

# بررسی عددی و تحلیلی ولتاژ القائی در جریان مایع فشار-

## محرك درون ریزمجرها

سید علی میربزرگی<sup>۱\*</sup>؛ حمید نیازمند<sup>۲</sup>

### چکیده

در مطالعه حاضر، اثرات متقابل جریان مایع فشار- محرك درون یک ریزمجر و ولتاژ القائی در شرایط جریان الکتریکی صفر، به طور عددی و تحلیلی بررسی می‌شوند. معادلات حاکم شامل معادله پواسون برای توزیع پتانسیل الکتریکی، معادلات ارنست- پلانک برای توزیع چگالی بار، معادله پیوستگی و معادلات ناویر- استوکس اصلاح شده برای یک جریان پایدار تراکم‌ناپذیر از یک سیال نیوتنی به روش حجم محدود حل می‌شوند. در صورت حضور لایه دوگانه الکتریکی و اعمال شرایط ولتاژ القایی حداکثر، دبی جرمی جریان نسبت به دبی نظیرش در جریان فشار- محرك خالص، کاهش ناچیزی می‌یابد. منحنی تغییرات پتانسیل القائی بر حسب زتا پتانسیل دیوار، با کمال تعجب نشان می‌دهد که در زتا پتانسیل‌های کمتر از ۱۰۰ میلی‌ولت، پتانسیل القائی به یک مقدار حداکثر رسیده و سپس نزول می‌کند. دلیل این امر، افزایش ناگهانی ضریب هدایت الکتریکی متوسط است. ضریب هدایت الکتریکی متوسط، در زتا پتانسیل‌های بالاتر از ۱۰۰ میلی‌ولت به طور نمایی افزایش می‌یابد و لذا تجربه مرسوم در ثابت فرض نمودن آن، فقط برای زتا پتانسیل‌های کم، (یعنی کمتر از ۱۰۰ میلی‌ولت) قابل توجیه است.

**کلمات کلیدی:** اثرات الکتروستاتیک، پتانسیل القائی، زتا پتانسیل، ریزمجر، جریان فشار- محرك

## *Numerical and Analytical Investigation of Induced Voltage in the Liquid Pressure-Driven Micro-Flows*

Mirbozorgi, Seyed Ali ; Niazmand, Hamid

### ABSTRACT

In the present study, the interplaying effects of a pressure-driven flow and the induced electric potential, corresponding to the zero net electrical current, have been numerically investigated. The governing equations, which consist of the Poisson equation for the distribution of electric potential, the Nernst-Planck equation for the distribution of charge density, and the modified Navier-Stokes equations for the flow field are solved numerically for an incompressible steady flow of a Newtonian fluid using the finite-volume method. In the presence of electric double layer and the maximum induced voltage condition, the mass flow rate decreases negligibly with respect to the corresponding pure pressure-driven fellow. Surprisingly, the absolute value of induced voltage approaches a maximum value at zeta potentials smaller than 100 mV and then drops. The exponentially increase of the average electric conductivity coefficient beyond 100 mV is accounted for this behavior. Thus the common practice of assuming constant electric conductivity is justified at low zeta potentials.

**KEYWORDS:** Electrokinetics effects, Induced potential, Zeta potential, Microchannel, Pressure-driven flow

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۶/۸/۲۱

تاریخ اصلاحات مقاله: ۱۳۸۸/۷/۲۸

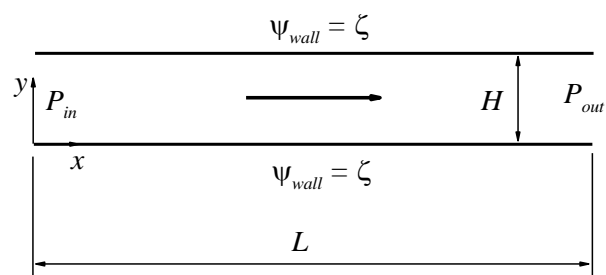
<sup>۱\*</sup> نویسنده مسئول و استادیار دانشگاه بیرجند، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک؛ Email : mirbozorgi@birjand.ac.ir

<sup>۲</sup> دانشیار دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک؛ Email : hniazmand@yahoo.com

جریان فشار- محرک خالص، کاهش ناچیزی می‌یابد. اما هنگامی که مخازن هم به طرفین مجرا افزوده می‌شوند، افت فشار ورودی و افزایش فشار خروجی مجرا، موجب کاهش خیلی بیشتر دبی جریان می‌شود و شرایط الکتروستاتیک پیچیده‌ای در نواحی ورودی و خروجی ریزمجا ایجاد می‌گردد. مرور سطحی متون تخصصی یاد شده نشان می‌دهد که اگرچه ویژگی اصلی پتانسیل الکتروستاتیک مرتبط با جریانهای فشار- محرک تعریف و تحلیل شده است، اما اثرات شرایط مرزی میدان جریان الکتریکی تاکنون به طور مناسب بررسی نشده است. در مطالعه حاضر جریان سیال فشار- محرک توأم با اثر الکتروستاتیک بین دو صفحه موازی (بدون مخازن طرفینی) با توجه خاص به اصل بقای جریان الکتریکی که در پایان شرایط مرزی جدیدی را برای میدان الکتریکی بدست می‌دهد به طور عددی و تحلیلی بررسی می‌شود.

## ۲- مدل‌سازی ریاضی

یک ریز مجرای تخت به ارتفاع  $H$  و طول  $L$  و سیستم مختصات نشان داده شده در شکل ۱ را در نظر بگیرید. فرض می‌شود که دیوارهای ریزمجا دارای بار الکتروستاتیکی معادل پتانسیل سطحی  $\psi_{wall} = \zeta$  هستند. سیال عامل با اعمال اختلاف فشار  $\Delta P = P_{in} - P_{out}$  در جهت  $x$  درون ریزمجا به حرکت درمی‌آید.



