



شبیه‌سازی جریان جابجایی طبیعی نانوسیال در یک محفظه شیبدار تحت میدان مغناطیسی به روش شبکه بولتزمن

احمدرضا رحمتی*، امین نجارنظامی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۹ مهر ۱۳۹۴
بازنگری: ۲۴ بهمن ۱۳۹۴
پذیرش: ۹ اسفند ۱۳۹۴
ارائه آنلاین: ۲۳ مرداد ۱۳۹۵

کلمات کلیدی:

جابجایی طبیعی
میدان مغناطیسی
توابع توزیع دوتایی
ضریب تخفیف چندتایی
روش شبکه بولتزمن

چکیده: در این تحقیق، از مدل توابع توزیع دوتایی با ضریب تخفیف چندتایی روش شبکه بولتزمن برای شبیه‌سازی جریان جابجایی طبیعی نانوسیال در یک محفظه شیبدار تحت میدان مغناطیسی استفاده شده است. محفظه موردنظر دوبعدی بوده و حاوی نانوسیال آب-اکسید تیتانیوم می‌باشد. محفظه دارای زاویه ϕ نسبت به سطح افقی بوده و تحت یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار گرفته است. روش عددی ارائه شده به ترتیب میدان جریان و میدان دما را با استفاده از مدل D2Q5 و D2Q9 که از مدل‌های رایج در روش شبکه بولتزمن هستند شبیه‌سازی می‌نماید. هدف اصلی این تحقیق شبیه‌سازی جریان جابجایی طبیعی نانوسیال در عدد رایلی 10^5 و بررسی اثر کمیت‌های مختلف مانند عدد هارتمن ($60 < Ha < 100$)، کسر حجمی نانوذرات ($5\% < \phi < 10\%$) و زاویه شیب محفظه ($0^\circ < \phi < 90^\circ$) بر میدان جریان، میدان دما و نرخ انتقال حرارت در محفظه است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که افزایش قدرت میدان مغناطیسی باعث تضعیف جریان جابجایی طبیعی در محفظه شده و تغییرات شیب محفظه و کسر حجمی نانوذرات نیز تاثیرات متفاوتی بر میدان جریان، میدان دما و نرخ انتقال حرارت در محفظه دارد.

۱- مقدمه

مسأله جابجایی طبیعی سیالات هادی الکتریسته در حضور یک میدان مغناطیسی یکی از موضوعات جذاب تحقیقاتی به دلیل کاربرد گسترده آن در زمینه مسائل مهندسی است؛ برای مثال، جابجایی طبیعی نقش مهمی را در رشد کریستال‌ها در جریان مذاب ایفا می‌کند و باعث ایجاد یک ساختار غیرهمگن در ساختار قطعات ریخته‌گری می‌شود. ایجاد این ساختارهای ناهمگن و غیرقابل اجتناب در کریستال‌ها را می‌توان به کمک یک میدان مغناطیسی خارجی کاهش داد [۱ و ۲].

جریان جابجایی طبیعی هیدرودینامیک مغناطیسی توسط بسیاری از محققین و با استفاده از روش‌های آزمایشگاهی، تحلیلی و عددی مورد مطالعه قرار گرفته است. اوکادا و اوزو [۳] آزمایش‌هایی را بر روی گالیم مذاب با عدد پرانتل 0.24×10^4 درون یک محفظه مکعب شکل که یک دیواره آن سرد، یک دیواره آن گرم و دیواره‌های دیگر آن عایق بوده و محفظه تحت تاثیر یک میدان مغناطیسی بود انجام دادند و دریافتند که تاثیر میدان مغناطیسی بر جریان سیال در حالتی که در این میدان در جهت عمودی اعمال شود بیشتر از حالتی است که در جهت افقی اعمال می‌شود. گاراندت و همکاران [۴] روشی تحلیلی را برای مطالعه تاثیر میدان مغناطیسی بر جابجایی طبیعی درون یک محفظه دوبعدی ارائه دادند. رودرایاه و همکاران [۵] تاثیر اعمال

میدان مغناطیسی بر جریان جابجایی طبیعی درون یک محفظه مربعی شکل با دیواره‌های عمودی دما-ثابت و دیواره‌های افقی عایق برای سیالی با عدد پرانتل 0.733×10^4 را به طور عددی بررسی کرده و دریافتند که با افزایش قدرت میدان مغناطیسی، جریان جابجایی طبیعی تضعیف شده و نرخ انتقال حرارت کاهش می‌یابد. جانی و همکاران [۶] به بررسی انتقال حرارت جابجایی طبیعی جریان هیدرودینامیک مغناطیسی سیال در یک محفظه مربعی به روش عددی حجم محدود پرداختند. محفظه مورد نظر آنها دارای دیواره پایین گرم بوده و سایر دیواره‌های آن سرد می‌باشند. بر اساس نتایج آنها، افزایش عدد هارتمن موجب تضعیف جابجایی طبیعی و کاهش سرعت سیال شده و میزان انتقال حرارت را کاهش می‌دهد. همچنین براساس یافته‌های آنها، برای اعداد رایلی زیاد، یک میدان مغناطیسی قوی برای کاهش انتقال حرارت جابجایی طبیعی نیاز است. پیرمحمدی و قاسمی [۷] به بررسی اثر میدان مغناطیسی بر جابجایی طبیعی سیال در یک محفظه مربعی شیبدار با استفاده از روش عددی حجم محدود پرداختند. نتایج آنها نشان داد که تغییرات عدد ناسلت با شیب محفظه به عدد هارتمن وابسته است.

در اغلب مطالعات انجام شده در زمینه بررسی تاثیر میدان مغناطیسی بر جابجایی طبیعی در محفظه‌ها از سیالات خالص استفاده شده است که بیشتر آنها دارای ضریب هدایت گرمایی پایین هستند. این مسأله میزان انتقال حرارت در محفظه را به خصوص در حضور یک میدان مغناطیسی کاهش

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: ar_rahmati@kashanu.ac.ir

با ضریب تخفیف چندتایی^۶ که توسط دهومیرز^۷ مطرح شد برطرف شوند [۱۶]. به دلیل مزیت‌های فراوان روش توابع توزیع دوتایی با ضریب تخفیف چندتایی، این روش در بسیاری از مسائل جریان‌های هم‌دما و غیرهم‌دما مورد استفاده قرار گرفته است [۲۰-۱۷].

