

## حل تحلیلی دوبعدی میدان دما، تنش و جابجایی برای یک استوانه توخالی با شار حرارتی نامتقارن و زمانمند

عادل بیدزرد<sup>\*</sup>، مجتبی محزون، محمود یعقوبی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۲۲ تیر ۱۳۹۴  
بازنگری: ۸ دی ۱۳۹۴  
پذیرش: ۱۹ مرداد ۱۳۹۵  
ارائه آنلاین: ۱۹ آبان ۱۳۹۵

### کلمات کلیدی:

حل تحلیلی  
استوانه توخالی  
نامتقارن  
زمانمند

**چکیده:** در این مقاله حل تحلیلی دوبعدی برای میدان دما، تنش و جابجایی‌ها در استوانه‌ای توخالی ارائه شده است. در سطح بیرونی این استوانه توخالی، شار حرارتی نامتقارن و وابسته به زمان اعمال شده است. همچنین این استوانه حامل سیال است و در سطح داخلی به صورت جابجایی، تبادل حرارت می‌کند. از روش جداسازی متغیرها برای به دست آوردن میدان دما استفاده شده است. همچنین توزیع تنش‌ها به وسیله تابع تنش حرارتی به دست می‌آید. سپس به کمک روابط تنش- کرنش و کرنش-جابجایی، مولفه‌های جابجایی به دست آمده‌اند. این استوانه به عنوان مدلی از لوله گیرنده کلکتور سهموی خطی در نظر گرفته شده است. با استفاده از حل تحلیلی، نتایج برای مدل واقعی موجود در نیروگاه خورشیدی شیراز در یک دوره دوازده ساعته که از شش صبح تا شش بعد از ظهر طول می‌کشد به دست آمد. حل تحلیلی با استفاده از نرم‌افزار متلب برای نتایج عددی به کار گرفته شده است. همچنین نتایج برای اعتبارسنجی با روش المان محدود نرم‌افزار انسیس مقایسه شده است. در انتها این نتیجه دریافت شد که اختلاف به وجود آمده بین نتایج حل تحلیلی و خروجی نرم‌افزار انسیس به علت عدم توانایی نرم‌افزار متلب در توانایی محاسبه دقیق توابع کلون است.

### ۱- مقدمه

به دست آوردن توزیع دما، تنش و جابجایی در جداره یک استوانه توخالی به علت کاربرد های آن در صنعت، همیشه مورد علاقه پژوهشگران بوده است. در بسیاری از موارد این توزیع دما در استوانه‌های توخالی به صورت نامتقارن و وابسته به زمان می‌باشند، برای مثال در یک کلکتور سهموی خطی، یک سمت لوله گیرنده که به طرف آینه های کلکتور است نسبت به سمت دیگر، بیشتر گرم می‌شود و این شرایط با گذشت زمان و حرکت خورشید در یک شبانه روز تغییر می‌کند. در ابتدا مروری بر پژوهش‌های پیشین خواهیم کرد. در این پژوهش‌ها به کمک روش‌های تحلیلی به حل معادلات حاکم بر استوانه توخالی برای به دست آوردن میدان دما و تنش پرداخته اند. غصن و صباغیان [۱] یک استوانه توخالی با شرایط مرزی متقارن را به صورت یک بعدی بررسی کردند و به کمک فضای میدان لاپلاس به حل معادلات پرداختند. گوشیمیا و میائو [۲] یک استوانه توخالی خیلی بلند را در نظر گرفتند؛ به طوری که دارای یک مولد گرمایی درونی بوده و به وسیله سطوح داخلی و بیرونی خنک می‌شد. آنها برای تحلیل مسئله از تبدیل لاپلاس و گرین فانکشن استفاده کردند. نودا و کیم [۳] به کمک تابع گرین و تئوری لامینار میدان دما و تنش حرارتی در یک استوانه توخالی بلند را به صورت دوبعدی و در حالت گذرا به دست آوردند. آنها معادله گرمای گذرا را به یک مسئله مقدار ویژه تبدیل کرده و با بسط تابع ویژه و تئوری

لامینار به جواب رسیدند. برای توزیع تنش و جابجایی از تابع میشل و تابع پتانسیل جابجایی استفاده کردند. یی و مون [۴] یک حل تحلیلی برای مسئله دوبعدی گذرای استوانه توخالی ارتوتروپیک ارائه کردند؛ به طوری که توزیع دمای اولیه دلخواه برای جسم مشخص و شرایط مرزی همگن بود. برای توزیع تنش از روش تابع تنش استفاده کردند. همچنین توزیع دما را به کمک بسط تابع ویژه بسط-فوریه یافتند. شاهانی و نبوی [۵] به کمک تبدیل هنکل یک مسئله ترموالاستیسیته شبه استاتیکی را برای یک استوانه توخالی جدار ضخیم حل کردند و توزیع دما و جابجایی را به دست آوردند.

در این مقاله، ابتدا حل تحلیلی دوبعدی یک استوانه توخالی برای به دست آوردن میدان دما به کمک روش جداسازی متغیرها ارائه شده است. شار حرارتی روی سطح بیرونی نامتقارن و وابسته به زمان می‌باشد و درون این استوانه توخالی سیالی با ضریب جابجایی مشخص وجود دارد. سپس به کمک روش تابع حرارتی تنش‌ها محاسبه می‌شود. در انتها به کمک روابط تنش-کرنش و کرنش-جابجایی مولفه‌های جابجایی یافته می‌شود. در این مسئله فرض شده است جسم به صورت همگن باشد، خواص فیزیکی تابعیتی از زمان و دما نباشد و ضریب جابجایی سیال ثابت در نظر گرفته شده است. برای اعتبارسنجی، نتایج استخراجی نرم‌افزار انسیس با نتایج روش حل تحلیلی که در نرم‌افزار متلب کد نویسی شده است مقایسه گشته است.

