

تانسور الاستیسیته فضائی در معادلات بنیادین اولری نرخ

بیژن عباسی خزائی^{۱*}، زهرا عباسی^۲

چکیده

به طور معمول در تحلیل تغییرشکل‌های بزرگ، معادلات بنیادین نرخى مورد استفاده قرار می‌گیرند. در مختصات فضائی، تانسور الاستیسیته فضائی، نرخ عینی یک تانسور تنش را به نرخ تغییرشکل مرتبط می‌نماید. تانسور الاستیسیته فضائی برای یک ماده مشخص در معادلات بنیادین نرخى مختلف، متفاوت است و یافتن رابطه بین آنها مورد علاقه برخی از محققین است. تحقیقات انجام شده در این زمینه محدود بوده و نتایج آنها فقط برای چند مدل خاص ارائه شده است. در این تحقیق یک رابطه عمومی و صریح بین تانسورهای الاستیسیته در معادلات بنیادین ارائه شده است. این رابطه تابعی از تانسور گرین-کاووشی چپ و بردارهای ویژه آن است.

کلمات کلیدی: معادله بنیادین نرخى، تانسور الاستیسیته فضائی، نرخ تنش همگرد

Spatial Elasticity Tensor in Eulerian Rate Type Constitutive Equations

B. Abbasi Khazaei, Z. Abbasi

ABSTRACT

In finite deformation analysis, the use of constitutive equations in rate form is often required. In a spatial setting, elastic modulus tensor relates some objective rate of a spatial stress tensor to the rate of deformation. It is important to know that, the spatial elastic modulus tensors of a material in different constitutive equations differ and relation between them may be interest for some researchers. In this paper, a general explicit formulation between the spatial elastic modulus tensors of some constitutive equations expressed. This formulation is a function of left Cauchy-Green tensor and its eigenvectors.

KEYWORDS: Rate type constitutive equation, spatial elasticity tensor, Corotational stress rate

معادلات بنیادین اولری نرخى الزامی است [۱]. همه نرخ‌های تنش را می‌توان در دو دسته کلی نرخ‌های همگرد مانند نرخ لگاریتمی [۲-۶]، زارمبا-یاومن [۳ و ۷]، گرین-نقدی [۴ و ۹] و نرخ‌های غیر همگرده مانند نرخ تروزدل [۱۰]، کاتر-ریولین [۷ و ۱۱] و اولدروید [۸ و ۱۲] دسته‌بندی نمود. در یک مدل همگرد بر عکس مدل غیر همگرد، نگاشت یک متغیر تانسوری از موقعیت تغییرشکل نیافته به موقعیت تغییرشکل یافته، طوری انجام می‌شود که سیستم مختصات فضا-زمان دچار اعوجاج نمی‌شود [۶].

۱- مقدمه

در تحلیل تغییرشکل‌های بزرگ اجسام، به دلیل تغییر پیوسته موقعیت جسم، لازم است معادله بنیادین مستقل از ناظر و یا به عبارتی عینی [۱] باشد. معادله بنیادین می‌تواند نسبت به موقعیت تغییرشکل یافته و یا تغییرشکل نیافته به عنوان موقعیت مبنا بدست آید. اگر موقعیت تغییرشکل یافته به عنوان موقعیت مبنا برای استخراج معادله بنیادین انتخاب شود، استفاده از

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۸/۹/۱۶

تاریخ اصلاحات مقاله: ۱۳۸۹/۱۰/۴

* نویسنده مسئول و استادیار، گروه مهندسی مکانیک دانشکده فنی مهندسی دانشگاه رازی؛ تلفن محل کار ۰۸۳۱۸۲۰۵۴۶۶۶

biabk@yahoo.com

۲ کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس؛ abbasi_zahra@hotmail.com

B و **C** به ترتیب تانسورهای کاوشی- گرین چپ و راست هستند.

اگر مقادیر ویژه تانسورهای **V** و **B** به ترتیب $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ و $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ باشند، و $1 \leq n \leq 3$ تعداد مقادیر ویژه غیر یکسان را مشخص کنند، آنگاه رابطه $\chi_\alpha = \lambda_\alpha^2$ ($\alpha = 1, \dots, n$) برقرار خواهد بود.

مقادیر ویژه تانسور **B**، بصورت رابطه (۵) بدست می‌آیند [۴]:

$$\chi_\alpha = \frac{1}{3}(I + 2\sqrt{I^2 - 3II} \cos \frac{1}{3}(\varphi - 2\pi\alpha))$$

$$\varphi = \arccos \left(\frac{2I^3 - 9I.II + 27III}{2(I^2 - 3II)^{3/2}} \right);$$

$$\alpha = 1, 2, 3$$

(۵)

در رابطه (۵) I, II و III نامتغیرهای اصلی تانسور **B** هستند که عبارتند از:

$$I = tr\mathbf{B};$$

$$II = \frac{1}{2}((tr\mathbf{B})^2 - tr\mathbf{B}^2);$$

$$III = \det \mathbf{B} = \frac{1}{6}(tr\mathbf{B})^3 - \frac{1}{2}(tr\mathbf{B})(tr\mathbf{B}^2) + \frac{1}{3}tr\mathbf{B}^3$$

(۶)

هرگاه $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n\}$ تصاویر ویژه تانسور **B** با ویژگی‌های رابطه (۷) باشند:

$$\mathbf{B}_\alpha \cdot \mathbf{B}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \mathbf{B}_\alpha, \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{B}_\alpha = \mathbf{I}$$

(۷)

تجزیه طیفی **B** بصورت رابطه (۸) خواهد بود [۱۴]:

$$\mathbf{B} = \sum_{\alpha=1}^n \chi_\alpha \mathbf{B}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha = n_\alpha \otimes n_\alpha$$

(۸)