شکل ۱. طرحواره هندسه جریان فشار- محرک در ریزمجرای تخت صفحه موازی

الف) میدان الکتریکی: بنا بر تئوری الکتروستاتیکی ساکن توزیع پتانسیل الکتریکی  $\Psi(x, y)$  از طریق یک معادله پواسون به صورت بی‌بعد برپایه رابطه (۱) به چگالی بار الکتریکی،  $\rho_e$  مربوط می‌شود.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{k^2}{2} \rho_e \quad (1)$$

که در آن  $k = HK$  پارامتر EDL یک جمله بی‌بعد به نام پارامتر دی‌بی-هوکل<sup>۶</sup> است که معکوس آن،  $1/K$ ، معرف ضخامت

چندی است که علاقه به تولید پتانسیل الکتریکی از طریق جریانهای الکترولیت عبوری از ریزمجاها<sup>۱</sup> مطالعات بنیادین زیادی را در رابطه با پدیده الکتروستاتیک<sup>۲</sup> برانگیخته است. مجاری با اندازه مشخصه ۱ میکرومتر تا ۱ میلی‌متر را ریزمجا می‌نامند. مهم‌ترین ویژگی این مجراها این است که نسبت سطح به حجم‌شان بسیار بزرگ است و لذا پدیده انتقال را به شدت تحت تاثیر قرار می‌دهند، به علاوه بسیاری از اثرات فیزیکی که تاکنون در مجراهای معمولی با مقیاس بزرگ مهم نبودند در این مقیاس‌های کوچک نقش مهم و تا اندازه‌ای غالب را پیدا می‌کنند. یکی از این اثرات، اثر بارهای الکتروستاتیک روی دیوار ریزمجاهاست که مدت زمانی است توجهات قابل ملاحظه‌ای را در کاربردهای مهندسی و پزشکی به خود اختصاص داده است. جریان‌های مایع فشار- محرک که سیال عامل آنها یک محلول الکترولیت است در ریزمجاها با یک اثر الکتروستاتیک ناشی از حضور لایه دوگانه الکتریکی (ای دی ال) توأم می‌گردند [۵]. با حرکت سیال، یون‌هایی از ای دی ال که قابلیت حرکت دارند نیز با جریان سیال جابجا می‌شوند و لذا یک جریان الکتریکی بنام جریان استریمینگ<sup>۳</sup> تولید می‌شود. جریان حاصل نیز می‌تواند به یک ولتاژ یا پتانسیل استریمینگ<sup>۴</sup> تبدیل شود.

مطالعه روی مجراهای کوچک توسط برگرین و ناکاچی [۱] آغاز شد و سپس توسط رایس و وایتهد [۱۳]، لی‌واین و همکارانش [۶]، یانگ و لی [۱۶]، یانگ و همکارانش [۱۷]، رن و همکارانش [۱۰] [۱۱]، یانگ و وک [۱۸] [۱۹] و چن و همکارانش [۲] پیگیری گردید. مطالعات یادشده به پتانسیل الکتروستاتیک معطوف گردیده‌اند تا اثرات لزجت الکتریکی درون جریان‌های فشار- محرک را توجیه نمایند. اما با این حال دورنمای یک کاربرد جدید از این پدیده پدیدار شده است که در آن مفهوم باتری الکتروستاتیک توسط یانگ و همکارانش [۲۰] پیشنهاد و معرفی گردیده است. از آن پس چان و همکارانش [۳] نشان دادند که پتانسیل استریمینگ مورد نظر در مفهوم ریز باتری، با افزایش زتا پتانسیل، کاهش ضریب هدایت الکتریکی سطحی دیوارها و افزایش شعاع ریزمجا زیاد می‌شود. منصور و همکارانش [۷] نشان دادند که پتانسیل استریمینگ به شدت وابسته به هندسه مجرا، غلظت یونی و چگالی بار سطحی دیوارها است. میربزرگی و همکارانش [۹] نشان دادند که در صورت حضور لایه دوگانه الکتریکی و اعمال شرایط ولتاژ القایی حداکثر، دبی جرمی جریان نسبت به دبی نظیرش در

مشخصه<sup>v</sup> ای دی ال است. چگالی بار خالص هم به غلظت یونها وابسته است و لذا برای یک الکترولیت متقارن از نظر یونهای مثبت و منفی ( $n^-$  و  $n^+$ ) نظیر محلول KCl، شکل بی بعد چگالی بار خالص را می توان به صورت رابطه (۲) نوشت:

مشخصه<sup>v</sup> ای دی ال است. چگالی بار خالص هم به غلظت یونها وابسته است و لذا برای یک الکترولیت متقارن از نظر یونهای مثبت و منفی ( $n^-$  و  $n^+$ ) نظیر محلول KCl، شکل بی بعد چگالی بار خالص را می توان به صورت رابطه (۲) نوشت:

$$\rho_e = n^+ - n^- \quad (2)$$

(ب) توزیع غلظت یونی: توزیع غلظت های یونی ( $n^-$  و  $n^+$ ) توسط معادلات ارنست-پلانک<sup>۸</sup> تعیین می شود که دارای شکل بی بعد روابط (۳) و (۴) هستند.

$$\frac{\partial(u n^+)}{\partial x} + \frac{\partial(v n^+)}{\partial y} = \frac{1}{Sc Re} \left\{ \frac{\partial^2 n^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n^+}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( n^+ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( n^+ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right\} \quad (3)$$

$$\frac{\partial(u n^-)}{\partial x} + \frac{\partial(v n^-)}{\partial y} = \frac{1}{Sc Re} \left\{ \frac{\partial^2 n^-}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n^-}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( n^- \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( n^- \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right\} \quad (4)$$

که در آن  $Re = \rho U_{ref} H / \mu$  عدد رینولدز مرجع است.  $U_{ref} = H^2 \Delta P / 8 \mu L$  سرعت ماکزیم متناظر در یک جریان فشار-محرك خالص است. به علاوه  $Sc = \mu / \rho D$  عدد اشمیت و D ضریب پخش یونهاست. جملات اول و دوم دست راست این معادلات، بیانگر پخش ناشی از گرادیان های غلظت است در حالی که جملات سوم و چهارم به نام جملات مایگرشن<sup>۹</sup> شناخته می شوند [۸].

