می‌یابد. این دو مرحله به تواتر تا جایی که کلیه تسهیلات ادامه می‌یابد.

با فرض اینکه تسهیل جدید  $i$  در مکان نامزد  $j$  باشد این الگوریتم شامل چهار نوع هزینه ارتباط است:

- هزینه ارتباط تسهیل جدید  $i$  با تسهیلات موجود ( $C_{ij}^{ef}$ )
- هزینه ارتباط تسهیل جدید  $i$  با تسهیلات جدید استقرار نیافته ( $C_{ij}^{lf}$ )
- حد پایینی از هزینه ارتباط تسهیل جدید  $i$  با تسهیلات استقرار نیافته ( $L_{ij}^{eff_1}$ )
- حد پایینی از هزینه ارتباط تسهیلات جدید استقرار نیافته با یکدیگر در حالتی که  $i$  در مکان  $j$  قرار گرفته باشد ( $L_{ij}^{eff_2}$ )

بنابراین، همانطور که در شکل (۲) نشان داده شده است، در آغاز هزینه ارتباط تسهیل جدید  $i$  در مکان نامزد  $j$  با تسهیلات استقرار نیافته محاسبه شده و به مقدار  $C_{ij}^{ef}$  در ماتریس هزینه



شکل (۲): الگوریتم ابتکاری در حالت وجود ارتباط بین تسهیلات جدید

موقعیت‌ها در جداول (۱) و (۲) آورده شده است. همچنین فرض می‌شود که بین ماشین‌آلات جدید ارتباط وجود داشته و میزان این ارتباط برابر ۱۰ است (جدول ۳). فواصل موقعیت‌های نامزد با یکدیگر نیز مطابق جدول (۴) مشخص شده است.

به منظور حل مسأله، ابتدا مجموع هزینه ارتباط هر یک از تسهیلات جدید با کلیه تسهیلات موجود با توجه به مکان‌های نامزد محاسبه می‌گردد (جدول ۵). چنانچه اشاره شد، الگوریتم در هر بار تکرار مقداری را به عنوان هزینه ارتباط بین تسهیلات

به منظور تشریح بهتر الگوریتم ابتکاری، یک نمونه مسأله DMDFLP مورد بررسی قرار می‌گیرد.

### مثال

فرض کنید در کارگاهی سه ماشین A، B و C استقرار داشته و مدیریت قصد دارد دو ماشین جدید از دو نوع متفاوت در کارگاه مستقر نماید. به همین منظور چهار موقعیت ۱، ۲، ۳ و ۴ به عنوان مکان‌های نامزد در نظر گرفته شده‌اند. میزان هزینه ارتباط دو ماشین جدید با ماشین‌های موجود در هر یک از

جدید به جدول (۵) اضافه و آنگاه گزینه دارای کمترین هزینه انتخاب نموده و تخصیص تسهیلات به مکان نامزد مربوط به آن صورت می‌گیرد. این مقادیر بر طبق روندی که در شکل (۲) نشان داده شده، محاسبه و به جدول (۵) افزوده شده‌است (جدول ۶). در ادامه، سطر و ستون مربوط به این گزینه حذف و روند تا جایابی کلیه تسهیلات جدید ادامه می‌یابد.

جدول (۱): ماتریس هزینه تسهیلات جدید ۱

مکان نامزد				تسهیل موجود
۴	۳	۲	۱	
۱۵۰	۲۰۰	۱۰۰	۱۰۰	A
۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰	B
۳۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۳۰۰	C

جدول (۲): ماتریس هزینه تسهیلات جدید ۲

مکان نامزد				تسهیل موجود
۴	۳	۲	۱	
۲۰۰	۱۵۰	۲۰۰	۱۰۰	A
۲۰۰	۱۰۰	۱۵۰	۳۰۰	B
۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۵۰	C

