



## ارائه فرمولاسیون اجزا محدود جهت تحلیل رفتار دینامیکی میکروروتورها براساس نظریه گرادیان کرنش

مهدی هاشمی و محسن اصغری\*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۸ اردیبهشت ۱۳۹۵  
بازنگری: ۲۶ مرداد ۱۳۹۵  
پذیرش: ۲ آبان ۱۳۹۵  
ارائه آنلاین: ۱۹ آبان ۱۳۹۵

### کلمات کلیدی:

میکروروتور  
نظریه گرادیان کرنش  
ارتعاشات آزاد و اجباری  
یاتاقان انعطاف پذیر  
نامیزانی

**چکیده:** در این مقاله برای اولین بار فرمولاسیون اجزا محدود سه بعدی سامانه روتور، متشکل از میکروشافت دوار و دیسک‌های متصله براساس نظریه گرادیان کرنشی به منظور بررسی رفتار دینامیکی یا مشخصات ارتعاشاتی این سامانه ارائه شده است. مدل مذکور این امکان را فراهم می‌کند که ضمن در نظر گرفتن اثرات ناشی از قرار داشتن هندسه سامانه در ابعاد میکرو، تأثیرات مربوط به غیرصلب بودن یاتاقان‌ها، میرایی داخلی و نامیزانی در میکروروتور را مورد مطالعه قرار دهد. برای ارائه این فرمولاسیون، در ابتدا روابط مربوط به انرژی کرنشی سامانه براساس نظریه گرادیان کرنشی و انرژی جنبشی سامانه با وجود نامیزانی در دیسک حین حرکت عرضی، همراه با جملات مربوط به اینرسی ناشی از دوران و گشتاور ژیرسکوپیکی بیان گردیده‌اند. سپس با استفاده از اصل تعمیم یافته همپلتون به منظور دستیابی به فرم ضعیف شده معادلات و تقریب متغیرهای مربوط به مؤلفه‌های جابه‌جایی عرضی میکروروتور با توابع شکل مناسب، معادلات حرکت گسسته‌سازی شده‌اند و برای اولین بار ماتریس‌های جرم شافت و دیسک، اینرسی دورانی شافت و دیسک، میرایی یاتاقان، ژیرسکوپیکی شافت و دیسک، سختی و نیز ماتریس چرخشی براساس نظریه گرادیان کرنش برای سامانه روتور تعیین شده‌اند. به عنوان مثال‌هایی، مشخصات ارتعاشاتی سامانه میکروروتوری و نیز پاسخ سامانه در برابر حضور نامیزانی در دیسک آن ارائه شده است. نتایج عددی ارائه شده بعد از صحت‌گذاری مدل پیشنهادی، بیانگر تأثیر بارز ثابت مادی مرتبه بالا بر مشخصات ارتعاشاتی میکروروتور شامل بسامدهای طبیعی، سرعت دورانی بحرانی، سرعت دورانی در آستانه ناپایداری سامانه و همچنین پاسخ سامانه در اثر حضور نامیزانی جرمی در دیسک می‌باشد.

### ۱- مقدمه

تقاضا برای دستیابی به منابع انرژی فشرده با چگالی توان بالا که قادر به راه‌اندازی وسایل الکترونیکی باشد، منجر به طراحی و توسعه میکرو توربوماشین‌ها در سال‌های اخیر شده است [۱، ۲]. شایان ذکر است که ساخت و تولید این وسایل مینیاتوری از جمله میکروتوربین‌ها، امروزه با توسعه روش‌های میکرو ماشین‌کاری میسر و امکان‌پذیر شده است. ویژگی بارز این وسایل مولد انرژی، سرعت دورانی فوق‌العاده بالای آنها می‌باشد. بدین صورت که به منظور دستیابی به کارایی بالاتر و هدف‌گذاری شده، این میکروموتورها باید در سرعت‌های دورانی فراتر از یک میلیون دور در دقیقه به چرخش درآیند [۳، ۴]. در چنین سرعت دورانی بالایی، پیش‌بینی دقیق رفتار ارتعاشاتی روتور این سامانه‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

از سوی دیگر، مطالعات و تحقیقات آزمایشگاهی اخیر ثابت کرده است که رفتار مکانیکی سازه‌ها در مقیاس کوچک را نمی‌توان به‌درستی توسط نظریه مکانیک محیط پیوسته کلاسیک پیش‌بینی نمود [۵-۷]. نتایج این تحقیقات به‌صورت متفق‌القولی بیان می‌دارد که نظریه مکانیک محیط پیوسته کلاسیک توانایی پیش‌بینی و تشریح رفتار وابسته به مقیاس در سازه‌های مینیاتوری ساخته شده در ابعاد میکرو و کمتر از آن را به‌طور دقیقی ندارد؛ از این‌رو، تحلیل صحیح‌تر رفتار مکانیکی میکروروتورها با در نظر

گرفتن اثرات مربوط به کوچکی اندازه، نیازمند آن است که این سازه‌ها را براساس نظریه‌های محیط پیوسته غیرکلاسیک پیشنهاد شده مانند نظریه گرادیان کرنش مدل‌سازی نمود.

استفاده از نظریه گرادیان کرنش که برای اولین بار توسط میدلین [۸، ۹] پیشنهاد شد، در سال‌های اخیر در میان محققان مختلف برای مطالعه رفتار وابسته به اندازه میکروسازه‌ها رشد چشمگیری داشته است. در این خصوص لم و همکاران [۹] به‌صورت تحلیلی و تجربی رفتار الاستیک میکروتیرهایی از جنس اپوکسی را مورد بررسی قرار دادند. پاسخ استاتیکی و دینامیکی میکروتیرها با استفاده از نظریه گرادیان کرنش توسط کانگ، همکاران [۱۰]، همچنین اکگر و سیوالک [۱۱، ۱۲] مورد ارزیابی قرار گرفت. وانگ و همکاران [۱۳] مدل میکروتیر تیموشنکو را براساس این نظریه توسعه دادند. براساس همین مدل انصاری و همکاران [۱۴، ۱۵] به تحلیل استاتیکی و دینامیکی میکروتیرهای از جنس مواد هدفمند پرداختند. علاوه بر آن، مدل میکروتیر غیرخطی هندسی براساس نظریه گرادیان کرنش توسط کهربایان، همکاران [۱۶]، غایش و همکاران [۱۷] برای تیر اویلر-برنولی و توسط اصغری، همکاران [۱۸]، انصاری و همکاران [۱۹] برای تیر تیموشنکو توسعه

- 1 Lam et al.
- 2 Kong et al.
- 3 Akgöz and Civalek
- 4 Wang et al.

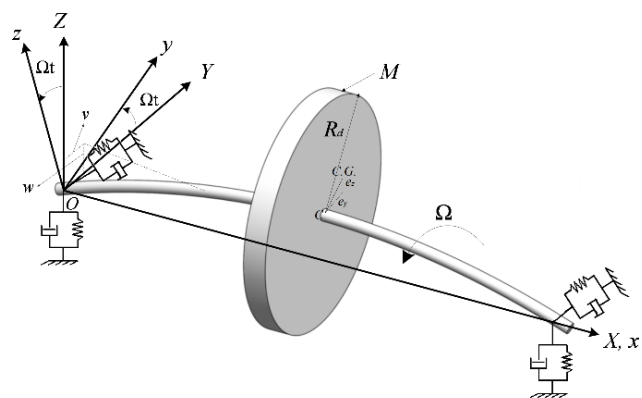


Fig. 1. A micro-rotor mounted on flexible bearings and rotating with a constant speed

شکل ۱: یک نمونه میکرو روتور سوار بر یاتاقان‌های انعطاف‌پذیر و در حال دوران با سرعت زاویه‌ای ثابت

براساس مدل تیر اویلر-برنولی و با فرض ناچیز بودن جابه‌جایی محوری، مؤلفه‌های جابه‌جایی  $u_i(x,y,z,t)$  ( $i=1,2,3$ ) از بردار جابه‌جایی ذرات میکرو شافت نسبت به مرجع دوار به صورت ذیل نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} u_1 &= -z \frac{\partial \bar{w}(x,t)}{\partial x} - y \frac{\partial \bar{v}(x,t)}{\partial x}, \\ u_2 &= \bar{v}(x,t), \\ u_3 &= \bar{w}(x,t), \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $(x,y,z)$  بیانگر مختصات ذرات در مرجع دوار،  $\bar{w}$  و  $\bar{v}$  نشانگر خیز خط مرکزی شافت به ترتیب سنجیده شده نسبت به محورهای دوار  $y$  و  $z$  می‌باشد. ارتباط این مؤلفه‌های خیز در دستگاه دوار با مؤلفه‌های خیز در دستگاه ثابت (یعنی  $v$  و  $w$  به ترتیب در امتداد محورهای  $Y$  و  $Z$ ) عبارت است از:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= v \cos \varphi + w \sin \varphi, \\ \bar{w} &= w \cos \varphi - v \sin \varphi, \end{aligned} \quad (2)$$

در رابطه فوق  $\varphi = \Omega t$  زاویه چرخش دستگاه دوار نسبت به دستگاه ثابت است (شکل ۱).

براساس نظریه گرادیان کرنش، چگالی انرژی کرنشی برای یک ماده ایزوتروپیک با تغییر شکل‌های کوچک از طریق رابطه زیر تعیین می‌گردد [۹].