### ج) معادلات اصلاح شده ناویر-استوکس:

ریزجریان های مایع، هنوز می توانند براساس فرض های یک محیط پیوسته شبیه سازی شوند [۴]. بنابراین برای جریان تراکم ناپذیر آرام و پایدار سیال نیوتنی می توان داشت:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial(u u)}{\partial x} + \frac{\partial(v u)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - B \rho_e \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (6)$$

$$\frac{\partial(u v)}{\partial x} + \frac{\partial(v v)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - B \rho_e \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (7)$$

که در آن P فشار است. گفتنی است که رینولدز پدید آمده در معادلات ممتنم یاد شده برای جریان های فشار-محرك یک رینولدز مرجع محسوب و معرف میزان اختلاف فشار اعمال شده است. جملات آخر در معادلات ممتنم اصلاح شده، نیروی حجمی الکتریکی به نام نیروی لورنتز<sup>۱۰</sup> هستند که در آنها

### ۲-۱- شرایط مرزی

(الف) میدان جریان سیال: در حالی که شرایط سرعت بی لغزش برای دیوارها در نظر گرفته می شود،  $u, v=0$  در ورودی و خروجی سیستم متناظر با جریان های فشار-محرك مولفه سرعت محوری با گرادیان صفر  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  و مولفه سرعت غیرمحوری با مقدار صفر  $v=0$  لحاظ می گردد. شرایط مرزی فشار روی دیوارها نیز به صورت  $\frac{\partial^2 P}{\partial n^2} = 2B \rho_e^2 (k/2)^2$  است [۹]. در جهت محوری فشار خروجی صفر  $P_{out}=0$ ، و فشار ورودی یک مقدار معلوم انتخابی را اختیار می کند. اما با این حال در حل عددی، یک توزیع فشار وابسته به  $y$ ، طبق معادله (۱۹) محاسبه شده و به فشار اعمال شده معلوم در ورودی افزوده می شود.

(ب) میدان یونی: مقادیر  $n^+$  و  $n^-$  در دیوارها با استفاده از توزیع بولتزمن،  $n^{\pm}|_{walls} = \exp(\mp \zeta)$  و با توجه به معلوم بودن زتا پتانسیل دیوار تعیین می شوند. برای ورود و خروج نیز از توزیع بولتزمن (توزیع معلوم در امتداد  $y$ )،  $n^{\pm}|_{ends} = \exp[\mp \psi(y)]$  استفاده می شود. به علاوه فرض می شود که حالت یکنواخت بارهای الکتریکی در هر دو انتها به گونه ای است که گرادیان های محوری  $n^+$  و  $n^-$  در این مکان ها صفر هستند. این فرض برای بیان مناسب شرایط مرزی میدان الکتریکی لازم است.

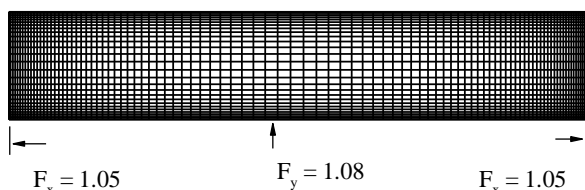
(ج) میدان الکتریکی: شکل عمومی شرایط مرزی میدان الکتریکی می تواند از شرایط مرزی جریان الکتریکی نظیرش به دست آید [۹]. لذا برای شرایط مرزی دیوارها، با توجه به سرعت صفر روی دیوارها و این حقیقت که برای دیوار عایق جریان الکتریکی عمود بر دیوار صفر است، می توان نوشت:

$$\left. \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial n} \right|_{wall} = - \frac{[\partial(n^+ - n^-) / \partial n]}{(n^+ - n^-)} \Big|_{wall} \quad (8)$$

که در آن  $n$  جهت عمود بر دیوار است. باید تاکید شود که اگرچه  $\zeta = \psi_{wall}$  است، مقدار  $\psi_{wall}$  (با حرف بزرگ) معلوم نیست و رابطه شماره (۸) شرایط مرزی لازم برای پتانسیل الکتریکی در دیوارها است. تنها وقتی میدان الکتریکی،  $\Psi$  تغییرات محوری ندارد می توان  $\zeta = \psi_{wall} = \Psi_{wall}$  را به عنوان شرط مرزی لازم گرفته شود. در بیشتر حالات وقتی بارهای خالص دیوار در جهت جریان سیال ثابت هستند، بسته به

### ۳- روش حل عددی

معادلات حاکم با استفاده از روش حجم محدود با متغیرهای هم‌مکان در یک سیستم مختصات منطبق بر مرز منفصل و به طور عددی حل می‌شوند. طرح سیمپل سی<sup>۱۱</sup> [۱۴] ارتباط بین میدان‌های سرعت و فشار را برقرار می‌کند. با این حال برای پرهیز از اثر شطرنجی در میدان فشار ناشی از کاربرد متغیرهای هم‌مکان، در محاسبه نرخ جریان جرم جابجایی از طرح میانبایی رای-چو<sup>۱۲</sup> [۱۲] استفاده شده است. جملات پخش و جابجایی نیز با استفاده از طرح تفاضل مرکزی در محل وجوه حجم‌های کنترل ارزیابی می‌شوند و لذا روش حاضر دارای دقت مرتبه دوم در مکان است. سپس سیستم جبری حاصل از معادلات به روش تکرار خط به خط با استفاده الگوریتم تی دی ام ای<sup>۱۳</sup> حل می‌شوند. یک شبکه معمولی به کار رفته در این مطالعه در شکل ۲ نشان داده شده است که در آن گره‌های کنار دیوار به هم فشرده شده‌اند. یک ضریب انبساط گرهی معمول در کنار دیوار نزدیک به  $F_y = 1/0.8$  است در حالیکه در ورودی و خروجی مجرا ضریب انبساط گرهی به میزان  $F_x = 1/0.5$  است.



شکل ۲. یک شبکه معمولی بکار رفته در ریزمجرای تخت.

$L/H = 10$  (برای روشی بیشتر توزیع گرهی کمتری نشان داده شده است)

مطالعه اثر تعداد نقاط شبکه بر روی نتایج پروفیل سرعت نشان داد که  $N_i \times N_j$  و  $F_y$  باید به ترتیب حداقل  $100 * 150$  و  $1/0.5$  باشد تا نتایج بدست آمده مستقل از تعداد گره‌ها باشد.  $N_j$  تعداد نقاط شبکه در جهت جریان و  $N_i$  تعداد نقاط شبکه در جهت عرضی است. نتایج محاسبه نرخ جریان جرم در جدول ۲ بیانگر این حقیقت است که با افزایش تعداد گره‌ها، نرخ‌های محاسبه شده جریان جرم بر واحد عمق، در جهت عرضی است. نتایج محاسبه نرخ جریان جرم در حل تحلیلی (معادله ۲۰) نزدیکتر می‌شوند،  $\dot{m} = \int_0^1 \rho u(y) dy$ ، به نرخ جریان جرم متناظر در حل تحلیلی در این جدول، انحراف مقادیر نرخ جریان برحسب درصد به صورت  $D_m = \frac{|\dot{m} - \dot{m}_a|}{\dot{m}_a} \times 100$  محاسبه شده است. در نتیجه، استفاده از یک شبکه با تعداد نقاطی نزدیک به  $100 * 150$

