



تحلیل تنش‌های مکانیکی-حرارتی در دیسک‌های دوار با ضخامت و خواص متغیر در راستای شعاعی

کیوان ترابی^{۱*}، حسن افشاری^۲

^۱ دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

^۲ گروه مکانیک، واحد خمینی شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، خمینی شهر، اصفهان، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۹ تیر ۱۳۹۵
بازنگری: ۲۲ شهریور ۱۳۹۵
پذیرش: ۴ مهر ۱۳۹۵
ارائه آنلاین: ۱۹ آبان ۱۳۹۵

کلمات کلیدی:

تحلیل مکانیکی-حرارتی
دیسک دوار
مواد مدرج تابعی
مدل تامورا-توموتا-اوزاوا
روش تفاضلات مربعی

چکیده: در این پژوهش ابتدا معادلات حاکم بر توزیع دما و تحلیل تنش‌های مکانیکی و حرارتی در یک دیسک دوار با ضخامت و خواص متغیر در راستای شعاعی استخراج می‌شوند. تمامی خواص مکانیکی و حرارتی ماده بر اساس یک تابع توانی تغییر می‌کنند بطوریکه که کسر حجمی ماده در راستای شعاعی بین دو مقدار دلخواه تغییر می‌کند. در استخراج معادلات حرارت، انتقال حرارت همرفتی از طریق سطوح دو طرف دیسک نیز در نظر گرفته می‌شوند و شرایط مرزی حرارتی دیسک به شکل شرایط دما ثابت در لبه داخلی و انتقال حرارت همرفتی در لبه خارجی دیسک در نظر گرفته می‌شود. تغییرات ضریب انتقال حرارت همرفتی در راستای شعاعی و وابستگی آن به سرعت زاویه‌ای دیسک نیز در نظر گرفته شده‌اند. با توجه به پیچیدگی‌های موجود در معادلات، از روش تفاضلات مربعی برای حل تمامی معادلات استفاده شده و توزیع دما و مولفه‌های تنش و جابجایی در دیسک بدست خواهند آمد. در نهایت تاثیر چگونگی تغییرات ضخامت و خواص ماده در راستای شعاعی بر روی توزیع دما، تنش و جابجایی در دیسک بررسی می‌گردد. در نهایت با استفاده از مدل تامورا-توموتا-اوزاوا و از طریق مقایسه‌ی تنش‌ها با مقادیر مجاز بدست آمده، تسلیم یا عدم تسلیم در نقاط مختلف دیسک بررسی می‌گردد.

۱- مقدمه

تحلیل تنش در دیسک‌های دوار یکی از مسائلی می‌باشد که در موارد مختلف مانند کمپرسورهای گریز از مرکز، توربین‌های بخار و گاز، تجهیزات هوا-فضا و فلاپویل‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. با توجه به تفاوت بالایی تنش موجود در مقاطع مختلف برای یک دیسک دوار با ضخامت یکنواخت، استفاده از دیسک‌هایی با ضخامت غیریکنواخت بیشتر می‌باشد؛ در این حالت توزیع تنش تا حدودی می‌تواند اصلاح گردد؛ بنابراین معمولاً در طراحی دیسک‌ها از مقطع غیریکنواخت استفاده می‌شود به گونه‌ای که بیشترین ضخامت در لبه درگیر داخلی دیسک وجود داشته و این مقطع به صورت یکنواخت تا لبه بیرونی و آزاد آن کاهش می‌یابد [۱]. همچنین با توجه به حرارت بالایی که در برخی موارد دیسک‌ها در معرض آن قرار می‌گیرند، باید به شکل همزمان قابلیت بالا برای تحمل بارگذاری مکانیکی و تحمل دمای بالا و تنش‌های حرارتی زیاد در دیسک وجود داشته باشد که این مسأله استفاده از مواد مدرج تابعی را در دیسک‌ها توجیه می‌نماید. به همین دلیل تحلیل تنش‌های مکانیکی و حرارتی در یک دیسک با مقطع غیریکنواخت ساخته شده از مواد مدرج تابعی موضوع جالب برای تحلیل و بررسی بوده به گونه‌ای که محققان زیادی وقت خود را صرف بررسی این موضوع نموده‌اند. ردی و سرینات [۲] اقدام به تحلیل و تعیین تنش‌های الاستیک در یک دیسک دوار غیرایزوتروپیک با ضخامت متغیر نمودند. تحلیل تنش در

یک دیسک دوار کاملاً پلاستیک شده توسط گوون [۳] ارائه شد. اراسلان و اورسان [۴] همین مسأله را در حالتی که ضخامت دیسک به شکل نمایی و خواص آن به شکل خطی تغییر کنند، گسترش دادند. حل تحلیلی و عددی برای تعیین تنش و کرنش در یک دیسک دوار با ضخامت متغیر و چگالی متغیر توسط حجتی و حسنی [۵] ارائه گردید. براساس یک روش نیمه تحلیلی، بیات و همکاران [۶] تنش‌های مکانیکی و حرارتی را در یک دیسک دوار با ضخامت متغیر به‌دست آوردند. اراسلان [۷] در مورد تغییر شکل‌های الاستیک و پلاستیک در یک دیسک دوار با ضخامت متغیر تحقیق نمود. او شرایط مرزی را به صورت آزاد، بسته شده در راستای شعاعی و لبه تحت فشار در نظر گرفت.

تحلیل تنش‌های حرارتی نیز در دیسک‌های دوار توجه محققان زیادی را به خود جلب نموده است. حسنی و همکاران [۸] با ترکیب روش‌های آدومیان وردشی و روش تکرار متغیر با روش هوموتوبی، یک حل نیمه تحلیلی برای تحلیل تنش‌های مکانیکی و حرارتی در یک دیسک دوار ساخته شده از مواد هدفمند ارائه نمودند. با استفاده از روش اجزا محدود، شاه زمانیان و همکاران [۹] تحلیل تنش‌های حرارتی ناشی از اصطکاک تماسی در یک دیسک دوار را بررسی نمودند. افسر و گو [۱۰] روش اجزا محدود را به کار برده و یک حل عددی برای تحلیل ترموالاستیک یک دیسک دوار ارائه نمودند.

با فرض تنش صفحه‌ای، کردخیلی و نقدآبادی [۱۱] یک حل نیمه تحلیلی برای حل مسأله ترموالاستیسیته در دیسک‌های توپر و توخالی دوار

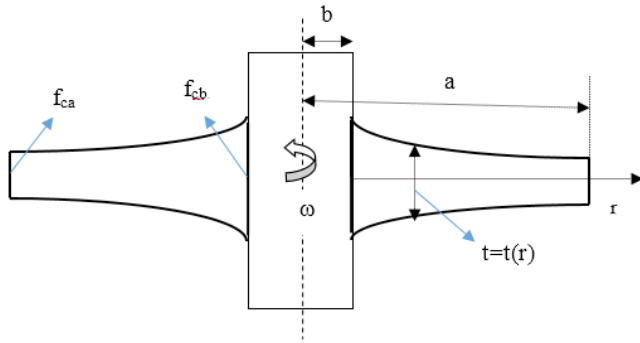


Fig. 1. The geometry of the rotating FG disc with variable thickness.

شکل ۱: دیسک دوار با ضخامت و خواص متغیر در راستای شعاعی

خواص مدرج در همین راستا نشان داده شده است. نحوه تغییرات ضخامت کاملاً دلخواه بوده و تغییر خواص به شکلی است که کسر حجمی جزء سرامیکی (f_c) از لبه داخلی تا لبه خارجی بین دو مقدار دلخواه و براساس یک تابع توانی به شکل زیر تغییر می‌کند:

$$f_c = f_{cb} + (f_{ca} - f_{cb}) \left(\frac{r-b}{a-b} \right)^p \quad (1)$$

که در این رابطه f_{ca} و f_{cb} به ترتیب کسر حجمی سرامیک را در لبه داخلی و خارجی دیسک نشان می‌دهند و p توان پروفیل تغییرات می‌باشد. حال می‌توان هر خاصیت از ماده مانند P را به شکل زیر بیان نمود:

$$P = f_m P_m + f_c P_c \quad (2)$$

که در این رابطه اندیس‌های m و c به ترتیب بیانگر خاصیت در فلز و سرامیک می‌باشند. با بهره‌گیری از رابطه (۱) می‌توان رابطه زیر را بیان نمود:

$$P = P_m + (P_c - P_m) \left[f_{cb} + (f_{ca} - f_{cb}) \left(\frac{r-b}{a-b} \right)^p \right] \quad (3)$$

و در نتیجه مدول الاستیک (E)، نسبت پواسون (ν)، چگالی (ρ)، ضریب انبساط حرارتی (α) و ضریب هدایت حرارتی (k) را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} E(r) &= E_m + (E_c - E_m) \left[f_{cb} + (f_{ca} - f_{cb}) \left(\frac{r-b}{a-b} \right)^p \right] \\ \nu(r) &= \nu_m + (\nu_c - \nu_m) \left[f_{cb} + (f_{ca} - f_{cb}) \left(\frac{r-b}{a-b} \right)^p \right] \\ \rho(r) &= \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left[f_{cb} + (f_{ca} - f_{cb}) \left(\frac{r-b}{a-b} \right)^p \right] \\ \alpha(r) &= \alpha_m + (\alpha_c - \alpha_m) \left[f_{cb} + (f_{ca} - f_{cb}) \left(\frac{r-b}{a-b} \right)^p \right] \\ k(r) &= k_m + (k_c - k_m) \left[f_{cb} + (f_{ca} - f_{cb}) \left(\frac{r-b}{a-b} \right)^p \right] \end{aligned} \quad (4)$$

نمودند. بیات و همکاران [۱۲] یک حل دقیق را برای تحلیل ترموالاستیک در دیسک‌های دوار توپر و توخالی ارائه نمودند. تحلیل تنش‌های حرارتی در یک دیسک دوار که دارای ضخامت، چگالی، مدول برشی و ضریب انبساط حرارتی متغیر در راستای شعاعی باشد توسط نای و باترا [۱۳] انجام گرفت. با استفاده از روش اجزا محدود، شارما و همکاران [۱۴] اقدام به حل معادله انتقال حرارت و پس از آن تحلیل تنش‌های حرارتی در یک دیسک ساخته شده از مواد مدرج تابعی نمودند. تحلیل دینامیکی یک دیسک دوار با منبع حرارتی ساکن توسط وائور و شوایزر [۱۵] انجام گرفت. آنها معادلات کوپل حرارتی مکانیکی را با استفاده از روش اجزا محدود حل نمودند. یک حل تحلیلی و دقیق برای تعیین تنش‌های حرارتی در یک دیسک دوار ساخته شده از مواد هدفمند توسط پنگ و لی [۱۶] انجام گرفت.