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + a_1 \xi_{iik} \xi_{kij} + a_2 \xi_{ijj} \xi_{ikk} \\ &+ a_3 \xi_{iik} \xi_{jjk} + a_4 \xi_{ijk} \xi_{ijk} + a_5 \xi_{ijk} \xi_{kji}, \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن ثابت مادی مرتبه بالا  $a_i$  ( $i=1,2,\dots,5$ )،  $\lambda$  و  $\mu$  ثابت کلاسیک لم می‌باشند که توسط روابط  $\lambda = E\nu / [(1-2\nu)(1+\nu)]$  و  $\mu = E / [2(1+\nu)]$  به مدول یانگ  $E$  و نسبت پواسون  $\nu$  مرتبط می‌گردند (مشابه نظریه کلاسیک)، علاوه بر این موارد،  $\varepsilon_{ij}$  و  $\xi_{ijk}$  به ترتیب معرف مؤلفه‌های تانسور کرنش و گرادیان آن می‌باشند که از طریق روابط زیر به

داده شد.

استفاده از نظریه گرادیان کرنش برای مطالعه رفتار ارتعاشاتی میکروروتورها برای اولین بار توسط هاشمی و اصغری [۲۰] پیشنهاد گردید. در مقاله مذکور عبارتی تحلیلی براساس روش گلرکین برای بسامدهای طبیعی یک میکروروتور شامل یک شافت انعطاف‌پذیر و یک دیسک صلب در وسط آن ارائه گردید. با این وجود محدودیت‌های روش تحلیلی در تحقیق مذکور امکان بررسی جامع خواص ارتعاشاتی از جمله تأثیر انعطاف‌پذیری یاتاقان بر رفتار ارتعاشاتی، ناپایداری سامانه، پاسخ سامانه در حضور نامیزانی و غیره را فراهم نمی‌کند. از این رو به کارگیری روشی که بتواند خواص روتوردینامیک میکروروتور را تحت شرایط مذکور تعیین نماید، ضروری می‌باشد که روش اجزا محدود برای این کار مناسب به نظر می‌رسد.

جهت رفع کاستی‌های مطرح شده در تحقیقات منتشر شده قبلی، برای اولین بار فرمولاسیون اجزا محدود سه بعدی سامانه روتور، متشکل از میکروشافت دوار و دیسک‌های متصله، براساس نظریه گرادیان کرنشی به منظور بررسی رفتار دینامیکی یا مشخصات ارتعاشاتی این سامانه ارائه شده است. برای این منظور در ابتدا روابط انرژی کرنشی براساس نظریه مذکور و انرژی جنبشی برای میکروروتور همراه با یاتاقان انعطاف‌پذیر استخراج و بازنویسی می‌شود و با در نظر گرفتن توابع شکل مناسب، ماتریس‌های جرم شافت و دیسک، اینرسی دورانی شافت و دیسک، میرایی یاتاقان، ژیرسکوپیکی شافت و دیسک، سختی و نیز ماتریس چرخشی براساس نظریه گرادیان کرنش برای سامانه روتور تعیین شده‌اند. در مثال‌های عددی، با استفاده از فرمولاسیون ارائه شده، پاسخ یک سامانه میکروروتور در حضور نامیزانی و مشخصات ارتعاشاتی آن بررسی شده است و تأثیر پارامترهای مختلف از جمله ثوابت مادی مرتبه بالا و میرایی بر نتایج مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

## ۲- تعریف مسأله و معادلات حاکم

همان‌طور که در شکل ۱ نمایش داده شده است، یک میکروروتور شامل مجموعه‌ای از یک میکرو شافت و دیسک به عنوان اجزای اصلی آن می‌باشد. این مجموعه بر روی یاتاقان‌های انعطاف‌پذیر با ضریب فنریت و میرایی ثابت در ابتدا و انتهای میکروروتور سوار شده است. فرض می‌شود که شافت این میکروروتور تنها می‌تواند در راستای عمود بر محورش جابه‌جا گردد. دیسک در این مجموعه نیز ضمن داشتن نامیزانی جرمی، به صورت صلب فرض شده که در یک نقطه مشخص بر روی شافت قرار دارد. همچنین میکروروتور مذکور با سرعت دورانی ثابت  $\Omega$  حول محور طولی میکرو شافت در حال دوران می‌باشد. در شکل ۱، دستگاه مختصات  $X$ - $Y$ - $Z$  معرف دستگاه مرجع اینرسی یا دستگاه ثابت می‌باشد، در حالی که دستگاه  $x$ - $y$ - $z$ ، بیانگر دستگاه مختصات محلی بوده که با سرعت دورانی ثابت  $\Omega$  حول محور طولی  $X$  می‌چرخد. شافت میکروروتور در زمان شروع  $t=0$  به صورت یک خط مستقیم در نظر گرفته شده است.

مؤلفه‌های جابه‌جایی مرتبط می‌شوند [۹].

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \xi_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \frac{1}{2}(u_{j,k} + u_{k,j})_{,i}, \quad (4)$$

با مشتق‌گیری از چگالی انرژی کرنشی  $u$  نسبت به  $\varepsilon_{ij}$  و  $\xi_{ijk}$ ، مؤلفه‌های مربوط به تانسور تنش کلاسیک  $\sigma_{ij}$  و مؤلفه‌های مرتبط به تانسور تنش مرتبه بالا  $\tau_{ijk}$  حاصل می‌شود. از این‌رو خواهیم داشت.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \tau_{ijk} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_{ijk}} = & \frac{1}{2} a_1 (\delta_{ij} \xi_{kpp} + 2\delta_{jk} \xi_{ppi} + \delta_{ik} \xi_{jpp}) \\ & + 2a_2 \delta_{jk} \xi_{ipp} + a_3 (\delta_{ij} \xi_{ppk} + \delta_{ik} \xi_{ppj}) \\ & + 2a_4 \xi_{ijk} + a_5 (\xi_{kij} + \xi_{jik}), \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن  $\delta_{ij}$  معرف دلتای کرونگر می‌باشد؛ بنابراین چگالی انرژی کرنشی در فرم خطی آن براساس مؤلفه‌های  $\varepsilon_{ij}$ ،  $\xi_{ijk}$  و  $\sigma_{ij}$  به صورت زیر بازنویسی می‌گردد.

$$\bar{u} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \tau_{ijk} \xi_{ijk}). \quad (7)$$

حال با جایگذاری رابطه (۱) در (۴) تنها مؤلفه غیر صفر تانسور کرنش به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\varepsilon_{11} = -y \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2}, \quad (8)$$

همچنین مؤلفه‌های غیر صفر تانسور گرادین کرنش نیز به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \xi_{111} = & -y \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial x^3} - z \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^3}, \\ \xi_{211} = & -\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2}, \quad \xi_{311} = -\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

از سوی دیگر مؤلفه‌های تنش کلاسیک و تانسور تنش مرتبه بالای نظیر از طریق جایگذاری روابط (۸) و (۹) به ترتیب در روابط (۵) و (۶) به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11} = -E \left( y \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \tau_{111} = & -2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \left( y \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial x^3} + z \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^3} \right) \\ \tau_{211} = & -2(a_2 + a_4) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2}, \quad \tau_{311} = -2(a_2 + a_4) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

حال با توجه به اتحاد زیر که از رابطه (۲) منتج شده است:

$$(\partial^i \bar{v} / \partial x^i)^2 + (\partial^i \bar{w} / \partial x^i)^2 = (\partial^i v / \partial x^i)^2 + (\partial^i w / \partial x^i)^2 \quad (12)$$

و با جایگذاری روابط (۱۱)–(۸) در رابطه (۷) و سپس انتگرال‌گیری نسبت به سطح مقطع میکروشافت، انرژی کرنشی برای کل میکروسامانه برابر است با:

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \Lambda_1 I_s \left[ \left( \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial x^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^3} \right)^2 \right] \right. \\ & \left. + \left[ (\Lambda_2 A_s + EI_s) \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right)^2 \right] \right\} dx, \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن

$$\Lambda_1 = 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5), \quad \Lambda_2 = 2(a_2 + a_4). \quad (14)$$

از سوی دیگر، انرژی جنبشی یک میکروشافت چرخان به چگالی جرمی  $\rho_s$ ، با سطح مقطع دایروی به مساحت  $A_s$ ، ممان دوم سطح  $I_s$  و ممان قطبی سطح  $J_s$  با در نظر گرفتن مدل تیر رایلی و گشتاورهای ژیرسکوپییک برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی نسبت به دستگاه ثابت از طریق رابطه زیر محاسبه می‌شود. شایان ذکر است که چگونگی دستیابی به این رابطه در مراجع [۲۰، ۲۱] تشریح شده است.

$$T_s = \frac{\rho}{2} \int_0^L \left[ A_s (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + J_s \omega_1^2 + I_s (\omega_2^2 + \omega_3^2) \right] dx \quad (15)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \omega_1 = & \Omega - \dot{\theta}_z \sin \theta_y, \\ \omega_2 = & \dot{\theta}_z \cos \theta_y \sin \Omega t + \dot{\theta}_y \cos \Omega t, \\ \omega_3 = & \dot{\theta}_z \cos \theta_y \cos \Omega t - \dot{\theta}_y \sin \Omega t, \end{aligned} \quad (16)$$

در رابطه (۱۶) مؤلفه‌های  $\theta_y$  و  $\theta_z$  به ترتیب بر حسب مؤلفه‌های جابه‌جایی برابر است با:

$$\begin{aligned} \theta_y = & -\sin^{-1} \frac{\partial w / \partial x}{\left[ (1 + \partial u / \partial x)^2 + (\partial v / \partial x)^2 + (\partial w / \partial x)^2 \right]^{0.5}}, \\ \theta_z = & \sin^{-1} \frac{\partial v / \partial x}{\left[ (1 + \partial u / \partial x)^2 + (\partial v / \partial x)^2 + (\partial w / \partial x)^2 \right]^{0.5}}. \end{aligned} \quad (17)$$

همچنین انرژی جنبشی مجموعه دیسک‌ها به تعداد  $n_d$  و هریک به جرم  $M_{d_i}$ ، ممان اینرسی جرمی حول قطر  $I_{d_i}$  و ممان اینرسی قطبی  $J_{d_i}$  که هر یک در موقعیت از ابتدای میکروروتور بر روی آن قرار گرفته‌اند از رابطه زیر محاسبه می‌شود [۲۰].

$$\begin{aligned} T_d = & \sum_{i=1}^{n_d} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L \left[ M_{d_i} (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + J_{d_i} \omega_1^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + I_{d_i} (\omega_2^2 + \omega_3^2) \right] \delta(x - x_i) dx \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

که در آن  $\delta(\cdot)$  تابع دلتای دیراک می‌باشد. علاوه بر آن، با فرض وجود خروج از مرکزیت در دیسک‌ها به مقدار  $e_y$  در راستای  $y$  و  $e_z$  در راستای  $z$

### ۳- گسسته‌سازی معادلات براساس روش اجزا محدود

برای تعیین معادلات مربوط به جزء، از اصل تعمیم یافته همیلتون که بیان می‌دارد مسیر واقعی از انتگرال معین زیر پیروی می‌کند، استفاده می‌شود.