### ۲- مدل سازی ریاضی

یک استوانه توخالی بلند در نظر گرفته می‌شود که شعاع داخلی و شعاع

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: adel.bidzard@yahoo.com

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} - i \frac{w}{k} r^2 = n^2 \Rightarrow r^2 R'' + r R' - (i \frac{w}{k} r^2 + n^2) R = 0 \quad (12)$$

از حل معادله (۱۲) داریم:

$$R(r) = C_n [ber_n(\sqrt{\frac{w}{k}} r) + i bei_n(\sqrt{\frac{w}{k}} r)] + D_n [Ker_n(\sqrt{\frac{w}{k}} r) + i Kei_n(\sqrt{\frac{w}{k}} r)] \quad (13)$$

که در آن توابع کلومب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ber_n(\sqrt{\frac{w}{k}} r) = (\frac{1}{2} \sqrt{\frac{w}{k}} r)^n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\cos\{\frac{3}{4}n + \frac{1}{2}i\}\pi}{k! \Gamma(n+i+1)} (\frac{1}{4} \frac{w}{k} r^2)^i \quad (14)$$

$$bei_n(\sqrt{\frac{w}{k}} r) = (\frac{1}{2} \sqrt{\frac{w}{k}} r)^n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\sin\{\frac{3}{4}n + \frac{1}{2}i\}\pi}{k! \Gamma(n+i+1)} (\frac{1}{4} \frac{w}{k} r^2)^i \quad (15)$$

$$ker_n(\sqrt{\frac{w}{k}} r) = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} \sqrt{\frac{w}{k}} r)^{-n} \times \sum_{i=0}^{n-1} \cos(\frac{3}{4}n + \frac{1}{2}i)\pi \times \frac{(n-i-1)!}{i!} (\frac{1}{4} \frac{w}{k} r^2)^i - \ln(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{w}{k}} r) ber_n(\sqrt{\frac{w}{k}} r) + \frac{1}{4} \pi bei_n(\sqrt{\frac{w}{k}} r) \quad (16)$$

$$+ \frac{1}{2} (\frac{1}{2} \sqrt{\frac{w}{k}} r)^n \times \sum_{i=0}^{\infty} \cos(\frac{3}{4}n + \frac{1}{2}i)\pi \times \frac{\{\psi(i+1) + \psi(n+i+1)\}}{i!(n+i)!} (\frac{1}{4} \frac{w}{k} r^2)^i$$

$$Kei_n(\sqrt{\frac{w}{k}} r) = -\frac{1}{2} (\frac{1}{2} \sqrt{\frac{w}{k}} r)^{-n} \times \sum_{i=0}^{n-1} \sin(\frac{3}{4}n + \frac{1}{2}i)\pi \times \frac{(n-i-1)!}{i!} (\frac{1}{4} \frac{w}{k} r^2)^i - \ln(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{w}{k}} r) bei_n(\sqrt{\frac{w}{k}} r) - \frac{1}{4} \pi ber_n(\sqrt{\frac{w}{k}} r) \quad (17)$$

$$+ \frac{1}{2} (\frac{1}{2} \sqrt{\frac{w}{k}} r)^n \times \sum_{i=0}^{\infty} \sin(\frac{3}{4}n + \frac{1}{2}i)\pi \times \frac{\{\psi(i+1) + \psi(n+i+1)\}}{i!(n+i)!} (\frac{1}{4} \frac{w}{k} r^2)^i$$

که در آن تابع دی گاما است:

$$\left\{ \begin{aligned} \psi(z+1) &= \psi(z) + \frac{1}{z} \\ \psi(n) &= -\bar{\gamma} + \sum_{k=1}^{n-1} k^{-1} \\ \bar{\gamma} &= const \\ \bar{\gamma} &= \lim_{x \rightarrow \infty} [1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{x} - \ln x] = 0.57721 \end{aligned} \right. \quad (18)$$

با استفاده از رابطه (۶) داریم:

$$\tau(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [C_n (ber_n(\sqrt{\frac{w}{k}} r) + i bei_n(\sqrt{\frac{w}{k}} r)) + D_n (Ker_n(\sqrt{\frac{w}{k}} r) + i Kei_n(\sqrt{\frac{w}{k}} r))] \times (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) e^{i n t} \quad (19)$$

خارجی به ترتیب  $r_o = b$  و  $r_i = a$  باشد. همچنین فرض می‌شود که این استوانه از یک ماده همگن و آیزوتروپیک ساخته شده باشد. معادله گرما در حالت دوبعدی به صورت زیر است:

$$\frac{1}{k} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \theta^2}, \quad (a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, t \geq 0) \quad (1)$$

به طوریکه  $r$  فاصله شعاعی،  $k$  پخش گرمایی و  $\tau$  توزیع دما است که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$k = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (2)$$

$$\tau = T - T_0 \quad (3)$$

به طوریکه  $\lambda$  رسانایی گرمایی،  $\rho$  چگالی،  $c$  ظرفیت گرمایی ویژه و  $T_0$  دمای اولیه جسم است. توزیع دمای  $\tau(r, \theta, t)$  باید شرایط مرزی زیر را ارضا کند:

$$\lambda \frac{\partial \tau(a, \theta, t)}{\partial r} = h \tau(a, \theta, t) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, t \geq 0) \quad (4)$$

$$\lambda \frac{\partial \tau(b, \theta, t)}{\partial r} = f(\theta) \cos(\omega t) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, t \geq 0) \quad (5)$$

که در آن  $w$  فرکانس و محدوده آن  $0 \leq w \leq 0.00014544$  در نظر گرفته می‌شود.