در روابط بالا $\delta_{\alpha\beta}$ دلتای کرونکر، n_α بردار ویژه تانسور **V** یا **B** و **I** تانسور واحد از مرتبه دوم است. در رابطه (۷) عملگر جمع \sum روی اندیس‌های تکراری انجام نمی‌شود. با استفاده از رابطه (۸)، رابطه سیلوستر بدست می‌آید:

$$\mathbf{B}_\alpha = \delta_{1n} + \prod_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^n \frac{\mathbf{B} - \chi_\beta \mathbf{I}}{\chi_\alpha - \chi_\beta}$$

(۹)

۲-۲- اصل عینیت، نرخ‌های عینی تنش اولری و تانسور

الاستیسیته فضایی

در چارچوب مکانیک کلاسیک، فرض براین است که دیدن و سنجش موقعیت و زمان نسبت به یک ناظر، در مختصات گالیله‌ای فضا-زمان انجام می‌شود. از آنجا که موقعیت ناظر دلخواه است، بنابراین یک تئوری فیزیکی همراه با حرکت و

تانسور مرتبه چهار الاستیسیته در معادلات بنیادین اولری نرخ^۱، مقدار نرخ تغییرشکل را به نرخ تنش مرتبط می‌نماید. برای معادلات بنیادین مختلف تانسور الاستیسیته متفاوت است. یک موضوع مورد علاقه برای برخی از محققین، بدست آوردن رابطه بین تانسورهای الاستیسیته در معادلات مختلف است. تحقیقات انجام شده در این زمینه بسیار محدود بوده و نتایج آنها نیز تنها برای چند مدل خاص ارائه شده است. به‌عنوان مثال رابطه بین مدول‌های مماسی در معادلات بنیادین بر اساس نرخ‌های زارمبا-یاومن و نرخ تروزدل بطور صریح ارائه شده‌اند [۱۳ و ۱۴]. از این رابطه می‌توان برای خطی‌سازی نیروهای داخل گرهی، در روش المان محدود لاگرانژی به‌نگام شده استفاده نمود. هم‌چنین با استفاده از این رابطه می‌توان از یک الگوریتم انتگرال‌گیری به‌جای الگوریتم‌های مختلف برای به‌نگام نمودن تنش‌های اولری در برنامه المان محدود متکی بر معادلات هیپوالاستیسیته استفاده نمود [۱۳].

۲- روابط سینماتیکی

در این بخش روابط سینماتیکی که در ادامه مورد استفاده قرار خواهند گرفت، مرور می‌شوند:

۱-۱- گرادیان تغییرشکل، گرادیان سرعت، نرخ

تغییرشکل

تغییر شکل موضعی یک ذره با بردار موقعیت $\mathbf{X} = \phi(\mathbf{x}, t)$ نسبت به یک سیستم مختصات مینا به‌وسیله تانسور گرادیان تغییرشکل **F**، بصورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}; \det \mathbf{F} > 0$$

(۱)

که **X** بردار موقعیت نسبت به مختصات تغییر شکل یافته و **X** بردار موقعیت نسبت به مختصات تغییر شکل نیافته است.

کمیت‌های گرادیان سرعت (**L**)، نرخ تغییر شکل (**D**) و بخش غیرمتقارن گرادیان سرعت (**W**) نیز بصورت روابط (۲) بیان می‌شوند:

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}, \mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W},$$

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{L} + \mathbf{L}^T}{2}, \mathbf{W} = \frac{\mathbf{L} - \mathbf{L}^T}{2}$$

(۲)

با استفاده از تجزیه قطبی گرادیان تغییرشکل داریم:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$$

(۳)

که **R** تانسور دوران و **U** و **V** به ترتیب تانسور کشیدگی راست و چپ هستند که از رابطه (۴) بدست می‌آیند:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2, \quad \mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2$$

(۴)

تغییر شکل، می‌تواند نسبت به هر ناظری نظام مند شود. بر اساس اصل مستقل از ناظر بودن که ما در اینجا از آن با عنوان اصل عینیت^{۱۲} نام می‌بریم، یک تئوری فیزیکی نسبت به ناظرهای مختلف باید نتایج یکسانی را ارائه دهد. این موضوع بیانگر این حقیقت است که رفتار ماده مستقل از ناظر است.

دو ناظر با موقعیت‌های (\cdot) و $(\cdot)^*$ را در مختصات گالیله ای فضا-زمان در نظر بگیرید. روابط نسبت به دو ناظر بصورت رابطه (۱۰) انتقال می‌یابند:

$$\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{b}}(t) \quad (10)$$

$\mathbf{x}(t)$ و $\mathbf{x}^*(t)$ بردارهای موقعیت یک ذره متحرک نسبت به دو ناظر با موقعیت‌های (\cdot) و $(\cdot)^*$ در لحظه t هستند. $\mathbf{Q}(t)$ و $\bar{\mathbf{b}}(t)$ نیز به ترتیب تانسور دوران و بردار انتقال (تابع زمان) هستند. واضح است که مختصات ناظر $(\cdot)^*$ ، همان مختصات ناظر اولیه است که با سرعت زاویه‌ای $\dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}^T(t) = \boldsymbol{\Omega}$ در حال چرخش است و به اندازه $\bar{\mathbf{b}}(t)$ انتقال داده شده است. \mathbf{Q} یک تانسور اورتوگونال^{۱۳} با ویژگی‌های زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) &= \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}} = 0 \\ \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} &= \mathbf{I} \\ \mathbf{G}^* &= \mathbf{Q} \mathbf{G} \mathbf{Q}^T \end{aligned} \quad (11)$$

همانطور که می‌دانیم یک بردار \mathbf{v} بوسیله رابطه $\mathbf{v}^* = \mathbf{Q} \mathbf{v}$ انتقال می‌یابد. از طرفی یک تانسور اولری مرتبه دوم \mathbf{G} ، یک فضای برداری است که بردار \mathbf{v} را به بردار دیگری مانند \mathbf{u} بصورت $\mathbf{v} = \mathbf{G} \mathbf{u}$ مرتبط می‌نماید. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^* &= \mathbf{Q} \mathbf{v} = \mathbf{Q} \mathbf{G} \mathbf{u} = \mathbf{Q} \mathbf{G} \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{u} = \mathbf{G}^* \mathbf{u}^* \\ \mathbf{G}^* &= \mathbf{Q} \mathbf{G} \mathbf{Q}^T \end{aligned} \quad (12)$$