شریعت و محمدجانی [۱۷] یک تحلیل اجزا محدود سه بعدی برای بررسی خمش و توزیع تنش در یک دیسک دوار که خواص آن در هر دو راستای شعاعی و ضخامت مدرج شده‌اند، ارائه نمودند. با استفاده از روش تفاضلات مربعی قربانپور و همکاران [۱۸] موفق شدند یک تحلیل عددی برای تخمین تنش‌های حرارتی-مکانیکی-الکتریکی در یک استوانه ضخم ساخته شده از ماده مدرج دارای خواص پیزوالکتریک ارائه کنند. آنها میدان حرارتی را به شکل نامتقارن فرض نموده و توزیع تنش ون-مایزر را به‌دست آوردند. کلالی و همکاران [۱۹] تحلیل الاستو-پلاستیک دیسک‌های دوار و مخازن تحت فشار ساخته شده از مواد مدرج تابعی را مورد بررسی قرار دادند. برای یک استوانه کامپوزیتی تقویت شده با نانوتیوب‌های کربنی که تحت میدان‌های مکانیک و حرارتی غیرمتقارن و میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی یکنواختی قرار گرفته است، حل دقیقی توسط قربانپور و همکاران ارائه شد [۲۰].

در اکثر پژوهش‌های انجام شده در این زمینه تغییر خواص معمولاً از یک سطح فلزی تا سرامیکی در نظر گرفته می‌شود. همچنین در تحلیل حرارتی معمولاً ضریب انتقال حرارت همرفتی ثابت در نظر گرفته می‌شود. در این پژوهش اما علاوه بر تغییرات ضخامت در راستای شعاعی، خواص ماده نیز بین دو سطح داخلی و خارجی با کسر حجمی دلخواه تغییر می‌کنند تا مسأله شکلی کلی‌تر داشته باشد؛ همچنین تغییرات ضریب انتقال حرارت همرفتی نیز در راستای شعاعی در نظر گرفته شده است؛ وابستگی این ضریب به مقدار سرعت دورانی دیسک نیز در نظر گرفته شده است. ابتدا معادلات حاکم بر تحلیل حرارت و تنش استخراج شده‌اند؛ سپس با استفاده از روش تفاضلات مربعی این معادلات به شکلی عددی حل شده‌اند و در نهایت تأثیر چگونگی تغییر خواص و ضخامت دیسک بر روی توزیع دما، تنش و جابه‌جایی در دیسک بررسی شده‌اند. همچنین با استفاده از مدل تامورا-توموتا-اوزاوا، پدیده تسلیم در نقاط مختلف دیسک بررسی شده است.

۲- هندسه مسأله

مطابق شکل ۱ یک دیسک دوار با ضخامت متغیر در راستای شعاعی و

با تعریف متغیرهای بدون بعد به شکل زیر

$$\zeta = \frac{r}{a} \quad \varphi = \frac{b}{a} \quad \mu_E = \frac{E_c}{E_m} \quad (5)$$

$$\mu_\rho = \frac{\rho_c}{\rho_m} \quad \mu_\alpha = \frac{\alpha_c}{\alpha_m} \quad \mu_k = \frac{k_c}{k_m}$$

با تعریف دمای بدون بعد به شکل $T^* = T/T_\infty$ و استفاده از روابط (۵) و

(۶)، معادله حاکم (۷) را می‌توان به شکل بدون بعد زیر بیان نمود:

$$k^* t^* \frac{d^2 T^*}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d(\zeta t^* k^*)}{d\zeta} \frac{dT^*}{d\zeta} - \gamma h^* T^* = -\gamma h^* \quad (10)$$

که در این رابطه ضریب انتقال حرارت همرفتی بدون بعد و نسبت شعاع خارجی به ضخامت به شکل زیر تعریف شده‌اند:

$$h^* = \frac{2ah}{k_m} \quad \gamma = \frac{a}{t_b} \quad (11)$$

همچنین شکل بدون بعد شرایط مرزی نیز به شکل زیر قابل بیان می‌باشد:

$$\zeta = \varphi: \quad T^* = T_b^* \quad (12)$$

$$\zeta = 1: \quad 2\mu_k \gamma \frac{dT^*}{d\zeta} + h^* T^* = h^*$$

که در این رابطه $T_b^* = T_b/T_\infty$. با توجه به تغییرات سرعت خطی بر حسب شعاع در دیسک‌های دوار، ضریب انتقال حرارت همرفتی بین دیسک و سیال مقداری ثابت نمی‌باشد. برای سرعت‌های دوران بالا، جریان سیال حول دیسک معشوش بوده و رابطه زیر برقرار می‌باشد [۲۲]:

$$Nu = a_2 Re^{0.8} \quad (13)$$

که در این رابطه a_2 مقداری بدون بعد می‌باشد که به شکل تجربی اندازه‌گیری می‌شود. همچنین Re و Nu اعداد بدون بعد رینولدز و ناسلت می‌باشند که به شکل زیر تعریف شده‌اند:

$$Re = \frac{\omega r^2}{\nu} \quad Nu = \frac{hr}{k} \quad (14)$$

که در این رابطه ν ضریب ویسکوزیته سینماتیکی سیال می‌باشد. با ترکیب روابط (۱۳) و (۱۴)، ضریب انتقال همرفتی به شکل زیر محاسبه می‌گردد:

$$h = a_2 k \nu^{-0.8} \omega^{0.8} r^{0.6} \quad (15)$$

به عبارت دیگر ضریب انتقال حرارت علاوه بر خواص ماده و سیال به سرعت دورانی دیسک نیز وابسته بوده و در شعاع‌های مختلف تغییر می‌کند. با استفاده از روابط (۵)، (۶) و (۱۵) می‌توان نشان داد:

$$h^*(\zeta) = a_2 \Omega^{0.8} h_0 \hat{h}(\zeta) \quad (16)$$

که در این رابطه

$$h_0 = 2 \left(\frac{E_m a^2}{\rho_m \nu^2} \right)^{0.4}$$

با تعریف متغیرهای بدون بعد به شکل زیر

$$\zeta = \frac{r}{a} \quad \varphi = \frac{b}{a} \quad \mu_E = \frac{E_c}{E_m} \quad (5)$$

$$\mu_\rho = \frac{\rho_c}{\rho_m} \quad \mu_\alpha = \frac{\alpha_c}{\alpha_m} \quad \mu_k = \frac{k_c}{k_m}$$

رابطه (۴) را می‌توان به شکل بدون بعد زیر بیان نمود:

$$E^*(\zeta) = \frac{E}{E_m} = 1 + (\mu_E - 1) \left[f_{cb} + (f_{ca} - f_{cb}) \left(\frac{\zeta - \varphi}{1 - \varphi} \right)^p \right]$$

$$v(\zeta) = v_m + (v_c - v_m) \left[f_{cb} + (f_{ca} - f_{cb}) \left(\frac{\zeta - \varphi}{1 - \varphi} \right)^p \right]$$

$$\rho^*(\zeta) = \frac{\rho}{\rho_m} = 1 + (\mu_\rho - 1) \left[f_{cb} + (f_{ca} - f_{cb}) \left(\frac{\zeta - \varphi}{1 - \varphi} \right)^p \right] \quad (6)$$

$$\alpha^*(\zeta) = \frac{\alpha}{\alpha_m} = 1 + (\mu_\alpha - 1) \left[f_{cb} + (f_{ca} - f_{cb}) \left(\frac{\zeta - \varphi}{1 - \varphi} \right)^p \right]$$

$$k^*(\zeta) = \frac{k}{k_m} = 1 + (\mu_k - 1) \left[f_{cb} + (f_{ca} - f_{cb}) \left(\frac{\zeta - \varphi}{1 - \varphi} \right)^p \right]$$

۳- تحلیل حرارتی

با تقریب یک بعدی توزیع دما، معادله حاکم بر توزیع دما در یک دیسک که از سمت لبه‌های بالایی و پایینی در حال انتقال حرارت همرفتی با سیال می‌باشد، به شکل زیر می‌باشد [۲۱]:

$$\frac{dT}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d(kA)}{dr} \frac{dT}{dr} - \frac{h}{kA} \frac{dA_2 T}{dr} = -\frac{h}{kA} \frac{dA_2 T_\infty}{dr} \quad (7)$$