با توجه به مزیت‌های روش عددی شبکه بولتزمن و همچنین مدل توابع توزیع دوتایی با ضریب تخفیف چندتایی، هدف تحقیق حاضر شبیه‌سازی جریان جابجایی طبیعی نانوسیال آب - اکسید تیتانیوم در یک محفظه مربعی شیبدار تحت میدان مغناطیسی به کمک مدل توابع توزیع دوتایی با ضریب تخفیف چندتایی روش شبکه بولتزمن است. برای حل میدان جریان از مدل شبکه D2Q9 و برای حل میدان دما نیز از مدل شبکه D2Q5 استفاده شده است. نتایج حاصل از این روش با مطالعات عددی گذشته اعتبارسنجی شده و تاثیر کمیت‌های مختلف (کسر حجمی نانوذرات، عدد هارتمن و زاویه شیب محفظه) بر میدان جریان و میدان دما مورد مطالعه قرار گرفته است.

۲- هندسه مسئله

هندسه مساله حاضر در شکل ۱ نشان داده شده است. این محفظه دوبعدی و مربعی‌شکل بوده، دیواره سمت چپ آن در دمای T_h و دیواره سمت راست آن در دمای T_c قرار دارد. دیواره‌های بالا و پایین نیز عایق هستند. با توجه به نحوه قرارگیری دیواره‌ها، انتقال حرارت در راستای z نسبت به راستای x و y ناچیز بوده و فرض جریان دوبعدی صادق است. محفظه حاوی نانوسیال آب - اکسید تیتانیوم در دمای متوسط 300 K است. جریان در ناحیه آرام قرار دارد و یک میدان مغناطیسی یکنواخت با قدرت B در راستای x بر محفظه اعمال می‌شود. شتاب جاذبه نیز در راستای عمودی می‌باشد. محفظه دارای پهنا و ارتفاع L می‌باشد و زاویه آن با افق برابر ϕ است. خواص ترموفیزیکی نانوسیال در جدول ۱ ارائه شده است.

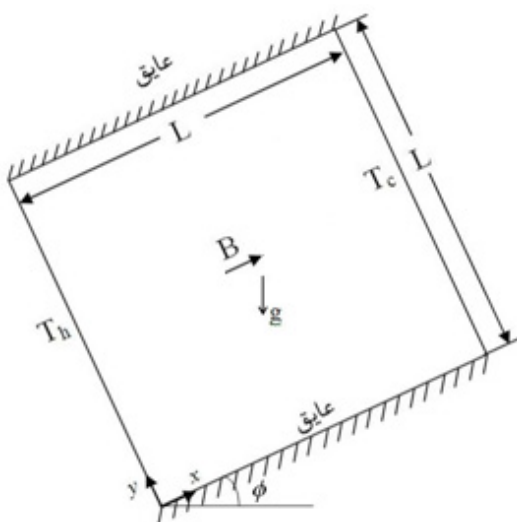


Fig. 1. Geometry of problem

شکل ۱: هندسه مسئله

می‌دهد. این مشکلات زمینه ورود نانوسیالات به تحقیقات را فراهم آورد. نانوسیالات دارای خواص حرارتی بهتری نسبت به سیالات خالص هستند که این امر موجب بهبود انتقال حرارت در بسیاری از کاربردهای صنعتی می‌شود. شیخ الاسلامی و همکاران [۸] به بررسی تأثیر میدان مغناطیسی بر جابجایی طبیعی نانوسیال داخل یک محفظه دارای دیواره سینوسی به کمک روش عددی حجم محدود پرداختند. آنها برای افزایش دقت کار خود، تأثیر حرکت براونی در ضریب هدایت گرمایی را به وسیله مدل‌های ارائه‌شده لحاظ کردند. آنها به بررسی تاثیر کسر حجمی نانوذرات، عدد رایلی، عدد هارتمن و دامنه دیواره سینوسی بر جریان نانوسیال پرداخته و به این نتیجه رسیدند که با افزایش دامنه دیواره سینوسی، افزایش عدد رایلی، افزایش کسر حجمی نانوذرات و کاهش عدد هارتمن، عدد ناسلت متوسط افزایش می‌یابد.

روش شبکه بولتزمن، یک روش عددی قدرتمند برای شبیه‌سازی جریان سیالات و نانوسیالات بوده و مبتنی بر تئوری جنبشی می‌باشد [۹-۱۱]. ساده بودن برنامه‌نویسی، سهولت اعمال شرایط مرزی متفاوت و قابلیت موازی شدن برنامه‌نویسی، این روش را به عنوان روشی جذاب برای شبیه‌سازی جریان سیالات با هندسه پیچیده معرفی کرده است. عاشوری نژاد و همکاران [۱۲] تأثیر یک میدان مغناطیسی بر جابجایی طبیعی نانوسیال آب - نقره در فضای بین دو محفظه دایروی هم محور را به صورت عددی بررسی کردند. براساس نتایج آنها، عدد ناسلت متوسط با افزایش کسر حجمی نانوذرات و افزایش عدد رایلی افزایش یافته ولی با افزایش عدد هارتمن کاهش می‌یابد. محمودی و همکاران [۱۳] به بررسی جریان جابجایی طبیعی نانوسیال در یک محفظه بسته تحت میدان مغناطیسی به روش شبکه بولتزمن پرداختند. آنها با بررسی تاثیر تغییرات عدد رایلی، عدد هارتمن، زاویه میدان مغناطیسی و کسر حجمی نانوذرات بر جریان نانوسیال مشاهده کردند که نرخ انتقال حرارت با افزایش عدد رایلی افزایش و با افزایش عدد هارتمن کاهش پیدا می‌کند. همچنین برای اعداد رایلی بزرگ، میزان انتقال حرارت وابستگی شدیدی به جهت میدان مغناطیسی دارد و علاوه بر این، جهت میدان مغناطیسی روی تأثیر کسر حجمی نانوذرات بر میزان انتقال حرارت نیز موثر است.

در حال حاضر سه مدل حرارتی شبکه بولتزمن ارائه شده است: روش چندسرعت^۱، روش نرده‌ای منفعل^۲ و روش توابع توزیع دوتایی^۳. اغلب تحقیقاتی که به روش توابع توزیع دوتایی برای شبیه‌سازی جریان‌های جابجایی انجام شده‌اند از روش شبکه بولتزمن بی‌هاتانگر - گروس - کروک^۴ استفاده کرده‌اند که با یک ضریب تخفیف تکی^۵ تقریب زده می‌شود. به دلیل سادگی فراوان، این روش بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. اما این روش ممکن است به ناپایداری عددی [۱۴] و ایجاد خطا در اعمال شرایط مرزی [۱۵] منجر شود. این معایب می‌توانند با بکارگیری مدل توابع توزیع دوتایی

- 1 Multispeed approach (MS)
- 2 Passive scalar approach
- 3 Double population distribution function approach (DDF)
- 4 Bhatnagar-Gross-Krook (BGK)
- 5 Single relaxation time (SRT)

6 Multi relaxation time (MRT)

7 D'Humieres

۳- معادلات حاکم

۳-۱ مدل شبکه D2Q9 برای شبیه‌سازی میدان جریان و D2Q5

شبیه‌سازی میدان

در ابتدا لازم است به این موضوع اشاره شود که در شبیه‌سازی عددی از تقریب بوزینسک^۱ برای چگالی استفاده شده است. برای مدل توابع توزیع دوتایی با ضریب تخفیف چندتایی، مجموعه‌ای از توابع توزیع چگالی $\{f_i(x,t)\}$ در هر گره شبکه x تعریف می‌شود. مرحله برخورد در فضای مومنت^۲ M و مرحله جریان در فضای سرعت V انجام می‌شود.