تانسور مرتبه دوم اولری \mathbf{G} بصورت $\mathbf{G}^* = \mathbf{Q} \mathbf{G} \mathbf{Q}^T$ انتقال می‌یابد. کمیت‌هایی که به این صورت انتقال می‌یابند کمیت‌های مستقل از ناظر یا "عینی" هستند. می‌توان نشان داد که برای یک کمیت لاگرانژی مانند تانسور مرتبه دوم تنش پیولا-کیرششف دوم^{۱۴} که با \mathbf{S} نشان داده می‌شود، رابطه انتقال بصورت $\mathbf{S}^* = \mathbf{S}$ خواهد بود.

بر اساس اصل عینیت هر متغیر اساسی در معادله بنیادین، باید عینی باشد. معادله بنیادین برای تغییر شکل‌های کوچک که بیانگر رابطه تنش-کرنش در محدوده الاستیک است، بصورت رابطه (۱۳) بیان می‌شود:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2\mu} - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}}{2\mu} \mathbf{I} \quad (13)$$

رابطه بالا به قانون هوک مشهور است که در آن تنش $\boldsymbol{\sigma}$

کاوشی، $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ کرنش الاستیک، ν ضریب پواسون، μ مدول برشی و \mathbf{I} تانسور واحد از مرتبه دوم است. با توجه به اینکه رفتار ماده مستقل از ناظر است، بنابراین کمیت‌های $\boldsymbol{\sigma}$ و $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ در رابطه (۱۳) باید عینی باشند. می‌توان نشان داد که این کمیت‌ها عینی هستند. اما باید توجه داشت که این رابطه تنها برای تغییر شکل‌های کوچک برقرار است، زمانیکه مختصات تغییر شکل نیافته و تغییر شکل یافته بر هم منطبقند. اگر رابطه (۱۳) را برای تغییر شکل‌های بزرگ تعمیم دهیم، لازم است رابطه بصورت نرخی بیان شود. با مشتق‌گیری از رابطه (۱۳) نسبت به زمان از دید ناظر در موقعیت تغییر شکل نیافته، شکل نرخی آن بصورت رابطه (۱۴) خواهد بود:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \frac{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}{2\mu} - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\text{tr} \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{2\mu} \mathbf{I} \quad (14)$$

علامت (\cdot) نشان دهنده مشتق زمانی نسبت به موقعیت تغییر شکل نیافته است. با توجه به آنچه که درباره اصل عینیت گفته شد، مانند رابطه (۱۳) لازم است معادله نرخی (۱۴) نیز عینی باشد. به عبارت دیگر هرگاه دو ناظر مختلف در موقعیت‌های تغییر شکل نیافته و تغییر شکل یافته کمیت نرخ تغییر شکل^{۱۵} را سنجش نمایند، هر دو ناظر باید نتایج یکسانی را ببینند. بدیهی است اگر مقدار تغییر شکل (دوران و انتقال) در محدوده تغییر شکل‌های کوچک باشد، می‌توان فرض نمود که موقعیت‌های اولیه و جاری بر هم منطبق بوده و اصل عینیت برقرار است. اما نتیجه این موضوع برای تغییر شکل‌های بزرگ بصورت دیگری است. به عبارت دیگر رابطه (۱۴) نسبت به دو ناظر مختلف نتایج یکسانی را ارائه نمی‌دهد و اصل عینیت برقرار نیست. زیرا کمیت‌های $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ و $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ عینی نبوده و از قانون انتقال در معادله (۱۲) پیروی نکرده و باید با کمیت‌های عینی جایگزین شوند. مقدار $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ را می‌توان با کمیت نرخ تغییر شکل \mathbf{D} که یک کمیت عینی است جایگزین نمود. اما در مورد تانسور اولری $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ ، می‌توان نشان داد که اگرچه $\boldsymbol{\sigma}$ عینی است، اما مشتق زمانی آن یعنی $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ ، نسبت به ناظر واقع در مختصات تغییر شکل نیافته عینی نیست. بنابراین نمو تنش یعنی $d\boldsymbol{\sigma} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} dt$ عینی نیست و کمیت $d\boldsymbol{\sigma}$ بعنوان نمو $\boldsymbol{\sigma}$ در معادله بنیادین نرخی، ممکن است مناسب نباشد. به عبارت دیگر این سؤال مطرح خواهد شد که آیا $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ واقعا نرخ تغییرات تانسور تنش کاوشی $\boldsymbol{\sigma}$ را نسبت به هر مرجعی ارائه می‌دهد؟ [۶].

راهحل پیامد گفته‌شده، ابتدا بوسیله زارمبا [۷] و سپس یاومن [۸] ارائه شده است که به نرخ زارمبا-یاومن معروف

است. که عبارت است از:

$$\overset{\circ}{\sigma}^{ZJ} = \overset{\circ}{\sigma} + \sigma W - W \sigma \quad (15)$$

($\overset{\circ}{\sigma}$) نشان‌دهنده مشتق زمانی نسبت به مختصات تغییرشکل یافته ($\overset{\circ}{\sigma}$) است. در اینجا کمیت $\overset{\circ}{\sigma}^{ZJ}$ عینی بوده و بیانگر نرخ تغییرات σ نسبت به مختصات تغییر شکل یافته است. شکل نرخي رابطه (14) می‌تواند بصورت رابطه (16) اصلاح گردد:

$$D^e = \frac{\overset{\circ}{\sigma}^{ZJ}}{2\mu} - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{tr(\overset{\circ}{\sigma}^{ZJ})}{2\mu} I \quad (16)$$