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W) dt \quad (24)$$

مقدار این انتگرال نسبت به هرگونه تغییر مسیر بین دو لحظه  $t_1$  و  $t_2$  در شرط محذوف شدن تغییرات مسیر در نقاط انتهایی، ثابت می‌ماند. بدین ترتیب معادلات حرکت توسط رابطه زیر تعیین می‌گردد.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta(T - U) + \delta W) dt = 0 \quad (25)$$

برای استخراج معادلات حرکت میکروروتور در ابتدا عبارات به دست آمده در قسمت قبل برای  $U$  و  $T$  (به ترتیب روابط (۱۳)، (۱۶)، (۱۸)، (۱۹)) و همچنین  $\delta W$  از  $\delta W = \delta W_b - \delta W_{Dis}$  (روابط (۲۰) و (۲۳)) را در رابطه (۲۵) قرار می‌دهیم. با انجام محاسبات مربوط به حساب تغییرات جهت تعیین فرم ضعیف معادلات که در ضمیمه ۱ آورده شده است و همچنین استفاده از تقریب مؤلفه‌های جابه‌جایی با توابع شکل

$$\Theta(s) \quad (s = (x - x_j)/L_e, x_j \leq s < x_{j+1}, j = 1, 2, \dots, N)$$

در نودها برای یک سامانه با  $N$  المان به طول  $L_e$  به صورت ذیل می‌باشد.

$$v(s, t) = \sum_{i=1}^6 \Theta_i(s) q_y(t), \quad (26)$$

$$w(s, t) = \sum_{i=1}^6 \Theta_i(s) q_z(t),$$

می‌توان به فرم گسسته شده معادلات حرکت سامانه که در ادامه ارائه خواهد شد، دست یافت. در رابطه (۲۶)،  $q_y$  و  $q_z$  به ترتیب برابر است با

$$q_y = \{v_1 \quad \theta_{z1} \quad \gamma_{z1} \quad v_2 \quad \theta_{z2} \quad \gamma_{z2}\}, \quad (27)$$

$$q_z = \{w_1 \quad \theta_{y1} \quad \gamma_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{y2} \quad \gamma_{y2}\}.$$

که در آن اندیس ۱ معرف متغیرهای گره‌ای مربوط به گره سمت راست و اندیس ۲ معرف متغیرهای گره‌ای مربوط به گره سمت چپ جزء می‌باشد. همچنین در این رابطه،  $v$  و  $w$  خیز شافت در امتداد دو محور مختصات،  $\theta_z$  و  $\theta_y$  شیب مقطع در دوران حول دو محور مختصات، و  $\gamma_y$  و  $\gamma_z$  نیز انحنای شافت در دو صفحه عرضی است. در خصوص توابع شکل  $\Theta(s)$  برای میکروشافت با توجه به فرم معادلات حرکت، می‌توان از توابع شکلی که توسط کهرابیان و همکاران [۲۷] برای میکروتیر گرادیان کرنشی پیشنهاد شده است، استفاده نمود.

بدین ترتیب، با دستیابی به فرم ضعیف معادلات حرکت که در ضمیمه ۱ آورده شده است و استفاده از تقریب متغیرهای جابه‌جایی با توابع شکل بالا، می‌توان به فرم گسسته‌شده معادلات حرکت با ساده‌سازی به صورت

ترم دیگری به انرژی جنبشی سامانه اضافه خواهد شد ( $T_{ecc}$ ) که مقدار آن از رابطه زیر محاسبه می‌شود [۲۲].

$$T_{ecc} = -\sum_{i=1}^{n_d} M_{d_i} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L \Omega \left[ v \left( e_{yi} \sin \Omega t + e_{zi} \cos \Omega t \right) + \dot{w} \left( -e_{yi} \cos \Omega t + e_{zi} \sin \Omega t \right) \right] \delta(x - x_i) dx - \frac{\Omega}{2} (e_{yi}^2 + e_{zi}^2) \right\}, \quad (19)$$

بدین ترتیب، انرژی جنبشی کل میکروروتور برابر مجموع سه انرژی داده شده در روابط (۱۷) تا (۱۹) یعنی  $T = T_s + T_d + T_{ecc}$  می‌باشد.

از سوی دیگر، کار مجازی نیروهای خارجی که بر میکروروتور مورد نظر به علت حضور یاتاقان‌هایی انعطاف‌پذیر با ضریب فنریت و میرایی ویسکوز ثابت در دو انتهای آن به میکروروتور اعمال می‌گردد، به صورت زیر نوشته می‌شود [۲۳].

$$\delta W_b = -(k_{yy} v \delta v + k_{yz} w \delta v + k_{zz} w \delta w + k_{zy} v \delta w + c_{yy} \dot{v} \delta v + c_{yz} \dot{w} \delta v + c_{zz} \dot{w} \delta w + c_{zy} \dot{v} \delta w) \Big|_{x=0}^{x=L}, \quad (20)$$

که در آن  $k$  ضریب فنریت و  $c$  میرایی مربوط به یاتاقان در راستاهای مختلف در صفحه عمود بر محور میکروشافت می‌باشد.

همچنین با در نظر گرفتن میرایی برای میکرو سامانه به صورت میرایی داخلی از نوع ویسکوز و جایگذاری مشتق زمانی رابطه کرنش-جابه‌جایی (رابطه (۴)) [۲۴-۲۶].

$$\sigma_{11}^D = E \alpha \varepsilon_{11} = -E \alpha \left( \Omega \left( z \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right) + y \frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} \right), \quad (21)$$

تغییرات کار نیروهای میرایی به صورت انرژی اتلافی در میکروسامانه از طریق رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\delta W_{Dis} = \int_0^L \int \sigma_{11}^D \delta \varepsilon_{11} dA dx = EI_s \alpha \int_0^L \left( \Omega \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right) dx, \quad (22)$$

رابطه (۲۲) را می‌توان با استفاده از رابطه (۲) بر حسب مؤلفه‌های جابه‌جایی در دستگاه ثابت به صورت زیر نوشت:

$$\delta W_{Dis} = EI_s \alpha \int_0^L \left( \Omega \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx, \quad (23)$$

زیر دست یافت.

$$\begin{aligned} [\bar{M}] &= \begin{bmatrix} [M] & 0 \\ 0 & [I] \end{bmatrix}, \\ [\bar{K}] &= \begin{bmatrix} [C] & [K] \\ -[I] & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (32)$$

در رابطه بالا  $[I]$  ماتریس واحد با اندازه‌ای برابر ماتریس‌های سختی و جرمی می‌باشد. پاسخ رابطه (۳۱) به صورت زیر می‌باشد.

$$\{Q\} = e^{st} \{Q_0\}, \quad (33)$$

و مسأله مقدار ویژه مرتبط به آن را می‌توان به صورت زیر بیان نمود.

$$(s[\bar{M}] + [\bar{K}])\{Q_0\} = \{0\}, \quad (34)$$

متغیر  $s$  در رابطه (۳۴) معرف مقادیر ویژه مختلط می‌باشد. این مقادیر ویژه شامل مقدار حقیقی  $a$  و مقدار موهومی  $b$  داده شده در رابطه زیر می‌باشد.

$$s = a \pm ib \quad (35)$$

در رابطه (۳۵) قسمت موهومی  $b$  متناظر با بسامدهای طبیعی سامانه می‌باشد و قسمت حقیقی  $a$  اطلاعاتی در خصوص پایداری سامانه فراهم می‌کند. چگونگی این موارد در قسمت نتایج عددی تشریح می‌گردد.