برای حل میدان جریان از معادله زیر استفاده می‌شود [۲۱]:

$$|f(x+c_i\Delta t, t+\Delta t)\rangle - |f(x,t)\rangle = -M^{-1}S[|m(x,t)\rangle - |m^{eq}(x,t)\rangle] + |F(x,t)\rangle, \quad (1)$$

که $|m(x,t)\rangle$ و $|m^{eq}(x,t)\rangle$ بردارهای مومنت و عبارت $|m\rangle = (m_0, m_1, m_2, \dots, m_8)^T$ می‌باشد. بالانویس T بردار ترانهاده است. عبارت نیرو در معادله (۱) نیروی خارجی است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F = F_x i + F_y j, \\ F_x = 3\omega_i \rho_{nf} g \beta_{nf} \sin \phi(T - T_m), \\ F_y = 3\omega_i \rho_{nf} ((g \beta_{nf} \cos \phi(T - T_m) - Av)) \quad (2)$$

که A از معادله زیر به دست می‌آید:

$$A = \frac{Ha^2 \nu}{n^2} \quad (3)$$

و عدد هارتمن نیز از معادله $Ha = LB\sqrt{\sigma_{nf}/\mu_{nf}}$ محاسبه می‌شود. نیروی خارجی در واقع برآیند حاصل از نیروی میدان مغناطیسی و جاذبه است. با توجه به جهت اعمال میدان مغناطیسی [۲۲]، نیروی ناشی از میدان مغناطیسی تنها در جهت y وارد می‌شود.

رابطه بین فضای سرعت و فضای مومنت با معادله زیر بیان می‌شود [۲۱]:

$$|m\rangle = M |f\rangle, |f\rangle = M^{-1} |m\rangle. \quad (4)$$

با توجه به اینکه در کار حاضر از مدل D2Q9 (مطابق با شکل ۲) استفاده شده است، سرعت‌های مشخصه (c_i) از معادله زیر قابل محاسبه خواهند بود:

$$c_i = \begin{cases} (0,0) & , i=0 \\ (\cos[(i-1)\pi/2], \sin[(i-1)\pi/2])c & , i=1-4, \\ \sqrt{2}(\cos[(2i-9)\pi/4], \sin[(2i-9)\pi/4])c & , i=5-8 \end{cases} \quad (5)$$

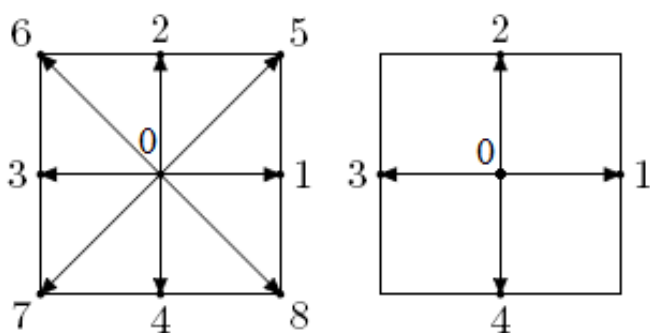
که در آن $c = \Delta x / \Delta t$ بوده و با توجه به اینکه $(\Delta x = \Delta t = 1)$ است، مقدار c برابر واحد خواهد بود.

ماتریس M برای مدل D2Q9 به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۱]:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

با توجه به اینکه ماتریس M متعامد است، MM^T ماتریسی قطری بوده و بنابراین M^{-1} از معادله زیر به دست خواهد آمد:

$$M^{-1} = M^T (MM^T)^{-1}. \quad (7)$$



مدل D2Q9

مدل D2Q5

Fig. 2. D2Q5 and D2Q9 models

شکل ۲: مدل D2Q5 و D2Q9

مومنت‌های مدل D2Q9 نیز از معادله زیر به دست می‌آیند [۲۱]:

$$|m\rangle = (\rho, e, \varepsilon, j_x, q_x, j_y, q_y, p_{xx}, p_{yy})^T, \quad (8)$$

که $m_0 = \rho$ چگالی سیال، $m_1 = e$ جمله انرژی، $m_2 = \varepsilon$ جمله مربع انرژی، $m_{3,5} = j_{x,y}$ مولفه‌های مومنتوم، $\mathbf{j} = (j_x, j_y) = (\rho u, \rho v)$ و $m_{4,6} = q_{x,y}$ مولفه‌های شار انرژی و $m_{7,8} = p_{xx,yy}$ مولفه‌های تانسور نرخ کرنش هستند. مومنت‌های تعادلی مدل D2Q9 با معادلات زیر بیان می‌شوند [۲۱]:

$$m_1^{eq} = e^{eq} = -2\rho + 3(j_x^2 + j_y^2), \\ m_2^{eq} = \varepsilon^{eq} = \rho - 3(j_x^2 + j_y^2), \\ m_4^{eq} = q_x^{eq} = -j_x, \\ m_6^{eq} = q_y^{eq} = -j_y, \\ m_7^{eq} = p_{xx}^{eq} = (j_x^2 - j_y^2), \\ m_8^{eq} = p_{xy}^{eq} = j_x j_y. \quad (9)$$

با استفاده از مومنت‌های تعادلی بالا، سرعت صوت شبکه $c_s = 1/\sqrt{3}$ خواهد بود. ماتریس قطری S نیز از معادله زیر به دست می‌آید [۲۱]:

$$S = \text{diag}(1.0, 1.4, 1.4, s_3, 1.2, s_5, 1.2, s_7, s_8), \quad (10)$$

- 1 Boussinesq
- 2 Moment

که به دلیل جلوگیری از ناپایداری در مدل D2Q5 مقدار a باید کوچکتر از یک باشد [۲۳ و ۲۴]. توابع توزیع تعادلی برای میدان دما نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$g_i^{eq} = \omega_i T (1 + 3c_i \cdot \mathbf{u}), \quad (20)$$

که برای مدل D2Q5 مقادیر $\omega_{1-4} = 1/4$ و $\omega_0 = 0$ است.