که در این رابطه T دما، h ضریب انتقال حرارت همرفتی و T_∞ دمای سیال اطراف دیسک می‌باشد. $A = 2\pi r t$ مساحت مقطع دیسک و $A_2 = 2\pi(r^2 - b^2)$ مساحت مجموع سطح بالایی و پایینی دیسک می‌باشند (با توجه به غیریکنواخت بودن ضخامت دیسک، رابطه A_2 تقریبی است). با استفاده از رابطه (۵) می‌توان روابط مربوط به مساحت را به شکل زیر بیان نمود:

$$A(\zeta) = 2\pi a t_b \zeta t^*(\zeta) \quad A_2(\zeta) \approx 2\pi a^2 (\zeta^2 - \varphi^2) \quad (8)$$

که در این رابطه $t^* = t/t_b$ ضخامت ورق در لبه داخلی می‌باشد. در این تحقیق در لبه داخلی شرایط به صورت دما ثابت و برابر با T_b در نظر گرفته شده و در لبه خارجی نیز انتقال حرارت همرفتی با سیال بیرون در نظر گرفته می‌شود؛ به عبارت دیگر

$$r = b: \quad T = T_b$$

$$r = a: \quad -k \frac{dT}{dr} = h(T - T_\infty) \quad (9)$$

روابط کرنش جابه‌جایی در محدوده خطی به شکل زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (25)$$

که با توجه به این رابطه می‌توان رابطه سازگاری زیر را بیان نمود:

$$\varepsilon_r = \frac{d}{dr}(r\varepsilon_\theta) \quad (26)$$

حال با جایگذاری رابطه (۲۴) در رابطه سازگاری (۲۶) می‌توان معادله حاکم زیر را استخراج نمود:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E} \left[\frac{F}{r} - \nu \left(\frac{dF}{dr} + \frac{1}{t} \frac{dt}{dr} F + \rho r^2 \omega^2 \right) \right] + \alpha \Delta T \\ & = \frac{d}{dr} \left[\frac{r}{E} \left(\frac{dF}{dr} + \frac{1}{t} \frac{dt}{dr} F + \rho r^2 \omega^2 - \nu \frac{F}{r} \right) + r \alpha \Delta T \right] \end{aligned} \quad (27)$$

با گسترش رابطه (۲۷) و استفاده از روابط (۵) و (۶) می‌توان معادله اخیر را به شکل بدون بعد زیر بیان نمود:

$$\frac{d^2 f}{d\zeta^2} + a_1(\zeta) \frac{df}{d\zeta} + a_2(\zeta) f = a_3(\zeta) + a_4(\zeta) \quad (28)$$

که در این رابطه

$$\begin{aligned} a_1(\zeta) &= \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{E^*} \frac{dE^*}{d\zeta} + \frac{1}{t^*} \frac{dt^*}{d\zeta} \\ a_2(\zeta) &= \frac{E^*}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \left[\frac{1}{E^* t^*} \left(\zeta \frac{dt^*}{d\zeta} - \nu t^* \right) \right] + \frac{\nu}{\zeta t^*} \frac{dt^*}{d\zeta} - \frac{1}{\zeta^2} \\ a_3(\zeta) &= -\zeta \rho^* \Omega^2 \left[3 + \nu + \zeta \left(\frac{1}{\rho^*} \frac{d\rho^*}{d\zeta} - \frac{1}{E^*} \frac{dE^*}{d\zeta} \right) \right] \\ a_4(\zeta) &= -\beta E^* \left[\alpha^* \frac{d(\Delta T^*)}{d\zeta} + \Delta T^* \frac{d\alpha^*}{d\zeta} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

و همچنین پارامترهای بدون بعد زیر نیز تعریف شده‌اند:

$$\begin{aligned} f &= \frac{F}{dE_m} & \beta &= \alpha_m T_\infty \\ \Omega^2 &= \frac{\rho_m a^2 \omega^2}{E_m} & \Delta T^* &= \frac{\Delta T}{T_\infty} = T^* - T_b^* \end{aligned} \quad (30)$$

با حل معادله (۲۸) متغیر f به دست می‌آید؛ به منظور به‌دست آوردن مؤلفه‌های تنش از رابطه (۲۳) استفاده خواهد شد که شکل بدون بعد آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \sigma_r^* &= \frac{\sigma_r}{E_m} = \frac{f}{\zeta} \\ \sigma_\theta^* &= \frac{\sigma_\theta}{E_m} = \frac{df}{d\zeta} + \frac{1}{t^*} \frac{dt^*}{d\zeta} f + \rho^* \zeta^2 \Omega^2 \end{aligned} \quad (31)$$

همچنین برای به‌دست آوردن جابه‌جایی در راستای شعاعی از ابتدا کرنش

$$\hat{h}(\zeta) = \zeta^{0.6} \left\{ 1 + (\mu_k - 1) \left[f_{cb} + (f_{ca} - f_{cb}) \left(\frac{\zeta - \varphi}{1 - \varphi} \right)^p \right] \right\} \quad (17)$$

حال می‌توان رابطه (۱۰) را به شکل زیر بیان نمود:

$$k^* t^* \frac{d^2 T^*}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d(\zeta t^* k^*)}{d\zeta} \frac{dT^*}{d\zeta} - \gamma a_2 \Omega^{0.8} h_0 \hat{h} T^* = -\gamma a_2 \Omega^{0.8} h_0 \hat{h} \quad (18)$$

و شرایط مرزی (۱۲) را نیز می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \zeta = \varphi: & \quad T^* = T_b^* \\ \zeta = 1: & \quad 2\mu_k \gamma \frac{dT^*}{d\zeta} + a_2 \Omega^{0.8} h_0 [1 + (\mu_k - 1) f_{ca}] T^* \\ & = a_2 \Omega^{0.8} h_0 [1 + (\mu_k - 1) f_{ca}] \end{aligned} \quad (19)$$

۴- تحلیل تنش

معادله تعادل تنش‌ها در راستای شعاعی به شکل زیر می‌باشد:

$$\frac{d}{dr}(rt\sigma_r) - t\sigma_\theta + \rho r^2 \omega^2 = 0 \quad (20)$$

که در این رابطه σ_r و σ_θ مؤلفه‌های تنش در راستای شعاعی و مماسی می‌باشند. لازم به ذکر است که به دلیل تقارن محوری، تنش برشی $\sigma_{r\theta}$ در تمامی نقاط دیسک صفر می‌باشد. با توجه به نازک بودن دیسک، فرض شرایط تنش صفحه‌ای می‌تواند فرض معقولی باشد؛ در این حالت با فرض $\sigma_z = 0$ ، براساس قانون هوک مؤلفه‌های کرنش در راستاهای شعاعی و مماسی (ε_r و ε_θ) به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \varepsilon^T \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) + \varepsilon^T \quad (21)$$

که در این رابطه ε_r بیانگر کرنش اضافی ناشی از تغییر دما می‌باشد که به شکل زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$\varepsilon^T = \alpha \Delta T \quad (22)$$

که در این رابطه ΔT بیانگر تغییرات دما نسبت به دمای متناظر با حالت بدون تنش ($T(r) = T_b$) می‌باشد. با تعریف متغیر کمکی F به شکل زیر

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{F}{r} \\ \sigma_\theta &= \frac{dF}{dr} + \frac{1}{t} \frac{dt}{dr} F + \rho r^2 \omega^2 \end{aligned} \quad (23)$$

و استفاده از روابط (۲۲) و (۲۳)، می‌توان مؤلفه‌های کرنش در رابطه (۲۱) را به شکل زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} \left[\frac{F}{r} - \nu \left(\frac{dF}{dr} + \frac{1}{t} \frac{dt}{dr} F + \rho r^2 \omega^2 \right) \right] + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} \left(\frac{dF}{dr} + \frac{1}{t} \frac{dt}{dr} F + \rho r^2 \omega^2 - \nu \frac{F}{r} \right) + \alpha \Delta T \end{aligned} \quad (24)$$

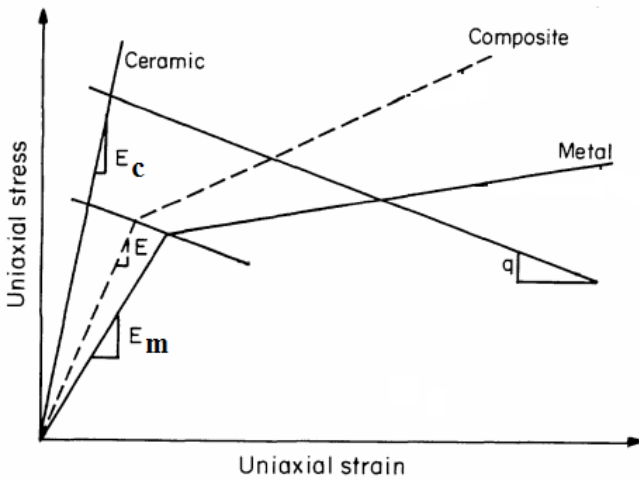


Fig. 2. Stress-strain curve for the composite material.

شکل ۲: نمودار تنش-کرنش برای ماده مرکب

$$q = \frac{\sigma_c - \sigma_m}{\varepsilon_c - \varepsilon_m} \quad (38)$$

در واقع مقدار q به عوامل گوناگونی بستگی داشته و در عمل و با توجه به تعدد عوامل تأثیرگذار، مقدار آن به صورت تجربی محاسبه می‌گردد [۲۳]. البته تحلیل‌های انجام شده نشان داده‌اند که نتایج حساسیت زیادی به مقدار دقیق این ضریب ندارند [۲۴].