جدول (۳): ماتریس میزان ارتباط تسهیلات جدید

جدید		تسهیل جدید
۲	۱	
۵	-	۱
-	۵	۲

جدول (۴): ماتریس فواصل موقعیت‌های نامزد

مکان نامزد				مکان نامزد
۴	۳	۲	۱	
۲۰	۱۵	۱۰	-	۱
۵	۲۰	-	۱۰	۲
۸	-	۲۰	۱۵	۳
-	۸	۵	۲۰	۴

جدول (۵): ماتریس "تسهیلات جدید- مکان‌های نامزد"

مکان نامزد				ماشین جدید
۴	۳	۲	۱	
۵۰۰	۴۰۰	۳۵۰	۶۰۰	۱
۴۵۰	۳۵۰	۵۰۰	۶۵۰	۲

جدول (۶): ماتریس هزینه ارتباط تسهیلات جدید- مکان نامزد

مکان‌های نامزد				تسهیل جدید
۴	۳	۲	۱	
۵۸۰	۴۸۰	۴۰۰	۷۰۰	۱
۵۳۰	۴۳۰	۵۵۰	۷۵۰	۲
۵۳۰	۴۳۰	۴۰۰	۷۰۰	حداقل هزینه

جواب حاصل از الگوریتم ابتکاری، استقرار تسهیلات ۱ در موقعیت ۲ و استقرار تسهیلات ۲ در موقعیت ۳ است که هزینه کل این استقرار برابر ۹۰۰ می‌باشد. مشاهده می‌شود که جواب الگوریتم ابتکاری دارای انحرافی برابر ۵/۵۸٪ نسبت به جواب بهینه (۸۵۰) است.

## ۵- طراحی روش آزمون و نتایج محاسباتی

به منظور بررسی میزان کارایی الگوریتم‌های ارائه شده، تعداد ۸۴۰ مسأله به صورت تصادفی تولید و با استفاده از دو روش شاخه و کران و ابتکاری حل و با توجه به دو معیار زمان و کیفیت جواب‌ها با هم مقایسه شده‌اند.

### ۵-۱- طراحی روش آزمون

اندازه نمونه‌های تصادفی به گونه‌ای متنوع طراحی شده‌اند که ابعاد کوچک، متوسط و بزرگ را پوشش دهند. این مسائل در ۲۱ گروه با تعداد ماشین (p) و تعداد موقعیت (n) در محدوده ۵ تا ۲۰ تولید شده‌اند. در الگوریتم ارائه شده، میزان هزینه ارتباط میان هر یک از تسهیلات جدید مستقر در موقعیت‌های مختلف با کلیه تسهیلات موجود، محاسبه و به عنوان ماتریس تسهیلات جدید- مکان‌های نامزد در نظر گرفته می‌شود. به منظور ساده‌سازی طراحی روش آزمون، در این تحقیق مقادیر ماتریس هزینه تسهیلات جدید- مکان‌های نامزد به صورت تصادفی از توزیع یکنواخت گسسته [۲۷۰، ۵۰۰] تولید شده و ماتریس ارتباط بین ماشین‌آلات جدید و ماتریس فاصله مکان‌ها نیز بر اساس توزیع یکنواخت گسسته [۲۰، ۵] تولید شده‌اند. تعداد ۲۰ مسأله در هر گروه تولید و در مجموع برای هر حالت ۴۲۰ مسأله و در کل ۸۴۰ نمونه تولید شده است. کلیه الگوریتم‌ها با استفاده از نرم افزار MATLAB نوشته شده و بر روی کامپیوتر پنتیوم IV با سرعت ۲/۸ مگاهرتز و ۵۱۲ مگابایت RAM اجرا شده‌اند.

### ۵-۲- نتایج محاسباتی

مسائل با فرض وجود و عدم وجود ارتباط میان ماشین‌آلات جدید بررسی و نتایج مربوط به آن‌ها با تولید

۱۷/۵۲۱۰	۵۲۱۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۲	۲۰*۲۰
۶/۵۰۱۰	۲۵۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۵	میانگین

شایان ذکر است که با افزایش تعداد مکان‌های نامزد، درصد انحراف کاهش یافته که می‌توان دلیل آن را انعطاف‌پذیری بیشتر الگوریتم در انتخاب مکان دانست.