### ۳- حل تحلیلی توزیع دما

برای به دست آوردن توزیع دما، از روش جداسازی متغیرها استفاده شده و  $\tau(r, \theta, t)$  به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\tau(r, \theta, t) = R(r) \phi(\theta) M(t) \quad (6)$$

با جاگذاری رابطه (۶) درون رابطه (۱) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\phi''}{\phi} = \frac{1}{k} \frac{M'}{M} = \mu_1 \quad (7)$$

در ادامه خواهیم داشت:

$$\frac{1}{k} \frac{M'}{M} = \mu_1 \Rightarrow M = c e^{k \mu_1 t} \quad (8)$$

$\mu_1$  چه مثبت چه منفی یا صفر باشد  $M$  نوسانی نخواهد بود. در نتیجه از

الگوی زیر استفاده می‌شود:

$$M = \cos \omega t + i \sin \omega t = e^{i \omega t} \Rightarrow \frac{1}{k} \frac{M'}{M} = \frac{1}{k} i \omega \quad (9)$$

با جاگذاری رابطه (۹) درون رابطه (۷) داریم:

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} - i \frac{w}{k} r^2 = -\frac{\phi''}{\phi} = \mu_2 \quad (10)$$

در ادامه با داشتن شرایط مرزی متناوب داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} \phi'' + \mu_2 \phi &= 0 \\ \phi(0) &= \phi(2\pi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mu_2 = n^2 \Rightarrow \phi = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \quad (11)$$

با جاگذاری رابطه (۱۱) درون رابطه (۱۰) داریم:

با اعمال شرط مرزی (۴) داریم:

$$\tau(r, \theta, t) = e^{i\omega t} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} F_n(r) \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(r) \sin(n\theta) \right\} \quad (28)$$

که

$$C_n = F_n D_n \quad (29)$$

که:

$$F_n = \frac{[\gamma(Ker'_n(\sqrt{\frac{w}{k}}a) + iKei'_n(\sqrt{\frac{w}{k}}a)) - h(Ker_n(\sqrt{\frac{w}{k}}a) + iKei_n(\sqrt{\frac{w}{k}}a))]}{\gamma(ber'_n(\sqrt{\frac{w}{k}}a) + ibei'_n(\sqrt{\frac{w}{k}}a)) - h(ber_n(\sqrt{\frac{w}{k}}a) + ibei_n(\sqrt{\frac{w}{k}}a))} \quad (21)$$

در نتیجه

$$\tau(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [F_n [ber_n(\sqrt{\frac{w}{k}}r) + ibei_n(\sqrt{\frac{w}{k}}r)] + [Ker_n(\sqrt{\frac{w}{k}}r) + iKei_n(\sqrt{\frac{w}{k}}r)] \times (A'_n \cos n\theta + B'_n \sin n\theta) e^{i\omega t}] \quad (22)$$

با اعمال شرط مرزی (۵) داریم:

$$(A'_n, B'_n) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(s) (\cos ns, \sin ns) ds (z - iy)}{\pi \lambda (z^2 + y^2)} \quad (23)$$

که:

$$\left\{ \begin{aligned} z &= [Gber'_n(\sqrt{\frac{w}{k}}b) + Ker'_n(\sqrt{\frac{w}{k}}b) - Hbei'_n(\sqrt{\frac{w}{k}}b)] \\ y &= [Gbei'_n(\sqrt{\frac{w}{k}}b) + Kei'_n(\sqrt{\frac{w}{k}}b) + Hber'_n(\sqrt{\frac{w}{k}}b)] \\ G &= \frac{pr + qs}{r^2 + s^2} \\ H &= \frac{qr - ps}{r^2 + s^2} \\ p &= -\gamma Ker'_n(\sqrt{\frac{w}{k}}a) + h Ker_n(\sqrt{\frac{w}{k}}a) \\ q &= -\gamma Kei'_n(\sqrt{\frac{w}{k}}a) + h Kei_n(\sqrt{\frac{w}{k}}a) \\ r &= \gamma ber'_n(\sqrt{\frac{w}{k}}a) - h ber_n(\sqrt{\frac{w}{k}}a) \\ s &= \gamma bei'_n(\sqrt{\frac{w}{k}}a) - h bei_n(\sqrt{\frac{w}{k}}a) \end{aligned} \right. \quad (24)$$

با به دست آوردن قسمت حقیقی توزیع دما داریم:

$$\tau(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z \cos \omega t + y \sin \omega t) M - (z \sin \omega t - y \cos \omega t) N}{-2\pi \gamma (z^2 + y^2)} \times \left( \int_0^{2\pi} f(s) \cos n(\theta - s) ds \right) \quad (25)$$

که:

$$M = G \cdot ber_n(\sqrt{\frac{w}{k}}r) + Ker_n(\sqrt{\frac{w}{k}}r) - H \cdot bei_n(\sqrt{\frac{w}{k}}r) \quad (26)$$

$$N = H \cdot ber_n(\sqrt{\frac{w}{k}}r) + G \cdot bei_n(\sqrt{\frac{w}{k}}r) + kei_n(\sqrt{\frac{w}{k}}r) \quad (27)$$