۳-۲- شرایط مرزی

برای دیواره‌های جامد محفظه از شرط مرزی کمانه‌کردن در میدان جریان استفاده شده است. این شرط همان شرط مرزی عدم لغزش نیز نامیده می‌شود. در این شرط ذره پس از برخورد به دیواره کمانه کرده و به دامنه حل برمی‌گردد [۲۵]. بنابراین و با توجه به شکل ۲:

برای دیواره شمالی:

$$f_4 = f_2, \quad f_7 = f_5, \quad f_8 = f_6. \quad (21)$$

برای دیواره جنوبی:

$$f_2 = f_4, \quad f_6 = f_8, \quad f_5 = f_7. \quad (22)$$

برای دیواره شرقی:

$$f_3 = f_1, \quad f_6 = f_8, \quad f_7 = f_5. \quad (23)$$

برای دیواره غربی:

$$f_1 = f_3, \quad f_5 = f_7, \quad f_8 = f_6. \quad (24)$$

در میدان دما برای دیواره‌های شمالی و جنوبی از شرط مرزی آدیاباتیک استفاده شده است. بنابراین برای دیواره شمالی:

$$g_{i,n} = g_{i,n-1}, \quad i = 0, \dots, 4. \quad (25)$$

برای دیواره جنوبی:

$$g_{i,0} = g_{i,1}, \quad i = 0, \dots, 4. \quad (26)$$

برای دیواره‌های شرقی و غربی نیز شرط مرزی زیر استفاده شده است [۲۳]:

$$g_3 = -g_1. \quad (27)$$

$$g_1 = -g_3 + 2\sqrt{3}\alpha T_h. \quad (28)$$

۳-۳- معادلات ناویر-استوکس برای میدان جریان و میدان دما

معادلات ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر برای میدان جریان و میدان دما را می‌توان با استفاده از بسط چابمن-انزوکوک^۱ به دست آورد. جزئیات بیشتر در مرجع [۱۷] مورد بحث قرار گرفته است. بنابراین به کمک این بسط معادلات پیوستگی، مومنتوم و انرژی برای جریان جابجایی طبیعی هیدرودینامیک مغناطیسی به صورت زیر نوشته می‌شود:

که $s_i \in (0, 2)$ است. مقادیر s_i می‌توانند به کمک یک تحلیل پایداری خطی به دست آیند [۱۴]. مقادیر s_3, s_4, s_5, s_6 دلخواه بوده و برابر واحد در نظر گرفته می‌شوند. s_7, s_8 نیز از معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$s_7 = s_8 = 2 / (1 + 6\nu), \quad (11)$$

در معادله بالا ν لزجت سینماتیکی سیال است.

در اینجا می‌توان اشاره کرد که با قرار دادن $s_1 = s_2 = s_4 = s_6 = s_7 = s_8 = 1/\tau$ می‌توان به مدل توابع توزیع تکی روش شبکه بولتزمن دست یافت. برای حل میدان دما نیز از معادله زیر استفاده می‌شود [۲۱]:

$$\begin{aligned} |g(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t) - |g(\mathbf{x}, t) &= \\ -\Omega [|g(\mathbf{x}, t) - |g^{eq}(\mathbf{x}, t)] & \end{aligned} \quad (12)$$

برای مدل D2Q5 (شکل ۲) سرعت‌های مشخصه (c_i) از معادله زیر قابل محاسبه خواهند بود:

$$c_i = \begin{cases} (0, 0) & , \quad i = 0 \\ (\cos[(i-1)\pi/2], \sin[(i-1)\pi/2])c & , \quad i = 1-4 \end{cases} \quad (13)$$

Ω عملگر برخورد بوده و $\Omega = M^{-1}SM$ است. و ماتریس انتقال M نیز از معادله زیر به دست می‌آید [۲۳]:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

ماتریس M ماتریسی متعامد می‌باشد. دمای T از معادله زیر به دست می‌آید [۲۴]:

$$T = \sum_{i=0}^4 g_i. \quad (15)$$

مومنت‌های تعادلی m_{eq} نیز از معادلات زیر به دست می‌آیند [۲۴]:

$$m_0^{eq} = T, \quad m_1^{eq} = uT, \quad m_2^{eq} = vT, \quad m_3^{eq} = aT, \quad m_4^{eq} = 0, \quad (16)$$

که a مقداری ثابت است. ماتریس قطری S نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S = \text{diag}(1, s_1, s_2, s_3, s_4), \quad (17)$$

جزئیات انتخاب مقادیر s_i به صورت مفصل در مرجع [۲۴] مورد بحث قرار گرفته است. در کار حاضر s_i ها از معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{s_2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}, \\ \frac{1}{s_3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{s_4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, \end{aligned} \quad (18)$$

با انتخاب‌های بالا قید زیر ایجاد خواهد شد:

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}(4+a)}{60}, \quad (19)$$

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{1 - \phi^{2.5}} \quad (43)$$

$$k_{nf} = k_f \left[\frac{k_s + 2k_f + 2\phi(k_f - k_s)}{k_s + 2k_f - \phi(k_f - k_s)} \right] \quad (44)$$

عدد ناسلت محلی و متوسط نیز از معادلات زیر محاسبه می‌شوند:

$$Nu_y = -\frac{k_{nf}}{k_f} \frac{L}{\Delta T} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad Nu_{avg} = \frac{1}{L} \int_0^L Nu_y dy \quad (45)$$

در معادلات بالا ΔT اختلاف دما بین دیواره های گرم و سرد است. در نهایت شرط همگرایی برنامه محاسباتی نیز به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$Error = Max |T^{n+1} - T^n| \leq 10^{-8} \quad (46)$$

۳-۵- روش حل جابجایی طبیعی

برای حصول اطمینان از اینکه برنامه محاسباتی در نزدیکی جریان تراکم‌ناپذیر همگرا شود، سرعت مشخصه $(U_0 = \sqrt{g\beta_f(T_h - T_c)L})$ باید در مقایسه با سرعت صوت کوچک باشد. در کار حاضر، سرعت مشخصه 0.1 سرعت صوت در نظر گرفته شده است. بنابراین با ثابت بودن عدد رایلی، عدد پراتل و عدد ماخ، لزجت و ضریب نفوذ از معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\nu_f = \sqrt{\frac{Ma^2 n^2 Pr c_s^2}{Ra}} \quad (47)$$

$$\alpha_f = \frac{\nu_f}{Pr} \quad (48)$$

که $c_s = 1/\sqrt{3}$ است. همچنین عدد رایلی نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Ra = \frac{g \beta_f L^3 Pr (T_h - T_c)}{\nu_f^2} \quad (49)$$

در نهایت، مقادیر ضرایب تخفیف برای میدان جریان و میدان دما به ترتیب از لزجت و ضریب نفوذ به دست می‌آیند.