شرایط میدان الکتریکی در دو انتهای مجرا، یک گردایان پتانسیل الکتریکی محوری می‌تواند درون حوزه القا شود و لذا پتانسیل الکتریکی دیوارها می‌تواند مقادیر متفاوتی را نسبت به  $\zeta$  در دیوارها بگیرد. شرایط جریان صفر در ورود و خروج معادل حالتی است که در آنها ولتاژ القایی مورد بحث در مفهوم ریزباطری حداکثر خود را دارد و لذا در این صورت برای هر دو انتها می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, y) \Big|_{avg} = -\frac{ScRe}{\sigma_e} \int_0^1 \sinh[\psi(y)] u(y) dy \quad (9)$$

### ۲-۲- اطلاعات ورودی

در مطالعه حاضر فرض می‌شود که ریزمجرا از سیلیکون زتا پتانسیل متغیر در دامنه  $-25 \leq \zeta \leq -100$  ساخته شده است. لازم به توضیح است که در گزارش نتایج تحلیلی و عددی همیشه کمیت  $\zeta$  بی بعد است، مگر وقتی که به مقدار آن اشاره می‌شود که در این صورت بعددار و واحد میلی ولت (mV) در کنار آن گفته می‌شود. سیال عامل آب با محلول KCl است که غلظت مولی یونهای آن  $C = 10^{-2} \text{ kmol/m}^3$  مشخص شده است. بنابراین با استفاده از رابطه  $n_0 = CN_A$  که در آن  $N_A$  عدد آووگادرو می‌باشد، غلظت عددی یون‌ها برابر  $n_0 = 6.022 \times 10^{23} \times 10^{-2} \text{ ions/m}^3$  بدست می‌آید. به علاوه فرض می‌شود که دمای محلول در ۲۹۸ کلین ثابت است و ضریب پخش جرمی یون‌های  $K^+$  و  $Cl^-$  نزدیک به هم می‌باشند. سایر ثابت‌ها و خواص ترموفیزیکی به کار رفته در محاسبات در جدول ۱ فهرست شده‌اند. در تمام حل‌های عددی  $k$ ،  $P_{ii}$  و  $L/H$  به ترتیب مقادیر ۸۰، ۲۰ و ۱۰ را اختیار می‌کنند. با این مقادیر، وقتی که  $Re = 1$  است،  $H \cong 2 \mu\text{m}$  و  $U_{ref} \cong 0.05 \text{ mm/s}$  خواهد بود. برای آسانی، به جای اشاره به اختلاف فشار اعمالی و رینولدز مرجع متناظرش، از این به بعد فقط  $Re$  مرجع گزارش می‌شود.

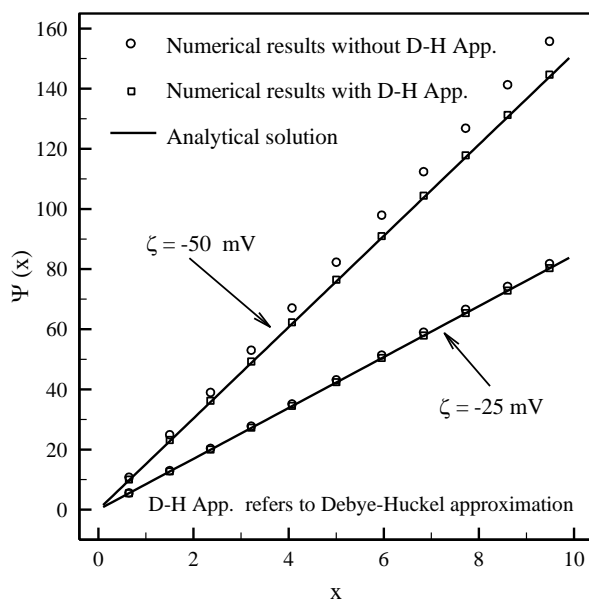
جدول ۱. ثابت‌ها و خواص ترموفیزیکی [۱۵]

متغیر	مقدار (واحد)
$D$	$2 \times 10^{-9} \text{ [m}^2/\text{s]}$
$e$	$1/60.2 \times 10^{-19} \text{ [C]}$
$k_b$	$1/381 \times 10^{-23} \text{ [J/K]}$
$N_A$	$6.022 \times 10^{23} \text{ [1/mol]}$
$\epsilon_r$	۸۷/۵
$\epsilon_0$	$8/854 \times 10^{-12} \text{ [C/Vm]}$
$\rho$	$1 \times 10^{-3} \text{ [kg/m}^3\text{]}$
$\mu$	$1 \times 10^{-3} \text{ [Pa.s]}$

که در آن  $\Psi_0$  و  $E_x$  همه جا ثابت هستند و  $E_x$  قدرت میدان الکتریکی القایی در جهت محوری است.  $N = 2\bar{\sigma}_e / (ScB(Re\zeta)^2)$  و توجه شود که طبق تعریف، هم  $B$  و هم  $Re$  از طریق  $U_{ref}$  به  $\Delta P$  وابسته اند. مولفه  $i_{x,s}$  مولفه استریمینگ، مولفه  $i_{x,d}$  پخش و مولفه  $i_{x,c}$  هدایتی شدت جریان محوری است. همچنین  $\bar{\sigma}_e = (1/A_c) \int_0^1 \sigma_e(y) dy$  مقدار متوسط هدایت الکتریکی در مقطع عرضی با عمق واحد است و سطح مقطع عرضی بی بعد  $A_c=1$  است.  $P_{max} = B\zeta^2$  فشار حداکثر مقطع است که در مجاورت دیوارها رخ می‌دهد. نرخ جریان جرم بر واحد عمق ریزمجرا است که برحسب سرعت متوسط عرضی به دست آمده است.

### ۵- مقایسه نتایج حل عددی و تحلیلی

همان طور که در شکل ۳ نشان داده شده است، نتایج عددی و حل تحلیلی برابری خوبی را در زتا پتانسیل‌های تا ۲۵ mV نشان می‌دهند.