در مواد مدرج تابعی تنش تسلیم نیز مانند هر خاصیت دیگر در نقاط مختلف ماده متفاوت خواهد بود؛ براساس مدل تامورا-توموتا-اوزاوا تنش تسلیم از رابطه زیر محاسبه می‌گردد [۲۳]:

$$\sigma_y = \sigma_{ym} \left[(1-f_c) + \frac{q + E_m}{q + E_c} \frac{E_c}{E_m} f_c \right] \quad (39)$$

که در این رابطه σ_{ym} تنش تسلیم در جزء فلزی می‌باشد. رابطه (۳۹) را می‌توان به شکل بدون بعد زیر بیان نمود:

$$\sigma_y^* = \sigma_{ym}^* \left[(1-f_c) + \mu_E \frac{q^* + 1}{q^* + \mu_E} f_c \right] \quad (40)$$

که در این رابطه

$$\sigma_y^* = \frac{\sigma_y}{E_m} \quad \sigma_{ym}^* = \frac{\sigma_{ym}}{E_m} \quad q^* = \frac{q}{E_m} \quad (41)$$

۶- حل معادلات حاکم

با توجه به پیچیدگی معادلات حاکم در تحلیل حرارتی و تحلیل تنش که ناشی از تغییر خواص ماده و ضخامت دیسک در راستای شعاعی می‌باشد، وجود هرگونه حل دقیق دور از ذهن به نظر می‌رسد؛ به همین دلیل برای حل این معادلات از روش عددی تفاضلات مربعی استفاده خواهد شد که جزئیات این روش و روابط موجود در آن در پیوست الف ارائه شده‌اند.

مماسی را از رابطه (۲۴) محاسبه نموده و سپس از رابطه (۲۵) جابه‌جایی شعاعی به صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$u = r \varepsilon_\theta = \frac{r}{E} \left(\frac{dF}{dr} + \frac{1}{t} \frac{dt}{dr} F + \rho r^2 \omega^2 - \nu \frac{F}{r} \right) + \alpha \Delta T \quad (32)$$

که این رابطه نیز در حالت بی‌بعد می‌تواند به شکل زیر بیان گردد:

$$u^* = \frac{u}{a} = \frac{\zeta}{E^*} \left[\frac{df}{d\zeta} + \left(\frac{1}{t^*} \frac{dt^*}{d\zeta} - \frac{\nu}{\zeta} \right) f + \rho^* \zeta^2 \Omega^2 \right] + \beta \alpha^* \Delta T^* \quad (33)$$

شرایط مرزی در تحلیل تنش به شکل صفر بودن جابه‌جایی در لبه داخلی به دلیل تماس دیسک با محور و همچنین صفر بودن تنش شعاعی در لبه خارجی به دلیل آزاد بودن این سطح می‌باشد. این شرایط را می‌توان به شکل زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} r=b \quad u=0 \\ r=a \quad \sigma_r=0 \end{aligned} \quad (34)$$

حال با استفاده از روابط (۶)، (۲۳)، (۳۰) و (۳۳) و با توجه به این که در لبه داخلی شرایط دما ثابت برقرار است، می‌توان شرایط مرزی را به شکل زیر ساده سازی نمود:

$$\begin{aligned} \zeta = \varphi \quad \frac{df}{d\zeta} + \left(\frac{dt^*}{d\zeta} - \frac{\nu}{\varphi} \right) f = -[1 + f_{cb} (\mu_\rho - 1)] \varphi^2 \Omega^2 \\ \zeta = 1 \quad f = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

۵- استحکام ماده

به منظور تعیین وقوع تسلیم در یک ماده مدرج تابعی از تنش ون-مایرز استفاده می‌شود که در مسأله مورد بررسی در این پژوهش به شکل زیر محاسبه می‌گردد:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta} \quad (36)$$

تنش ون-مایرز را می‌توان با استفاده از رابطه (۳۱) به شکل بدون بعد زیر نیز بیان نمود:

$$\sigma_{vm}^* = \frac{\sigma_{vm}}{E_m} = \sqrt{(\sigma_r^*)^2 + (\sigma_\theta^*)^2 - \sigma_r^* \sigma_\theta^*} \quad (37)$$

تحلیل تسلیم در مواد مدرج تابعی متفاوت با مواد همگن می‌باشد. در شکل ۲ نمودار تنش-کرنش برای فلز، سرامیک و کل ماده ترسیم شده است. همان‌گونه که این شکل نشان می‌دهد برای ماده مرکب، نمودار تنش-کرنش بین نمودارهای مربوط به فلز و سرامیک قرار می‌گیرد. در این حالت یکی از پارامترهایی در شکل نیز نشان داده شده است، q می‌باشد که به شکل نسبت اختلاف تنش در فلز و سرامیک به اختلاف کرنش در آنها تعریف می‌گردد؛ به عبارت دیگر

که در این رابطه

$$[F_1] = \begin{bmatrix} [\bar{K}] \\ [S] \end{bmatrix} \quad \{F_2\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{w}\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} \quad (50)$$

در واقع در نقاط مرزی به جای ارضای معادله حاکم، شرایط مرزی برقرار می‌شوند. با حل معادله (۴۹)، توزیع دما به دست می‌آید و در نتیجه مقدار تغییر دما نسبت به دمای بدون تنش (T_b) در نقاط حل مسأله به شکل زیر محاسبه می‌گردد:

$$\{\Delta T^*\} = \{T^*\} - \{T_b^*\} \quad (51)$$

به منظور تحلیل تنش، با استناد به رابطه (الف-۴) و تعریف بردار f به شکل زیر

$$f_i = f(\zeta_i) \quad (52)$$

می‌توان به روش مشابه با تحلیل حرارت، معادلات تنش را نیز به شکلی عددی حل نمود. این بار رابطه (۲۸) به شکل زیر بیان می‌گردد:

$$[K]\{f\} = \{w\} \quad (53)$$

که در این رابطه ماتریس K و بردار w به شکل زیر تعریف شده‌اند:

$$[K] = [B] + [c][A] + [d] \quad (54)$$

$$\{w_i\} = a_3(\zeta_i) + a_4(\zeta_i)$$

و در این رابطه ماتریس‌های قطری نیز به شکل زیر تعریف شده‌اند:

$$c_{ii} = a_1(\zeta_i) \quad d_{ii} = a_2(\zeta_i) \quad (55)$$

همچنین به طریق مشابه، شرایط مرزی (۳۵) به شکل ماتریسی زیر بیان می‌گردد:

$$[S]\{f\} = \{P\} \quad (56)$$

که در این رابطه

$$S_{ij} = \begin{cases} A_{1j} + \left(\frac{dt^*}{d\zeta} \right)_{\zeta=\varphi} - \frac{v}{\varphi} \delta_{1j} & i = 1 \\ \delta_{Nj} & i = 2 \end{cases} \quad (57)$$

$$P = \begin{cases} -[1 + f_{cb}(\mu_p - 1)]\varphi^2\Omega^2 \\ 0 \end{cases}$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

مجدداً حل همزمان معادلات ماتریسی (۵۴) و (۵۶) منجر به ازدیاد معادلات نسبت به مجهولات می‌گردد؛ به روش مشابه با قسمت قبل، ابتدا از ارضای معادلات حاکم در نقاط مرزی صرف نظر می‌گردد و معادله (۵۴) به شکل زیر بیان می‌گردد:

ابتدا لازم است تا معادله حرارت حل گردد؛ به همین منظور با استناد به رابطه (الف-۴) و تعریف بردار دما به شکل زیر

$$T_i^* = T^*(\zeta_i) \quad (42)$$

می‌توان رابطه (۱۸) را به شکل زیر بیان نمود:

$$[K]\{T^*\} = \{w\} \quad (43)$$

که در این رابطه ماتریس K و بردار w به شکل زیر تعریف شده‌اند:

$$[K] = [a][B] + [b][A] - \gamma a_2 \Omega^{0.8} h_0 [c] \quad (44)$$

$$\{w_i\} = -\gamma a_2 \Omega^{0.8} h_0 \{d\}$$

و در این رابطه I ماتریس همانی از مرتبه N بوده و همچنین ماتریس‌هایی قطری $[a]$ ، $[b]$ و $[c]$ و بردار ستونی $\{d\}$ به شکل زیر تعریف شده‌اند:

$$a_{ii} = (t^* k^*) \Big|_{\zeta=\zeta_i} \quad b_{ii} = \frac{1}{\zeta_i} \frac{d(\zeta t^* k^*)}{d\zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_i} \quad (45)$$

$$c_{ii} = \hat{h}(\zeta_i) \quad d_i = \hat{h}(\zeta_i)$$

همچنین به طریق مشابه، شرایط مرزی (۱۹) نیز به شکل ماتریسی زیر بیان می‌گردد:

$$[S]\{T^*\} = \{P\} \quad (46)$$

که در این رابطه

$$S_{ij} = \begin{cases} \delta_{1j} & i = 1 \\ 2\mu_k \gamma A_{Nj} + a_2 \Omega^{0.8} h_0 [1 + (\mu_k - 1)f_{ca}] \delta_{Nj} & i = 2 \end{cases} \quad (47)$$

$$P = \begin{cases} T_b^* \\ a_2 \Omega^{0.8} h_0 [1 + (\mu_k - 1)f_{ca}] \end{cases}$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