#### ۴- حل تحلیلی توزیع تنش

اگر توزیع دما به صورت فشرده زیر نوشته شود:

$$\left\{ \begin{aligned} F_n(r) &= A_n Br_n(x) + B_n Kr_n(x) \\ G_n(r) &= C_n Br_n(x) + D_n Kr_n(x) \\ Br_n(x) &= ber_n(x) + ibei_n(x) \\ Kr_n(x) &= ker_n(x) + ikei_n(x) \\ x &= \sqrt{\frac{w}{k}}r \end{aligned} \right. \quad (29)$$

بعد از یافتن توزیع دما برای به دست آوردن تنش‌های حرارتی از روش تابع تنش حرارتی استفاده می‌شود. اگر تابع تنش حرارتی با نماد  $\chi$  نشان داده شود، این تابع با تنش‌های حرارتی به صورت معادلات زیر در ارتباط است:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right. \quad (30)$$

برای اینکه تابع معادلات سازگاری را نیز ارضا کند باید در رابطه زیر صدق کند:

$$\nabla^4 \chi + \frac{E \alpha}{1-\nu} \nabla^2 \tau = 0 \quad (31)$$

که در آن  $E$  مدول الاستیسیته،  $\alpha$  ضریب انبساط گرمایی و  $\nu$  ضریب پواسون می‌باشد. اگر  $\chi$  به صورت زیر فرض شود:

$$\chi(r, \theta, t) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(r) \sin(n\theta) \right\} e^{i\omega t} \quad (32)$$

با جاگذاری معادله (۳۲) و (۲۸) درون رابطه (۳۱) داریم:

$$f_n'''' + \frac{2}{r} f_n''' - \frac{1+2n^2}{r^2} f_n'' + \frac{1+2n^2}{r^3} f_n' + \frac{n^2(n^2-4)}{r^4} f_n = -\frac{i\omega \alpha E}{k(1-\nu)} F_n(r) \quad (33)$$

با در نظر گرفتن عبارت  $\sin(n\theta)$  عبارت مشابهی به دست می‌آید که فقط به جای  $f$  و  $F$  باید  $g$  و  $G$  گذاشته شود. به ازای  $n=1$  جواب کلی معادله (۳۳) یافته می‌شود:

$$f_1'''' + \frac{2}{r} f_1''' - \frac{3}{r^2} f_1'' + \frac{3}{r^3} f_1' - \frac{3}{r^4} f_1 = -\frac{i\omega \alpha E}{k(1-\nu)} F_1(r) \quad (34)$$

جواب همگن معادله (۳۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f_1^* = C_1 r + C_2 r^{-1} + C_3 r^3 + C_4 r \ln(r) \quad (35)$$

برای به دست آوردن جواب خصوصی معادله (۳۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

به طوریکه  $u_r$  و  $u_\theta$  مولفه‌های جابجایی در راستای شعاعی و محیطی هستند. با جاگذاری معادلات (۲۸) و (۴۱) درون معادلات (۴۲) و سپس انتگرال‌گیری عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$u_r = \cos \theta \left\{ \frac{1+\nu}{E} [C_2 r^{-2} + (1-4\nu)C_3 r^2 + (1-2\nu)C_4 \ln r] + \frac{(1+\nu)\alpha}{2(1-\nu)} \left[ r^{-2} \int_a^r F_1(s) s^2 ds + \int_a^r F_1(s) ds \right] \right\} + \sin \theta \left\{ \frac{1+\nu}{E} [D_2 r^{-2} + (1-4\nu)D_3 r^2 + (1-2\nu)D_4 \ln r] + \frac{(1+\nu)\alpha}{2(1-\nu)} \left[ r^{-2} \int_a^r G_1(s) s^2 ds + \int_a^r G_1(s) ds \right] \right\} + U(\theta) \quad (43)$$

$$u_\theta = \sin \theta \left\{ \frac{1+\nu}{E} [C_2 r^{-2} + (5-4\nu)C_3 r^2 + (1-2\nu)C_4 (1-\ln r)] + \frac{(1+\nu)\alpha}{2(1-\nu)} \left[ r^{-2} \int_a^r F_1(s) s^2 ds - \int_a^r F_1(s) ds \right] \right\} - \cos \theta \left\{ \frac{1+\nu}{E} [D_2 r^{-2} + (5-4\nu)D_3 r^2 + (1-2\nu)D_4 (1-\ln r)] + \frac{(1+\nu)\alpha}{2(1-\nu)} \left[ r^{-2} \int_a^r G_1(s) s^2 ds - \int_a^r G_1(s) ds \right] \right\} - \int U(\theta) d\theta + \nu(r) \quad (44)$$

برای به دست آوردن توابع  $U(\theta)$  و  $V(r)$ ،  $u_r$  و  $u_\theta$  درون رابطه  $\varepsilon_{r\theta}$  قرار داده شده و عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\left\{ \begin{aligned} V(r) &= Hr \\ U(\theta) &= L \cos(\theta) + M \sin(\theta) + 2(1-\nu)C_4 \theta \sin(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

در واقع ثوابت  $H$  و  $L$  و  $M$  بیان‌کننده حرکات صلب انتقالی و چرخشی هستند. همچنین برای اینکه شرط تک مقدار بودن جابجایی برقرار باشد باید  $c_4 = 0$  باشد.