### ۲-۲-۵ حالت وجود ارتباط

در این حالت، به دلیل افزایش پیچیدگی و زمان حل، روش شاخه‌وکران دو بار، مرتبه اول با حداکثر زمان ۶۰۰ ثانیه ( $B \& B_1$ ) و مرتبه دوم با حداکثر مدت زمان ۴۰۰۰ ثانیه ( $B \& B_2$ ) اجرا شد. تعداد مسائل به همراه نتایج محاسباتی که در مدت زمان تعیین شده و یا کمتر به دست آمده، در جدول (۸) نشان داده شده است. در این مقایسه، متوسط درصد انحراف جواب حاصل از الگوریتم‌ها با یکدیگر برای ۲۰ نمونه محاسبه و در مواردی که جواب بهینه به دست نیامده، بهترین جواب حاصل تا آن مرحله در نظر گرفته شده است.

با مشاهده نتایج می‌توان نتیجه گرفت که با بزرگ‌تر شدن ابعاد مسأله ( $10 \times 10$  به بالا) به دلیل محدودیت زمانی، هیچکدام از مسائلی که توسط الگوریتم شاخه‌وکران حل شده‌اند به جواب بهینه نرسیده‌اند. همچنین درصد انحراف الگوریتم‌های شاخه‌وکران  $B \& B_1$  و  $B \& B_2$  زیاد نبوده و به نظر می‌رسد که اضافه نمودن زمان برای حل مسأله برای به دست آوردن جواب بهینه در اندازه‌های بزرگ تاثیر زیادی ندارد. به همین دلیل در محاسبات بهترین جواب حاصل مورد استفاده قرار گرفته است. ملاحظه می‌گردد که کارایی الگوریتم ابتکاری با افزایش تعداد مکان‌های نامزد ( $n$ ) در حالت وجود ارتباط میان تسهیلات جدید افزایش یافته به طوری که بیشینه انحراف جواب الگوریتم ابتکاری از جواب حاصل از  $B \& B_2$  برابر  $4/65\%$  می‌باشد. علاوه بر این متوسط زمان حل مسأله توسط الگوریتم ابتکاری در حالت وجود ارتباط میان تسهیلات جدید کمتر از یک ثانیه شده است. با توجه به مناسب بودن میانگین درصد انحراف روش ابتکاری از جواب بهینه می‌توان از این روش برای تخصیص ماشین‌های جدید به مکان‌های نامزد بهره برد.

### بررسی کارایی روش ابتکاری با در نظر گرفتن حد پایین

به منظور تحلیل بیشتر کارایی روش ابتکاری، میزان انحراف جواب الگوریتم ابتکاری از حد پایین مسأله نیز مورد بررسی قرار گرفته است. در این حالت نیز میزان انحراف مشابه حالت قبل محاسبه شده با این تفاوت که در رابطه (۱۸) به جای مقدار بهینه ( $OPT_i$ ) از حد پایین ( $LB_i$ ) استفاده شده است. مقدار حد پایین مسأله، کران پایین الگوریتم شاخه‌وکران در گره

### ۵-۲-۱ حالت عدم وجود ارتباط

به منظور آزمایش کارایی الگوریتم ابتکاری در حالت عدم وجود ارتباط، مسائل تصادفی تولید و با استفاده از هر دو روش، حل و درصد انحراف بین جواب الگوریتم ابتکاری و جواب بهینه به کمک رابطه (۱۸) محاسبه شده است.

$$ARE = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{H_i - OPT_i}{OPT_i}}{m} \times 100 \quad (18)$$

در این رابطه  $ARE$  میانگین درصد خطای نسبی بین جواب الگوریتم ابتکاری و جواب بهینه،  $m$  تعداد مسأله در هر گروه و  $H_i$  و  $OPT_i$  به ترتیب جواب حاصل از الگوریتم شاخه‌وکران و الگوریتم ابتکاری می‌باشند. نتایج این دو روش از نظر میزان انحراف و مدت زمان اجرا مطابق جدول (۷) با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