از سوی دیگر، در حالت ارتعاشات اجباری نیروی خارجی ناشی از وجود نامیزانی جرمی در دیسک به صورت نوسانی با سرعت دورانی میکروروتور به آن اعمال می‌شود. در این حالت که بردار نیروی خارجی را می‌توان در حالت کلی به صورت  $\{f(t)\} = \{F\}e^{i\Omega t}$  محاسبه کرد، پاسخ سامانه از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\{q(t)\} = (-\Omega^2[M] + i\Omega[C] + [K])^{-1} \{F\}e^{i\Omega t}. \quad (36)$$

### ۵- نتایج عددی

به منظور بررسی پارامترهای مختلف بر روی مشخصات ارتعاشاتی میکروروتور در این قسمت نتایج حاصل از تحلیل ارتعاشات یک میکروروتور با نسبت شعاع به طول شافت که دارای دیسک در وسط شافت آن می‌باشد، آورده شده است (شکل ۲). شافت میکروروتور توسط اجزای تیر توسعه یافته براساس نظریه گرادیان کرنش مش‌بندی می‌گردد. در مثال‌های پیش‌رو به منظور تشریح وابستگی مشخصات ارتعاشات خمشی میکروروتور، فرض می‌شود که رابطه بین خواص مرتبه بالای مادی به صورت

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{0.0393, 0.1323, -0.0338, 0.0320, 0.3302\} \Lambda_1$$

باشد. این خواص براساس نتایج به دست آمده برای آلومینیوم که توسط شجاع و همکاران [۲۸] حاصل شده است، استوار می‌باشد. با استفاده از این نسبت بین پنج ثابت مادی مرتبه بالا و رابطه (۱۴) می‌توان  $A_2$  را نیز بر حسب  $A_1$  محاسبه نمود. حال با قرار دادن  $A_2$  در رابطه انرژی کرنشی (رابطه (۱۳)) و انجام ساده‌سازی، جمله به صورت  $A_1/ER^2$  در آن ظاهر

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{f(t)\}, \quad (28)$$

که در آن  $[M]$ ،  $[C]$  و  $[K]$ ، به ترتیب بیانگر ماتریس جرم، میرایی، سختی می‌باشد که هر یک به ترتیب شامل:

$$\begin{aligned} [M] &= [M_s + M_d] + [N_s + N_d], \\ [C] &= \alpha[K_s^{cl}] + [C_b] + \Omega[G_s + G_d], \\ [K] &= (\Lambda_2 A_s / EI_s + 1)[K_s^{cl}] \\ &\quad + [K_s^{ncl}] + [K_b] + \alpha\Omega[KC_s^{cl}], \end{aligned} \quad (29)$$

می‌باشند. در رابطه (۲۹)  $[M_s]$ ،  $[M_d]$ ،  $[N_s]$ ،  $[N_d]$ ،  $[C_b]$ ،  $[G_s]$ ،  $[G_d]$ ،  $[K_s^{cl}]$ ،  $[K_s^{ncl}]$  و  $[KC_s^{cl}]$  به ترتیب بیانگر ماتریس‌های جرم شافت و دیسک، اینرسی دورانی شافت و دیسک، میرایی یاتاقان، ژیرسکوپیکی شافت و دیسک، سختی مربوط به ترم‌های کلاسیک و غیرکلاسیک، چرخشی و سختی یاتاقان در میکروروتور می‌باشند. چگونگی محاسبه مؤلفه‌های ماتریس‌های مذکور برای جزء میکروشافت و دیسک و همچنین بردار نیروی خارجی  $\{f(t)\}$  ناشی از نامیزانی در دیسک‌های میکروروتور آن در ضمیمه ۲ داده شده است.

### ۴- تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری میکروروتور

تحلیل ارتعاشات میکروروتور از طریق روش‌های محاسباتی که به طور خاص برای پیش‌بینی پاسخ دینامیکی و تحلیل پایداری روتورها توسعه یافته است، صورت خواهد گرفت.

اولین گام در تحلیل دینامیکی، به دست آوردن بسامدهای طبیعی سامانه تحت شرایط مختلف می‌باشد. مسأله ارتعاشات آزاد مرتبط با دستگاه خطی معادلات دیفرانسیل به طور طبیعی منجر به یک مسأله مقدار ویژه می‌شود. برای سامانه‌های ژیرسکوپیکی میراشده، مقادیر و بردارهای ویژه مختلط اطلاعات مفیدی در خصوص شکل مودها و پایداری سامانه‌های چرخان فراهم می‌کند.

مسأله مقدار ویژه مرتبط با رابطه (۲۸) در صورت عدم وجود نیروهای نامیزان یعنی  $\{f(t)\} = 0$  را می‌توان از طریق نوشتن در فرم فضای حالت به یک شکل استاندارد تبدیل نمود. در این صورت بردار مرتبه دوم فضای حالت برای بازنویسی معادلات حاکم در قالب متغیرهای فضای حالت به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\{Q(t)\} = \{q(t) \quad \dot{q}(t)\}^T \quad (30)$$

در این حالت مسأله ارتعاشات آزاد مرتبط با رابطه (۲۸) به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$[\bar{M}]\{\dot{Q}\} + [\bar{K}]\{Q\} = \{0\}, \quad (31)$$

که در آن

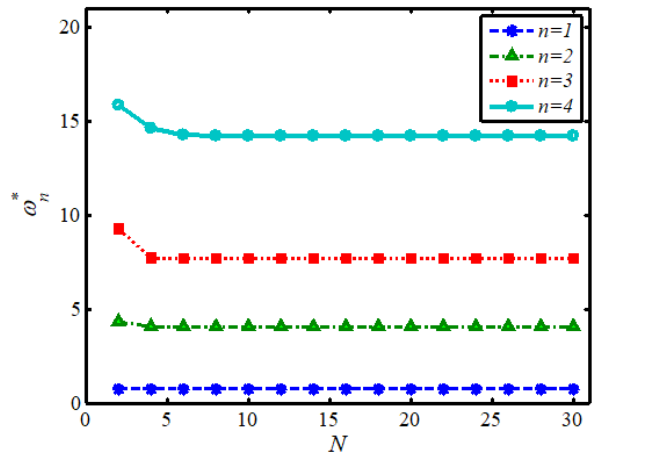


Fig. 3. Variations of the first four normalized natural frequencies of a stationary micro-rotor against the micro-shaft element number

شکل ۳: تغییرات چهار بسامد طبیعی اول نرمال شده یک نمونه میکروروتور ثابت بر حسب تعداد اجزای میکرو شافت

حرکت لنگ‌زنی پیشرو<sup>۱</sup> و پسرو<sup>۲</sup> (هم‌جهت و خلاف جهت حرکت چرخشی میکروروتور) در سرعت‌های دورانی مختلف نرمال شده در حالت  $\eta=0/2$  آورده شده است. شایان ذکر است که در این بررسی از ۱۰ جزء میکروشافت استفاده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج حاصله از روش پیشنهادی با روش تحلیلی ارائه شده در مرجع [۲۱] از توافق خوبی با یکدیگر برخوردار هستند. علت این اختلاف ناچیز نیز به دلیل خطاهای عددی در محاسبات روش حاضر می‌باشد. بدین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که روش اجزا محدود پیشنهادی در این مقاله از اعتبار مناسبی برای تحلیل‌های بعدی در زمینه ارتعاشات خمشی میکروروتور برخوردار است.

شکل ۴ مودها و تغییرات سه بسامد طبیعی اول نرمال شده یک میکروروتور با مشخصات  $M_d^*=1$  و  $I_d^*=10^{-3}$  واقع بر روی یاتاقان‌های صلب برحسب سرعت دورانی نرمال شده  $\Omega^*$  (نمودار کمپل) را به‌ازای مقادیر مختلف  $\eta$  نمایش می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، مقادیر فرکانسی با افزایش  $\eta$ ، بیشتر می‌شود.

به منظور بررسی تأثیر ثابت مادی مرتبه بالا  $\eta$  بر روی سرعت دورانی آستانه ناپایداری میکروروتور  $\Omega_{th}^*$ ، برای میکروروتور مثال قبل میرایی داخلی در نظر گرفته شده است. از آنجا که واحد ضریب میرایی با توجه به رابطه (۲۱)، برحسب زمان می‌باشد، این ضریب به‌صورت  $\alpha^*=a\bar{\omega}$  نرمالیزه شده است.  $\Omega_{th}^*$  با توجه به رابطه (۳۵)، سرعتی می‌باشد که سبب می‌شود مقدار  $a$  مثبت گردد. همچنین با توجه به رابطه (۳۵)، این مقدار نیز به‌صورت  $a^*=a/\bar{\omega}$  نرمالیزه شده است. در شکل ۵ مقادیر  $a^*$  بر حسب  $\Omega^*$  و به‌ازای مقادیر مختلف  $\eta$  در محدوده‌ای از  $\alpha^*$  که میکروروتور مورد نظر به‌ازای آنها ناپایدار می‌شود، رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش  $\eta$  مقادیر  $\Omega_{th}^*$  نیز افزایش می‌یابد.

- 1 Forward Whirling (FW)
- 2 Backward Whirling (BW)

می‌شود. این جمله در واقع معرف پنج ثابت مادی مرتبه بالا به‌کار رفته در نظریه گرادیان کرنش برای یک ماده می‌باشد. از این‌رو برای تحلیل‌های پیش‌رو این جمله به‌صورت یک ثابت مادی مرتبه بالای بی‌بعد شده یا همان حالت  $\eta=A_1/ER^2$  به‌کار گرفته می‌شود. اشاره به این نکته ضروری می‌باشد که در  $\eta=0$ ، نتایج به‌نتایج حاصل از نظریه کلاسیک محیط پیوسته تقلیل می‌یابد. همچنین ثابت مرتبه بالای  $A_1$  خصوصیت ماده تشکیل‌دهنده شافت است و هرچه بیشتر باشد سختی یا مقاومت شافت در برابر تفاوت دوران دو مقطع مجاور آن و ایجاد انحنا بیشتر خواهد بود. علاوه بر  $\eta$ ، از پارامترهای بی‌بعد شده زیر برای ارائه نتایج استفاده خواهد شد.

$$\Omega^* = \frac{\Omega}{\bar{\omega}}, \quad \omega_n^* = \frac{\omega_n}{\bar{\omega}}, \quad M_d^* = \frac{M_d}{\rho_s A_s L}, \quad I_d^* = \frac{I_d}{\rho_s A_s L^3}, \quad (37)$$

که در آن  $\bar{\omega}$  بسامد طبیعی اول یک تیر دوسر لولا براساس نظریه کلاسیک محیط پیوسته یعنی  $\bar{\omega} = (\pi/L)^2 \sqrt{EI_s / \rho_s A_s}$  می‌باشد.