### ۶- اعتبارسنجی

برای اعتبارسنجی، حل تحلیلی در نرم‌افزار متلب کدنویسی شده و سپس نتایج آن با خروجی از نرم‌افزار انسیس مقایسه شده است. داده‌های ورودی از لوله گیرنده کلکتور سهموی خطی نیروگاه خورشیدی انتخاب شده است. خواص فیزیکی این لوله گیرنده مطابق جدول (۱) می‌باشد. توزیع شار حرارتی نامتقارن بیرون لوله مربوط به شهر شیراز به صورت شکل ۱ و مدل ریاضی آن به صورت رابطه زیر است:

$$f(\theta) = -4453.3 \sin(\theta + 6.2) + 8157.5 \sin(2\theta + 13.9) + 11500 \quad (46)$$

در بررسی مدل، هیچ گونه قید مکانیکی بر روی شعاع داخلی و خارجی در نظر گرفته نشده است.

بررسی لوله در یک سیکل دوازده ساعته که از شش صبح تا شش بعد از ظهر طول می‌کشد انجام شده و فرکانس زمانی  $w = 0.0014544 \text{ rad/s}$  خواهد بود. شکل ۲ به مقایسه نتایج حل تحلیلی و روش المان محدود نرم‌افزار انسیس برای توزیع دما پرداخته است. این نتایج برای شعاع داخلی

$$\nabla^2 \chi + \frac{E\alpha}{1-\nu} \tau = 0 \quad (36)$$

با جاگذاری معادله (۳۲) و (۲۸) درون رابطه (۳۶) داریم:

$$\bar{f}_n'' + \frac{1}{r} \bar{f}_n' - \frac{n^2}{r^2} \bar{f}_n = -\frac{\alpha E}{1-\nu} f_n(r) \quad (37)$$

به ازای  $n=1$  جواب معادله دیفرانسیل به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{f}_1 = \frac{\alpha E}{2(1-\nu)} \left\{ \frac{1}{r} \int_{r_i}^r s^2 F_1(s) ds - r \int_{r_i}^r F_1(s) ds \right\} \quad (38)$$

در نتیجه برای  $n=1$  جواب کلی  $f$  به صورت مجموع جواب خصوصی و همگن خواهد بود:

$$f_1 = C_1 r + C_2 r^{-1} + C_3 r^3 + C_4 r \ln(r) + \frac{\alpha E}{2(1-\nu)} \left\{ \frac{1}{r} \int_{r_i}^r s^2 F_1(s) ds - r \int_{r_i}^r F_1(s) ds \right\} \quad (39)$$

برای  $g$  هم به همین صورت جواب مشابهی به دست می‌آید:

$$g_1 = D_1 r + D_2 r^{-1} + D_3 r^3 + D_4 r \ln(r) + \frac{\alpha E}{2(1-\nu)} \left\{ \frac{1}{r} \int_{r_i}^r s^2 G_1(s) ds - r \int_{r_i}^r G_1(s) ds \right\} \quad (40)$$

در نتیجه برای  $n=1$  جواب کامل معادله (۳۲) به دست می‌آید و تنش‌ها به صورت زیر خواهند بود:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_r &= - \left\{ 2C_2 r^{-3} - 2C_3 r - C_4 r^{-1} + \frac{E\alpha r^{-3}}{1-\nu} \int_{r_i}^r F_1(s) s^2 ds \right\} \cos \theta \\ &- \left\{ 2D_2 r^{-3} - 2D_3 r - D_4 r^{-1} + \frac{E\alpha r^{-3}}{1-\nu} \int_{r_i}^r G_1(s) s^2 ds \right\} \sin \theta \\ \sigma_\theta &= \left\{ 2C_2 r^{-3} + 6C_3 r + C_4 r^{-1} + \frac{E\alpha}{1-\nu} \left[ r^{-3} \int_{r_i}^r (F_1(s) s^2 ds) - F_1(r) \right] \right\} \cos \theta \\ &+ \left\{ 2D_2 r^{-3} + 6D_3 r + D_4 r^{-1} + \frac{E\alpha}{1-\nu} \left[ r^{-3} \int_{r_i}^r (G_1(s) s^2 ds) - G_1(r) \right] \right\} \sin \theta \\ \sigma_{r\theta} &= - \left\{ 2C_2 r^{-3} - 2C_3 r - C_4 r^{-1} + \frac{E\alpha r^{-3}}{1-\nu} \int_{r_i}^r F_1(s) s^2 ds \right\} \sin \theta \\ &+ \left\{ 2D_2 r^{-3} - 2D_3 r - D_4 r^{-1} + \frac{E\alpha r^{-3}}{1-\nu} \int_{r_i}^r G_1(s) s^2 ds \right\} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

با اعمال شرایط مرزی  $\sigma_r = \sigma_{r\theta} = 0$  در شعاع داخلی و خارجی مجهولات محاسبه می‌شود.

### ۵- حل تحلیلی توزیع جابجایی

روابط تنش- کرنش و کرنش- جابجایی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_\theta] + (1+\nu)\alpha\tau \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r] + (1+\nu)\alpha\tau \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{r\theta} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