با توجه به این که میانگین درصد انحراف الگوریتم ابتکاری از جواب بهینه، برابر  $6/50$  و میانگین زمان حل روش شاخه‌وکران و ابتکاری به ترتیب  $250$  و  $0/0005$  ثانیه است؛ می‌توان نتیجه گرفت که الگوریتم ابتکاری جواب‌های بسیار مناسبی را در مدت زمان کم (نزدیک به صفر) ارائه می‌دهد.

### جدول (۷): مقایسه کیفیت جواب و زمان حل بهینه و ابتکاری در

#### حالت عدم وجود ارتباط میان تسهیلات جدید

ابعاد مسأله ( $p \times n$ )	میانگین زمان ابتکاری (ثانیه)	میانگین زمان حل بهینه (ثانیه)	درصد انحراف
۵*۵	۰/۰۰۰	۰/۰۱۳۱	۸/۱۳۷۳
۵*۸	۰/۰۰۰	۰/۰۰۵۵	۳/۵۳۸۲
۵*۱۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۳۷	۳/۳۳۱۷
۵*۱۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۲۳	۲/۰۷۹۱
۵*۱۵	۰/۰۰۰	۰/۰۰۷۸	۱/۹۳۵۸
۵*۲۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۷۸	۰/۳۷۶۹
۸*۸	۰/۰۰۰	۰/۰۰۶۹۵	۱۰/۶۳۵۷
۸*۱۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۸۳۶	۶/۰۲۰۱
۸*۱۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۶۸۸	۷/۳۲۸۸
۸*۱۵	۰/۰۰۰	۰/۰۰۲۲۷	۳/۳۵۳۶
۸*۲۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۲۲۷	۱/۶۹۲۵
۱۰*۱۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۵۹۳	۱۰/۲۷۳۰
۱۰*۱۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۳۵۶۲	۸/۲۰۱۶
۱۰*۱۵	۰/۰۰۰	۰/۰۰۱۸۹۱	۳/۹۰۱۶
۱۰*۲۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۹۸۳۰	۳/۰۵۳۶
۱۲*۱۲	۰/۰۰۱	۳/۸۷۵	۱۳/۳۰۶۷
۱۲*۱۵	۰/۰۰۰	۱/۱۸۳۶	۷/۵۹۷۳
۱۲*۲۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۳۳۶۹	۲/۷۰۵۱
۱۵*۱۵	۰/۰۰۲	۲۲/۶۳۱۳	۱۵/۰۵۱۲
۱۵*۲۰	۰/۰۰۰	۸/۷۳۹۸	۶/۳۵۰۹



جدول (۸): مقایسه کیفیت جواب و زمان حل بهینه و ابتکاری در حالت وجود ارتباط میان تسهیلات جدید