جدول ۱: خواص ترموفیزیکی نانوذرات و آب (در دمای ۳۰۰ کلوین) [۲۶]

Table 1. Thermophysical properties of water and nanoparticles

اکسید تیتانیوم	آب	
-	۶/۲	Pr
۴۲۵۰	۹۹۷/۱	ρ (kg/m ³)
۶۸۶/۲	۴۱۷۹	C_p (J/kgK)
۸/۹۵۳۸	۰/۶۱۳	k (W/mK)
۰/۹×۱۰ ^{-۵}	۲۱×۱۰ ^{-۵}	β (K ⁻¹)
-	۰/۰۰۱۰۰۳	μ (Ns/m ²)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (29)$$

$$\rho_{nf} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_{nf} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F_x. \quad (30)$$

$$\rho_{nf} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu_{nf} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + F_y. \quad (31)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_{nf} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (32)$$

که F_x و F_y به ترتیب برآیند نیروها در جهت x و y بوده و به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$F_x = (\rho \beta_{nf}) g \sin \phi (T - T_c), \quad (33)$$

$$F_y = (\rho \beta)_{nf} g \cos \phi (T - T_c) - \frac{Ha^2 \mu_{nf} \nu}{L^2}. \quad (34)$$

و شرایط مرزی به صورت زیر می‌باشند:
برای دیواره شمالی:

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (35)$$

برای دیواره جنوبی:

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (36)$$

برای دیواره شرقی:

$$u = v = 0, \quad T = T_c \quad (37)$$

برای دیواره غربی:

$$u = v = 0, \quad T = T_h \quad (38)$$

۳-۴- معادلات نانوسیال

خواص ترموفیزیکی نانوسیال به کمک روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\rho_{nf} = (1 - \phi)\rho_f + \phi\rho_s \quad (39)$$

$$\beta_{nf} = (1 - \phi)\beta_f + \phi\beta_s \quad (40)$$

$$(\rho C_p)_{nf} = (1 - \phi)(\rho C_p)_f + \phi(\rho C_p)_s \quad (41)$$

$$\alpha_{nf} = \frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} \quad (42)$$

برای مدل کردن لزجت دینامیکی نانوسیال از مدل برینکمن [۲۶] و برای مدل کردن ضریب هدایت حرارتی نانوسیال نیز از مدل ماکسول-گارتنر استفاده می‌شود [۲۶]:

۵- نتایج و بحث

شکل ۴ تأثیر تغییرات شیب محفظه و عدد هارتمن را بر خطوط جریان برای عدد رایلی 10^5 و کسر حجمی ۳٪ نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، در $Ha=0$ با افزایش زاویه شیب محفظه به 60° درجه، خطوط جریان از حالت مستطیلی شکل به دایره هم‌مرکز در سراسر محفظه تبدیل می‌شوند که علت آن قوی شدن مولفه افقی نیروی شناوری است. در $Ha=30$ جریان نانوسیال کمی تضعیف شده و خطوط جریان به طور تقریبی به شکل دایره هم‌مرکز در می‌آیند و افزایش زاویه شیب محفظه تا 60° درجه تأثیری بر الگوی خطوط جریان ندارد. در $Ha=60$ ، نیروی لورنتز قوی‌تر شده و در جهت عکس سرعت‌های عمودی نانوسیال وارد می‌شود. بنابراین خطوط جریان شکل عمودی به خود می‌گیرند و افزایش زاویه شیب محفظه به 60° درجه تأثیر چندانی بر الگوی خطوط جریان ندارد. در واقع در این حالت، قدرت نیروی بازدارنده لورنتز خیلی بیشتر از نیروی شناوری است. در زاویه 90° درجه، با توجه به نحوه قرارگیری دیواره گرم و سرد، برای به وجود آمدن یک جریان جابجایی قوی نیاز به نیروی شناوری بیشتر می‌باشد. در عدد رایلی 10^5 جریان به وجود آمده قادر نیست کل محفظه را پوشش دهد و به دو گردابه تقسیم می‌شود. با افزایش عدد هارتمن، جریان بیشتر تضعیف می‌شود و گردابه‌ها شکل متقارن به خود می‌گیرند.

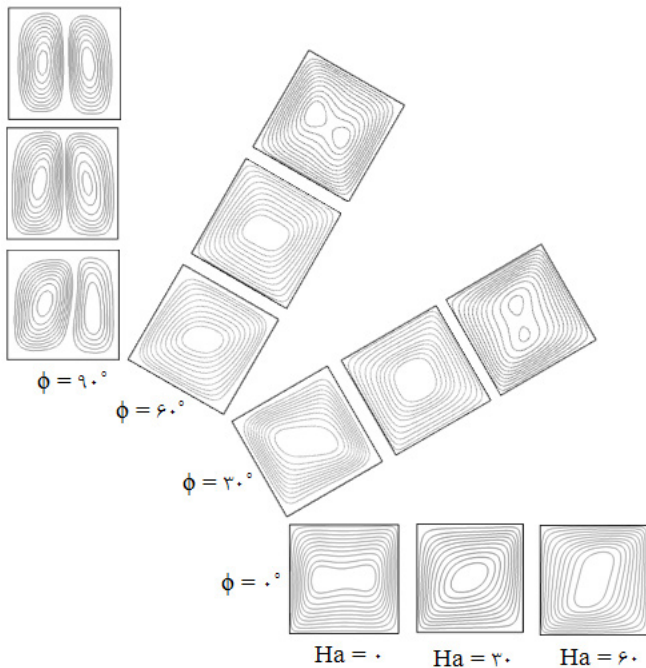


Fig. 4. Streamlines at various inclination angles, $Ra=10^5$, $\phi=3\%$ and $Ha=0, 30$, and 60

شکل ۴: خطوط جریان در زوایای مختلف محفظه، عدد رایلی 10^5 ، اعداد هارتمن ۰، ۳۰ و ۶۰ و کسر حجمی ۳٪

شکل ۵ تأثیر تغییرات زاویه شیب محفظه و عدد هارتمن را بر خطوط هم‌دم در عدد رایلی 10^5 و کسر حجمی ۳٪ نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، در $Ha=0$ با توجه به اینکه قدرت میدان

۴- بررسی وابستگی حل به شبکه و اعتبارسنجی حل عددی

برای بررسی وابستگی حل به اندازه شبکه، عدد ناسلت محلی روی دیواره گرم برای شش اندازه شبکه مختلف مورد محاسبه قرار گرفته و در شکل ۳ نشان داده شده است. همانطور که از این شکل مشاهده می‌شود، شبکه 101×101 برای حل عددی مناسب خواهد بود.

برای اعتبارسنجی حل عددی، عدد ناسلت متوسط حاصل از برنامه محاسباتی این تحقیق با نتایج کار قاسمی و همکاران [۲۷]، که در شبیه‌سازی خود از روش عددی حجم محدود و الگوریتم سیمپل پاتنکار [۲۸] و نیز ابعاد شبکه 100×100 استفاده کرده‌اند، در جدول ۲ مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج به دست‌آمده با مطالعه قاسمی و همکاران [۲۷] تطابق خوبی دارند.