پس از نرخ زارمبا-یاومن، نرخ‌های دیگری از قبیل اولدریود بالایی و پایینی [12]، تروزدل [10]، کاتر-ریولین [11]، گرین-نقدی [9] و نرخ‌هایی بر پایه اسپین بدست آمده از دوران سه تائی اولری و لاگرانژی [15] و نرخ لگاریتمی [2-6]، ارائه شده اند. رابطه‌ای عمومی که بیانگر همه نرخ‌های عینی باشد، بصورت رابطه (17) ارائه شده است [9]:

$$\overset{\circ}{\sigma}^* = \overset{\circ}{\sigma} + \sigma \Omega^* - \Omega^* \sigma \quad (17)$$

با استفاده از رابطه $\tau = J \cdot \sigma$ می‌توان نوشت:

$$\overset{\circ}{\tau}^* = \overset{\circ}{\tau} + \tau \Omega^* - \Omega^* \tau \quad (18)$$

که τ تنش کیرشلف و J دترمینان گرادیان تغییر شکل F است. Ω^* نیز یک تانسور اسپین اولری تابع زمان است و به-عبارت دیگر یک تانسور پادمتقارن تابع زمان است که می‌تواند بصورت $\Omega^* = \Omega^*(F, L)$ تعریف شود. دو دسته نرخ عینی با عناوین نرخ‌های همگرد و نرخ‌های غیرهمگرد بر اساس اینکه Ω^* پادمتقارن^{۱۱} ($\Omega^{*T} = -\Omega^*$) و یا غیرپاد متقارن^{۱۲} ($\Omega^{*T} \neq -\Omega^*$) باشد، وجود دارد. بعنوان مثال، نرخ‌های اولدریود بالایی و پایینی و نرخ تروزدل به ازاء Ω^* ، معادل L و $-L + \frac{1}{2} tr L$ بعنوان نرخ‌های غیرهمگرد و نرخ زارمبا-یاومن و گرین-نقدی به ازاء Ω^* معادل W و $\dot{R}R^T$ به‌عنوان نرخ همگرد شناخته شده‌اند.

برای نرخ‌های همگرد رابطه (19) برقرار است:

$$\Omega^* = \dot{\Omega}^T Q \quad (19)$$

می‌توان نشان داد که همه شکل‌های تابع تانسوری $\Omega^* = \Omega^*(F, L)$ ، بی‌نهایت تعریف از نرخ‌های عینی را ارائه می‌دهند. با وجود این، اینها فقط بخش کوچکی نسبت به تمام تعاریف ممکن هستند. واضح است که بی‌نهایت نرخ همگرد مختلف را می‌توان یافت که بطور حتم همه آنها عینی نیستند. عینی بودن یک نرخ همگرد، به تانسور اسپین Ω^* بستگی دارد [4 و 5]. برخی نرخ‌های عینی مشهور در جدول (1) آورده شده‌اند. جائیکه $C^{\sigma \log}$ ، $C^{\sigma ZJ}$ ، $C^{\tau ZJ}$ ، $C^{\sigma GN}$ ، ... تانسور

الاستیسیته فضایی در معادلات مختلف را نشان می‌دهد. گفتنی است برای یک ماده یکسان، تانسورهای الاستیسیته گفته شده یکسان نیستند و در صورتیکه یکسان فرض شوند، رفتار ماده با هر یک از نرخ‌های بکار رفته یکسان خواهد بود. در حالی که استفاده از نرخ‌های متفاوت، فقط به دلیل وجود ناظرهای مختلف نسبت به یک پدیده فیزیکی یکسان بوده و نباید جواب‌های متفاوتی را ارائه دهند. به‌عنوان مثال برای این که نرخ زارمبا-یاومن از تنش کاوشی $\overset{\circ}{\sigma}^{ZJ}$ و تنش

کیرشلف $\overset{\circ}{\tau}^{ZJ}$ پاسخ‌های یکسانی را ارائه دهند، لازم است رابطه (20) بین تانسورهای الاستیسیته مربوطه یعنی $C_{ijkl}^{\sigma ZJ}$ و $C_{ijkl}^{\tau ZJ}$ برقرار باشد [1]:

$$C_{ijkl}^{\tau ZJ} = J(C_{ijkl}^{\sigma ZJ} + \sigma_{ij} \delta_{kl}) \quad (20)$$

با همین استدلال رابطه بین کمیت‌های $C_{ijkl}^{\sigma Tr}$ و $C_{ijkl}^{\tau Tr}$ عبارت است از [1]:

$$C_{ijkl}^{\tau Tr} = J^{-1} C_{ijkl}^{\sigma Tr} - \sigma_{ik} \delta_{jl} - \sigma_{jl} \delta_{ik} \quad (21)$$

$$C_{ijkl}^{\sigma Tr} = J^{-1} C_{ijkl}^{\tau Tr} - \sigma_{ik} \delta_{jl} - \sigma_{jl} \delta_{ik} + \sigma_{ij} \delta_{kl} \quad (22)$$

در روابط بالا δ_{ij} دلتای کرونگر است. نکته با اهمیت آن است که فقط برای برخی از مدل‌ها، رابطه بین تانسور الاستیسیته آنها در دسترس است. اینک این سوال مطرح است که رابطه بین تانسور الاستیسیته تا چه اندازه اهمیت دارد؟ در پاسخ به این سوال باید گفت که با در دست داشتن رابطه بین تانسور الاستیسیته، نه تنها امکان تبدیل معادلات بنیادین نرخي به یکدیگر وجود دارد بلکه برخی قابلیت‌های دیگر، مانند تعیین ماتریس سختی در برنامه المان محدود و یا استفاده از یک الگوریتم انتگرال‌گیری از تنش برای هر معادله بنیادین اولری نرخي، فراهم می‌شود. با توجه به اهمیت رابطه بین تانسورهای الاستیسیته در ادامه به دو موضوع اخیر بطور مختصر پرداخته شده است.