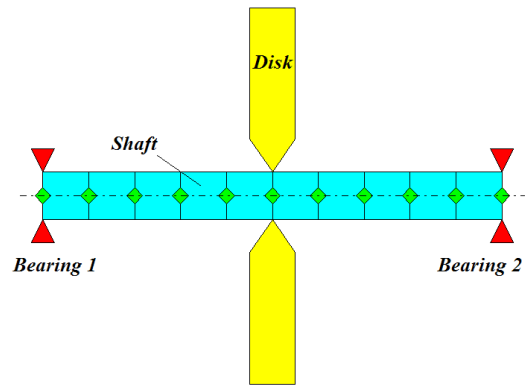


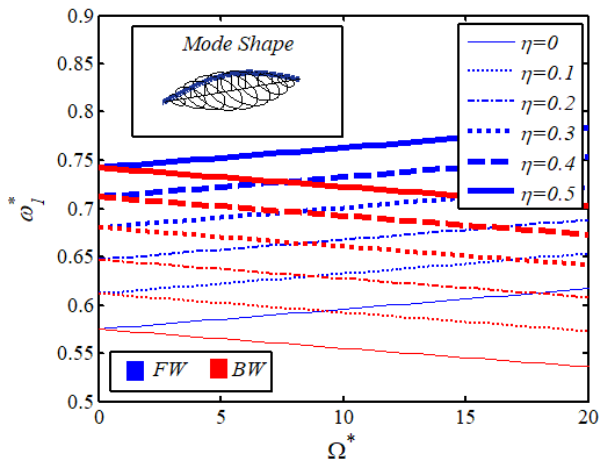
Fig. 2. Schematic view of finite element model of a micro-rotor

شکل ۲: نمایش شماتیکی مدل اجزا محدودی از یک نمونه میکروروتور

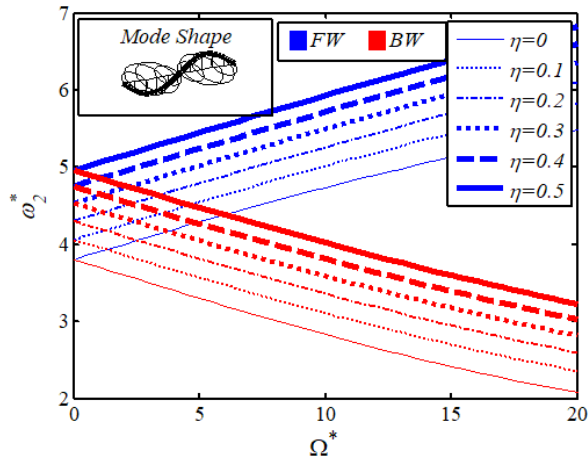
در ابتدا به منظور بررسی همگرایی روش حاضر در تعیین بسامدهای طبیعی یک میکروروتور براساس گرادیان کرنش، یک میکروروتور ثابت با دیسکی در وسط آن به مشخصات  $M_d^*=0/5$  و  $I_d^*=10^{-3}$  در نظر گرفته شده است. با استفاده از برنامه کامپیوتری نوشته شده در نرم‌افزار متلب براساس نظریه گرادیان کرنشی که در مقاله تشریح گردید و مشخصات میکروروتور ذکر شده، چهار بسامد طبیعی اول نرمال شده سامانه بر حسب تعداد اجزای میکروشافت  $N$  محاسبه شده و نتایج آن در شکل ۳ برای حالت  $\eta=0/1$  نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، مقادیر فرکانسی با افزایش تعداد اجزای میکروشافت به سرعت به مقادیر مورد نظر همگرا می‌شود و این نشان‌دهنده آن است که روش اجزا محدود پیشنهادی در مقاله حاضر از همگرایی بالایی برخوردار است.

همچنین به منظور صحت‌گذاری مقادیر محاسبه شده برای بسامدهای طبیعی نرمال شده به روش حاضر، میکروشافت چرخان با مشخصات ارائه شده در مرجع [۲۱] را در نظر می‌گیریم. در جدول ۱ مقادیر چهار بسامد اول محاسبه شده به روش حاضر و ارائه شده در مرجع مذکور برای دو

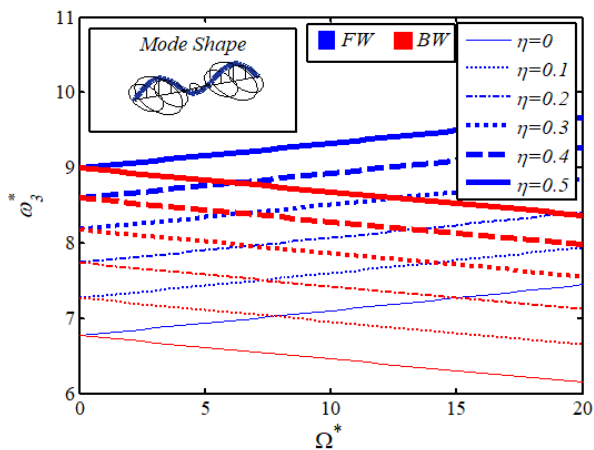
شده است. مشخصات در نظر گرفته شده برای این میکروروتور در این



(الف)



(ب)



(ج)

Fig. 4. Variations of the first three normalized natural frequencies of a micro-rotor mounted on rigid bearings with its mode shapes versus  $\eta$

شکل ۴: تغییرات سه بسامد طبیعی اول نرمال شده همراه با شکل مودهای یک نمونه میکروروتور بر حسب  $\eta$  بر روی یاتاقان‌های صلب

جدول ۱: مقایسه مقادیر چهار بسامد طبیعی اول نرمال شده یک نمونه میکروشافت چرخان با استفاده از روش حاضر و مرجع [۲۱] بر حسب  $\Omega^*$

Table 1. Comparison of the first four normalized resonant frequencies of the micro-spinning shaft computed by present method and given in reference [21] at different rotational speed

	۳۰	۲۰	۱۰	۰	$\Omega^*$	
(FW)	۱/۳۲۱۴	۱/۲۵۱۸	۱/۱۸۵۵		$\omega_1^*$	
(BW)	۰/۹۵۳۶	۱/۰۰۶۶	۱/۰۶۲۹	۱/۱۲۲۶		مرجع [۲۱]
(FW)	۱/۳۱۹۲	۱/۲۵۰۴	۱/۱۸۴۷			روش حاضر
(BW)	۰/۹۵۴۹	۱/۰۰۷۵	۱/۰۶۳۳	۱/۱۲۲۴		
(FW)	۵/۲۵۵۷	۴/۹۸۲۸	۴/۷۲۲۶		$\omega_2^*$	
(BW)	۳/۸۱۰۹	۴/۰۱۹۶	۴/۲۴۱۱	۴/۴۷۵۴		مرجع [۲۱]
(FW)	۵/۲۴۶۹	۴/۹۷۶۲	۴/۷۱۸۱			روش حاضر
(BW)	۳/۸۱۲۸	۴/۰۲۰۱	۴/۲۴۰۱	۴/۴۷۲۷		
(FW)	۱۱/۷۱۸	۱۱/۱۲۳	۱۰/۵۵۶		$\omega_3^*$	
(BW)	۸/۵۶۲۰	۹/۰۱۹۵	۹/۵۰۴۲	۱۰/۰۰۲		مرجع [۲۱]
(FW)	۱۱/۶۹۸	۱۱/۱۰۶	۱۰/۵۴۱			روش حاضر
(BW)	۸/۵۵۴۶	۹/۰۱۱۴	۹/۴۹۳۴	۱۰/۰۰۴		
(FW)	۲۰/۵۸۲	۱۹/۵۷۰	۱۸/۶۰۴		$\omega_4^*$	
(BW)	۱۵/۱۹۲	۱۵/۹۷۷	۱۶/۸۰۷	۱۷/۶۸۳		مرجع [۲۱]
(FW)	۲۰/۵۴۶	۱۹/۵۳۴	۱۸/۵۶۷			روش حاضر
(BW)	۱۵/۱۵۴	۱۵/۹۴۰	۱۶/۷۷۰	۱۷/۶۴۶		

تأثیر انعطاف‌پذیر یاتاقان بر روی بسامدها و شکل مودهای میکروروتور با مشخصات هندسی و فیزیکی مثال قبل یعنی  $M_d^*=1$  و  $I_d^*=10^{-3}$  و بدون میرایی داخلی در شکل ۶ به‌ازای مقادیر مختلف  $\eta$  نمایش داده شده است. در این میکروروتور هر دو یاتاقان دارای ضریب فنریت مشابه در دو راستا به مقدار  $k_{yy}=k_{zz}=\kappa$  و ضریب فنریت متقابل صفر یعنی  $k_{yz}=k_{zy}=0$  می‌باشند که در آن  $\kappa=EA_s/4L$  و همچنین میکروروتور با سرعت دورانی  $\Omega^*$  در حال دوران می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با کاهش صلبیت یاتاقان شکل مودها از حالت تیر دوسر لولا به حالت حرکت جسم صلب یک تیر بر روی دو فنر در دو انتها تغییر می‌کند. همچنین با افزودن تدریجی بر مقدار  $\eta$  مشاهده می‌شود که بر مقدار هر دو بسامد طبیعی میکروروتور در یاتاقان‌های صلب افزوده می‌شود، در حالی که در یاتاقان‌های انعطاف‌پذیرتر با افزایش مقادیر  $\eta$ ، مقادیر فرکانسی در ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد. علت این امر را در افزایش صلبیت میکروروتور در مقادیر بالای  $\eta$  می‌توان یافت که میکروسامانه با سرعت بیشتری به مودهای حرکت جسم صلب در یاتاقان‌های انعطاف‌پذیرتر تمایل پیدا می‌کند.