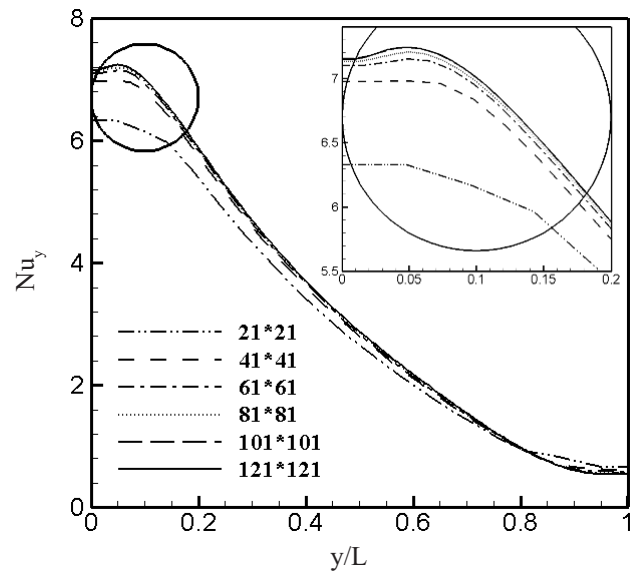


Fig. 3. Local Nusselt number on the hot wall for different grid sizes
شکل ۳: عدد ناسلت محلی روی دیواره گرم برای اندازه‌های شبکه مختلف

جدول ۲: مقایسه عدد ناسلت متوسط کار حاضر با نتایج قاسمی و همکاران [۲۷] در $\phi=0^\circ$ ، $Ha=30$ و اعداد رایلی مختلف

Table 2. Comparison of the average Nusselt number of the present work with results of Ghasemi et al. [29] at $\phi=0^\circ$, $Ha=30$, and different Rayleigh numbers

$\phi = 4\%$	$\phi = 2\%$	$\phi = 0\%$	Ra
۱/۱۲۱	۱/۰۷۹	۱/۰۰۲	قاسمی و همکاران [۲۹]
۱/۱۳۱	۱/۰۷۹	۱/۰۲۸	نتایج کار حاضر
۳/۱۲۴	۳/۱۳۸	۳/۱۵۰	قاسمی و همکاران [۲۹]
۳/۳۰۴	۳/۲۵۴	۳/۱۸۳	نتایج کار حاضر
۱۷/۴۴۹	۱۷/۱۹۷	۱۶/۹۲۹	قاسمی و همکاران [۲۹]
۱۷/۱۵۱	۱۶/۴۴۳	۱۶/۲۵۸	نتایج کار حاضر

مقدار عدد ناسلت متوسط به دست آمده در زاویه شیب ۳۰ درجه و کمترین مقدار آن در زاویه شیب صفر درجه می باشد. در یک زاویه شیب و یک عدد هارتمن معین، افزایش کسر حجمی نانوذرات تا ۳ درصد، موجب افزایش عدد ناسلت متوسط و بعد از آن موجب کاهش عدد ناسلت متوسط می شود. همچنین با مقایسه دو شکل ۶ و ۷ در یک کسر حجمی نانوذره خاص، افزایش عدد هارتمن موجب کاهش در عدد ناسلت متوسط می شود. در واقع در اعداد هارتمن زیاد قدرت نیروی شناوری خیلی کمتر از نیروی بازدارنده لورنتز است.

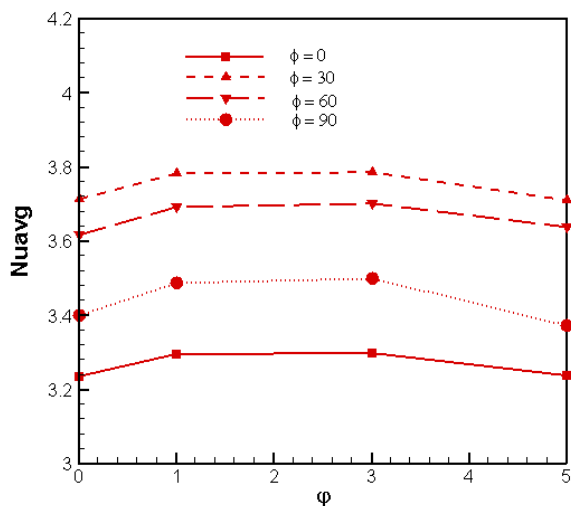


Fig. 6. Average Nusselt number for different ϕ and inclination angle at $Ha=30$ and $Ra=10^5$

شکل ۶: عدد ناسلت متوسط به دست آمده برای زوایای مختلف شیب محفظه و کسر حجمی مختلف در $Ha = 30$ و $Ra = 10^5$

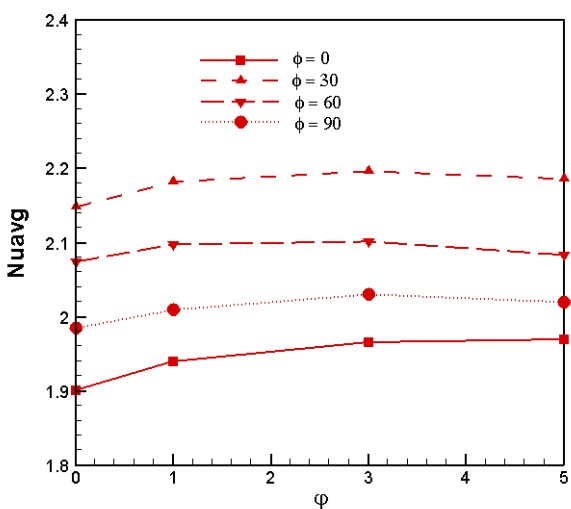


Fig. 7. Average Nusselt number for different ϕ and inclination angle at $Ha=60$ and $Ra=10^5$

شکل ۷: عدد ناسلت متوسط به دست آمده برای زوایای مختلف شیب محفظه و کسر حجمی مختلف در $Ha = 60$ و $Ra = 10^5$

مغناطیسی برابر صفر است، ساز و کار غالب انتقال حرارت به صورت جابجایی طبیعی می باشد. با افزایش زاویه شیب محفظه در این عدد هارتمن، خطوط همدمای تغییر شکل داده و به صورت قارچی شکل می شود. با افزایش عدد هارتمن به ۳۰ و ۶۰ با توجه به غالب شدن قدرت نیروی بازدارنده لورنتز بر نیروی شناوری، الگوی خطوط همدمای با افزایش زاویه شیب محفظه تا ۶۰ درجه تغییر چندانی نمی کند. در زاویه شیب ۹۰ درجه و اعداد هارتمن ۳۰ و ۶۰ جابجایی طبیعی تضعیف شده و خطوط جریان صورت قارچی شکل به خود می گیرند. در عدد هارتمن ۶۰ این تضعیف بیشتر شده و خطوط جریان به حالت موازی شدن پیش می روند. در این حالت ساز و کار غالب انتقال حرارت به صورت هدایت است.