و در این رابطه نیز δ بیانگر دلتای کرونیگر می‌باشد. حل همزمان معادلات ماتریسی (۴۴) و (۴۶) منجر به ازدیاد تعداد معادلات نسبت به مجهولات می‌گردد؛ به همین منظور ابتدا نقاط حل مسأله به دو دسته نقاط مرزی شامل نقاط واقع بر لبه داخلی و خارجی دیسک (مشخص شده با اندیس b) و نقاط میانی که شامل سایر نقاط می‌باشد (مشخص شده با اندیس d)، تقسیم‌بندی می‌شوند. ابتدا از ارضای معادلات حاکم در نقاط مرزی صرف نظر می‌گردد و معادله (۴۴) به شکل زیر بیان می‌گردد:

$$[\bar{K}]\{T^*\} = \{\bar{w}\} \quad (48)$$

که در این رابطه علامت بار نشان‌دهنده ماتریس و بردار متناظری می‌باشد که سطرهای اول و آخر آن (سطرهای مربوط به نقاط مرزی) حذف شده‌اند. حال با ترکیب روابط (۴۶) و (۴۹)، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$[F_1]\{T^*\} = \{F_2\} \quad (49)$$

می‌باشند و

$$\theta = T - T_\infty \quad \theta_b = T_b - T_\infty \quad m^2 = \frac{2h}{kt} \quad (66)$$

با توجه به پارامترهای بدون بعد تعریف شده در این پژوهش، این حل دقیق را می‌توان به شکل زیر نیز بیان نمود:

$$T^* = 1 + \frac{I_0(\zeta\sqrt{h^*\gamma})K_1(\sqrt{h^*\gamma}) + K_0(\zeta\sqrt{h^*\gamma})I_1(\sqrt{h^*\gamma})}{I_0(\varphi\sqrt{h^*\gamma})K_1(\sqrt{h^*\gamma}) + K_0(\varphi\sqrt{h^*\gamma})I_1(\sqrt{h^*\gamma})} (T_b^* - 1) \quad (67)$$

به ازای $\gamma = 10$ ، $\varphi = 0.2$ و $h^* = 2$ و $T_b^* = 0.5$ در شکل ۳ نتایج حاصل از روش تفاضلات مربعی ($N=15$) و حل دقیق ارائه شده رسم شده‌اند. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که حل ارائه شده از دقت بسیار بالایی برخوردار بوده و قادر به تخمین مناسب توزیع دما می‌باشد.

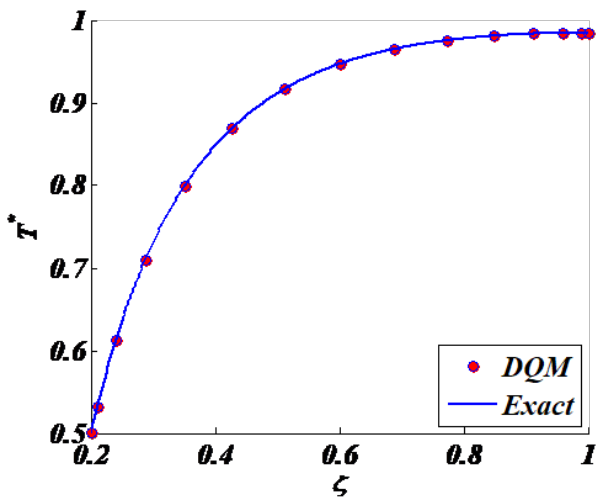


Fig. 3. Validation of the presented thermal analysis.

شکل ۳: اعتبارسنجی تحلیل حرارتی

مجدداً یک دیسک همگن با ضخامت یکنواخت را در نظر بگیرید که تنها تحت اثر بار ناشی از دوران باشد. توزیع تنش در این حالت به شکل زیر خواهد بود [۲۵]:

$$\sigma_r = \frac{\mu_2}{r^2} (a^2 - r^2) \left(r^2 + \frac{\mu_1}{\mu_2 a^2} \right) \quad (68)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\mu_2}{r^2} \left[\left(a^2 - \frac{\mu_1}{\mu_2 a^2} \right) r^2 - \frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^4 \right]$$

که در این رابطه

$$\mu_1 = \frac{(1-\nu)\rho a^2 b^2 \omega^2}{8} \left[\frac{(3+\nu)a^2 - (1+\nu)b^2}{(1+\nu)a^2 + (1-\nu)b^2} \right] \quad (69)$$

$$\mu_2 = \frac{(3+\nu)\rho \omega^2}{8}$$

این حل دقیق را می‌توان با توجه به پارامترهای بدون بعد تعریف شده در

$$[\bar{K}] \{f\} = \{\bar{w}\} \quad (58)$$

و با ترکیب روابط (۵۶) و (۵۸)، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$[F_1] \{f\} = \{F_2\} \quad (59)$$

که در این رابطه

$$[F_1] = \begin{bmatrix} [\bar{K}] \\ [S] \end{bmatrix} \quad \{F_2\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{w}\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} \quad (60)$$

با حل معادله (۵۸)، توزیع پارامتر f به دست می‌آید و با استفاده از رابطه (۳۱)، مؤلفه‌های تنش در حالت بدون بعد به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

$$\{\sigma_r^*\} = [e] \{f\} \quad (61)$$

$$\{\sigma_\theta^*\} = [A] \{f\} + [g] \{f\} + \{r\}$$

که در این رابطه ماتریس‌های قطری $[e]$ و $[g]$ و بردار ستونی $\{r\}$ به شکل زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$e_{ii} = \frac{1}{\zeta_i} \quad g_{ii} = \left(\frac{1}{t^*} \frac{dt^*}{d\zeta} \right) \Big|_{\zeta=\zeta_i} \quad r_i = \Omega^2 \zeta_i^2 \rho^* (\zeta_i) \quad (62)$$

همچنین با توجه به رابطه (۳۳) جابه‌جایی شعاعی در حالت بدون بعد به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

$$\{u^*\} = [s] \{ [A] \{f\} + ([g] - \nu [e]) \{f\} + \{r\} \} + \{x\} \quad (63)$$

که در این رابطه ماتریس قطری S و بردار ستونی x به شکل زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$s_{ii} = \frac{\zeta_i}{E^*(\zeta_i)} \quad x_i = \beta \alpha^*(\zeta_i) \Delta T^*(\zeta_i) \quad (64)$$

۷- نتایج عددی

معادلات حاکم و شرایط مرزی برای تحلیل دما و تحلیل تنش‌های ناشی از تغییر دما و دوران در یک دیسک دوار به دست آمده و با استفاده از روش تفاضلات مربعی حل شدند. در این بخش به بررسی نتایج عددی حاصل از تحلیل ارائه شده خواهیم پرداخت.

با هدف بررسی میزان صحت تحلیل عددی ارائه شده یک دیسک همگن با ضخامت یکنواخت را در نظر بگیرید. با فرض ثابت بودن ضریب انتقال حرارت همرفتی و عایق بودن نوک پره، توزیع دما به شکل زیر خواهد بود [۲۱]:

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{I_0(mr)K_1(ma) + K_0(mr)I_1(ma)}{I_0(mb)K_1(ma) + K_0(mb)I_1(ma)} \quad (65)$$

که در این رابطه I و K به ترتیب توابع بسل اصلاح شده نوع اول و دوم

جدول ۱: خواص قسمت های فلزی و سرامیکی ماده ی FGM استفاده شده [۲۸-۲۶]

TiB ₂	Ti	ماده
۵۶۵	۱۱۶	E , GPa
۴۵۲۰	۴۵۰۶	ρ , kg/m ³
۰/۱۰۸	۰/۳۲	ν
۶/۴	۸/۶	$\alpha, 10^{-6} K^{-1}$
۹۶	۲۱/۹	K , W/mK
-	۴۵۰	σ_y , MPa
۴/۵		q , GPa

میزان افزایش دما در راستای شعاع بیشتر خواهد بود؛ به همین دلیل بهتر است که کسر حجمی سرامیک در راستای شعاعی افزایش یابد. با هدف بررسی تأثیر توان در معادله تغییرات خواص (p)، یک دیسک با مشخصات زیر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} \varphi &= 0.25 & \gamma &= 20 & t^* &= 1 - 0.75(\zeta - \varphi) \\ \Omega &= 0.001 & \beta &= 0.0075 & T_b^* &= 0.5 \\ h_0 &= 2 \times 10^6 & f_{ca} &= 0.25 & f_{cb} &= 0.75 \end{aligned}$$

در شکل ۵ نحوه تغییرات کسر حجمی سرامیک نمایش داده شده است؛ همان گونه که مشخص است، با افزایش p کسر حجمی سرامیک در نقاط میانی دیسک کاهش می یابد که با توجه به مقادیر چگالی در جدول ۱، افزایش p تا حدودی منجر به کاهش وزن دیسک نیز می گردد. در شکل های ۶ (الف) تا ۶ (ه) و به ازای مقادیر مختلف p نمودار تغییرات دما، مؤلفه های شعاعی و مماسی تنش، نسبت تنش ون مایز به تنش تسلیم

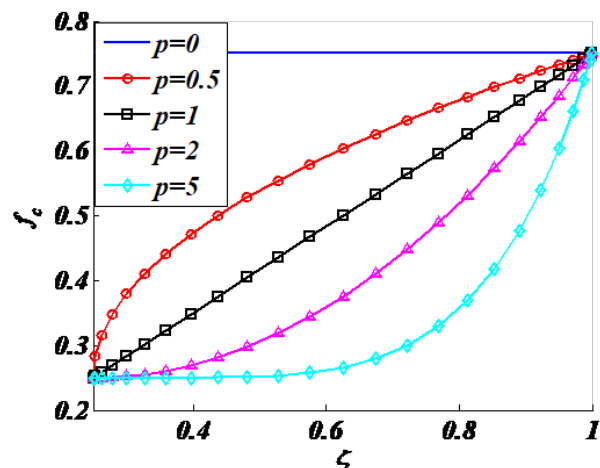


Fig. 5. Effect of the power law index on the volume fraction of the ceramic

شکل ۵: تأثیر توان در معادله تغییرات خواص بر روی کسر حجمی سرامیک

این پژوهش به شکل زیر نیز بیان نمود:

$$\begin{aligned} \sigma_r^* &= \eta_1 (1 - \eta_2 + \eta_2 \zeta^{-2} - \zeta^2) \\ \sigma_\theta^* &= \eta_1 \left[1 - \eta_2 - \eta_2 \zeta^{-2} - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} \zeta^2 \right] \end{aligned} \quad (70)$$

که در این رابطه

$$\eta_1 = \frac{(3 + \nu)\Omega^2}{8} \quad \eta_2 = \frac{1 - \frac{1 + \nu}{3 + \nu}\varphi^2}{1 + \frac{1 + \nu}{1 - \nu}\varphi^{-2}} \quad (71)$$

به ازای $\varphi = 0.25$ ، $\nu = 0.3$ و $\Omega = 0.005$ در شکل ۴ نتایج حاصل از روش تفاضلات مربعی ($N=15$) و حل دقیق رسم شده اند. دقت بالای تحلیل ارائه شده را به خوبی می توان از طریق مقایسه نتایج تشخیص داد.