نتایج حاصل از پاسخ فرکانسی مقادیر جابه‌جایی نسبی مرکز میکروروتور در اثر وجود نامیزانی جرمی به میزان  $eM^*$  در دیسک به‌ازای مقادیر مختلف  $\eta$  در شکل ۷ در یک بازه برحسب سرعت دورانی نمایش داده

مثال شامل دیسکی  $M_d^* = 1$  و  $I_d^* = 10^{-3}$  می‌باشد که روی یاتاقان‌هایی با مشخصات فنریت  $k_{yz} = k_{zy} = 0$  و  $k_{yy} = k_{zz} = 1000\kappa$  و میرایی  $c_{yz} = c_{zy} = 0$  و  $c_{yy} = c_{zz} = 7/98 \times 10^{-8}$  N.s/m ذکر است مقادیر مذکور برای ضرایب میرایی براساس رابطه ارائه شده در مرجع [۴] برای محاسبه این ضرایب انتخاب شده‌اند. همچنین میزان میرایی داخلی در نظر گرفته شده برابر  $\alpha = 0.002$  [۲۶] می‌باشد که به ازای آن  $\alpha^* = \alpha \tilde{\omega} = 0.25 \times 10^4$  خواهد بود. همانطور که مشاهده می‌شود، مقادیر این جابه‌جایی در سرعت‌های دورانی در محدوده نظیر بسامدهای طبیعی اول و سوم حداکثر دامنه و در محدوده فرکانسی نظیر بسامد طبیعی دوم حداقل دامنه را به دلیل وجود گره در این نقطه دارا می‌باشد. در این نقاط همچنین تغییر فاز پاسخ به میزان حدوداً  $180^\circ$  درجه نیز مشاهده می‌شود. نکته قابل توجه در این نمودار آن است که با افزایش ثابت مادی مرتبه بالا، سرعت بحرانی که در آن بیشینه دامنه پدیدار می‌شود، افزایش می‌یابد.

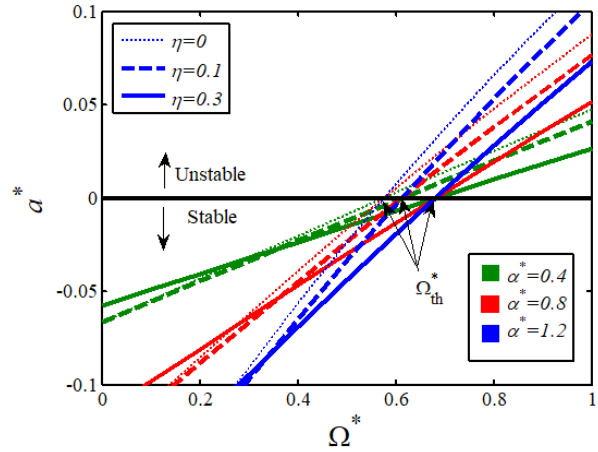
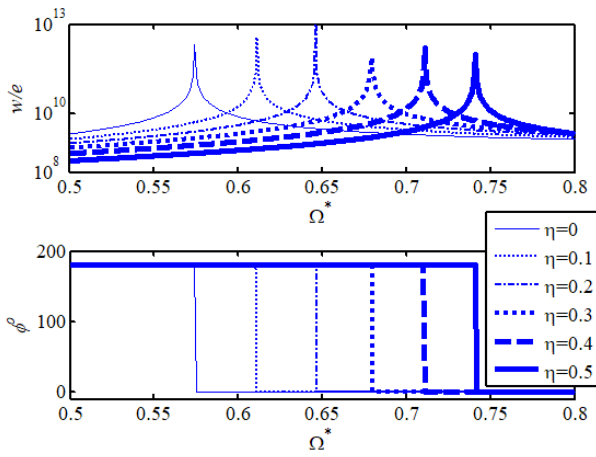
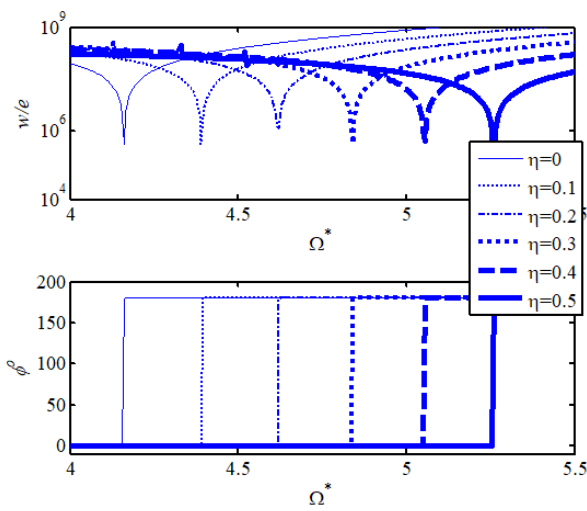


Fig. 5. Variations of real parts of normalized Eigen values of a micro-rotor versus  $\Omega^*$

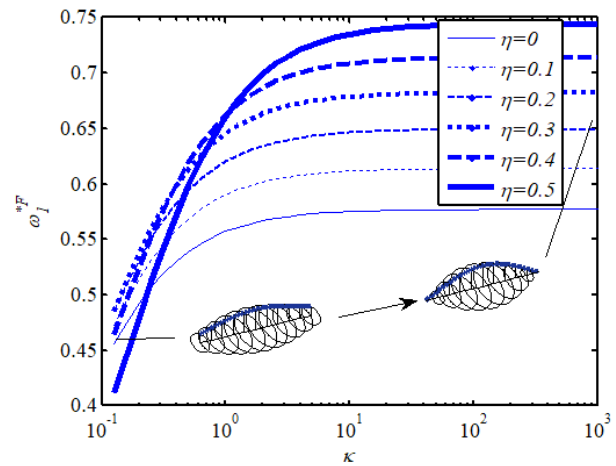
شکل ۵: تغییرات مقادیر حقیقی مقادیر ویژه نرمال شده یک نمونه میکروروتور دارای میرایی بر حسب  $\Omega^*$



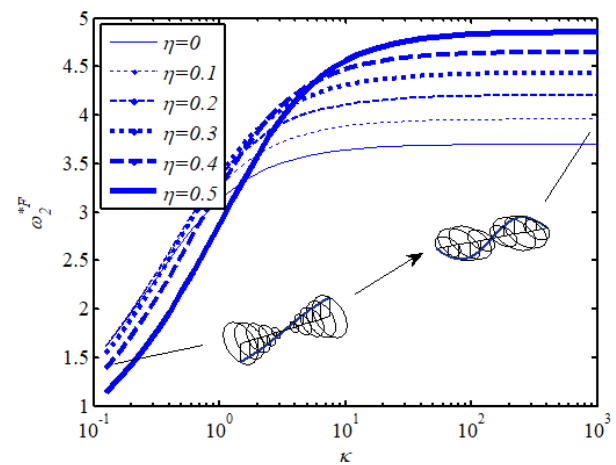
(الف)



(ب)



(الف)



(ب)

Fig. 6. Variations of the first two mode shapes and normalized natural frequencies of a micro-rotor against the stiffness coefficient of the bearing  $\kappa^*$

شکل ۶: تغییرات دو شکل مود و دو بسامد طبیعی اول نرمال شده یک نمونه میکروروتور بر حسب ضریب فنریت یاتاقان  $\kappa$



بالا تر ثابت مادی مرتبه بالا شدیدتر می باشد.

۵. وجود میرایی در میکروشافت سبب می شود که میکروروتور با عبور از یک سرعت دورانی مشخص ناپایدار گردد. میزان این سرعت دورانی با افزایش ثابت مادی مرتبه بالا بیشتر می شود.
۶. به ازای وجود یک مقدار مشخص از نامیزانی جرمی در دیسک میکروروتور، مقادیر سرعت دورانی در بیشینه و کمینه دامنه و حداکثر تغییر فاز نظیر آن، با افزایش ثابت مادی مرتبه بالا افزایش می یابد.

### فهرست علائم

$A_s$	مساحت مقطع میکروشافت
[C]	ماتریس میرایی
$E$	مدول یانگ
$e$	میزان طولی خروج از مرکز دیسک
$\{f(t)\}$	بردار نیروی خارجی
[G]	ماتریس ژیرسکوپیک
$I$	ممان اینرسی دوم سطح
[K]	ماتریس سفتی
$k$	ضریب فنریت
$L$	طول میکروروتور
$M$	جرم دیسک
[M]	ماتریس جرم
[N]	ماتریس ناشی اینرسی دورانی
[KC]	ماتریس چرخشی
$N$	تعداد المان
$q$	متغیرهای گره ای
$Q$	مجموعه متغیرهای گره ای یک سیستم
$R$	شعاع
$T$	انرژی جنبشی
$U$	انرژی کرنشی کل
$\bar{u}$	چگالی انرژی کرنشی براساس نظریه گرادیان کرنش
$\mathbf{u}$	بردار جابه جایی
$v$	مؤلفه جابه جایی مرکز شافت در راستای $Y$
$\bar{v}$	مؤلفه جابه جایی مرکز شافت در راستای $y$
$W$	کار نیروهای خارجی
$w$	مؤلفه جابه جایی مرکز شافت در راستای $Z$
$\bar{w}$	مؤلفه جابه جایی مرکز شافت در راستای $z$

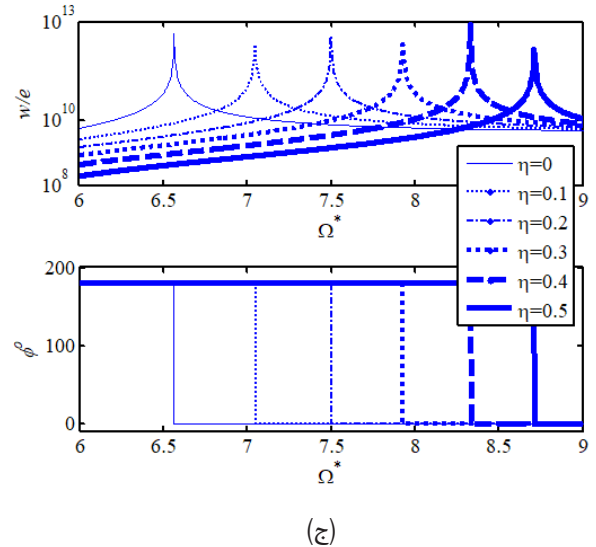


Fig. 7. Variations of the relative displacement of a micro-rotor center mounted on flexible bearings with an internal damping and phase changes due to unbalance mass of  $eM^*$  at three different rotational speed intervals.