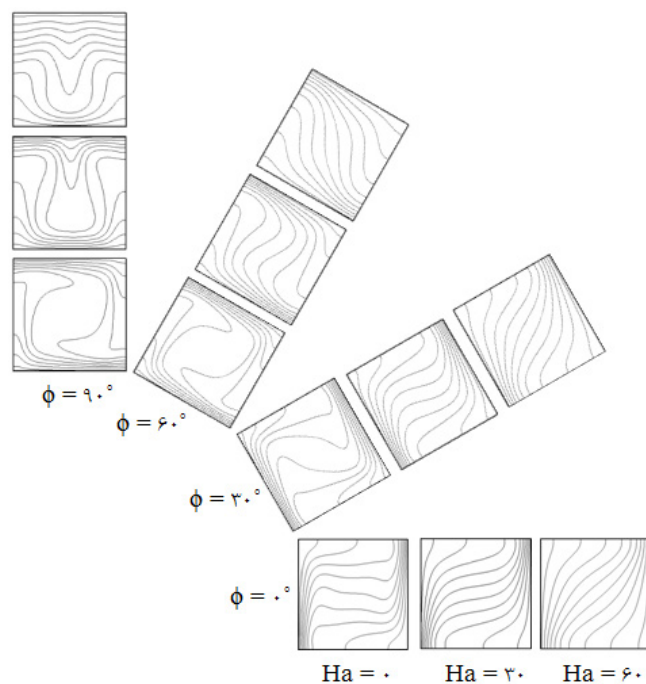


Fig. 5. Isotherms at various inclination angles, $Ra=10^5$, $\phi=3\%$ and $Ha=0, 30$, and 60

شکل ۵: خطوط همدمای در زوایای مختلف محفظه، عدد رایلی ۱۰^۵، اعداد هارتمن ۰، ۳۰ و ۶۰ و کسر حجمی ۳٪

شکل های ۶ و ۷ تغییرات عدد ناسلت متوسط به دست آمده را در زوایای مختلف شیب محفظه و کسر حجمی مختلف به ترتیب در $Ha=30$ و $Ha=60$ نشان می دهد. همانطور که در این شکل مشاهده می شود، با افزایش زاویه شیب محفظه از ۰ به ۳۰ درجه، عدد ناسلت متوسط افزایش می یابد و با افزایش بیشتر زاویه شیب محفظه، عدد ناسلت متوسط کاهش پیدا می کند. با توجه به اینکه عدد ناسلت متوسط هم به نیروی لورنتز و هم به نیروی شناوری وابسته می باشد، افزایش زاویه شیب محفظه تا ۳۰ درجه باعث غلبه نیروی شناوری بر نیروی لورنتز شده و ناسلت متوسط را افزایش می دهد، اما با افزایش بیشتر شیب محفظه نیروی شناوری قادر به غلبه بر نیروی لورنتز نبوده و ناسلت متوسط کاهش پیدا می کند. بیشترین

۶- نتیجه گیری

در این تحقیق، از مدل توابع توزیع دوتایی با ضریب تخفیف چندتایی روش شبکه بولتزمن برای شبیه سازی عددی جریان جابجایی طبیعی نانوسیال در یک محفظه مربعی شبیدار تحت اثر یک میدان مغناطیسی استفاده شد. به صورت خلاصه، نتایج حاصل از شبیه سازی عددی در زیر بیان می شوند:

- به منظور اعتبارسنجی مدل ارائه شده، نتایج حاصل از شبیه سازی عددی تحقیق حاضر با کارهای عددی انجام شده مقایسه گردید و مشاهده شد که نتایج حاصل از استفاده از مدل توابع توزیع دوتایی با ضریب تخفیف چندتایی تطابق خوبی با کارهای انجام شده دارد.

- در $Ha=0$ و $Ra=10^5$ و $\phi=3\%$ ، با افزایش زاویه شیب محفظه به 60° درجه، مولفه افقی نیروی شناوری قوی تر شده و خطوط جریان از حالت مستطیلی به دوار هم مرکز تبدیل می شود.

- در $Ra=10^5$ ، اعداد هارتمن 30 و 60 ، کسر حجمی 3% و زاویه شیب 90° درجه، جریان به وجود آمده قادر نیست کل محفظه را پوشش دهد و به دو گردابه تقسیم می شود.

- در $Ra=10^5$ و 60 و $Ha=30$ و $\phi=3\%$ ، قدرت نیروی بازدارنده لورنتز بر نیروی شناوری غالب شده و افزایش زاویه شیب محفظه تا 60° درجه تأثیری بر الگوی خطوط هم دما نخواهد داشت.

- در زاویه شیب 90° درجه، $Ra=10^5$ و اعداد هارتمن 30 و 60 ، خطوط هم دما به صورت قارچی شکل می شود.

- در $Ha=30$ و $Ra=10^5$ با افزایش زاویه شیب محفظه از 0° به 30° درجه، عدد ناسلت متوسط افزایش می یابد و با افزایش بیشتر زاویه شیب محفظه، عدد ناسلت متوسط کاهش پیدا می کند.

- در یک عدد رایلی و در یک کسر حجمی نانوذره خاص، افزایش عدد هارتمن موجب کاهش در عدد ناسلت متوسط می شود.

فهرست علائم

ماتریس انتقال	M	بزرگی میدان مغناطیسی، T	B
مومنت	m	سرعت مشخصه در جهت i	c_i
عدد ماخ	Ma	ظرفیت گرمایی ویژه در فشار ثابت، $Jkg^{-1}K^{-1}$	C_p
عدد ناسلت	Nu	نیروی خارجی، N	F
فشار، Pa	p	تابع توزیع چگالی	f_i
عدد پرانتل	Pr	شتاب جاذبه، m/s^2	g
عدد رایلی	Ra	تابع توزیع دما	g_i
دما، K	T	عدد هارتمن	Ha
زمان، s	t	ضریب رسانایی حرارتی، $W/m.K$	k
مولفه های سرعت در جهت x, y ، m/s	u, v	طول و عرض محفظه، m	L
مختصات کارترزین	x, y	تعداد نقاط شبکه در راستای x یا y	n
علائم یونانی			
ضریب نفوذ حرارتی، m^2s^{-1}	α		
ضریب انبساط حرارتی، K^{-1}	β		
گام زمانی، s	Δt		
گام مکانی، m	Δx		
لزجت دینامیکی، Nsm^{-2}	μ		
عملگر برخورد	Ω		
کسر حجمی نانوذرات	ϕ		
زاویه شیب محفظه	ϕ		
ضریب رسانایی الکتریکی، $A^2s^3/m.kg$	σ		
چگالی، kgm^{-3}	ρ		
ضریب تخفیف زمانی، s	τ		
ضریب وزنی شبکه	ω_i		
لزجت سینماتیکی، m^2s^{-1}	ν		
زیر نویس ها و بالانویس ها			
متوسط	avg		
سرد	c		
تعادلی	eq		
سیال	f		
گرم	h		
شماره لینک مدل شبکه	i		
نانوسیال	nf		
نانوذرات	s		