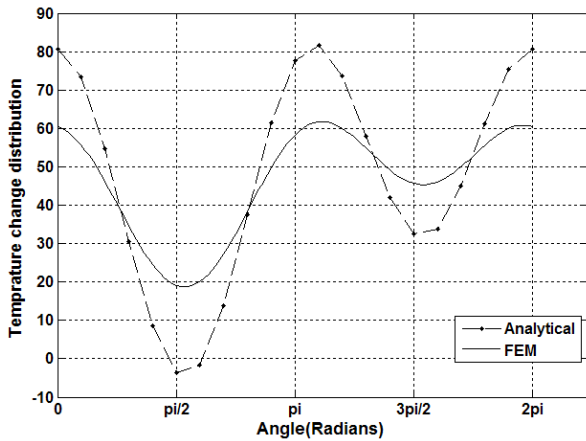


Fig. 2. Comparison of temperature change distribution, analytical versus FEM

شکل ۲: مقایسه حل تحلیلی توزیع دما و روش المان محدود

می‌شود. این تنش‌ها برای شعاع  $r=3/35$  و برای ساعت ۹ صبح به دست آمده‌اند. همانطور که مشاهده می‌شود نتایج کاملاً بر هم منطبق نیستند و اختلافاتی وجود دارد. از علل به وجود آمدن این اختلاف می‌توان مشابه توزیع دما، عدم توانایی نرم‌افزار متلب در محاسبه دقیق توابع کلونین اشاره کرد. همچنین با توجه به اینکه سری‌های موجود برای محاسبه تنش‌ها از صفر تا بی‌نهایت هستند، یعنی باید بی‌نهایت جمله با هم جمع شوند تا عدد دقیق تنش‌ها را محاسبه کنند، همیشه مقداری خطا ناشی از عدم محاسبه تعدادی جملات وجود دارد. از طرف دیگر همان تعداد جملاتی که با هم جمع گردیده‌اند خود مقداری خطا دارند که مجموع خطاها را افزایش می‌دهد. با توجه به همه عوامل خطا، همچنان بر عدم توانایی نرم‌افزار متلب در محاسبه دقیق توابع بدرقتار کلونین به عنوان خطای عمده تاکید می‌شود.

همانطور که در شکل‌های ۸ و ۹ مشاهده می‌شود، به ترتیب به مقایسه حل تحلیلی توزیع جابجایی شعاعی و جابجایی مماسی با خروجی نرم‌افزار انسیس پرداخته شده است. از علل اختلاف اندک به وجود آمده در نتایج می‌توان به این موضوع اشاره کرد که با توجه به اینکه برای محاسبه جابجایی از تنش‌ها استفاده می‌شود و تنش‌ها دارای خطا می‌باشند، وجود خطا غیرقابل اجتناب می‌باشد.

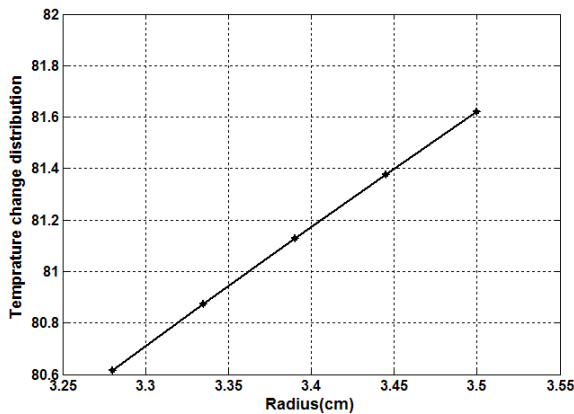


Fig. 3. Temperature distribution in different radii at a constant angle

شکل ۳: توزیع دما در شعاع‌های مختلف در یک زاویه ثابت

جدول ۱: خواص فیزیکی لوله گیرنده [۶]

Table 1. Material properties of the absorber tube

مقدار	پارامتر	ردیف
۳/۲۸	شعاع داخلی (cm)	۱
۳/۵۰	شعاع خارجی (cm)	۱
۱۷	ضریب رسانایی گرمایی (W/K.m)	۱
۵۰۲	ظرفیت گرمای ویژه (J/kg.K)	۱
۸۰۰۰	چگالی (kg/m <sup>3</sup> )	۱
۱۹۳	مدول الاستیسیته (GPa)	۱
۱/۶۲e-۵	ضریب انبساط گرمایی (1/K)	۱
۰/۳	ضریب پواسون	۱

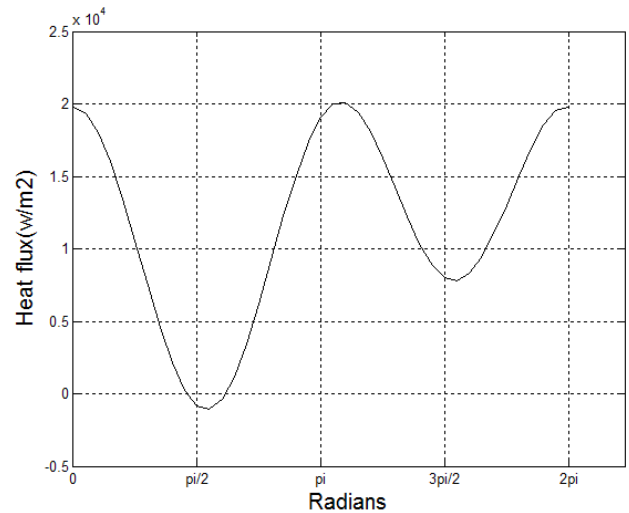


Fig. 1. Heat flux distribution on the outer surface of the pipe

شکل ۱: توزیع شار حرارتی روی سطح بیرونی لوله

لوله گیرنده و در ساعت نه صبح یعنی پس از گذشت سه ساعت از آغاز فرایند به دست آمده است. همانطور که مشاهده می‌شود بین نتایج، اختلاف اندکی وجود دارد که علت این اختلاف را می‌توان عدم توانایی نرم‌افزار متلب در محاسبه دقیق توابع کلونین یافت؛ بطور مثال مقدار این تابع برای  $ber_0(42/76) = -0.33458272708 \times 10^{11}$  و برای یک صدم تغییر در مقدار آن،  $ber_0(42/77) = -0.25206424404 \times 10^{11}$  خواهد شد.