شکل ۷: تغییرات جابه جایی نسبی مرکز یک میکروروتور با میرایی داخلی و واقع بر روی یاتاقان های انعطاف پذیر و تغییرات فاز آن در اثر وجود نامیزانی به میزان  $eM^*$  در سه بازه از سرعت دورانی

### ۶- نتیجه گیری

در این مقاله، یک مدل اجزا محدود براساس نظریه گرادیان کرنش برای تعیین و بررسی مشخصات ارتعاشاتی میکروروتورها پیشنهاد گردید. مدل ارائه شده این امکان را فراهم می کند که ضمن در نظر گرفتن اثرات ناشی از کوچک بودن ابعاد هندسی، تأثیرات مربوط به انعطاف پذیری یاتاقان، میرایی داخلی و نامیزانی در میکروروتورها را بر رفتار ارتعاشاتی آنها مورد مطالعه قرار داد. در این خصوص از فرم فضای حالت برای استخراج بسامدهای رزونانسی و پیش بینی ناپایداری میکرو سامانه مورد نظر استفاده شده است. نتایج عددی ارائه شده در حالت های مختلف بعد از صحه گذاری مدل پیشنهادی، بیانگر آن است که

۱. با افزایش ثابت مادی مرتبه بالا، بسامدهای طبیعی و سرعت دورانی بحرانی میکروروتور افزایش می یابند.
۲. صرف نظر از مقدار ثابت مادی مرتبه بالا، بسامدهای طبیعی فرد میکروروتور با افزایش میزان جرم دیسک موجود در مرکز میکروشافت کاهش و بسامدهای زوج با افزایش مقادیر ممان اینرسی دیسک کاهش می یابند.
۳. بسامدهای طبیعی میکروروتور با یک مقدار مشخص از ثابت مادی مرتبه بالا در حالت هم جهت با چرخش میکروشافت با افزایش سرعت دورانی افزایش و در حالت خلاف جهت چرخش میکروروتور کاهش می یابد.
۴. با افزایش میزان صلبیت یاتاقان، مقادیر بسامدهای طبیعی میکروروتور بیشتر شده و شکل مودهای نظیر آن نیز به شکل مودهای تیر دوسر لولا نزدیکتر می شود. این تغییرات در مقادیر

علائم یونانی

$\alpha$	ضریب میرایی ویسکوز داخلی ویسکوز
$\varepsilon_{ij}$	مؤلفه‌های تانسور کرنش
$\zeta_{ijk}$	مؤلفه‌های تانسور گرادیان کرنش
$\kappa$	ضریب فنریت یاتاقان نرمال شده
$\nu$	ضریب پواسون
$\mu$	مدول برشی
$\rho$	چگالی
$\sigma_{ij}$	مؤلفه‌های تانسور تنش
$\tau_{ijk}$	مؤلفه‌های تانسور تنش مرتبه بالا
$\theta$	مؤلفه چرخش متغیر گره‌ای
$\gamma$	مؤلفه انحنای متغیر گره‌ای
$\eta$	ثابت مادی مرتبه بالای بی بعد شده
$\lambda$	ثابت لم
$\bar{\omega}$	بسامد طبیعی اول تیر دوسر لولا
$\omega$	بسامد طبیعی
$\Omega$	سرعت دورانی

زیرنویس‌ها

$b$	یاتاقان
$d$	دیسک
$ecc$	خروج از مرکز
$n$	شماره
$s$	شافت
$th$	آستانه ناپایداری

بالانویس‌ها

$e$	جزء
*	بی بعد شده
$cl$	کلاسیک
$ncl$	غیر کلاسیک

پیوست

پیوست الف

فرم ضعیف شده معادلات حرکت

$$\int_0^L \left\{ - \left[ \rho A_s + \sum_{i=1}^{n_d} M_{d_i} \delta(x-x_i) \right] \ddot{v} - (\Lambda_2 A_s + EI_s) \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \Lambda_1 I_s \frac{\partial^6 v}{\partial x^6} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \rho I_s + \sum_{i=1}^{n_d} I_{d_i} \delta(x-x_i) \right) \left( \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + 2\Omega \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) \right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_d} M_{d_i} \Omega^2 (e_{y_i} \cos \Omega t - e_{z_i} \sin \Omega t) \delta(x-x_i) + EI_s \alpha \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right) \delta v + \left( -(\Lambda_2 A_s + EI_s) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left[ \rho A_s + \sum_{i=1}^{n_d} M_{d_i} \delta(x-x_i) \right] \ddot{w} + EI_s \alpha \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right) + \Lambda_1 I_s \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \rho I_s + \sum_{i=1}^{n_d} I_{d_i} \delta(x-x_i) \right) \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} - 2\Omega \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_d} M_{d_i} \Omega^2 (e_{y_i} \sin \Omega t + e_{z_i} \cos \Omega t) \delta(x-x_i) \right) \delta w \Bigg\} dx$$

$$+ \left\{ - \left( \rho I_s + \sum_{i=1}^{n_d} I_{d_i} \delta(x-x_i) \right) \left( \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + 2\Omega \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) - k_{yy} v - k_{yz} w - c_{yy} \dot{v} - c_{yz} \dot{w} - \Lambda_1 I_s \frac{\partial^5 v}{\partial x^5} + (\Lambda_2 A_s + EI_s) \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - EI_s \alpha \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right\} \delta v \Bigg|_{x=0}^{x=L}$$

$$+ \left\{ - \left( \rho I_s + \sum_{i=1}^{n_d} I_{d_i} \delta(x-x_i) \right) \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} - 2\Omega \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right) - k_{zz} w - k_{zy} v - c_{zz} \dot{w} - c_{zy} \dot{v} - \Lambda_1 I_s \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} + (\Lambda_2 A_s + EI_s) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - EI_s \alpha \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right) \right\} \delta w \Bigg|_{x=0}^{x=L}$$

$$+ \left\{ \Lambda_1 I_s \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - (\Lambda_2 A_s + EI_s) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + EI_s \alpha \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right\} \delta \frac{\partial v}{\partial x} \Bigg|_{x=0}^{x=L}$$

$$+ \left\{ \Lambda_1 I_s \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - (\Lambda_2 A_s + EI_s) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + EI_s \alpha \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right\} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \Bigg|_{x=0}^{x=L}$$

$$- \Lambda_1 I_s \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Bigg|_{x=0}^{x=L} - \Lambda_1 I_s \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Bigg|_{x=0}^{x=L}$$

پیوست ب

مؤلفه‌های مربوط به ماتریس اجزای میکروشافت:

$$[M_s]^e = \begin{bmatrix} ms_{ij} & [0] & ms_{i(j+3)} & [0] \\ [0] & ms_{ij} & [0] & ms_{i(j+3)} \\ ms_{(i+3)j} & [0] & ms_{(i+3)(j+3)} & [0] \\ [0] & ms_{(i+3)j} & [0] & ms_{(i+3)(j+3)} \end{bmatrix}$$

$$ms_{kl} = \rho A L \int_0^1 \Theta_{lk} \Theta_{kl} ds.$$

$$[N_s]^e = \begin{bmatrix} ns_{ij} & [0] & ns_{i(j+3)} & [0] \\ [0] & ns_{ij} & [0] & ns_{i(j+3)} \\ ns_{(i+3)j} & [0] & ns_{(i+3)(j+3)} & [0] \\ [0] & ns_{(i+3)j} & [0] & ns_{(i+3)(j+3)} \end{bmatrix}$$

$$ns_{kl} = \frac{\rho I_s}{L_e} \int_0^1 d \Theta_{lk} \frac{d \Theta_{kl}}{ds} ds.$$

$$[G_s]^e = \begin{bmatrix} [0] & -gs_{ij} & [0] & -gs_{i(j+3)} \\ gs_{ij} & [0] & gs_{i(j+3)} & [0] \\ [0] & -gs_{(i+3)j} & [0] & -gs_{(i+3)(j+3)} \\ gs_{(i+3)j} & [0] & gs_{(i+3)(j+3)} & [0] \end{bmatrix}$$

$$gs_{kl} = \frac{2\rho I_s}{L_e} \int_0^1 d \Theta_{lk} \frac{d \Theta_{kl}}{ds} ds.$$

منابع

[1] A.H. Epstein, S.D. Senturia, G. Anathasuresh, A. Ayon, K. Breuer, K.-S. Chen, F.E. Ehrich, G. Gauba, R. Ghodssi, C. Groshenry, S. Jacobson, J.H. Lang, C-C Lin, A. Mehra, J. O. Mur Miranda, S. Nagle, D. J. Orr, E. Piekos, M. A. Schmidt, G. Shirley, S.M. Spearing, C.S. Tan, Y-S. Tzeng, I.A. Waitz, Power MEMS and microengines, in: *IEEE Transducers '97 Conference*, Chicago, IL, June 1997.

[2] D. Schubert, Mems-Concept Using Micro Turbines for Satellite Power Supply, *Solar Power, InTech*, (2012) 195-210.

[3] L.G. Fréchette, C. Lee, S. Arslan, Y.-C. Liu, Preliminary design of a MEMS steam turbine power plant-on-a-chip, in: *3rd Int'l Workshop on Micro & Nano Tech. for Power Generation & Energy Conv. (PowerMEMS'03)*, Makuhari, Japan, 2003.

[4] J.H. Lang, *Multi-Wafer Rotating MEMS Machines, Turbines, Generators, and Engines*, Springer, 2009.