۳- تعیین ماتریس سختی در برنامه المان محدود

در برنامه المان محدود لاگرانژی بهنگام شده نرخي، رابطه تغییرات زمانی نیروهای داخلی f_{ii}^{int} و نرخ تغییر مکان \dot{u} ، به‌وسیله بخش مادی و هندسی ماتریس سختی یعنی K^{mat} و K^{geo} بصورت رابطه (23) بیان می‌شود:

$$f_{ii}^{int} = (K^{mat} + K^{geo}) \dot{u} \quad (23)$$

ماتریس‌های سختی مادی^{۱۸} و سختی هندسی^{۱۹} برای روش لاگرانژی بهنگام شده از روابط (24) و (25) بدست می‌آیند [13]:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (27)$$

با توجه به اینکه مشتقات زمانی، نسبت به مختصات مادی تنش کیرشلف و یا تنش کاوشی عینی نیستند، از مشتقات آنها نسبت به یک مختصات فضایی استفاده می‌شود. رابطه نرخ تروزدل و نرخ مادی تنش کیرشلف بصورت روابط (28) و (29) بیان می‌شوند:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{Tr} = \mathbf{C}^{\sigma ZI} : \mathbf{D} - \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} + \text{trace}(\mathbf{D})\boldsymbol{\sigma} \quad (28)$$

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{Tr} = (\mathbf{C}^{\sigma ZI} - \mathbf{C}' + \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{I}) : \mathbf{D} = \mathbf{C}^{\sigma Tr} : \mathbf{D} \quad (29)$$

بنابراین رابطه بین نرخ تروزدل و نرخ یاومن، بصورت رابطه (30) خواهد بود:

$$\mathbf{C}^{\sigma Tr} = \mathbf{C}^{\sigma ZI} - \mathbf{C}' + \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{I} = \mathbf{C}^{\sigma ZI} - \mathbf{C}'^* \quad (30)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\mathbf{C}' : \mathbf{D} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} \quad (31)$$

$$\mathbf{C}'^* = \mathbf{C}' - \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{I} \quad (32)$$

$$\mathbf{C}'^*_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\sigma_{jl} + \delta_{il}\sigma_{jk} + \delta_{jk}\sigma_{il} + \delta_{jl}\sigma_{ik}) - \delta_{kl}\sigma_{ki} \quad (33)$$

با توجه به اینکه $\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{I} \neq \mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\sigma}$ ، بنابراین اگرچه \mathbf{C}' دارای تقارن کلی^{۲۰} است اما \mathbf{C}'^* این تقارن را ندارد.

همان‌طور که نشان داده‌شد، یک رابطه ویژه بین تانسور الاستیسیته در نرخ‌های تروزدل و یاومن بدست آمد. در ادامه سعی می‌شود که یک رابطه عمومی برای نرخ‌های همگرد ارائه شود.

با مشتق گیری از رابطه (27)، رابطه (34) بدست می‌آید:

$$\overset{\square}{\boldsymbol{\tau}} = \overset{\square}{\mathbf{F}} \cdot \overset{\square}{\mathbf{S}} \cdot \overset{\square}{\mathbf{F}}^T + \overset{\square}{\mathbf{F}} \cdot \overset{\square}{\mathbf{S}} \cdot \overset{\square}{\mathbf{F}}^T + \overset{\square}{\mathbf{F}} \cdot \overset{\square}{\mathbf{S}} \cdot \overset{\square}{\mathbf{F}}^T \quad (34)$$

با استفاده از رابطه $\overset{\square}{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F}$ می‌توان نوشت:

$$\overset{\square}{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\tau} + \overset{\square}{\mathbf{F}} \cdot \overset{\square}{\mathbf{S}} \cdot \overset{\square}{\mathbf{F}}^T + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{L}^T \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \overset{\square}{\mathbf{F}} \cdot \overset{\square}{\mathbf{S}} \cdot \overset{\square}{\mathbf{F}}^T &= \boldsymbol{\tau} - \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{L}^T \\ &= \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}^T + \text{trace}(\mathbf{L})\boldsymbol{\sigma}) \\ &= \mathbf{J} \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{Tr} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^C \end{aligned} \quad (36)$$

در رابطه بالا $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^C$ ، نرخ انتقال یافته^{۲۱} و یا به عبارتی مشتق لی^{۲۲} تنش کیرشلف است که بصورت رابطه (37) تعریف می‌شود:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^C = \overset{\square}{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{L}^T = \mathbf{C}^{Tr} : \mathbf{D} \quad (37)$$

$$\mathbf{K}_{rsIJ}^{mat} = \int_{\hat{V}} J^{-1} N_{I,k} \delta_{ri} \mathbf{C}_{ijkl}^{Tr} N_{J,l} \delta_{sj} d\hat{V} \quad (24)$$

$$\mathbf{K}_{rsIJ}^{geo} = \int_{\hat{V}} J^{-1} N_{I,j}^T \tau_{jk} N_{J,k} \delta_{rs} d\hat{V} \quad (25)$$

در رابطه (24)، \hat{V} و δ به ترتیب تانسور الاستیسیته نرخ تروزدل تنش کیرشلف، تابع شکل، حجم ناحیه انتگرالگیری و دلتای کرونگر هستند. همان‌طور که دیده می‌شود، برای محاسبه مقدار انتگرال و بدست آوردن ماتریس سختی مادی لازم است رابطه تانسور الاستیسیته نرخ مورد استفاده، برحسب تانسور الاستیسیته نرخ تروزدل مشخص باشد. اگرچه با استفاده از برخی روش‌های عددی این کمیت را می‌توان بطور نموی محاسبه نمود اما توجه شود که استفاده از روابط دقیق و صریح ریاضی نه تنها ما را در فهم و تحلیل نتایج بدست آمده از حل معادلات کمک می‌نماید، بلکه ممکن است نتایج دقیق‌تری را نیز ارائه دهد.