درصد انحراف و B&B <sub>1</sub> B&B <sub>2</sub>	درصد انحراف H و B&B <sub>2</sub>	درصد انحراف H و B&B <sub>1</sub>	تعداد بهینه H	تعداد بهینه B&B <sub>2</sub>	تعداد بهینه B&B <sub>1</sub>	زمان H	زمان B&B <sub>2</sub>	زمان B&B <sub>1</sub>	تعداد مسائل	ابعاد مسئله (p×n)
۰/۰۰۰۰	۳/۶۸۴۶	۳/۶۸۴۶	۶	۲۰	۲۰	۰/۰۰۳۹	۰/۰۲۹۷	۰/۰۲۹۷	۲۰	۵*۵
۰/۰۰۰۰	۲/۷۸۶۰	۲/۷۸۶۰	۷	۲۰	۲۰	۰/۰۱۳۳	۰/۱۲۲۷	۰/۱۲۲۷	۲۰	۵*۸
۰/۰۰۰۰	۲/۰۶۷۰	۲/۰۶۷۰	۷	۲۰	۲۰	۰/۰۱۴۸	۰/۲۳۲۰	۰/۲۳۲۰	۲۰	۵*۱۰
۰/۰۰۰۰	۲/۴۴۳۶	۲/۴۴۳۶	۸	۲۰	۲۰	۰/۰۲۵۰	۰/۳۵۷۰	۰/۳۵۷۰	۲۰	۵*۱۲
۰/۰۰۰۰	۳/۰۸۸۱	۳/۰۸۸۱	۴	۲۰	۲۰	۰/۰۳۱۳	۰/۸۴۶۹	۰/۸۴۶۹	۲۰	۵*۱۵
۰/۰۰۰۰	۴/۰۴۸۷	۴/۰۴۸۷	۱	۲۰	۲۰	۰/۰۶۱۷	۲/۷۷۰۳	۲/۷۷۰۳	۲۰	۵*۲۰
۰/۰۰۰۰	۴/۰۰۷۲	۴/۰۰۷۲	۱	۲۰	۲۰	۰/۰۲۱۹	۴/۰۵۴۷	۴/۰۵۴۷	۲۰	۸*۸
۰/۰۰۰۰	۳/۴۶۶۹	۳/۴۶۶۹	۲	۲۰	۲۰	۰/۰۳۱۳	۲۷/۵۳۲۸	۲۷/۵۳۲۸	۲۰	۸*۱۰
۰/۰۰۰۰	۳/۵۲۵۰	۳/۵۲۵۰	۱	۲۰	۲۰	۰/۰۴۶۱	۱۰۷/۱۳۲۸	۱۰۷/۱۳۲۸	۲۰	۸*۱۲
۰/۰۰۰۰	۳/۰۳۴۰	۳/۰۳۴۰	۴	۲۰	۲۰	۰/۰۶۸۸	۳۸۶/۴۳۳۶	۳۸۶/۴۳۳۶	۲۰	۸*۱۵
۰/۳۷۸۹	۳/۵۸۰۵	۳/۱۹۱۷	۱	۲۰	۱۵	۰/۱۳۲۸	۳۰۱۰/۸۰۰۰	۲۰۸۳/۲۰۰۰	۲۰	۸*۲۰
۰/۰۰۰۰	۶/۳۲۹۰	۶/۳۲۹۰	۰	۲۰	۲۰	۰/۰۴۳۰	۳۳۱/۰۷۸۹	۳۳۱/۰۷۸۹	۲۰	۱۰*۱۰
۰/۲۲۹۵	۴/۶۵۲۵	۴/۴۱۵۲	۰	۲۰	۰	۰/۰۶۱۷	۲۸۲۰/۰۰۰۰	۶۰۰/۰۰۰۰	۲۰	۱۰*۱۲
۱/۷۸۳۷	۳/۳۰۸۸	۱/۴۹۳۳	۰	۰	۰	۰/۰۹۳۸	۴۰۰۰/۰۰۰۰	۶۰۰/۰۰۰۰	۲۰	۱۰*۱۵*
۰/۵۴۲۵	۰/۹۰۹۴	۰/۳۶۴۸	۰	۰	۰	۰/۱۸۲۸	۴۰۰۰/۰۰۰۰	۶۰۰/۰۰۰۰	۲۰	۱۰*۲۰*
۲/۱۲۹۶	۴/۶۶۶۷	۲/۴۷۲۸	۰	۰	۰	۰/۰۷۸۱	۴۰۰۰/۰۰۰۰	۶۰۰/۰۰۰۰	۲۰	۱۲*۱۲*
۰/۴۶۶۴	۰/۷۶۸۹	۰/۳۰۱۰	۰	۰	۰	۰/۱۲۵۰	۴۰۰۰/۰۰۰۰	۶۰۰/۰۰۰۰	۲۰	۱۲*۱۵*
۰/۰۷۱۲	۰/۰۷۵۷	۰/۰۰۴۴	۰	۰	۰	۰/۲۴۷۷	۴۰۰۰/۰۰۰۰	۶۰۰/۰۰۰۰	۲۰	۱۲*۲۰*
۰/۰۰۳۶	۰/۰۰۳۶	۰/۰۰۰۰	۰	۰	۰	۰/۱۷۲۷	۴۰۰۰/۰۰۰۰	۶۰۰/۰۰۰۰	۲۰	۱۵*۱۵*
۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰	۰	۰	۰/۳۴۳۰	۴۰۰۰/۰۰۰۰	۶۰۰/۰۰۰۰	۲۰	۱۵*۲۰*
۰/۰۲۲۵	۰/۰۲۲۵	۰/۰۰۰۰	۰	۰	۰	۰/۴۵۱۰	۴۰۰۰/۰۰۰۰	۶۰۰/۰۰۰۰	۲۰	۲۰*۲۰*