- Boltzmann simulation of MHD natural convection in a nanofluid-filled cavity with linear temperature distribution, *Powder Technol.*, 256(Supplement C) (2014) 257-271.
- [14] P. Lallemand, L.-S. Luo, Theory of the Lattice Boltzmann Method: Dispersion, Dissipation, Isotropy, Galilean Invariance, and Stability, *Phys Rev E*, 61 (2000) 6546-6562.
- [15] I. Ginzburg, D. d'Humières, Multi-reflection boundary conditions for lattice Boltzmann models, *Phys Rev E*, 68 (2003) 066614-066611.
- [16] D. d'Humières, Generalized Lattice-Boltzmann Equations, in: *Rarefied Gas Dynamics: Theory and Simulations*, B.D. Shizgal, D.P. Weaver (Eds.), Progress in Astronautics and Aeronautics, AIAA, Washington, DC, 1992, pp. 450-458.
- [17] R. Du, B. Shi, X. Chen, Multi-relaxation-time lattice Boltzmann model for incompressible flow, *Phys. Lett. A*, 359(6) (2006) 564-572.
- [18] X.D. Niu, C. Shu, Y.T. Chew, Y. Peng, A momentum exchange-based immersed boundary-lattice Boltzmann method for simulating incompressible viscous flows, *Phys. Lett. A*, 354(3) (2006) 173-182.
- [19] L. Zheng, B. Shi, Z. Guo, Multiple-relaxation-time model for the correct thermo hydrodynamic equations, *Phys Rev E*, 78 (2008) 026705.
- [20] A. Rahmati, M. Ashrafizadeh, E. Shirani, Novel Hybrid Finite-Difference Thermal Lattice Boltzmann Models for Convective Flows, *Heat Transf. Res.*, 40 (2009) 747-775.
- [21] A.A. Mohamad, *Lattice Boltzmann Method: Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes*, Springer London, 2011.
- [22] P.A. Davidson, *An Introduction to Magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press, 2001.
- [23] J. Wang, D. Wang, P. Lallemand, L.-S. Luo, Lattice Boltzmann simulations of thermal convective flows in two dimensions, *Comput. Math. Appl.*, 65(2) (2013) 262-286.
- [24] I. Ginzburg, D. Dhumieres, A. Kuzmin, Optimal Stability of Advection-Diffusion Lattice Boltzmann Models with Two Relaxation Times for Positive/Negative Equilibrium, *J. Stat. Phys.*, 139 (2010) 1090-1143.
- [25] M.C. Sukop, D.T. Thorne, *Lattice Boltzmann Modeling: An Introduction for Geoscientists and Engineers*, Springer, 2006.
- [26] K. Khanafer, K. Vafai, M. Lightstone, Buoyancy-driven heat transfer enhancement in a two-dimensional enclosure utilizing nanofluids, *Int. J. Heat Mass Transfer*, [1] C. Vives, C. Perry, Effects of magnetically damped convection during the controlled solidification of metals and alloys, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 30(3) (1987) 479-496.
- [2] H. P. Utech, M. Flemings, Elimination of Solute Banding in Indium Antimonide Crystals by Growth in a Magnetic Field, *J. Appl. Phys.*, 37 (1966) 2021-2024
- [3] K. Okada, H. Ozoe, Experimental Heat Transfer Rates of Natural Convection of Molten Gallium Suppressed Under an External Magnetic Field in Either the X, Y, or Z Direction, *J. Heat Transfer*, 114(1) (1992) 107-114.
- [4] J.P. Garandet, T. Alboussière, R. Moreau, Buoyancy Driven Convection in a Rectangular Enclosure with a Transverse Magnetic Field, *Int. J. Heat Mass Transfer* 35 (1992) 741-748.
- [5] N. Rudraiah, R.M. Barron, M. Venkatachalappa, C.K. Subbaraya, Effect of a magnetic field on free convection in a rectangular enclosure, *Int. J. Eng. Sci.*, 33(8) (1995) 1075-1084.
- [6] S. Jani, M. Mahmoodi, M. Amini., Magnetohydrodynamic Free Convection in a Square Cavity Heated from Below and Cooled from Other Walls, *Int. J. Mech. Indu. Sci. Eng.*, 7(4) (2013) 331-336.
- [7] M. Pirmohammadi, M. Ghassemi, Effect of magnetic field on convection heat transfer inside a tilted square enclosure, *Int. Commun. Heat Mass* 36(7) (2009) 776-780.
- [8] M. Sheikholeslami, M. Gorji-Bandpy, D.D. Ganji, S. Soleimani, Natural convection heat transfer in a cavity with sinusoidal wall filled with CuO-water nanofluid in presence of magnetic field, *J Taiwan Inst Chem Eng* 45(1) (2014) 40-49.
- [9] S. Succi, *The Lattice Boltzmann Equation: For Fluid Dynamics and Beyond*, Clarendon Press, 2001.
- [10] D. Yu, R. Mei, L.-S. Luo, W. Shyy, Viscous flow computations with the method of lattice Boltzmann equation, *Prog. Aerosp. Sci.*, 39(5) (2003) 329-367.
- [11] A. Karimipour, A. Hossein Nezhad, A. D'Orazio, M. Hemmat Esfe, M.R. Safaei, E. Shirani, Simulation of copper-water nanofluid in a microchannel in slip flow regime using the lattice Boltzmann method, *Eur J Mech B Fluids*, 49(Part A) (2015) 89-99.
- [12] H.R. Ashorynejad, A.A. Mohamad, M. Sheikholeslami, Magnetic field effects on natural convection flow of a nanofluid in a horizontal cylindrical annulus using Lattice Boltzmann method, *Int. J. Therm. Sci.*, 64(Supplement C) (2013) 240-250.
- [13] A. Mahmoudi, I. Mejri, M.A. Abbassi, A. Omri, Lattice

1756.

[28] S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, 1980.

46(19) (2003) 3639-3653.

[27] B. Ghasemi, S.M. Aminossadati, A. Raisi, Magnetic field effect on natural convection in a nanofluid-filled square enclosure, *Int. J. Therm. Sci.*, 50(9) (2011) 1748-

Please cite this article using:

A.R. Rahmati and A. Najjamezami, "Simulation of Magneto-hydrodynamics Natural Convection of Nanofluid in a Tilted Cavity Using Lattice Boltzmann Method" *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 49(3) (2017) 595-604.
DOI: 10.22060/mej.2016.733

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