۴- انتگرال گیری از تنش

مرحله انتگرال‌گیری از تنش‌ها در روش‌های المان محدود نرخی بسیار مهم است. معلوم بودن رابطه بین تانسور الاستیسیته نرخ مورد استفاده و نرخ تروزدل در انتگرال‌گیری تنش‌های اولری در برنامه المان محدود بهنگام شده نرخ، امکان استفاده از یک الگوریتم را برای همه نرخ‌های مورد نظر فراهم می‌نماید. به عنوان مثال، یک رابطه عمومی برای بهنگام کردن تنش‌ها بصورت رابطه (26) ارائه شده است [17 و 16]:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{t+\Delta t} &= \mathbf{F}_{t+\Delta t} \boldsymbol{\tau}_t \mathbf{F}_{t+\Delta t}^T \\ &+ \left[\mathbf{F}_{t+\Delta t} \mathbf{F}_{t+\frac{\Delta t}{2}}^{-1} (\mathbf{C}_{t+\frac{\Delta t}{2}}^{Tr} : \mathbf{D}_{t+\frac{\Delta t}{2}}) \mathbf{F}_{t+\frac{\Delta t}{2}}^{-T} \mathbf{F}_{t+\Delta t}^T \right] \Delta t \end{aligned} \quad (26)$$

Δt اختلاف بین دو توقف زمانی پیاپی t_1 و t_2 و \mathbf{C}^{Tr} تانسور الاستیسیته نرخ تروزدل است. با استفاده از این رابطه، با داشتن تنش‌ها و سایر کمیت‌ها در لحظه قبلی، مقدار تنش در لحظه جاری را می‌توان محاسبه نمود. با توجه به اینکه رابطه فوق عمومی است، چنانچه برنامه بر اساس سایر معادلات نرخی پیاده‌سازی شود، لازم است در معادله فوق کمیت \mathbf{C}^{Tr} ، با عبارت معادل آن برحسب نرخ تنش مورد استفاده جایگزین شود. بنابراین با داشتن رابطه تانسور الاستیسیته نرخ تروزدل یا نظیر آن در سایر نرخ‌ها، می‌توان از یک الگوریتم انتگرال‌گیری برای همه نرخ‌ها استفاده نمود.

۵- رابطه بین تانسورهای الاستیسیته

رابطه بین تنش کیرشلف $\boldsymbol{\tau}$ و تنش پیولای دوم \mathbf{S} عبارت است از:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\tau}}^C &= \dot{\boldsymbol{\tau}} - (\mathbf{W} + \mathbf{D}) \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{W} + \mathbf{D})^T \\ &= \dot{\boldsymbol{\tau}}^{Zl} - \boldsymbol{\tau} \mathbf{D} - \mathbf{D} \boldsymbol{\tau}\end{aligned}\quad (47)$$

اکنون با بدست آوردن مقدار $\dot{\boldsymbol{\tau}}^{Zl}$ از (46) و قرار دادن آن در (47)، رابطه نرخ انتقال یافته تنش کیرششف بصورت (48) بدست می‌آید:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^C = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \mathbf{D} - \mathbf{D} \boldsymbol{\tau} \quad (48)$$

برای رسیدن به یک شکل استاندارد از ماتریس سختی مماسی، لازم است تمام اجزا سمت راست رابطه (48) بصورت تابعی از نرخ تغییر شکل \mathbf{D} تبدیل نمود. در نتیجه با استفاده از رابطه (42)، یک تانسور مرتبه چهار \mathbf{M}_{ijkl} به گونه ای تعریف می‌شود که تانسور مرتبه دوم نرخ تغییر شکل را به تانسور مرتبه دوم \mathbf{N} انتقال دهد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\mathbf{N}_{ij} = \mathbf{M}_{ijkl} \mathbf{D}_{kl} \quad (49)$$

مولفه‌های تانسور \mathbf{M}_{ijkl} عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{ijkl} &= \nu'_3 (\mathbf{B}_{ik}^2 \mathbf{B}_{jl} - \mathbf{B}_{ik} \mathbf{B}_{jl}^2) + \nu'_2 (\mathbf{B}_{ik}^2 \delta_{jl} - \delta_{ik} \mathbf{B}_{jl}^2) \\ &+ \nu'_1 (\mathbf{B}_{ik} \delta_{jl} - \delta_{ik} \mathbf{B}_{jl})\end{aligned}\quad (50)$$

رابطه (48) را بصورت زیر بازنویسی می‌نماییم:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^C = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{M} : \mathbf{D}) + (\mathbf{M} : \mathbf{D}) \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \mathbf{D} - \mathbf{D} \boldsymbol{\tau} \quad (51)$$

از طرف دیگر تانسور مرتبه چهار \mathbf{L} طوری تعریف می‌شود که:

$$\mathbf{L} : \mathbf{D} = -\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{M} : \mathbf{D}) + (\mathbf{M} : \mathbf{D}) \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \mathbf{D} - \mathbf{D} \boldsymbol{\tau} \quad (52)$$

با استفاده از برخی عملیات تانسوری مولفه‌های تانسور \mathbf{L} بدست می‌آیند:

$$\mathbf{L}_{ijkl} = \mathbf{M}_{irkl} \tau_{ij} - \mathbf{M}_{ijkl} \tau_{ri} - \delta_{ik} \tau_{jl} - \delta_{jl} \tau_{ik} \quad (53)$$

حال با استفاده از رابطه $\dot{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{C} : \mathbf{D}$ و رابطه (52)، رابطه (51) بصورت رابطه (54) بدست می‌آید:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^C = \mathbf{C} : \mathbf{D} + \mathbf{L} : \mathbf{D} = (\mathbf{C} + \mathbf{L}) : \mathbf{D} \quad (54)$$

با مقایسه روابط (37) و (54)، رابطه بین تانسورهای الاستیسیته در نرخ تروزدل و خانواده عمومی نرخ‌ها، بصورت رابطه (55) بدست می‌آید:

$$\mathbf{C}^{\tau Tr} = \mathbf{C} + \mathbf{L}, \quad \mathbf{C}_{kijl}^{\tau Tr} = \mathbf{C}_{kijl} + \mathbf{L}_{kijl} \quad (55)$$