شکل ۳. مقایسه نتایج عددی با حل تحلیلی برای پتانسیل الکتریکی در صفحه مرکزی مجرا، وقتی  $Re = 1$  و  $k = 20$

در این شکل تغییرات پتانسیل الکتریکی در صفحه مرکزی مجرا برای حالت  $Re = 1$  و  $k = 20$  با دو مقدار مختلف زتا پتانسیل رسم شده است. در زتا پتانسیل بالاتر، انحرافی به دلیل استفاده از تقریب دی‌بای-هوکل انتظار می‌رود. با این حال اگر از تقریب مشابهی در شرایط مرزی مدل عددی استفاده شود، نتایج به دست آمده برابری بسیار خوبی را با حل تحلیلی نشان می‌دهند.

همان طور که در شکل ۴ نشان داده شده است، بطور

برای  $\zeta = -50 \text{ mV}$  می‌تواند یک حل قابل قبول و مستقل از تعداد نقاط شبکه را فراهم نماید.

جدول ۲. نتایج عددی نرخ جریان جرم در سه شبکه مختلف

$N_i \times N_j$	$\dot{m} \times 10^4$	$D_m \%$
$50 \times 30$	۶۱۷۰۶۵	۲/۶۷۴
$100 \times 60$	۶۱۵۶۵۵	۰/۵۱۶
$150 \times 90$	۶۱۵۵۰۳	۰/۲۸۳

### ۴- حل تحلیلی

یکی از ویژگی‌های کار حاضر ارائه یک حل ساده شکل صریح برای جریان مایع فشار-محرك در حضور اثرات ای دی ال است. در شرایط توسعه یافته هیدروپنایمیکی (یعنی  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ) و توسعه یافته یونی (یعنی  $\frac{\partial n \pm}{\partial x} = 0$ ) در سراسر ریزمجرا و با ساده سازی به کمک تقریب دی‌بای-هوکل می‌توان نشان داد که [۹]:

$$\Psi(x, y) = \psi(y) + (\Psi_0 - E_x x) \quad (10)$$

$$\psi(y) = \zeta \frac{\cosh(ky - k/2)}{\cosh(k/2)} \quad (11)$$

$$u(y) = 4 \left( y - y^2 - Q \left( 1 - \frac{\cosh(ky - k/2)}{\cosh(k/2)} \right) \right) \quad (12)$$

$$E_x = \frac{8Q}{ReB\zeta} \left( \frac{k}{2} \right)^2 \quad (13)$$

$$Q = \frac{1}{(k/2)^2} \times$$

$$\left( \frac{1 - \tanh(k/2)/(k/2)}{N(k/2)^2 + \tanh^2(k/2) + \tanh(k/2)/(k/2) - 1} \right) \quad (14)$$

$$i_{x,s} = -2u(y) \sinh(\psi(y)) \quad (15)$$

$$i_{x,d} = 0 \quad (16)$$

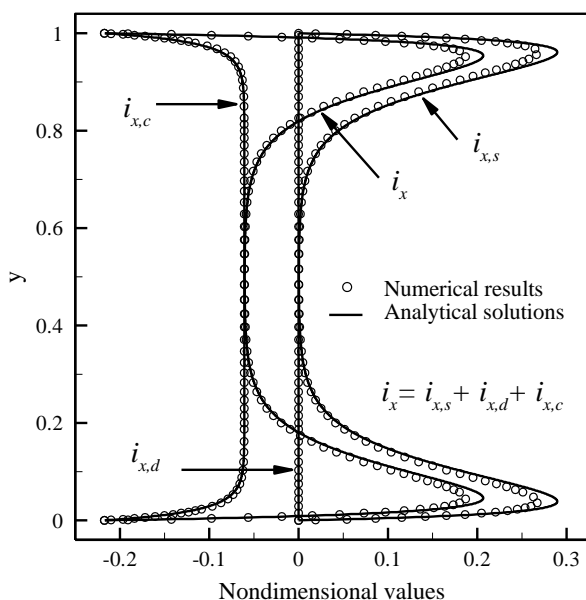
$$i_{x,c} = \frac{E_x}{ReSc} \sigma_e(y) \quad (17)$$

$$\sigma_e(y) = 2 \cosh(\psi(y)) \quad (18)$$

$$P(y) = P_{max} \left( \frac{\cosh(ky - k/2)}{\cosh(k/2)} \right)^2 \quad (19)$$

$$\dot{m}_a = 4 \left( \frac{1}{6} - Q \left( 1 - \frac{\tanh(k/2)}{k/2} \right) \right) \rho U_{ref} H \quad (20)$$

از طرف دیگر توزیع بار خالص در کنار صفحه مرکزی به صفر می‌رسد و لذا،  $i_{x,s}$  در این نواحی صفر است، جایی که پروفیل سرعت حداکثر مقدار خودش را دارا است. بنابراین، حداکثر  $i_{x,s}$  باید جایی بین دیوارها و صفحه مرکزی، اما نزدیک‌تر به دیوار رخ دهد، جایی که بارهای خالص متمرکز شده‌اند. به روشنی دیده می‌شود طبق معادله (۱۷) که در آن  $E_x$  همه جا منفی و  $\sigma_e(y)$  همه جا مثبت است، مقادیر شدت جریان هدایتی در امتداد محور،  $i_{x,c}$ ، همه جا منفی است. علاوه بر این،  $\sigma_e(y)$  روی دیوار حداکثر است و لذا با یک مقدار ثابت  $E_x$ ، حداقل  $i_{x,s}$  در آنجا اتفاق می‌افتد. شدت جریان پخشی،  $i_{x,d}$ ، در امتداد محور صفر است چرا که هیچ‌گونه تغییراتی در توزیع بارهای خالص در سراسر مجرا وجود ندارد. همان طور که انتظار می‌رود برای مواردی با ولتاژ القایی حداکثر، متوسط شدت جریان محوری بر واحد عمق مقطع عرضی، باید در هر مقطع دلخواه صفر باشد.