کوچکترین تفاوت در مقدار یکی از رقم‌های بالا با توجه به اینکه در توانی از عدد یازده ضرب می‌شوند موجب به وجود آمدن خطاهای بزرگی می‌شود. در شکل ۳ توزیع دما در زاویه  $\theta=0$  برای شعاع‌های مختلف رسم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود از شعاع داخلی به سمت شعاع بیرونی، دما به صورت خطی افزایش می‌یابد. در شکل ۴، توزیع دما برای شعاع داخلی و خارجی در زاویه  $\theta=180$  بر حسب زمان‌های مختلف به دست آمده است. در ادامه به مقایسه حل تحلیلی توزیع تنش‌های شعاعی، برشی و مماسی با خروجی نرم‌افزار انسیس به ترتیب در شکل‌های ۵ تا ۷ پرداخته

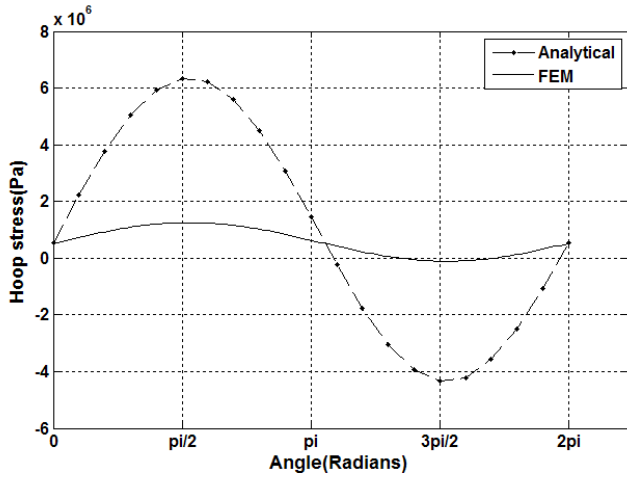


Fig. 7. Comparison of hoop stress distribution, analytical versus FEM

شکل ۷: مقایسه حل تحلیلی توزیع تنش مماسی و روش المان محدود

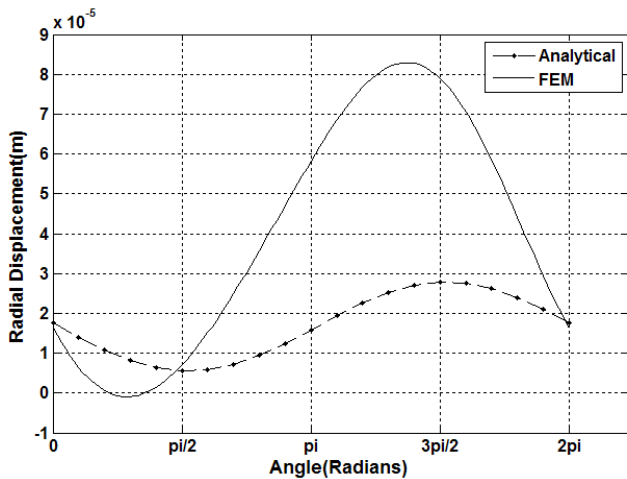


Fig. 8. Comparison of radial displacement distribution, analytical versus FEM

شکل ۸: مقایسه حل تحلیلی توزیع جابجایی شعاعی و روش المان محدود

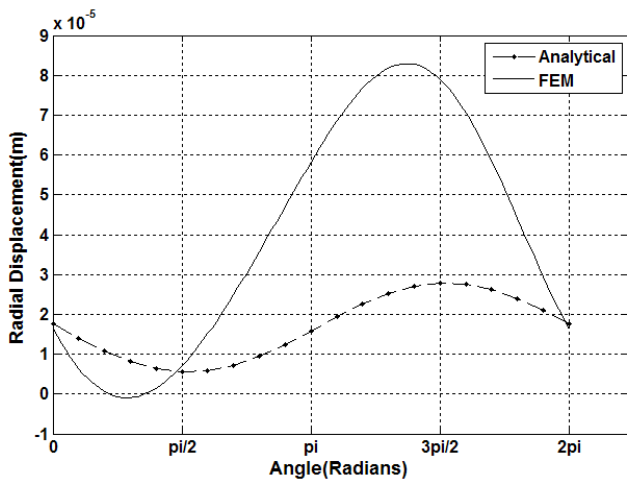


Fig. 9. Comparison of Tangential displacement distribution, analytical versus FEM