که $\mathbf{C}_{kijl}^{\tau Tr}$ تانسور الاستیسیته برای نرخ تروزدل تنش کیرششف و \mathbf{C} تانسور الاستیسیته برای نرخ موردنظر و دلخواه از خانواده عمومی نرخ‌های تنش است. با استفاده از این رابطه

$$\begin{aligned}\overset{\square}{\mathbf{S}} &= \mathbf{F}^{-1} \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^C \mathbf{F}^{-T} \\ \overset{\square}{\mathbf{S}} &= \mathbf{F}^{-1} (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{L}^T) \mathbf{F}^{-T}\end{aligned}\quad (38)$$

رابطه بین تانسورهای الاستیسیته در نرخ تروزدل تنش کیرششف $\mathbf{C}^{\tau Tr}$ و نرخ تروزدل تنش کاوشی $\mathbf{C}^{\sigma Tr}$ عبارت‌اند از:

$$\mathbf{C}^{\sigma Tr} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{C}^{\tau Tr} \quad (39)$$

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{Tr} = \mathbf{J}^{-1} \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^C \quad (40)$$

حال لازم است رابطه (40) برای خانواده عمومی نرخ‌های همگرد تعمیم داده شود. عبارت دیگر باید رابطه بین $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^C$ و $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}$ را برای همه نرخ‌های همگرد، پیدا کنیم. برای خانواده عمومی نرخ‌های همگرد، رابطه زیر وجود دارد:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = \overset{\square}{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} : \mathbf{D} \quad (41)$$

که $\boldsymbol{\Omega}$ تانسور چرخش و \mathbf{C} تانسور الاستیسیته فضایی برای خانواده عمومی نرخ‌های تنش است.

خانواده عمومی تانسور چرخش بصورت رابطه (42) است:

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{W} + \mathbf{N} \quad (42)$$

که تانسور \mathbf{N} بصورت رابطه (43) معرفی می‌شود [50]:

$$\mathbf{N} = 0 \quad \text{if} \quad \chi_1 = \chi_2 = \chi_3$$

$$\mathbf{N} = \nu [\mathbf{BD}] \quad \text{if} \quad \chi_1 \neq \chi_2 = \chi_3$$

$$\mathbf{N} = \nu_1 [\mathbf{BD} - \mathbf{DB}] + \nu_2 [\mathbf{B}^2 \mathbf{D}] + \nu_3 [\mathbf{B}^2 \mathbf{DB}]$$

$$\text{if} \quad \chi_1 \neq \chi_2 = \chi_3 \neq \chi_1$$

(43)

در رابطه بالا $[\mathbf{B}^r \mathbf{D}^s] = \mathbf{B}^r \mathbf{D} \mathbf{B}^s - \mathbf{B}^s \mathbf{D} \mathbf{B}^r$ بطوریکه

$r, s = 0, 1, 2$ و χ_i مقادیر ویژه تانسور \mathbf{B} هستند جاییکه:

$$\begin{aligned}\nu_k &= -\frac{(-1)^k}{\Delta} [\chi_1^{3-k} \varepsilon_{23} \\ &+ \chi_2^{3-k} \varepsilon_{31} + \chi_3^{3-k} \varepsilon_{12}]\end{aligned}$$

$$\Delta = (\chi_1 - \chi_2)(\chi_2 - \chi_3)(\chi_3 - \chi_1)$$

$$\varepsilon_{12} = h \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right), \varepsilon_{31} = h \left(\frac{\chi_3}{\chi_1} \right), \varepsilon_{23} = h \left(\frac{\chi_2}{\chi_3} \right)$$

(44)

حال با قرار دادن معادله (42) در رابطه (41) می‌توان نوشت:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = \overset{\square}{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{W} + \mathbf{N}) - (\mathbf{W} + \mathbf{N}) \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (45)$$

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{Zl} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{N} - \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (46)$$

از طرف دیگر با استفاده از رابطه $\mathbf{L} = \mathbf{W} + \mathbf{D}$ ، معادله (37) بصورت رابطه (47) بازنویسی می‌شود:

رازی، به دلیل حمایت از این تحقیق تشکر می‌نماید.

۸- ضمائم

جدول (۱): برخی معادلات هیپوالاستیسیته

$\overset{\circ}{\sigma}^{\log} = C^{\sigma \log} : D$	نرخ لگاریتمی (Logarithmic rate)
$\overset{\circ}{\sigma}^{ZJ} = C^{\sigma ZJ} : D$	نرخ زارمبا-یاومن از تنش کاوشی (Zaremba-Jaumann rate)
$\overset{\circ}{\tau}^{ZJ} = C^{\tau ZJ} : D$	نرخ زارمبا-یاومن از تنش کیرش‌ش‌هف (Zaremba-Jaumann rate)
$\overset{\circ}{\sigma}^{GN} = C^{\sigma GN} : D$	نرخ گرین-نقدی (Green-Naghdi rate)
$\overset{\circ}{\sigma}^L = C^{\sigma L} : D$	نرخ بر پایه چرخش محور لاگرانژی (Lagrangian triad based rate)
$\overset{\circ}{\sigma}^E = C^{\sigma E} : D$	نرخ بر پایه چرخش محور اولری (Eulerian triad based rate)
$\overset{\circ}{\sigma}^{Tr} = C^{\sigma Tr} : D$	نرخ تروزدل (Truesdell rate)
$\overset{\circ}{\sigma}^{CR} = C^{\sigma CR} : D$	نرخ کاتر-ریولین (Cotter-Rivlin rate)
$\overset{\circ}{\sigma}^{UO} = C^{\sigma UO} : D$	نرخ اولدروید بالایی (Upper Oldroyd rate)
$\overset{\circ}{\sigma}^{LO} = C^{\sigma LO} : D$	نرخ اولدروید پایینی (Lower Oldroyd rate)
$\overset{\circ}{\sigma}^C = C^{\sigma C} : D$	نرخ انتقال یافته (Convected rate)