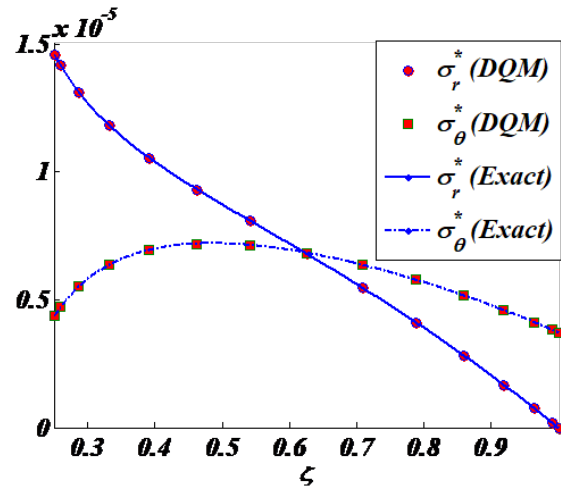
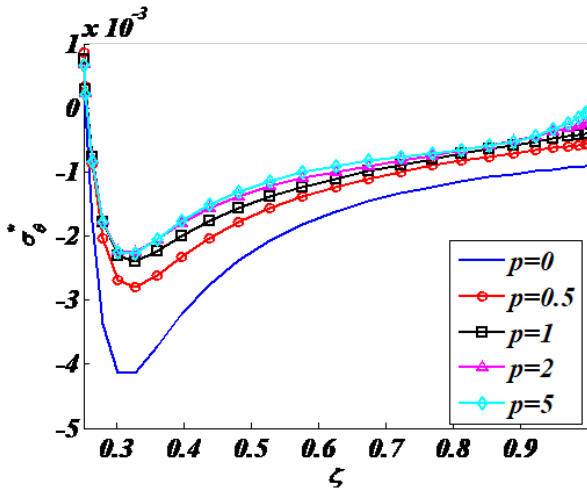


Fig. 4. Validation of the presented stress analysis.

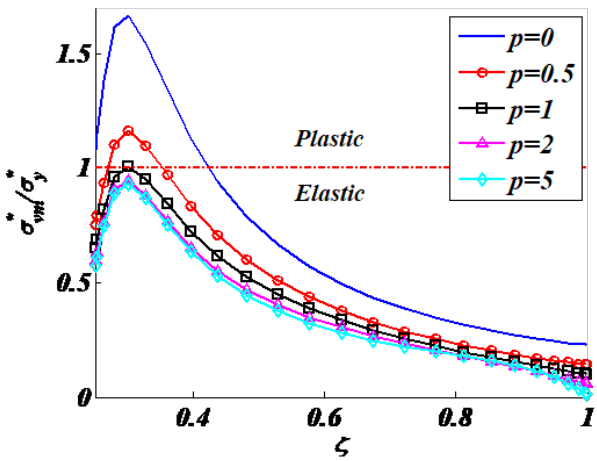
شکل ۴: اعتبارسنجی تحلیل تنش

پس از اثبات همگرایی و دقت بالای تحلیل عددی ارائه شده در هر دو تحلیل حرارتی و تنش، می توان تأثیر پارامترهای مسئله را بررسی نمود. لازم به ذکر است که هر چند شکل های ۳ و ۴ نشان دادند که تنها با ۱۵ نقطه می توان نتایج قابل قبولی به دست آورد ولی در ادامه و به منظور دستیابی به نمودارهایی هموارتر و دقیق تر از $N=25$ استفاده خواهد شد. همچنین در تمامی مثال های پیش رو یک دیسک دوار ساخته شده از جنس تیتانیوم (T_i) و تیتانیوم دی بوراید (TiB_2) با خواص ارائه شده در جدول ۱ در نظر گرفته شده است [۲۶-۲۸]. ضریب a_2 در رابطه (۱۳) نیز برابر با 0.0193 در نظر گرفته خواهد شد [۲۲].

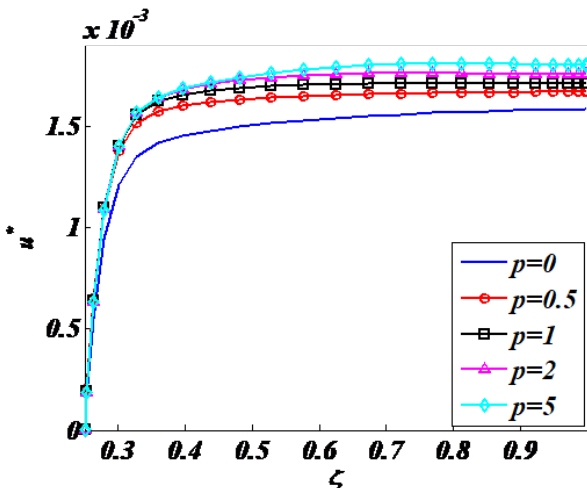
با توجه به این که سرامیک توان بالاتری نسبت به فلز برای تحمل حرارت و دمای بالا دارد، بهتر است که با توجه به نوع توزیع دما چگونگی درصد فلز و سرامیک تعیین گردد. با توجه به این که در این پژوهش فرض بر آن است که دمای سیال اطراف دیسک بالاتر از دمای اولیه دیسک است، دیسک دچار افزایش دما می گردد که با توجه به فرض دما ثابت در لبه داخلی،



(ج) توزیع تنش مماسی (Distribution of circumferential stress)



(د) توزیع تنش ون مایز (Distribution of von-Mises stress)



(ه) توزیع جابجایی (Distribution of radial displacement)

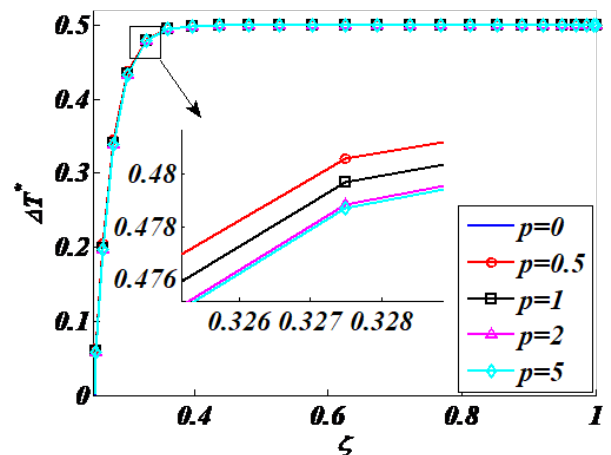
Fig. 6. Effect of the power law index on the distribution of temperature rise, stress and displacement in disc

شکل ۶: تأثیر توان در معادله تغییرات خواص بر روی توزیع دما، تنش و جابه‌جایی در دیسک

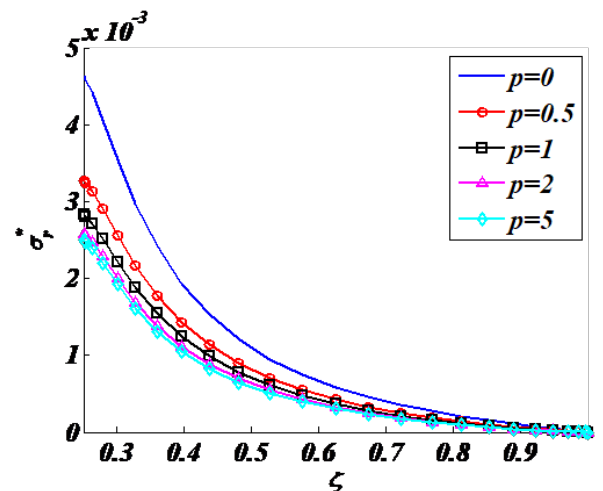
و جابه‌جایی در راستای شعاعی رسم شده‌اند. شکل ۶ (الف) نشان می‌دهد که توان منحنی تغییرات خواص تأثیر چندانی بر روی توزیع دما نخواهد داشت و تغییرات دما تقریباً مستقل از p می‌باشد. شکل‌های ۶ (ب) تا ۶ (د) نشان می‌دهند که با افزایش p هر دو مؤلفه تنش و در نتیجه نسبت تنش ون-مایز به تنش تسلیم کاهش می‌یابند؛ این تغییرات تا حدی است که می‌توان با افزایش این متغیر از تسلیم شدن دیسک جلوگیری نمود. به عبارت دیگر با افزایش p می‌توان ضمن سبک‌تر کردن دیسک، احتمال ایجاد ناحیه پلاستیک را نیز در دیسک کاهش داد.