\* در این دسته مسائل به علت محدودیت زمانی، روش شاخه و کران قطع شده و بهترین جواب به دست آمده در محاسبات مورد استفاده قرار گرفته است.

جواب الگوریتم ابتکاری از حد پایین به شدت افزایش یافته درحالی که درصد انحراف جواب الگوریتم ابتکاری از جواب بهینه (جدول ۸) روند کاهشی دارد. بدین ترتیب به نظر می رسد که افزایش انحراف جواب ابتکاری از حد پایین در جدول (۹) به دلیل افزایش اختلاف میان حد پایین و جواب بهینه بوده و ارتباطی با الگوریتم ابتکاری ندارد.

جدول (۹): میانگین درصد انحراف جواب الگوریتم ابتکاری از حد

پایین در حالت وجود ارتباط میان تسهیلات جدید

تعداد تسهیلات	تعداد مکان های نامزد				
	۲۰	۱۵	۱۲	۱۰	۸
۵	۱۲/۴۷	۲۹/۲۲	۳۱/۴۸	۲۱/۴۷	۳۴/۰۵
۸	-	۱۷/۵۰	۲۵/۳۹	۳۳/۱۹	۴۰/۵۰
۱۰	-	-	۱۴/۶۶	۲۴/۹۶	۳۵/۲۱
۱۲	-	-	-	۱۵/۴۳	۲۷/۱۳
۱۵	-	-	-	-	۱۳/۲۶
۲۰	-	-	-	-	-
میانگین درصد انحراف					۲۷/۳

ابتدایی با  $\sigma = \phi, k = 0, \gamma' = \{\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_n\}$  است. بنابراین در آغاز هزینه ارتباط تسهیلات جدید و موجود با برداشتن فرض محدودیت پذیرش بیش از یک تسهیل در هر موقعیت محاسبه، سپس برای به دست آوردن حد پایین هزینه ارتباط میان تسهیلات جدید با یکدیگر، میزان ارتباط میان ماشین آلات جدید به صورت صعودی مرتب شده و حاصل ضرب برداری آن در بردار نزولی فواصل مکان های نامزد محاسبه می شود (همواره  $n \geq p$  است). در پایان مجموع حد پایین هزینه های ارتباط میان ماشین آلات جدید و موجود و همچنین ارتباط ماشین آلات جدید با یکدیگر، حد پایین کل مسأله را تشکیل می دهد. نتایج درصد انحراف الگوریتم ابتکاری از حد پایین در جدول (۹) نشان داده شده است.

همان گونه که در جدول (۹) مشاهده می شود میانگین درصد انحراف جواب الگوریتم ابتکاری از حد پایین تقریباً برابر ۲۷/۳٪ بوده که بیانگر کارایی مناسب این روش است. همچنین با افزایش تعداد مکان های نامزد، درصد انحراف