برای یک نرخ تنش موردنظر برای تعیین ماتریس سختی کافی است مقادیر C_{kijl} و L_{kijl} نرخ تنش مورد نظر محاسبه و کمیت $C_{kijl} + L_{kijl}$ جایگزین C_{kijl}^{Tr} در رابطه (۲۴) شود. در این شرایط فقط با استفاده از یک الگوریتم بهنگام کردن تنش و تغییر مقادیر C_{kijl} و L_{kijl} برای هر معادله بنیادین نرخ اولری می‌توان ماتریس سختی در روش المان محدود را تعیین نمود.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک رابطه صریح بین تانسورهای الاستیسیته فضایی در معادلات بنیادین اولری نرخ با نرخ تروزدل و خانواده عمومی نرخهای همگرد، ارائه شده است. این رابطه تابعی از تانسور گرین-کاوشی چپ B و بردارهای ویژه آن است. این رابطه، امکان خطی‌سازی نیروهای داخل گرهی، در روش المان محدود لاگرانژی بهنگام شده را برای برخی معادلات نرخ اولری فراهم می‌نماید. با استفاده از آن می‌توان از یک الگوریتم برای انتگرال‌گیری از تنش‌های اولری در برنامه المان محدود برای همه نرخ‌های همگرد استفاده نمود.

۷- تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از معاونت محترم پژوهشی دانشگاه

۹- مراجع

- [۸] Jaumann, G.; "Geschlossenes System physikalischer differentialgesetze", Akad. Wiss. Wien Sitzber. IIA, No. 120, PP. 594-614, 1911.
- [۹] Green, A. E., Naghdi, P. M. ; "Ageneral Theory of an elastic-plastic continuum", Arch. Rat. Mech. Anal. , No. 18, PP. 251-281, 1965.
- [۱۰] Truesdell, C., Noll, W.; "The nonlinear field theories of mechanics ", Handbuch der Physik, volume III/3. Springer, Berlin, PP, 441-447, 1965.
- [۱۱] Cotter, B.A., Rivlin, R.S.; "Tensors associated with time-dependent stress ", Quart. Appl. Math., No. 13, PP. 177-182, 1955.
- [۱۲] Oldroyd, J. G.; "On the formulation of rheological equation of state ", Proc. Roy. Soc. London Ser. A, No. 200, PP. 523-541, 1950.
- [۱۳] Belytschko, T., Liu, W.K., Moran, B.; "Nonlinear finite elements for continua and structures ", New York: John Wiley & Sons; 2001.
- [۱۴] Xiao, H. ; "Unified explicit basis-free expressions for time rate and conjugate stress of an arbitrary Hill's strain ", International Journal of Solid and Structures, No. 32, PP. 3327-3347, 1995.
- [۱۵] Szabo, L., Balla, M.; "Comparison of some stress rates ", International Journal of Solid and Structures, No. 25, PP. 279-297, 1989.
- [۱] Pinsky, P.M., Oritz, M., Pister, K.S.; "Numerical integration of rate constitutive equations in finite deformation analysis ", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, No. 40, PP. 137-158, 1983.
- [۲] Xiao, H., Bruhns, O.T., Meyers, A.; "Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate ", Acta Mechanica, No. 124, PP. 89-105, 1997.
- [۳] Xiao, H., Bruhns, O.T., Meyers, A.; "Hypo-elasticity model based upon the logarithmic stress rate ", Journal of Elasticity, No. 47, PP. 51-68, 1997.
- [۴] Xiao, H., Bruhns, O.T., Meyers, A.; "Strain rates and material spins ", Journal of Elasticity, No. 52, PP.1-42, 1998.
- [۵] Xiao, H., Bruhns, O.T., Meyers, A.; "On objective corotational rates and their defining spin tensors", International Journal of Solid and Structures, No. 35, PP. 4001-4014, 1995.
- [۶] Xiao, H., Bruhns, O.T., Meyers, A.; "Elastoplasticity beyond small deformation: Basic variables, essential structures, and constitutive and computational implication ", Acta Mechanica, No. 182, PP. 31-111, 2006.
- [۷] Zaremba, S.; "Sur une forme perfectionee de la theorie de la relaxation", Bull. Intern. Acad. Sci. Cracovie, PP. 594-614, 1903.

[۱۷] بیژن عباسی خزائی، محمد حبیبی پارسا، " مدلهای هیپوالاستیسیته و انتگرال پذیری آنها"، نشریه علمی پژوهشی دانشکده فنی دانشگاه نهران، سال چهل و یکم شماره ۸ (پیاپی ۱۱۰) صفحه ۱۰۱۱، ۱۳۸۶

[۱۶] Abbasi, B., Parsa, M.H.; "Finite element study of the energy dissipation and residual stresses in the closed elastic deformation path", International Journals for Numerical Methods in Engineering, No PP, 2006.

۱- زیر نویس ها

- ^۱ Corotational rate
- ^۲ Logarithmic rate
- ^۳ Zaremba-Jaumann rate
- ^۴ Green-Naghdi rate
- ^۵ Non-corotational rate
- ^۶ Green-Naghdi rate
- ^۷ Green-Naghdi rate
- ^۸ Green-Naghdi rate
- ^۹ Objective
- ^{۱۰} Rate type constitutive equations
- ^{۱۱} Eigen projection
- ^{۱۲} Objectivity
- ^{۱۳} Orthogonal Tensor
- ^{۱۴} Second Piola-Kirchhof Stress Tensor
- ^{۱۵} Rate of deformation
- ^{۱۶} Symmetric
- ^{۱۷} Skew-Symmetric
- ^{۱۸} Material stiffness
- ^{۱۹} Geometrical stiffness
- ^{۲۰} Major Symmetry
- ^{۲۱} Convected rate
- ^{۲۲} Lie Deviator