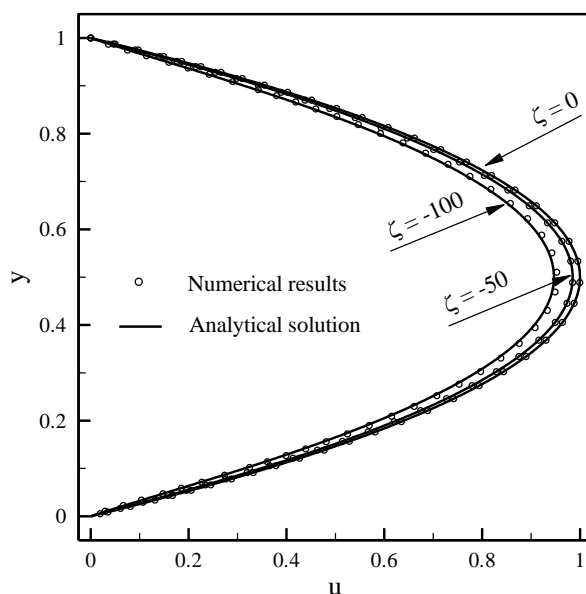


شکل ۵. مقایسه نتایج عددی و تحلیلی توزیع جریان الکتریکی در مقطع عرضی مجرا، وقتی  $Re = 1$  و  $k = 20$  و  $\zeta = -50$  mV

شکل ۶ متوسط جریان محوری و مولفه‌هایش در مقطع عرضی را در سراسر مجرا نشان می‌دهد. با مولفه جریان پخشی صفر در امتداد محور، جریان استریمینگ با جریان هدایتی موازنه می‌شود به طوری که جریان الکتریکی خالص در هر مقطع از مجرا در امتداد محور صفر است.

گفتنی است که حل تحلیلی حاضر می‌تواند اطلاعات بسیار مفیدی را از رابطه بین اختلاف فشار اعمال شده و پتانسیل القایی ارائه نماید. این رابطه به عنوان مبنایی برای مفهوم

ظاهری پروفیل‌های سرعت در مقطع عرضی مجرا کمتر به تقریب دی‌بای- هوکل به کار رفته در حل تحلیلی حساسیت نشان می‌دهند. در این شکل پروفیل‌های سرعت عددی با حل‌های تحلیلی متناظرشان مقایسه می‌شوند در حالی که برابری خوبی را برای زتا پتانسیل به بزرگی ۱۰۰ میلی‌ولت نشان می‌دهند. حضور ای ال میدان جریان را به گونه‌ای تحت تاثیر قرار می‌دهد که نرخ جریان جرم کاهش می‌یابد و این همان مبنای تعریف اثرات لزجت الکتریکی در متون تخصصی مربوطه است. از آنجا که اثرات ای ال بطور مستقیم به زتا پتانسیل دیوار وابسته است، افزایش زتا پتانسیل، نرخ جریان جرم را در مقایسه با نظیرش در جریان فشار- محرک خالص ( $\zeta = 0$ ) کاهش می‌دهد. نتایج عددی و تحلیلی نشان می‌دهند که نرخ کاهش جریان جرم به ترتیب نزدیک به ۱/۹۶٪ و ۶/۴۴٪ است برای  $|\zeta|$  معادل ۵۰ و ۱۰۰ میلی‌ولت است.

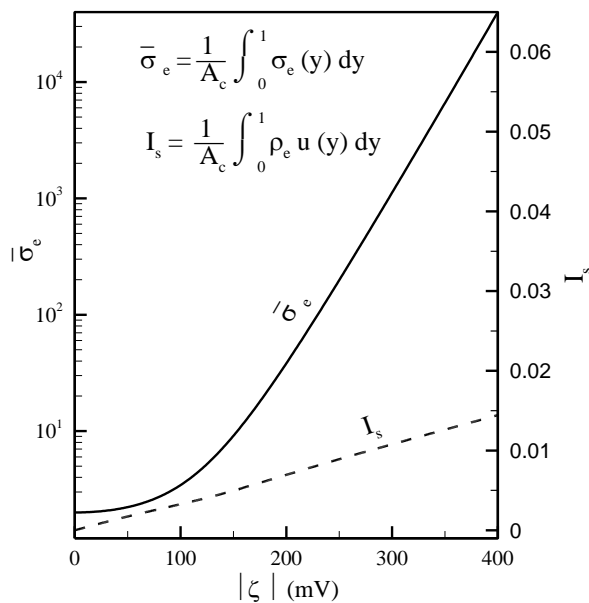


شکل ۶. مقایسه پروفیل سرعت عددی و تحلیلی برای  $Re = 20$  و  $k = 20$  و سه زتا پتانسیل متفاوت ۰، -۵۰ و -۱۰۰ میلی‌ولت

در شکل ۵ توزیع عرضی شدت جریان محوری و مولفه‌هایش با نظایر تحلیلی‌شان مقایسه می‌شوند. یک برابری قابل قبولی با انحراف جزئی در نواحی جریان استریمینگ حداکثر دیده می‌شود. همان طور که توسط معادله (۱۵) نشان داده شده، شدت جریان استریمینگ،  $i_{x,s}$ ، وابسته به مقادیر بارهای خالص و سرعت جریان سیال است. در حضور زتا پتانسیل منفی، بارهای خالص کنار دیوارها مثبت هستند اما با این وجود سرعت صفر روی دیوارها منجر به صفر شدن جریان استریمینگ محوری می‌شود، اگرچه در این مناطق، بارهای خالص حداکثر مقدار خود را دارا می‌باشند.

آن متوسط عرضی ضریب هدایت الکتریکی در شکل بی بعدش به عنوان تابعی از زتا پتانسیل برای  $Re = 1$  و  $k = 20$  رسم شده است.

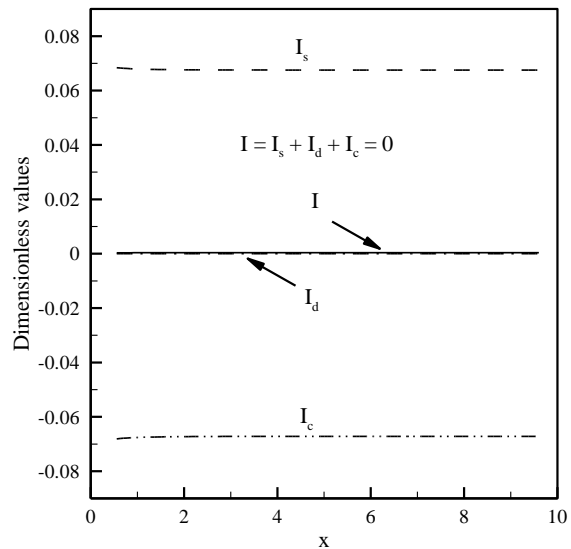
به روشنی دیده می‌شود که  $\bar{\sigma}_e$  بعد از  $|\zeta| = 100\text{mV}$  به طور نمایی افزایش می‌یابد و لذا با توجه به معادله (۱۳)،  $E_x$  کوچکتری لازم است تا به قدر کافی، جریان الکتریکی از نوع مایگریشن برای متوازن کردن جریان استریمینگ تولید شود.