- [۱] Drezner Z.; "Facility Location: A Survey of Applications and Methods", First Edition, New York: Springer, September 11, 1995.
- [۲] Yuri L.; and Adi B.; "A Heuristic Method for Large-Scale Multi-Facility Location Problems", Computers & Operations Research, Vol. 31, No. 2, pp. 257-272, 2004.
- [۳] Domschke, W.; and Krispin, G.; "Location and layout planning, A survey", ORSpekttm, Vol. 19, pp. 181-194, 1997.
- [۴] Francis, R.L.; and white, J.A; "Facility Layout and Location An Analytical Approach", Second Edition, Pearson Professional, October 1st, 1991.
- [۵] Daskin M.S.; "Network and Discrete Location: Models, Algorithms and Applications", Wiley, New York, 1995.
- [۶] Drezner T., Drezner Z.; and Salhi, S.; "Solving the Multiple Competitive Facilities Location Problem", European Journal of Operational Research, Vol. 142, No. 1, pp. 138-151, 2002.
- [۷] ReVelle, C.S.; and Swain, R.; "Central Facilities Location", Geographical Analysis, Vol. 2, pp. 30-42, 1970.
- [۸] Kariv, O.; and Hakimi, S.; "An Algorithmic Approach to Network Location Problems. II: The P-Medians", SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 37, pp. 539-560, 1979.
- [۹] Christofides, N.; and Beasley, J.E; "A Tree Search Algorithm for the P-Median Problem", European Journal of Operational Research, Vol. 10, No. 2, pp. 196-204, 1982.
- [۱۰] Hanjoul, P.; and Peeters, D.; "A Comparison of Two Dual-Based Procedures for Solving the P-median Problem", European Journal of Operational Research, Vol. 20, No. 3, pp. 387-396, 1985.
- [۱۱] Beasley, J.E.; "Lagrangean Heuristics for Location Problems", European Journal of Operational Research, Vol. 65, No. 3, pp. 383-399, 1993.
- [۱۲] Klose, A.; and Drexel A., "Facility Location Models for Distribution System Design", European Journal of Operational Research, Vol. 162, No. 1, pp. 4-29, 2005.
- [۱۳] Dileep, R.S.; "Manufacturing Facilities Location planning & Design", Second Edition, Louisiana Tech university, PWS Publishing, January 26, 1994.
- [۱۴] Sahin, G.; and Süral, H.; "A review of hierarchical facility location models", Computers & Operations Research, Vol. 34, pp. 2310-2331, 2007.

۷- نمادگذاری

$N$	تعداد مکان‌های نامزد;
$p$	تعداد تسهیلات جدید;
$d$	فاصله بین مکان‌های نامزد $i$ و $j$ ;
$f_{ij}$	رابطه میان تسهیلات جدید $i$ و $j$ ;
$\psi$	مجموعه ماشین‌های تخصیص یافته;
$\Psi$	مجموعه ماشین‌های تخصیص نیافته;
$\gamma$	مجموعه مکان‌های تخصیص داده شده;
$\gamma$	مجموعه مکان‌های تخصیص داده نشده;
$\sigma$	تخصیص جزئی بدست آمده از روش شاخه‌وکران;
$k$	تعداد تسهیلات تخصیص داده شده;
$S$	ماتریس تسهیل جدید- تسهیل موجود- مکان‌نامزد;
$C$	ماتریس تسهیل جدید - مکان نامزد;
$C_{ij}^{ef}$	هزینه ارتباط تسهیل جدید $i$ با تسهیلات موجود;
$C_{ij}^{ff}$	ارتباط تسهیل جدید $i$ با تسهیلات جدید استقرار یافته;
$L_{ij}^{uf1}$	حد پایین هزینه ارتباط تسهیل $i$ با تسهیلات استقرار نیافته
$L_{ij}^{uf2}$	حد پایین هزینه ارتباط تسهیلات جدید استقرار نیافته با یکدیگر درحالتی که $i$ در مکان $j$ قرار گرفته باشد.

۹- زیر نویس‌ها

- ۱ Multiple Facility Location Problem
- ۲ Continuous Multiple Facility Location Problem
- ۳ Discrete Multiple Facility Location Problem
- ۴  $p$ -median problem
- ۵ Depth First Search
- ۶ Average Ratio Error