[5] J.S. Stolken, A.G. Evans, Microbend test method for measuring the plasticity length scale, *Journal of Acta Materialia*, 46(14) (1998) 5109-5115.

[6] D.C.C. Lam, F.Yang, A.C.M. Chong, J.Wang, P.Tong, Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51 (2003) 1477-1508.

[7] A.W. McFarland, J.S. Colton, Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 15(5) (2005) 1060-1067.

[8] R.D. Mindlin, Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 1(4) (1965) 417-438.

[9] R.D. Mindlin, N.N. Eshel, On first strain-gradient theories in linear elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 4(1) (1968) 109-124.

[10] S. Kong, S. Zhou, Z. Nie, K. Wang, Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory, *International Journal of Engineering Science*, 47 (2009) 487-498.

[11] B. Akgöz, Ö. Civalek, Strain gradient elasticity and modified couple stress models for buckling analysis of axially loaded micro-scaled beams, *International Journal of Engineering Science*, 49(11) (2011) 1268-1280.

[12] B. Akgöz, Ö. Civalek, Analysis of micro-sized beams for various boundary conditions based on the strain gradient elasticity theory, *Archive of Applied Mechanics*, 82(3) (2012) 423-443.

$$[\mathbf{K}_s^{cl}]^e = \begin{bmatrix} kcl_{ij} & [0] & kcl_{i(j+3)} & [0] \\ [0] & kcl_{ij} & [0] & kcl_{i(j+3)} \\ kcl_{(i+3)j} & [0] & kcl_{(i+3)(j+3)} & [0] \\ [0] & kcl_{(i+3)j} & [0] & kcl_{(i+3)(j+3)} \end{bmatrix},$$

$$kcl_{kl} = \frac{EI_s}{L_e^3} \int_0^1 \frac{d^2 \Theta_{lk}}{ds^2} \frac{d^2 \Theta_{kl}}{ds^2} ds.$$

$$[\mathbf{K}_s^{ncl}]^e = \begin{bmatrix} kncl_{ij} & [0] & kncl_{i(j+3)} & [0] \\ [0] & kncl_{ij} & [0] & kncl_{i(j+3)} \\ kncl_{(i+3)j} & [0] & kncl_{(i+3)(j+3)} & [0] \\ [0] & kncl_{(i+3)j} & [0] & kncl_{(i+3)(j+3)} \end{bmatrix},$$

$$kncl_{kl} = \frac{\Lambda I_s}{L_e^5} \int_0^1 \frac{d^3 \Theta_{lk}}{ds^3} \frac{d^3 \Theta_{kl}}{ds^3} ds.$$

$$[\mathbf{K}_C^{cl}]^e = \begin{bmatrix} [0] & kcl_{ij} & [0] & kcl_{i(j+3)} \\ -kcl_{ij} & [0] & -kcl_{i(j+3)} & [0] \\ [0] & kcl_{(i+3)j} & [0] & kcl_{(i+3)(j+3)} \\ -kcl_{(i+3)j} & [0] & -kcl_{(i+3)(j+3)} & [0] \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{M}_d] = \begin{bmatrix} md_{ij} & [0] & md_{i(j+3)} & [0] \\ [0] & md_{ij} & [0] & md_{i(j+3)} \\ md_{(i+3)j} & [0] & md_{(i+3)(j+3)} & [0] \\ [0] & md_{(i+3)j} & [0] & md_{(i+3)(j+3)} \end{bmatrix}$$

$$md_{kl} = M_{d_s} \int_0^1 \Theta_{lk} \Theta_{kl} \delta(1-s) ds,$$

$$[\mathbf{N}_d]^e = \begin{bmatrix} nd_{ij} & [0] & nd_{i(j+3)} & [0] \\ [0] & nd_{ij} & [0] & nd_{i(j+3)} \\ nd_{(i+3)j} & [0] & nd_{(i+3)(j+3)} & [0] \\ [0] & nd_{(i+3)j} & [0] & nd_{(i+3)(j+3)} \end{bmatrix},$$

$$nd_{kl} = \frac{I_{d_s}}{L_e^2} \int_0^1 \frac{d \Theta_{lk}}{ds} \frac{d \Theta_{kl}}{ds} \delta(1-s) ds.$$

$$[\mathbf{G}_d]^e = \begin{bmatrix} [0] & -gd_{ij} & [0] & -gd_{i(j+3)} \\ gd_{ij} & [0] & gd_{i(j+3)} & [0] \\ [0] & -gd_{(i+3)j} & [0] & -gd_{(i+3)(j+3)} \\ gd_{(i+3)j} & [0] & gd_{(i+3)(j+3)} & [0] \end{bmatrix},$$

$$gd_{kl} = \frac{2I_{d_s}}{L_e} \int_0^1 \frac{d \Theta_{lk}}{ds} \frac{d \Theta_{kl}}{ds} \delta(1-s) ds.$$

$$[\mathbf{C}_b] = \begin{bmatrix} c_{yy} & [0]_{1 \times 2} & c_{yz} & [0]_{1 \times 2} \\ [0]_{2 \times 1} & [0]_{2 \times 2} & [0]_{2 \times 1} & [0]_{2 \times 2} \\ c_{zy} & [0]_{1 \times 2} & c_{zz} & [0]_{1 \times 2} \\ [0]_{2 \times 1} & [0]_{2 \times 2} & [0]_{2 \times 1} & [0]_{2 \times 2} \end{bmatrix}.$$

$$[\mathbf{K}_b] = \begin{bmatrix} k_{yy} & [0]_{1 \times 2} & k_{yz} & [0]_{1 \times 2} \\ [0]_{2 \times 1} & [0]_{2 \times 2} & [0]_{2 \times 1} & [0]_{2 \times 2} \\ k_{zy} & [0]_{1 \times 2} & k_{zz} & [0]_{1 \times 2} \\ [0]_{2 \times 1} & [0]_{2 \times 2} & [0]_{2 \times 1} & [0]_{2 \times 2} \end{bmatrix}.$$

$$\{\mathbf{f}(t)\} = \frac{M_{d_s} \Omega^2}{2} \begin{Bmatrix} e_{yn} \cos \Omega t - e_{zn} \sin \Omega t \\ [0]_{2 \times 1} \\ e_{yn} \cos \Omega t + e_{zn} \sin \Omega t \\ [0]_{2 \times 1} \end{Bmatrix}.$$

(ب-۱)

- gradient theory, *International Journal of Applied Mechanics*, 7(5) (2015) 1550075.
- [21] M. Hashemi, M. Asghari, Analytical study of three-dimensional flexural vibration of micro-rotating shafts with eccentricity utilizing the strain gradient theory". *Meccanica* 51(6) (2016) 1435-1444.
- [22] G. Genta, Consistent matrices in rotor dynamics, *Meccanica*, 20 (1985) 235-248.
- [23] M. Lalanne, G. Ferraris, *Rotordynamics prediction in engineering*. 2nd edition, Wiley, 1998.
- [24] H.D. Nelson, E.S. Zorzi, Finite element simulation of rotor-bearing systems with internal damping, *Journal of Engineering for Power*, 71 (1977) 71-76.
- [25] L. Forrai, Stability analysis of symmetrical rotor-bearing systems with internal damping using finite element method, *Proceeding of the International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exhibition*, Birmingham, UK, 1996.
- [26] L. Forrai, A finite element model for stability analysis of symmetrical rotor systems with internal damping, *Journal of Computational and Applied Mechanics*, 1(1), (2000) 37-47.
- [27] M.H. Kahrobaian, M. Asghari, M.T. Ahmadian, Strain gradient beam element, *Finite Elements in Analysis and Design*, 68 (2013) 63-75.
- [28] H. M. Shodja, F. Ahmadpoor, A. Tehranchi, Calculation of the additional constants for fcc materials in second strain gradient elasticity: Behavior of a nano-size Bernoulli-Euler beam with surface effects, *Journal of Applied Mechanics*, 79 (2012).
- [13] B. Wang, J. Zhao, S. Zhou, A microscale Timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 29 (2010) 591-599.
- [14] R. Ansari, R. Gholami, S. Sahmani, Free vibration analysis of size-dependent functionally graded microbeams based on the strain gradient Timoshenko beam theory, *Composite Structures* 94 (2011) 221-228.
- [15] R.G. R. Ansari, M. Faghih Shojaei, V. Mohammadi, S. Sahmani, Size-dependent bending, buckling and free vibration of functionally graded Timoshenko microbeams based on the most general strain gradient theory, *Composite Structures* 100 (2013) 385-397.
- [16] M.H. Kahrobaian, M. Asghari, M. Rahaeifard, M.T. Ahmadian, A nonlinear strain gradient beam formulation, *International Journal of Engineering Science* 49 (2011) 1256-1267.
- [17] M.H. Ghayesh, M. Amabili, H. Farokhi, Nonlinear forced vibrations of a microbeam based on the strain gradient elasticity theory, *International Journal of Engineering Science*, 63 (2013) 52-60.
- [18] M. Asghari, M.H. Kahrobaian, M. Nikfar, M.T. Ahmadian, A size-dependent nonlinear Timoshenko microbeam model based on the strain gradient theory, *Acta Mechanica*, 223 (2012) 1233-1249.
- [19] R. Ansari, R. Gholami, M.A. Darabi, A nonlinear Timoshenko beam formulation based on strain gradient theory, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 7(2) (2012) 195-211.
- [20] M. Asghari, M., Hashemi, Flexural vibration characteristics of micro-rotors based on the Strain

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

M. Hashemi and M. Asghari, Finite Element Analysis of Vibration Behavior of Micro-Rotors Utilizing a Developed Strain Gradient-Based Beam Element, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 50(1) (2018) 113-124.  
DOI: 10.22060/mej.2016.795