شکل ۶ (د) اما نشان می‌دهد که افزایش p منجر به افزایش تغییر شکل در دیسک می‌گردد که این موضوع ممکن است افزایش مقدار p را با هدف کاهش احتمال تسلیم محدود نماید. همچنین با توجه به قابلیت بهتر سرامیک در تحمل حرارت، مقدار p را تا هر مقدار دلخواهی نمی‌توان کاهش داد.

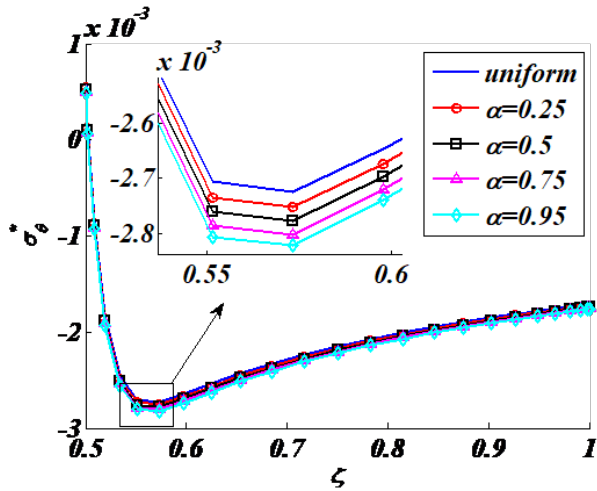
با هدف بررسی تأثیر چگونگی تغییرات ضخامت، یک دیسک را با مشخصات زیر در نظر بگیرید:



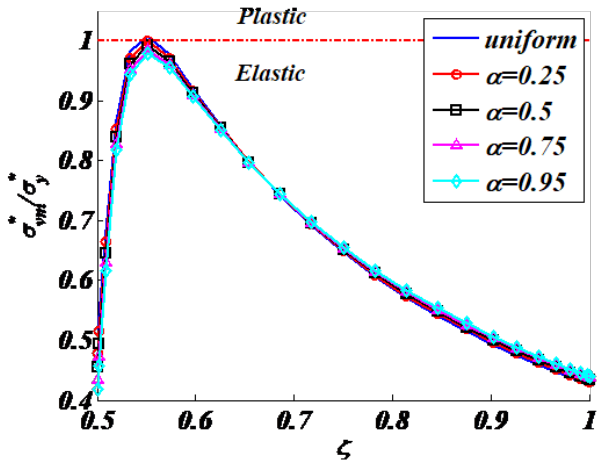
(الف) توزیع تغییرات دما (Distribution of temperature rise)



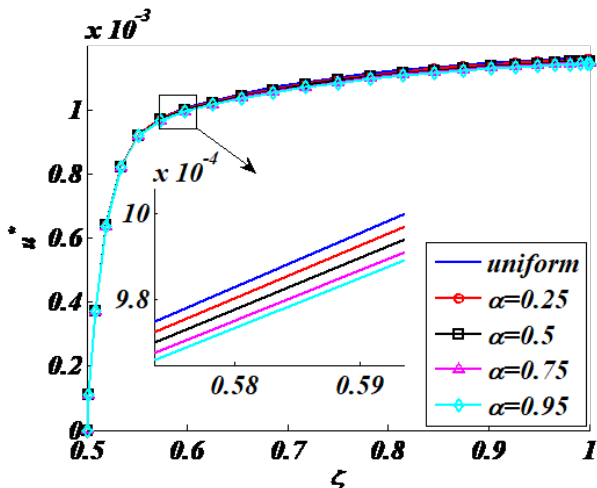
(ب) توزیع تنش شعاعی (Distribution of radial stress)



(ج) توزیع تنش مماسی (Distribution of circumferential stress)



(د) توزیع تنش ون مایز (Distribution of von-Mises stress)



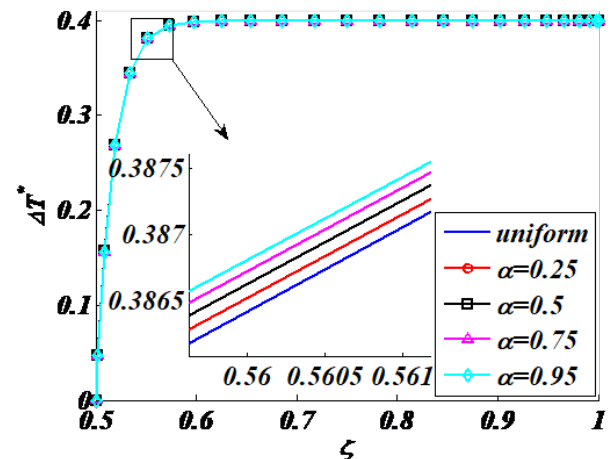
(ه) توزیع جابجایی (Distribution of radial displacement)

Fig. 7. Effect of the power law index on the distribution of temperature rise, stress and displacement in disc

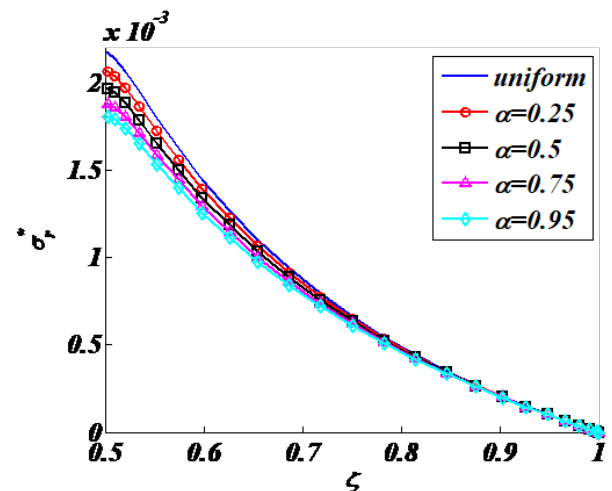
شکل ۷: تأثیر تغییرات ضخامت بر روی توزیع دما، تنش و جابه‌جایی در دیسک

$$\begin{aligned} \varphi &= 0.5 & \gamma &= 10 & p &= 1 \\ \Omega &= 0.01 & \beta &= 0.005 & T_b^* &= 0.6 \\ h_0 &= 1 \times 10^6 & f_{ca} &= 0.25 & f_{cb} &= 0.5 \end{aligned}$$

ضخامت دیسک نیز براساس یک معادله نمایی و به شکل $t^* = \exp[-\alpha(\zeta - \varphi)]$ تغییر می‌کند. بدیهی است که با افزایش α ضخامت دیسک از حالت یکنواخت خارج شده و دیسک در مقاطع بیرونی نازک و نازک‌تر خواهد گردید. در شکل‌های ۷ (الف) تا ۷ (ه) نمودار تغییرات دما، مؤلفه‌های شعاعی و مماسی تنش، نسبت تنش ون مایز به تنش تسلیم و جابه‌جایی در راستای شعاعی و به ازای مقادیر مختلف α رسم شده‌اند. مقایسه این شکل‌ها با شکل‌های ۶ (الف) تا ۶ (ه) نشان می‌دهد که تأثیر تغییرات ضخامت کمتر از تأثیر تغییرات خواص می‌باشد. شکل ۷ (الف) نشان می‌دهد که تغییرات ضخامت تأثیر ناچیزی بر روی توزیع دما دارد و با افزایش α گرادیان دما مقدار ناچیزی افزایش می‌یابد. شکل‌های ۷ (ب) تا ۷ (د) نشان می‌دهند که با فاصله گرفتن از حالت یکنواخت، تنش شعاعی کاهش می‌یابد.



(الف) توزیع تغییرات دما (Distribution of temperature rise)



(ب) توزیع تنش شعاعی (Distribution of radial stress)

$$A_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{\prod_{m=1, m \neq i, j}^N (\zeta_i - \zeta_m)}{\prod_{m=1, m \neq j}^N (\zeta_j - \zeta_m)} & i, j = 1, 2, 3, \dots, N; i \neq j \\ \sum_{m=1, m \neq i}^N (\zeta_i - \zeta_m)^{-1} & i = j = 1, 2, 3, \dots, N \end{cases} \quad (\text{الف-۳})$$

$$A^{(r)} = A^{(1)} A^{(r-1)} \quad 2 \leq r \leq N - 1$$

علاوه بر تعداد نقاط، یکی از مهم‌ترین نکات در همگرایی مسأله چگونگی توزیع نقاط در دامنه حل آن می‌باشد. بهترین نوع توزیع نقاطی که تاکنون ارائه شده است، توزیع چیشف-گوس-لوباتو می‌باشد که از معادله زیر محاسبه می‌گردد [۲۹]:

$$\zeta_i = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left[\frac{(i-1)\pi}{(N-1)} \right] \right\} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (\text{الف-۴})$$

فهرست علائم

کسر حجمی سرامیک	f_c
کسر حجمی سرامیک در لبه‌ی خارجی	f_{ca}
کسر حجمی سرامیک در لبه‌ی داخلی	f_{cb}
شعاع خارجی دیسک	a
شعاع داخلی دیسک	b
موقعیت شعاعی	r
توان در منحنی تغییرات خواص	p
مدول الاستیک	E
دما	T
دمای سیال خارجی	T_∞
دمای اولیه	T_b
ضریب هدایت گرمایی	k
ضریب انتقال حرارت همرفتی	h
ضخامت دیسک	t
ضخامت دیسک در لبه‌ی داخلی	t_b
جابجایی در راستای شعاع	u
نسبت اختلاف تنش در فلز و سرامیک به اختلاف کرنش در آنها	q

علائم یونانی

سرعت زوایه‌ای	ω
چگالی	ρ

تنش مماسی مقدار ناچیزی افزایش می‌یابد و در نتیجه نسبت تنش ون-مایرز به تنش تسلیم در برخی نقاط دیسک افزایش یافته و در برخی نقاط کاهش می‌یابد. در هر حال با فاصله گرفتن از حالت یکنواخت، در نقاط خطرناک‌تر دیسک احتمال ایجاد ناحیه پلاستیک کمتر می‌گردد. شکل ۷ (ه) نیز نشان می‌دهد که با فاصله گرفتن از حالت یکنواخت شاهد کاهش ناچیز در تغییر شکل دیسک خواهیم بود.