شکل ۹: مقایسه حل تحلیلی توزیع جابجایی مماسی و روش المان محدود

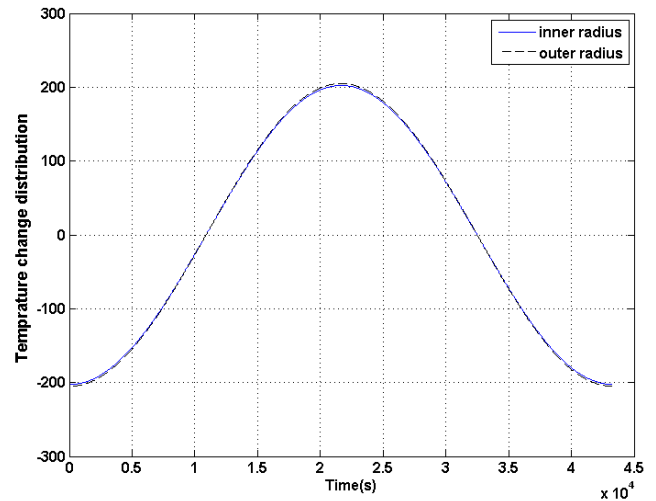


Fig. 4. Temperature distribution in inner and outer radius at different times

شکل ۴: توزیع دما در شعاع داخلی و خارجی بر حسب زمان‌های مختلف

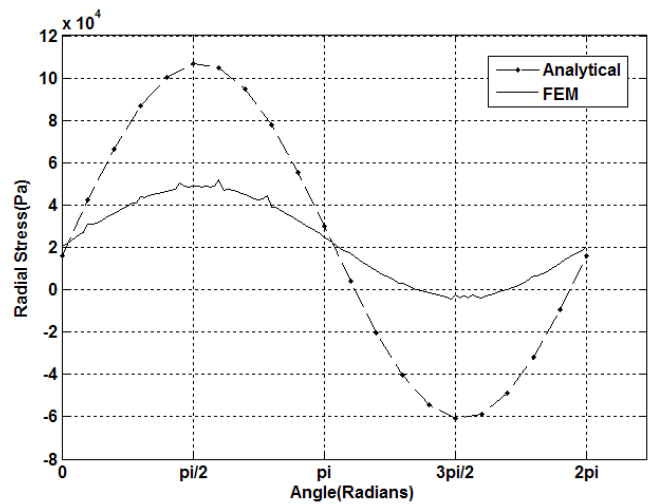


Fig. 5. Comparison of radial stress distribution, analytical versus FEM

شکل ۵: مقایسه حل تحلیلی توزیع تنش شعاعی و روش المان محدود

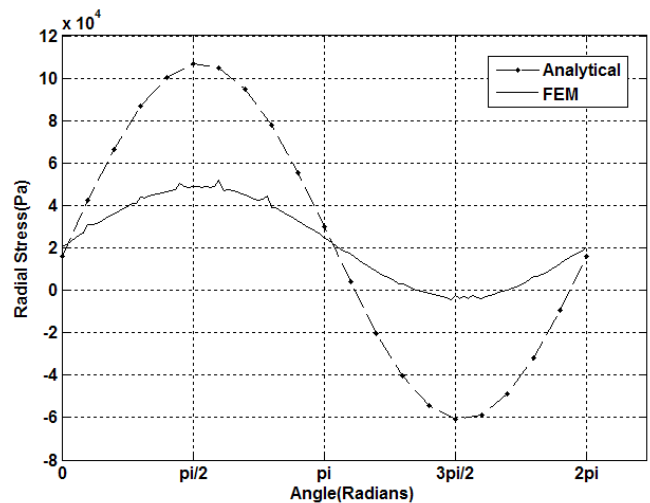


Fig. 6. Comparison of Shear stress distribution, analytical versus FEM

شکل ۶: مقایسه حل تحلیلی توزیع تنش برشی و روش المان محدود

*Thermal Stresses*, 5(3-4) (1982) 299-313.

- [2] T. Goshima, K. Miyao, Transient thermal stresses in a hollow cylinder subjected to  $\gamma$ -ray heating and convective heat losses, *Nuclear Engineering and Design*, 125(2) (1991) 267-273.
- [3] K.-S. Kim, N. Noda, Green's function approach to unsteady thermal stresses in an infinite hollow cylinder of functionally graded material, *Acta Mechanica*, 156(3-4) (2002) 145-161.
- [4] K.-C. Yee, T. Moon, Plane thermal stress analysis of an orthotropic cylinder subjected to an arbitrary, transient, asymmetric temperature distribution, *Journal of applied mechanics*, 69(5) (2002) 632-640.
- [5] A. Shahani, S. Nabavi, Analytical solution of the quasi-static thermoelasticity problem in a pressurized thick-walled cylinder subjected to transient thermal loading, *Applied mathematical modelling*, 31(9) (2007) 1807-1818.
- [6] S. Akbarimoosavi, M. Yaghoubi, 3D Thermal-structural analysis of an absorber tube of a parabolic trough collector and the effect of tube deflection on optical efficiency, *Energy Procedia*, 49 (2014) 2433-2443.

## ۷- نتیجه گیری

در این مقاله به کمک حل تحلیلی به روش جداسازی متغیرها توزیع دما برای یک استوانه توخالی به دست آمد. سپس به کمک روش تابع حرارتی توزیع تنش‌ها محاسبه گردید. در انتها به کمک روابط تنش- کرنش و کرنش- جابجایی مولفه‌های جابجایی به دست آمدند. شرایط مرزی مسئله به این صورت می‌باشد که روی سطح بیرونی این استوانه شار حرارتی نامتقارن اعمال می‌گردد. همچنین درون این استوانه سیالی با ضریب جابجایی مشخص وجود دارد. سپس جواب به دست آمده به کمک حل تحلیلی، درون نرم‌افزار متلب کد نویسی شده است. برای اعتبار سنجی، نتایج حل تحلیلی با روش المان محدود نرم‌افزار انسیس مقایسه شد. داده‌های ورودی از لوله گیرنده کلکتور سهموی خطی نیروگاه خورشیدی شیراز انتخاب شده است. خطای موجود بین حل تحلیلی و روش المان محدود به دلیل عدم توانایی نرم‌افزار متلب در محاسبه دقیق توابع کلون بیان شد. همچنین مشاهده شد که توزیع دما از شعاع داخلی به سمت شعاع خارجی به صورت خطی افزایش می‌یابد.

## منابع

- [1] A. Ghosn, M. Sabbaghian, Quasi-static coupled problems of thermoelasticity for cylindrical regions, *Journal of*

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

A. Bidzard, M. Mahzoon, M. Yaghoubi, "Analytical Solution for Temperature, Stress and Displacement Fields for a Hollow Cylinder Subjected to Asymmetric and Time Dependent Heat Flux" *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 49(2) (2017) 253-260.

DOI: 10.22060/mej.2016.791