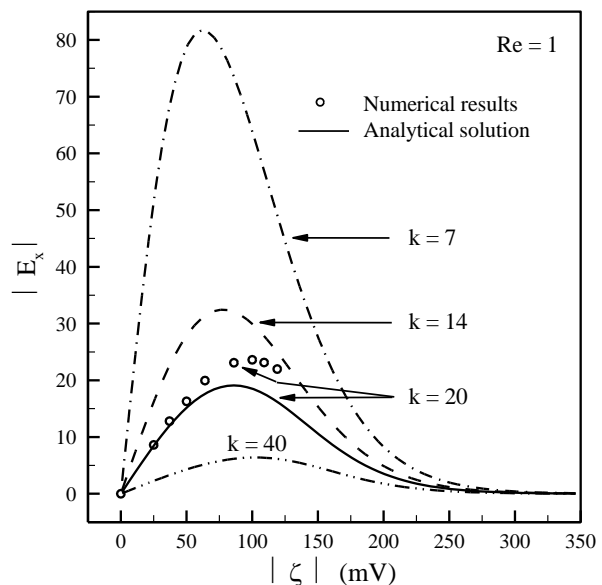
شکل ۸. متوسط عرضی ضریب هدایت الکتریکی در شکل بی‌بعد در برابر دامنه وسیعی از زتا پتانسیل برای  $Re = 1$  و  $k = 20$

به علاوه، شکل ۸ تجربه مرسوم در ثابت فرض نمودن  $\bar{\sigma}_e$  برای زتا پتانسیل‌های کم ( $|\zeta| \leq 100\text{mV}$ ) را توجیه می‌کند. در این ناحیه  $\bar{\sigma}_e$  بین ۲ و ۳ تغییر می‌کند. شکل ۷ همچنین نشان می‌دهد که  $E_x$  با کاهش  $k$  زیاد می‌گردد. این به خاطر این حقیقت است که در یک رینولدز ثابت کاهش  $k$  منجر به کوچکتر شدن ارتفاع مجرا و بالتبع افزایش سرعت سیال عبوری از آن می‌گردد که در نتیجه جریان و پتانسیل استریمینگ بالاتری را به دست می‌دهد. همچنین در این شکل برای حالتی که  $k=20$  است، نتایج عددی برای مقایسه ارائه شده‌اند. دوباره دیده می‌شود مادام که تقریب دی‌بای-هوکل معتبر باشد، برابری بسیار خوبی بین نتایج عددی و حل تحلیلی وجود دارد. با این حال نتایج عددی انحرافی را برای زتا پتانسیل‌های بالاتر نشان می‌دهند، اگر چه هر دو حل دارای روند یکسانی در این نواحی هستند. باید تاکید شود که وقتی زتا پتانسیل‌ها زیاد می‌شوند محاسبات عددی بسیار زمان بر می‌شوند و لذا نتایج عددی برای  $|\zeta| \geq 130\text{mV}$  محاسبه

ریزباطری‌ها توسط معادله (۱۳) بیان می‌شود که بیانگر یک رابطه به نسبت ساده و صریح بین  $E_x$  و سایر کمیات شامل  $k$ ،  $Re$  و  $\zeta$  است.



شکل ۶. تغییرات محوری متوسط شدت جریان الکتریکی و مولفه‌های متناظرش در مجرا برای  $Re = 1$ ،  $k = 20$  و  $\zeta = -50$



شکل ۷. تغییرات قدرت میدان الکتریکی القایی در برابر قدرمطلق زتا پتانسیل، وقتی  $Re = 1$  و  $k$  برابر ۷ و ۱۴ و ۲۰ و ۴۰ است.

شکل ۷ تغییرات  $|E_x|$  را برای سه مقدار مختلف  $k$  در یک دامنه وسیع از  $|\zeta|$  و رینولدز معلوم  $Re=1$  نشان می‌دهد. با کمال تعجب دیده می‌شود که در زتا پتانسیل‌های کمتر از  $100\text{mV}$  برای هر چهار  $k$  مختلف به یک مقدار حداکثر می‌رسند و به علاوه وقتی  $k$  کاهش می‌یابد این مقدار حداکثر در  $|\zeta|$  کوچکتر اتفاق می‌افتد. این رفتار به کمک شکل ۸ به خوبی قابل توجیه است که در

## ۶- نتیجه گیری

بین  $E_x$  و سایر کمیات نظیر  $k$ ،  $\zeta$  و  $Re$  استخراج شده است. منحنی تغییرات  $E_x$  بر حسب  $\zeta$  با کمال تعجب نشان می‌دهد که در زتا پتانسیل‌های کمتر از ۱۰۰ میلی ولت،  $E_x$  به یک مقدار حداکثر رسیده و سپس نزول می‌کند. دلیل این امر، افزایش ناگهانی ضریب هدایت الکتریکی متوسط،  $\bar{\sigma}_e$  است و این نتیجه از نتایج بسیار مهم این مقاله می‌باشد. منحنی تغییرات  $\bar{\sigma}_e$  بر حسب  $\zeta$  نشان می‌دهد که بعد از  $|\zeta| = 100\text{mv}$ ، ضریب هدایت الکتریکی متوسط به طور نمایی افزایش می‌یابد و لذا تجربه مرسوم در ثابت فرض نمودن  $\bar{\sigma}_e$ ، فقط برای زتا پتانسیل‌های کم قابل توجیه است. در این ناحیه  $\bar{\sigma}_e$  بین ۲ و ۳ تغییر می‌کند.

## ۷- قدردانی‌ها

این تحقیق با حمایت شورای علوم و مهندسی طبیعی کانادا و وزارت علوم و تحقیقات و فناوری ایران انجام شده است. نویسندگان مقاله از پرفسور متین رنکسیزبولوت<sup>۱۴</sup> از دانشگاه واترلو کانادا به خاطر کمک‌های علمی کمال تشکر و قدردانی را دارند.

در این مقاله ریزجریان مایع فشار- محرک، در حضور اثرات الکتروسینتیک، به طور عددی و تحلیلی مدل‌سازی شده است. در بخش حل تحلیلی، یک حل جامع با ارائه شرط‌های مرزی جدید برای میدان‌های پتانسیل الکتریکی و فشار استخراج و برای ارزیابی مدل عددی بکار برده شده است. همه روابط، در حل تحلیلی حاضر، به ساده‌ترین شکل ممکن بیان شده‌اند که در مقایسه با حل‌های پیچیده موجود در متون تخصصی، بسیار کارآمدتر هستند.

هم سویی نتایج عددی و حل تحلیلی برای توزیع پتانسیل القایی، تا  $|\zeta| = 25\text{mv}$  بسیار عالی است، ولی در زتا پتانسیل‌های بالاتر، بین آنها انحراف قابل توجهی بوجود می‌آید که به دلیل تقریب دی‌بای- هوکل بکار رفته در حل تحلیلی است. با این وجود، پروفیل‌های سرعت در مقطع عرضی مجرا، کمتر به تقریب دی‌بای- هوکل حساسیت نشان می‌دهند و لذا در صورت حضور ای دی ال و اعمال شرایط ولتاژ القایی حداکثر، دبی جرمی جریان نسبت به دبی نظیرش در جریان فشار- محرک خالص، کاهش ناچیزی می‌یابد.

در ارتباط با مفهوم ریزباتری‌ها، رابطه‌ای ساده و صریح

## ۸- مراجع

- [۱] Burgreen, D. and Nakache, F.R., Electrokinetic flow in ultra fine capillary slits. The Journal of Physical Chemistry, 68, pp.1084-1091, 1964.
- [۲] Chen, X.Y., Toh, K.C., Yang, C. and Chai, J.C., Numerical computation of hydrodynamically and thermally developing liquid flow in microchannels with electrokinetics effects, ASME, 126, pp. 70-75, 2004.
- [۳] Chun, M.S., Lee T.S., and Choi, W., Microfluidic analysis of electrokinetic streaming potential induced by microflows of monovalent electrolyte solution, J. Micromech. Microeng, 15, pp. 710-719, 2005.
- [۴] Gad-el-Hak, M. (2000) Flow Control: Passive, Active, and Reactive Flow Management, 448 pages, Cambridge University Press, London, United Kingdom. Reprinted in paperback 2006.
- [۵] Hunter, R. J., Zeta Potential in Colloid Science: Principles and Applications, Academic Press, London, 1981.
- [۶] Levine, S., Marriott, J.R., Neale, G. and Epstein, Theory of electrokinetic flow in fine cylindrical capillaries at high zeta potential, 52, pp.136-149, 1975.
- [۷] Mansouri, A., Scheuerman, C., Bhattacharjee, S., Kwok, D.Y. and Kostiuik, L.W., Influence of entrance and exit conditions on the transient evolution of streaming potential in a finite length microchannel, 3<sup>rd</sup> international conference on microchannels and minichannels, ICMM2005-75176, 2005.
- [۸] Masliyah, J.H., Electrokinetic transport phenomena. Alberta oil sands technology and research authority, 1994.
- [۹] Mirbozorgi, S. A., Niazmand, H., Renksizbulut, M., "Streaming Electric Potential in Pressure-Driven Flows Through Reservoir-Connected Microchannels", J. Fluids Eng., October 2007, Volume 129, Issue 10, 1346 (12 pages), DOI:10.1115/1.2776967.
- [۱۰] Ren, L., Qu, W. and Li, D., Interfacial electrokinetic effects on liquid flow in microchannels, International Journal of Heat and Mass Transfer, 44, pp.3125-3134, 2001.
- [۱۱] Ren, L., Li, D. and Qu, W., Electro-viscous effects on liquid flow in Microchannels, J Colloid and Interface Science, 233, pp.12-22, 2001.
- [۱۲] Rhie, C. M., and Chow, W. L., "Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation," J. AIAA, 21, pp. 1525-1532, 1983.



- Yang, C., Li, D. and Masliyah, J.H., Modeling forced liquid convection in rectangular microchannels with electrokinetic effects, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 41, pp. 4229-4249, 1998. [۱۷]
- Yang, J. and Kwok, D.Y., Analytical treatment of electrokinetic microfluidics in hydrophobic microchannel, *Analytica Chimica Acta*, 507, pp. 39-53, 2004. [۱۸]
- Yang, J. and Kwok, D.Y., Effect of liquid slip in electrokinetic parallel-plate microchannel flow, *J Colloid and Interface Science*, 260, pp. 225-233, 2003. [۱۹]
- Yang, J., Lu, F., Kostiuk, L.W. and Kwok, D.Y., Electrokinetic microchannel battery by means of electrokinetic and microfluidic phenomena, *J. Micromech. Microeng.*, 13, pp. 963-970, 2003. [۲۰]
- Rice, C. L., and Whitehead, R., "Electrokinetic Flow in a Narrow Cylindrical Capillary," *J. Phys. Chem.*, 69, pp. 4017-4023, 1965. [۱۳]
- Van-Doormaal, J. P., and Raithby, G. D., "Enhancement of the SIMPLE Method for Predicting, Incompressible Fluid Flows," *Numer. Heat Transfer*, 7, pp.147-63, 1984. [۱۴]
- Weast, R., Astle, M. J., and Beyer, W. H., *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, CRC Press, Boca Raton FL, 1986. [۱۵]
- Yang, C. and Li, D., Electrokinetic effects on pressure-driven liquid flows in rectangular microchannels. *J. Colloid and Interfacial Science* 194, pp.95-107, 1997. [۱۶]

## ۹- زیر نویس ها

- ۱ Microchannels
- ۲ Electrokinetic
- ۳ Electric Double Layer (EDL)
- ۴ Streaming Current
- ۵ Streaming Potential
- ۶ Debye-Huckel
- ۷ Characteristic Thickness
- ۸ Nernst-Planck
- ۹ Migration
- ۱۰ Lorentz
- ۱۱ SIMPLEC
- ۱۲ Rhie-Chow
- ۱۳ TDMA
- ۱۴ Metin Renksizbulut