۸- جمع‌بندی نتایج

با استفاده از روش تفاضلات مربعی یک حل عددی برای تحلیل حرارت و تنش در یک دیسک دوار با ضخامت و خواص متغیر در راستای شعاعی ارائه گردید. برای دیسک ساخته شده از تیتانیوم (Ti) و تیتانیوم دی بوراید (TiB_2) تأثیر تغییرات خواص و ضخامت بر روی توزیع دما، تنش و تغییر شکل بررسی شدند. نتایج به‌دست آمده را می‌توان به شکل زیر دسته‌بندی نمود:

- تحلیل عددی ارائه شده ضمن همگرا بودن از دقت بسیار خوبی در هر دو تحلیل حرارت و تنش برخوردار است.
- تغییرات خواص در مقایسه با تغییر ضخامت تأثیر بیشتری بر روی توزیع دما، تنش و جابه‌جایی در دیسک دارد.
- توان منحنی تغییرات خواص تأثیر چندانی بر روی توزیع دما ندارد.
- با فاصله گرفتن ضخامت دیسک از حالت یکنواخت، گرادیان دما مقداری ناچیز افزایش می‌یابد.
- با افزایش توان p در منحنی توزیع مواد، احتمال ایجاد ناحیه پلاستیک در دیسک کاهش می‌یابد و البته تغییر شکل آن افزایش می‌یابد.
- با فاصله گرفتن ضخامت دیسک از حالت یکنواخت، تنش شعاعی در دیسک کاهش می‌یابد، تنش مماسی مقداری ناچیز افزایش می‌یابد و در مجموع احتمال ایجاد ناحیه پلاستیک کمتر می‌گردد.

پیوست

پیوست الف

روش تفاضلات مربعی بر اساس این ایده پایه‌گذاری شده است که مشتقات یک تابع از هر مرتبه‌ای را در نقاط مختلف بتوان بر حسب مقادیر تابع در تمامی بازه تقریب زد؛ به عبارت دیگر: A :

$$\left\{ \frac{d^r f}{d \zeta^r} \right\} = [A^{(r)}] \{f\} \quad (\text{الف-۱})$$

که در این رابطه بردار f به شکل زیر در نظر گرفته شده است:

$$f_j = f(\zeta_j) \quad (\text{الف-۲})$$

و $A(r)$ ماتریس وزنی برای مشتق r ام می‌باشد که براساس معادله زیر تعریف می‌گردد [۲۹]:

- functionally graded rotating disks, *Composite Structures*, 93(12) (2011) 3239-3251.
- [9] M. Shahzamanian, B. Sahari, M. Bayat, F. Mustapha, Z. Ismarrubie, Finite element analysis of thermoelastic contact problem in functionally graded axisymmetric brake disks, *Composite Structures*, 92(7) (2010) 1591-1602.
- [10] A. Afsar, J. Go, Finite element analysis of thermoelastic field in a rotating FGM circular disk, *Applied Mathematical Modelling*, 34(11) (2010) 3309-3320.
- [11] S.H. Kordkheili, R. Naghdabadi, Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk, *Composite Structures*, 79(4) (2007) 508-516.
- [12] M. Bayat, B. Sahari, M. Saleem, A. Ali, S. Wong, Thermoelastic solution of a functionally graded variable thickness rotating disk with bending based on the first-order shear deformation theory, *Thin-Walled Structures*, 47(5) (2009) 568-582.
- [13] G. Nie, R. Batra, Stress analysis and material tailoring in isotropic linear thermoelastic incompressible functionally graded rotating disks of variable thickness, *Composite Structures*, 92(3) (2010) 720-729.
- [14] J. Sharma, D. Sharma, S. Kumar, Stress and strain analysis of rotating FGM Thermoelastic circular disk by using FEM, *International Journal of pure and applied mathematics*, 74(3) (2012) 339-352.
- [15] J. Wauer, B. Schweizer, Dynamics of rotating thermoelastic disks with stationary heat source, *Applied Mathematics and Computation*, 215(12) (2010) 4272-4279.
- [16] X.-L. Peng, X.-F. Li, Thermal stress in rotating functionally graded hollow circular disks, *Composite Structures*, 92(8) (2010) 1896-1904.
- [17] M. Shariyat, R. Mohammadjani, Three-dimensional compatible finite element stress analysis of spinning two-directional FGM annular plates and disks with load and elastic foundation non-uniformities, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 10(5) (2013) 859-890.
- [18] A.G. Arani, M. Abdollahian, Z.K. Maraghi, Thermoelastic analysis of a non-axisymmetrically heated FGPM hollow cylinder under multi-physical fields, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 11(2) (2015) 157-171.
- [19] A.T. Kalali, S.H. Moud, B. Hassani, Elasto-plastic stress analysis in rotating disks and pressure vessels made of functionally graded materials, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 13(5) (2016) 819-834.
- [20] A.G. Arani, E. Haghparast, Z.K. Maraghi, S. Amir, Static stress analysis of carbon nano-tube reinforced

ضریب انبساط حرارتی	α
نسبت پواسون	ν
کرنش در راستای شعاع	ε_r
کرنش در راستای مماسی	ε_θ
تنش در راستای شعاع	σ_r
تنش در راستای مماسی	σ_θ
تنش ون مایز	σ_{vm}
تنش تسلیم	σ_y
زیرنویس‌ها	
خواص مربوط به فلز	m
خواص مربوط به سرامیک	c
بالانویس‌ها	
کمیت بدون بعد معادل	*

منابع

- [1] A.C. Ugural, S.K. Fenster, *Advanced mechanics of materials and applied elasticity*, Pearson Education, 2011.
- [2] T.Y. Reddy, H. Srinath, Elastic stresses in a rotating anisotropic annular disk of variable thickness and variable density, *International Journal of Mechanical Sciences*, 16(2) (1974) 85-89.
- [3] U. Güven, The fully plastic rotating solid disk of variable thickness, *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 74(1) (1994) 61-65.
- [4] A. Eraslan, Y. Orcan, Elastic-plastic deformation of a rotating solid disk of exponentially varying thickness, *Mechanics of Materials*, 34(7) (2002) 423-432.
- [5] M. Hojjati, A. Hassani, Theoretical and numerical analyses of rotating discs of non-uniform thickness and density, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 85(10) (2008) 694-700.
- [6] M. Bayat, M. Saleem, B. Sahari, A. Hamouda, E. Mahdi, Mechanical and thermal stresses in a functionally graded rotating disk with variable thickness due to radially symmetry loads, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 86(6) (2009) 357-372.
- [7] A.N. Eraslan, Elastic-plastic deformations of rotating variable thickness annular disks with free, pressurized and radially constrained boundary conditions, *International Journal of Mechanical Sciences*, 45(4) (2003) 643-667.
- [8] A. Hassani, M. Hojjati, G. Farrahi, R. Alashti, Semi-exact elastic solutions for thermo-mechanical analysis of

- flexible rotating disks, *Journal of sound and vibration*, 196(5) (1996) 537-577.
- [26] Z.-H. Jin, G.H. Paulino, R.H. Dodds Jr, Cohesive fracture modeling of elastic-plastic crack growth in functionally graded materials, *Engineering Fracture Mechanics*, 70(14) (2003) 1885-1912.
- [27] R.G. Munro, Material properties of titanium diboride, *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, 105(5) (2000) 709.
- [28] R. Carpenter, W. Liang, G.H. Paulino, J.C. Gibeling, Z. Munir, Fracture testing and analysis of a layered functionally graded Ti/TiB beam in 3-point bending, in: Materials Science Forum, *Trans Tech Publ*, 1999, pp. 837-842.
- [29] C.W. Bert, M. Malik, Differential quadrature method in computational mechanics: a review, *Applied mechanics reviews*, 49(1) (1996) 1-28.
- composite (CNTRC) cylinder under non-axisymmetric thermo-mechanical loads and uniform electro-magnetic fields, *Composites Part B: Engineering*, 68 (2015) 136-145.
- [21] T.L. Bergman, F.P. Incropera, *Introduction to heat transfer*, John Wiley & Sons, 2011.
- [22] G. Cardone, T. Astarita, G. Carlomagno, Heat transfer measurements on a rotating disk, *International Journal of Rotating Machinery*, 3(1) (1997) 1-9.
- [23] G. Paulino, Z.-H. Jin, R. Dodds, S. Sahu, N. Badgayan, P.R. Sreekanth, *Failure of functionally graded materials*, (2014).
- [24] R. Williamson, B. Rabin, J. Drake, Finite element analysis of thermal residual stresses at graded ceramic-metal interfaces. Part I. Model description and geometrical effects, *Journal of Applied Physics*, 74(2) (1993) 1310-1320.
- [25] M. Mignolet, C. Eick, M. Harish, Free vibration of

Please cite this article using:

K. Torabi and H. Afshari, Thermo-Mechanical Stress Analysis in a Rotating Radially Graded FG-Disc with Non-Uniform Thickness, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 50(1) (2018) 33-46.
DOI: 10.22060/mej.2016.772

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:



