



ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند بر روی بستر الاستیک تحت نیروی محوری، فشار جانبی و شرایط مرزی مختلف

عباس هادی^۱، سعید شاخصی^{۲*}، حمید رضا اویسی^۳، جمشید فضیلتی^۱

^۱ مهندسی هوافضا، پژوهشگاه هوافضا، وزارت علوم، تحقیقات و فناوری، تهران، ایران

^۲ پژوهشگاه سامانه‌های حمل و نقل فضایی، پژوهشگاه فضایی ایران، تهران، ایران

^۳ دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۷ دی ۱۳۹۵

بازنگری: ۲۷ اسفند ۱۳۹۵

پذیرش: ۱۷ اردیبهشت ۱۳۹۶

ارائه آنلاین: ۲۷ اردیبهشت ۱۳۹۶

کلمات کلیدی:

ارتعاشات آزاد
پوسته‌های استوانه‌ای
مواد هدفمند
نیروی محوری و فشار جانبی
بستر الاستیک

چکیده: در این مقاله ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند تحت نیروی محوری و فشار جانبی، احاطه شده با بستر الاستیک به ازای شرایط مرزی مختلف با استفاده از روش حل گسترش موج بررسی شده است. خواص مواد هدفمند مطابق قانون توانی در جهت ضخامت تغییر می‌کند. بستر الاستیک از نوع بستر دو پارامتری پسترناک می‌باشد. معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای بر روی بستر الاستیک تحت نیروهای مکانیکی مبتنی بر نظریه مرتبه اول برشی سندرز-کویتر با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده‌اند. با فرض میدان تغییر مکان به صورت گسترش موج معادلات حاکم حل شده‌اند. بسامدهای طبیعی پوسته استوانه‌ای تحت شرایط مرزی مختلف، به دست آمده و با نتایج مراجع مقایسه شده‌اند. مشخص می‌شود که استفاده از میدان تغییر مکان به فرم گسترش موج به صورت یک روش مؤثر و قابل اطمینان عمل نموده و به ازای شرایط مرزی مختلف نتایج قابل قبولی ارائه می‌دهد. البته نشان داده می‌شود که به ازای شرایط مرزی مختلف و ابعاد هندسی پوسته، دقت روش گسترش موج نیز متفاوت است. همچنین با تکیه بر نظریه توسعه داده شده، اثرات شرایط مرزی مختلف، نیروی محوری، فشار جانبی و پارامترهای بستر الاستیک بر رفتار ارتعاشی پوسته استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند مورد بررسی قرار گرفت.

۱- مقدمه

پوسته‌ها یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین اجزای سازه‌ای هستند. پوسته‌ها در شکل‌ها و کاربردهای متنوعی معرفی شده‌اند که به عنوان مثال می‌توان به استفاده از آنها در بدنه، بال و موتور هواپیماها و فضاپیماها، لوله‌های انتقال نفت، گاز و مواد شیمیایی، مخازن ذخیره آب و سوخت، بدنه زیردریایی و بسیاری از کاربردهای مشابه اشاره نمود. گستردگی کاربرد پوسته‌های استوانه‌ای، علت رشد چشمگیر مطالعات انجام یافته در این حوزه است.

مطالعه بسامدهای طبیعی پوسته‌ها جهت بررسی رفتار دینامیکی آنها از اهمیت کاربردی بالایی برخوردار است. به همین منظور از نظریه الاستیسیته برای بررسی رفتار پوسته‌ها استفاده می‌شود. روابط بین تنش و کرنش برحسب تغییر مکان‌های ناشی از تغییر شکل در جهات محوری، محیطی و شعاعی به دست آمده و عبارت‌های مربوط به انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و کار نیروهای انجام شده (در صورت وجود نیروهای خارجی) پوسته استوانه‌ای به فرم انتگرالی بیان می‌شوند. این عبارت‌ها برحسب نوع نظریه پوسته به کار رفته، متفاوت خواهد بود. مسأله با استفاده از روش تغییرات به صورت دستگاهی از معادلات مشتق جزئی در خواهد آمد. سپس با استفاده از روش‌های متفاوت، دستگاه معادلات مشتق جزئی حل می‌شود.

بررسی و مطالعه بسامدهای طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای در تحقیقات متعددی مورد توجه قرار گرفته است. تحقیق جامعی توسط لیسا [۱] در زمینه ارتعاشات پوسته‌ها انجام یافته که شامل بررسی انواع نظریه‌های پوسته نازک می‌شود. ایشان برای بررسی اثرات شرایط مرزی بر ارتعاشات پوسته‌های نازک استوانه‌ای از توابع تیر^۱ استفاده نموده است. فارسبرگ [۲] اثرات شرایط مرزی بر خواص ارتعاشی پوسته‌های نازک استوانه‌ای را با تکیه بر روش سعی و خطا در محاسبه بسامدهای طبیعی بررسی نمود. خمش، کمانش و ارتعاشات پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی به ازای شرایط مرزی گیردار، ساده و آزاد با فرض میدان تغییر مکان از نوع لوی^۲ و استفاده از فضای حالت توسط شادمهری و همکاران [۳] مورد بررسی قرار گرفت. شرما [۴] با استفاده از نظریه پوسته سندرز خواص ارتعاشی پوسته‌های نازک استوانه‌ای تحت بعضی از شرایط مرزی را با استفاده از توابع تیر بررسی نمود. سودل [۵] نیز با استفاده از توابع تیر، بسامدهای طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای را با فرض تغییر شکل‌های عرضی غالب تحت شرایط مرزی مختلف بررسی نمود. اثر شرایط مرزی مختلف بر بسامدهای طبیعی پوسته‌های نازک استوانه‌ای کامپوزیتی با استفاده از توابع تیر برای تغییر شکل محوری، توسط لم و لوی [۶] بررسی شد. مسینا و سولدلتو [۷] با استفاده از روش ریتز بسامدهای

1 Beam functions

2 Levy-type

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: s.shakhesi@isrc.ac.ir

است. جهت انجام این موضوع ابتدا کارایی، دقت و محدوده کاربرد روش گسترش موج در بررسی ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای تحت شرایط مرزی مختلف با مقایسه نتایج این روش و نتایج مراجع بررسی خواهد شد. سپس با به کارگیری این روش اثرات شرایط مرزی، بستر الاستیک و نیروهای مکانیکی بر رفتار ارتعاشی پوسته مطالعه شده و مقادیر مشخصی از پارامترهای بستر الاستیک که اثر شرایط مرزی را تغییر می‌دهند، تعیین می‌گردند. به این منظور ابتدا معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای بر روی بستر الاستیک تحت نیروی محوری و فشار جانبی براساس نظریه مرتبه اول برشی سندرز-کویتز با استفاده از اصل همپلتون استخراج می‌شوند. سپس با استفاده از میدان تغییر مکان به فرم گسترش موج، بسامدهای طبیعی پوسته به ازای شرایط مرزی مختلف به دست آمده و با نتایج مراجع مقایسه می‌شوند. شرایط مرزی مختلف در دو انتهای استوانه شامل ساده-ساده، گیردار-گیردار، گیردار-ساده و گیردار-آزاد می‌باشد. بستر الاستیک مورد نظر از نوع پسترناک^۴ می‌باشد. همچنین خواص ماده هدفمند براساس قانون توان در جهت ضخامت تغییر می‌کند.

۲- روابط نظری

۲-۱- الگوی ماده هدفمند

ماده هدفمند مورد بررسی در این تحقیق به گونه‌ای از ترکیب دو ماده تشکیل شده است که در آن خواص ماده در طول ضخامت پوسته با توجه به رابطه توانی زیر تغییر می‌کند:

$$P(z) = (P_o - P_i)V_o + P_i \quad (1)$$

$$V_o = \left(\frac{z + 0.5h}{h}\right)^N, 0 \leq N \leq \infty, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$$

که در آن P_o و P_i به ترتیب معرف خاصیت ماده در سطوح بیرونی و داخلی پوسته، h ضخامت و N شاخص کسر حجمی ماده می‌باشند. در این تحقیق فرض می‌شود که خواص ماده هدفمند شامل مدول الاستیسیته $E(z)$ ، چگالی $\rho(z)$ و ضریب پواسون^۵ $\nu(z)$ مطابق رابطه (۱) تغییر می‌کنند.

۲-۲- سینماتیک مسأله

پوسته استوانه‌ای با ضخامت ثابت h ، شعاع R و طول L بر روی بستر الاستیک پسترناک را مطابق شکل ۱ در نظر بگیرید. مطابق نظریه مرتبه اول برشی، تغییر مکان هر نقطه دلخواه پوسته با رابطه زیر قابل توصیف است:

$$U(x, \theta, t) = u(x, \theta, t) + z\psi_x(x, \theta, t)$$

$$V(x, \theta, t) = v(x, \theta, t) + z\psi_\theta(x, \theta, t) \quad (2)$$

$$W(x, \theta, t) = w(x, \theta, t)$$

طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تحت شرایط مرزی مختلف را تعیین نمودند. انصاری و همکاران [۸] ارتعاشات پوسته نازک استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند^۱ را با استفاده از نظریه پوسته سندرز مطالعه نمودند. آنها از سری فوریه برای وابستگی محوری میدان تغییر مکان استفاده نمودند. همه روش‌های اشاره شده جهت بررسی اثرات شرایط مرزی بر ارتعاشات پوسته، بعضاً مستلزم انجام محاسبات پیچیده و محدودیت‌های مربوط به خود می‌باشند.

بررسی ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای در تداخل با بستر الاستیک نیز از اهمیت بالایی برخوردار است که برخی محققان به این امر پرداخته‌اند. پلیوال، همکاران [۹]، پلیوال و پندی [۱۰] ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای روی بستر الاستیک را مطالعه نمودند. شنگ و وانگ [۱۱] ارتعاش، کمناش و ناپایداری دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای هدفمند بر روی بستر الاستیک، محیط حرارتی و اثر شرایط مرزی ساده را بررسی نمودند. شاه و همکاران [۱۲] ارتعاشات آزاد پوسته‌های نازک استوانه‌ای هدفمند بر روی بستر الاستیک و شرایط مرزی ساده را مطالعه نمودند. محمدی مهر و همکاران [۱۳] اثرات بستر الاستیک بر ارتعاشات و کمناش پوسته استوانه‌ای نازک از جنس مواد هدفمند تحت نیروهای محوری، حرارتی و الکتریکی و شرایط مرزی ساده را بررسی نمودند.

روش جدیدی برای توصیف میدان تغییر مکان به فرم گسترش موج توسط ژانگ و همکاران [۱۴] و [۱۵] توسعه داده شده که به کمک آن می‌توان به ازای شرایط مرزی مختلف بسامدهای طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای را پیش‌بینی نمود. در روش گسترش موج^۲ پارامتر مودال محوری با فرمول مشخصه عدد موج تخمین زده می‌شود. این اعداد موج محوری، همان مقادیر ویژه تقریبی توابع تیر هستند. این روش توسط ژوبین [۱۶] نیز برای بررسی ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای همسانگرد^۳ مورد استفاده قرار گرفت. ایشان از نظریه پوسته نازک فلوگه در تحقیق خود استفاده نمود و بسامدهای طبیعی پوسته استوانه‌ای را به ازای شرایط مرزی ساده-ساده، گیردار-گیردار و گیردار-ساده به دست آورد. از مزایای روش گسترش موج می‌توان به سادگی کاربرد، قابلیت توسعه برای در نظر گرفتن شرایط مرزی و هندسه مختلف و همچنین سرعت پردازش بالا در حل مسأله اشاره نمود. با توجه به مزایای روش گسترش موج و از آنجا که هدف اصلی تحقیق حاضر بررسی اثرات همزمان شرایط مرزی مختلف، بستر الاستیک و همچنین نیروی محوری و فشار جانبی بر ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند می‌باشد؛ بنابراین از این روش در تحقیق حاضر استفاده خواهد شد.

با توجه به موارد مطرح شده و بررسی منابع موجود مشخص می‌شود که بررسی ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای نسبتاً ضخیم از جنس مواد هدفمند بر روی بستر الاستیک تحت نیروی محوری و فشار جانبی و اثر شرایط مرزی مختلف با روش گسترش موج تاکنون مورد مطالعه قرار نگرفته

- 1 Functionally graded (FG)
- 2 Wave propagation method
- 3 Isotropic

4 Pasternak
5 Poisson's ratio

۲-۳- روابط متشکله

ماتریس سفتی ماده هدفمند تشکیل شده از دو ماده همسانگرد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \quad (5)$$

که ضرایب آن به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} Q_{11} = Q_{22} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)} \\ Q_{12} &= \frac{\nu(z)E(z)}{1-\nu^2(z)} \\ Q_{66} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \\ Q_{44} = Q_{55} &= K \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن K ضریب تصحیح برش است و برابر $\frac{5}{6}$ در نظر گرفته می‌شود [۱۸].

روابط بین نیروها و ممان‌های برابند (N, M, Q) با کرنش‌ها و انحنای

سطح میانی پوسته به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{x\theta} \\ M_{xx} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,0} \\ \varepsilon_{\theta,0} \\ \gamma_{x\theta,0} \\ k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz,0} \\ \gamma_{\theta z,0} \end{Bmatrix}$$

که در آن $A_{ij}, B_{ij}, C_{ii}, D_{ij}$ ماتریس‌های سفتی پوسته می‌باشند و به

صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz, \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (8)$$

$$C_{ii} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ii} dz, \quad (i = 4, 5)$$

۲-۴- معادلات حرکت

معادلات حرکت حاکم بر ارتعاشات پوسته استوانه‌ای با استفاده از اصل همیلتون استخراج می‌شود:

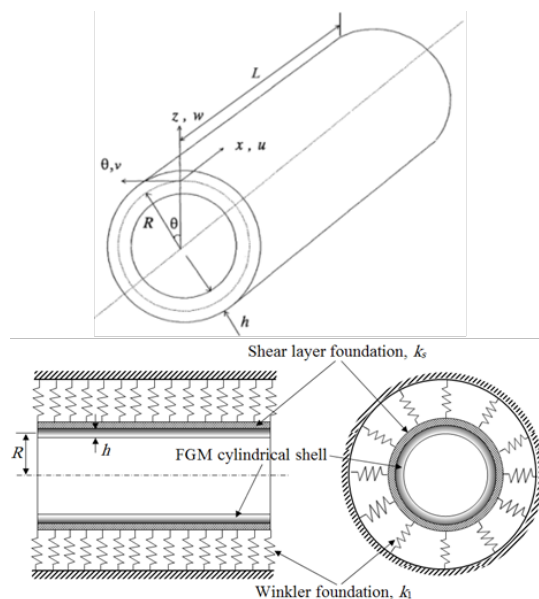


Fig. 1. The FG cylindrical shell on elastic foundation

شکل ۱: پوسته استوانه‌ای هدفمند بر روی بستر الاستیک

که در آن u, v, w به ترتیب مؤلفه‌های تغییر مکان سطح میانی در جهات x, θ, z و همچنین ψ_x و ψ_θ به ترتیب چرخش حول محورهای x و θ می‌باشند.

کرنش‌های متناظر با میدان تغییر مکان (γ) را می‌توان به صورت زیر

بیان نمود:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{x,0} + zk_x \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\theta,0} + zk_\theta \\ \gamma_{x\theta} &= \gamma_{x\theta,0} + zk_{x\theta} \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{xz,0} \\ \gamma_{\theta z} &= \gamma_{\theta z,0} \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن $\varepsilon_{i,0}$ ($i = x, \theta$) و $\gamma_{i,0}$ ($i = x\theta, xz, \theta z$) کرنش‌های عمودی و برشی سطح میانی و k_i ($i = x, \theta, x\theta$) معرف انحنای سطح میانی می‌باشند. روابط بین کرنش‌های میانی، انحنای و تغییر مکان (روابط سینماتیک) مطابق با نظریه سندرز-کویتز به صورت زیر می‌باشند [۱۷]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x,0} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{\theta,0} = \frac{\partial v}{R\partial\theta} + \frac{w}{R} \\ \gamma_{x\theta,0} &= \frac{\partial u}{R\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz,0} &= \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{\theta z,0} &= \psi_\theta + \frac{\partial w}{R\partial\theta} - \frac{v}{R} \\ k_x &= \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad k_\theta = \frac{\partial \psi_\theta}{R\partial\theta} \\ k_{x\theta} &= \frac{\partial \psi_x}{R\partial\theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{2R} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{R\partial\theta} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ RN_a \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + q \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right\} d\theta dx \quad (15)$$

با جایگذاری روابط (۱۱)، (۱۳) و (۱۵) در رابطه (۹) و انجام محاسبات طولانی ریاضی، معادلات حاکم بر ارتعاشات پوسته استوانه‌ای بر روی بستر الاستیک تحت نیروی محوری و فشار جانبی بر پایه نظریه مرتبه اول برشی سندرز-کوئیر به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{R\partial\theta} - \frac{\partial M_{x\theta}}{2R^2\partial\theta} = I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \quad (16)$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta\theta}}{R\partial\theta} + \frac{\partial M_{x\theta}}{2R\partial x} + \frac{Q_\theta}{R} + N_a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} -\frac{N_{\theta\theta}}{R} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\theta}{R\partial\theta} + N_a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{q}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\ -k_1 w + k_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \right) = I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{x\theta}}{R\partial\theta} - Q_x = I_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \quad (19)$$

$$\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta\theta}}{R\partial\theta} - Q_\theta = I_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2} \quad (20)$$

معادلات حرکت بر حسب مؤلفه‌های تغییر مکان را می‌توان با جایگذاری روابط (۴) و (۷) در معادلات (۱۶-۲۰) استخراج نمود:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \psi_x \\ \psi_\theta \end{Bmatrix} = 0 \quad (21)$$

عملگرهای دیفرانسیلی خطی L_{ij} در پیوست معرفی شده‌اند.

۳- روش حل

میدان تغییر مکان پوسته به فرم گسترش موج به صورت زیر معرفی می‌شود [۱۵ و ۱۶]:

$$\begin{aligned} u &= A \cos(n\theta) e^{i(\omega t - k_m x)} \\ v &= B \sin(n\theta) e^{i(\omega t - k_m x)} \\ w &= C \cos(n\theta) e^{i(\omega t - k_m x)} \\ \psi_x &= D \cos(n\theta) e^{i(\omega t - k_m x)} \\ \psi_\theta &= E \sin(n\theta) e^{i(\omega t - k_m x)} \end{aligned} \quad (22)$$

که در آن k_m و n به ترتیب پارامتر مودال محوری و عدد موج محیطی و A, B, C, D, E ضرایب ثابت مجهول می‌باشند که معرف دامنه ارتعاشات هستند. همچنین ω بسامد طبیعی حرکت و $i = \sqrt{-1}$ می‌باشند.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U + W) dt = 0 \quad (9)$$

U و T به ترتیب انرژی‌های جنبشی و کرنشی پوسته و W کار انجام شده توسط نیروهای خارجی هستند. t_1 و t_2 معرف زمان دلخواه هستند. با تعریف بردار کرنش و همچنین بردار نیروها و ممان‌ها به صورت زیر:

$$\begin{aligned} \{N\}^T &= \{N_{xx} \ N_{\theta\theta} \ N_{x\theta} \ M_{xx} \ M_{\theta\theta} \ M_{x\theta} \ Q_x \ Q_\theta\} \\ \{e\}^T &= \{\varepsilon_{x,0} \ \varepsilon_{\theta,0} \ \gamma_{x\theta,0} \ k_x \ k_\theta \ k_{x\theta} \ \gamma_{xz,0} \ \gamma_{\theta z,0}\} \end{aligned} \quad (10)$$

انرژی کرنشی پوسته استوانه‌ای بر روی بستر الاستیک به صورت زیر قابل بیان می‌باشد:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \{N\}^T \{e\} R d\theta dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} [k_1 w^2 + k_s (\partial w / \partial x)^2 + k_s (\partial w / R \partial \theta)^2] R d\theta dx \end{aligned} \quad (11)$$

انتگرال دوم مربوط به انرژی بستر الاستیک است که به انرژی کرنشی پوسته اضافه شده است. k_1 ، برحسب نیرو بر واحد حجم، معرف پارامتر بستر وینکلر و k_s ، برحسب نیرو بر واحد طول، معرف پارامتر برشی بستر پسترناک می‌باشند.

انرژی جنبشی پوسته استوانه‌ای با در نظر گرفتن تمامی مؤلفه‌های اینرسی شامل اینرسی چرخشی، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \left[\left(\frac{\partial(u + z\psi_x)}{\partial t} \right)^2 \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial(v + z\psi_\theta)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] R dz d\theta dx \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن $\rho(z)$ چگالی ماده می‌باشد. با بسط رابطه فوق می‌توان انرژی جنبشی پوسته را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} I_1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] + \\ &2I_2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial t} \right) + I_3 \left[\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial t} \right)^2 \right] R d\theta dx \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن عبارتهای اینرسی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(I_1, I_2, I_3) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (1, z, z^2) dz \quad (14)$$

کار انجام شده توسط نیروی محوری N_a و فشار جانبی q با عبارت زیر قابل توصیف است [۱۹ و ۲۰]:

نرم افزار تجاری نسترن^۱ تهیه و تحلیل مودال^۲ جهت استخراج بسامدهای طبیعی بر روی آنها انجام گرفته است که نتایج آن در جدول های مقایسه ارائه می گردد. اجزای مورد استفاده در مدل های اجزای محدود از نوع چهار وجهی چهار گره ای می باشند. با توجه به نوع شرایط مرزی در دو انتهای استوانه، درجات آزادی مشخصی از گره ها مقید شده اند. شکل ۲ المان های مدل المان محدود پوسته استوانه ای در شرایط مرزی گیردار-گیردار را نشان می دهد. همان گونه که مشاهده می شود به علت نزدیکی به شرایط مرزی از اجزای بیشتری در نواحی نزدیک به دو انتهای پوسته استفاده شده است.

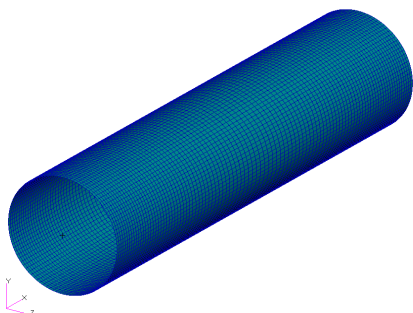


Fig. 2. Elements of finite element model for clamped-clamped boundary condition

شکل ۲: اجزای مدل اجزا محدود در شرایط مرزی گیردار-گیردار

جهت اطمینان از مقادیر بسامد طبیعی حاصل از تحلیل المان محدود، تغییرات بسامدهای طبیعی پوسته با افزایش تعداد المان های مدل به ازای شرایط مرزی گیردار-گیردار و شکل مود $m=1, n=2$ در شکل ۳ نشان داده شده است. همچنین شکل مود مورد نظر در شکل ۴ نمایش داده شده است. با بررسی شکل ۳ مشاهده می شود که با افزایش تعداد المان های مدل، بسامد طبیعی پوسته دقیق تر گردیده و با افزایش بیشتر المان ها به بیش از ۸۰۰۰، تغییر چندانی در بسامد طبیعی حاصل نمی شود که این موضوع نشان دهنده همگرا شدن نتایج است.

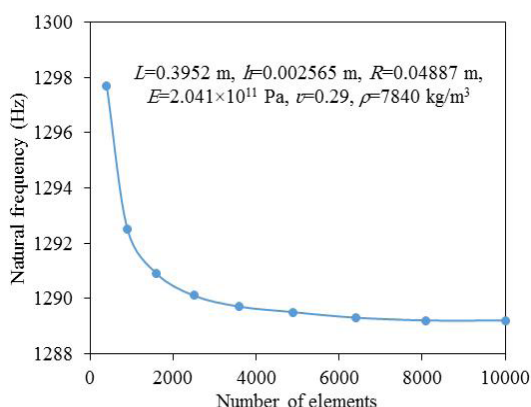


Fig. 3. Convergence of natural frequency for clamped-clamped boundary condition

شکل ۳: همگرایی بسامد طبیعی در شرایط مرزی گیردار-گیردار

به منظور محاسبه بسامدهای طبیعی پوسته استوانه ای تحت شرایط مرزی مختلف، لازم است مقدار پارامتر مودال محوری (k_m) مناسب را تعیین نمود. از آنجا که بررسی ارتعاشات خمشی پوسته مورد نظر است، در این تحلیل فرض می شود که انتشار موج در جهت محوری پوسته استوانه ای با مطالعه انتشار موج در یک تیر با شرایط مرزی مشابه، به دست می آید. به عبارت دیگر در این شیوه فرض می شود که شکل مودهای خمشی پوسته استوانه ای در جهت طولی یکسان و به فرم ارتعاشات عرضی تیری است که همان شرایط مرزی را دارد. مقادیر پارامتر مودال محوری به ازای شرایط مرزی مختلف در جدول ۱ آورده شده اند [۱۵]. عدد طول موج محوری با m نشان داده می شود.

جدول ۱: پارامتر مودال محوری به ازای شرایط مرزی مختلف

Table 1. Axial modal parameter for various boundary conditions

شرایط مرزی	پارامتر مودال
ساده-ساده	$k_m = m\pi/L$
گیردار-گیردار	$k_m = (2m+1)\pi/2L$
گیردار-ساده	$k_m = (4m+1)\pi/4L$
گیردار-آزاد	$k_m = (2m-1)\pi/2L$

با توجه به پارامتر مودال محوری متناسب با شرایط مرزی مورد نظر (جدول ۱) و با جایگذاری میدان تغییر مکان معرفی شده (رابطه ۲۲) در معادلات حاکم و ساده سازی، دستگاه معادلات جبری خطی زیر حاصل می شود:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & T_{25} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & T_{35} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & T_{45} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} & T_{54} & T_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{Bmatrix} = 0 \quad (23)$$

که در آن T_{ij} ها عبارت های جبری بر حسب ثابت ماده و مشخصات هندسی پوسته هستند. معیار بحث ارتعاشات پوسته، داشتن جواب غیربدهی دستگاه معادلات (۲۳) است که با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس $[T_{ij}]$ حاصل می شود:

$$\det([T_{ij}]) = 0 \quad (24)$$

۴- اعتبارسنجی نتایج

در این بخش صحت سنجی نتایج روش گسترش موج با نتایج مراجع موجود به ازای شرایط مرزی مختلف بررسی شده و کارایی این روش مورد مطالعه قرار می گیرد. به منظور مقایسه کامل تر و از آنجا که در برخی موارد نتایج مراجع وجود ندارد، مدل اجزا محدود استوانه ای مورد بررسی در

1 Nastran
2 Modal

جدول ۳: بسامدهای طبیعی، Hz پوسته استوانه‌ای همسانگرد با شرایط مرزی ساده

Table 3. Natural frequencies (Hz) of isotropic cylindrical shell under simply supported boundary condition
(L=0.2032 m, h=0.00254 m, R=0.0508 m, E=2.068427×10¹¹ Pa, ν=0.3, ρ=7850 kg/m³)

مقاله حاضر	نسترن	مرجع [۲۴]	مرجع [۲۳]	m	n
۲۰۴۲/۸	۲۰۴۳/۱	۲۰۴۳/۶	۲۰۴۳/۸	۱	۲
۵۶۳۲/۶	۵۶۳۵/۱	۵۶۳۵/۲	۵۶۳۵/۴	۲	
۸۹۲۴/۶	۸۹۲۹/۸	۸۹۳۲/۱	۸۹۳۲/۵	۳	
۱۱۳۸۹/۹	۱۱۳۹۵/۰	۱۱۴۰۷/۲	۱۱۴۰۷/۵	۴	
۱۳۲۱۹/۲	۱۳۲۲۰/۰	۱۳۲۵۲/۸	۱۳۲۵۳/۲	۵	
۱۴۷۲۹/۷	۱۴۷۳۴/۰	۱۴۷۸۹/۸	۱۴۷۹۰/۰	۶	
۲۱۸۷/۵	۲۱۸۸/۲	۲۱۹۵/۰	۲۱۹۵/۱	۱	۳
۴۰۲۶/۳	۴۰۲۷/۲	۴۰۳۵/۳	۴۰۳۵/۵	۲	
۶۵۹۹/۴	۶۶۰۳/۴	۶۶۱۴/۳	۶۶۱۴/۶	۳	
۹۰۹۴/۵	۹۱۰۰/۱	۹۱۲۰/۷	۹۱۲۱/۰	۴	
۱۱۳۱۰/۷	۱۱۳۱۷/۰	۱۱۳۵۸/۷	۱۱۳۵۹/۰	۵	
۱۳۳۱۰/۹	۱۳۳۱۳/۰	۱۳۳۹۲/۱	۱۳۳۹۲/۳	۶	

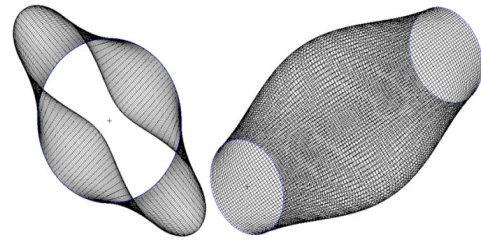


Fig. 4. Natural mode shape of cylindrical shell under clamped-clamped boundary condition

شکل ۴: شکل مود طبیعی پوسته استوانه‌ای تحت شرایط مرزی گیردار-گیردار

۴-۱- شرایط مرزی ساده

در اولین مقایسه بسامدهای طبیعی دو پوسته استوانه‌ای با شرایط مرزی ساده در هر دو انتها مورد بررسی قرار می‌گیرند. نتایج مقایسه در جدول ۲ و جدول ۳ ارائه شده است. لازم به توضیح است که نتایج مراجع [۲۱-۲۴] به ترتیب بر پایه ۱- نظریه پوسته نازک سندرز و به روش اجزا محدود، ۲- نتایج آزمایش، ۳- نظریه پوسته نازک سندرز و به روش ریتز و ۴- نظریه مرتبه سوم برشی و به روش ریلی-ریتز می‌باشند.

جدول ۲: بسامدهای طبیعی، Hz پوسته استوانه‌ای همسانگرد با شرایط مرزی ساده

Table 2. Natural frequencies (Hz) of isotropic cylindrical shell under simply supported boundary condition
(m=1, L=0.41 m, h=0.001 m, R=0.3015 m, E=2.1×10¹¹ Pa, ν=0.3, ρ=7850 kg/m³)

مقاله حاضر	نسترن	مرجع [۲۲] (آزمایش)	مرجع [۲۱]	n
۱۴۵۳/۲۳	۱۴۵۳/۲۰	-	-	۲
۹۶۷/۴۲	۹۶۷/۵۲	-	-	۳
۶۶۳/۱۹	۶۶۳/۳۰	-	-	۴
۴۷۶/۴۶	۴۷۶/۵۵	-	-	۵
۳۶۳/۷۷	۳۶۳/۸۲	-	-	۶
۳۰۱/۹۳	۳۰۱/۹۴	۳۱۸	۳۰۵/۲۲	۷
۲۷۸/۹۹	۲۷۸/۹۴	۲۷۸	۲۸۱/۳۱	۸
۲۸۶/۳۵	۲۸۶/۳۴	۲۹۰	۲۸۸/۲۴	۹
۳۱۵/۷۸	۳۱۵/۶۲	۳۳۴	۳۱۷/۴۹	۱۰
۳۶۰/۵۶	۳۶۰/۳۴	۳۶۲	۳۶۲/۲۰	۱۱
۴۱۶/۳۲	۴۱۶/۰۶	۴۱۸	۴۱۷/۹۴	۱۲
۴۸۰/۵۸	۴۸۰/۲۸	۴۷۸	۴۸۲/۲۲	۱۳
۵۵۲/۰۰	۵۵۱/۶۵	۵۵۰	۵۵۳/۶۷	۱۴
۶۲۹/۸۵	۶۲۹/۴۶	۶۲۶	۶۳۱/۵۸	۱۵

مقایسه دیگری نیز برای استوانه با شرایط مرزی ساده در دو انتها صورت گرفته که در آن پارامتر بسامد مطابق رابطه (۲۵) به عنوان مبنای مقایسه استفاده شده است. نتایج این مقایسه در جدول ۴ آمده است. نتایج نیم و شرما [۲۵] بر پایه نظریه پوسته نازک سندرز و نتایج شاه [۲۶] بر مبنای نظریه پوسته نازک لاو می‌باشد.

$$\Omega = \omega R \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E} \quad (25)$$

همانگونه که از مقایسه‌های ارائه شده در جدول ۲ تا جدول ۴ مشاهده می‌شود، همخوانی بسیار مناسبی بین نتایج به دست آمده از نظریه توسعه داده شده با نتایج مراجع وجود دارد؛ بنابراین استفاده از روش گسترش موج با دقت بسیار بالا بسامدهای طبیعی پوسته با شرایط مرزی ساده را تخمین می‌زند.

جدول ۴: پارامتر بسامد پوسته استوانه‌ای همسانگرد با شرایط مرزی ساده

Table 4. Natural frequency parameter of isotropic cylindrical shell under simply supported boundary condition

(m=1, L/R=6, h/R=0.002, E=2.1×10¹¹ Pa, k ν=0.3, ρ=7850 kg/m³)

مقاله حاضر	شاه [۲۶]	نعیم و شرما [۲۵]	n
۰/۱۴۰۶۴۳	۰/۱۴۰۶۴۳	۰/۱۴۰۶۴۱	۱
۰/۰۵۴۳۲۴	۰/۰۵۴۳۲۴	۰/۰۵۴۳۲۳	۲
۰/۰۲۷۰۷۴	۰/۰۲۷۰۷۴	۰/۰۲۷۰۷۴	۳
۰/۰۱۷۷۶۶	۰/۰۱۷۷۶۶	۰/۰۱۷۷۷۶	۴
۰/۰۱۷۰۷۲	۰/۰۱۷۰۷۲	۰/۰۱۷۰۸۸	۵

جدول ۶: بسامدهای طبیعی، Hz پوسته استوانه‌ای همسانگرد با شرایط

مرزی گیردار-گیردار

Table 6. Natural frequencies (Hz) of isotropic cylindrical shell under clamped-clamped boundary condition

(L=0.8 m, h=0.0011 m, R=0.153 m, E=6.473×1010 Pa, ν=0.33, ρ=2700 kg/m³)

n	سانتی‌اگو و ویسنیوسکی [۲۷]	نسترن	مقاله حاضر	درصد خطا با نسترن
m=1				
۱	۱۲۰۶/۸	۱۲۰۶/۹	۱۶۴۳/۷	۳۶/۲
۲	۶۳۲/۲	۶۳۱/۶	۷۵۹/۹	۲۰/۳
۳	۳۶۸/۱	۳۶۹/۳	۴۰۸/۶	۱۰/۶
۴	۲۷۲/۷	۲۸۰/۰	۲۹۳/۳	۴/۸
۵	۲۹۱/۰	۳۰۸/۵	۳۱۴/۲	۱/۹
۶	۳۷۸/۵	۴۰۶/۸	۴۱۰/۸	۱/۰
۷	۵۰۴/۱	۵۴۳/۸	۵۴۷/۶	۰/۷
۸	۶۵۶/۲	۷۰۸/۵	۷۱۲/۳	۰/۵
۹	۸۳۱/۱	۸۹۷/۵	۹۰۱/۳	۰/۴
۱۰	۱۰۲۷/۷	۱۱۰۹/۵	۱۱۱۳/۴	۰/۳
m=3				
۱	۳۴۲۳/۰	۳۴۲۰/۶	۳۸۰۲/۰	۱۱/۲
۲	۲۱۳۶/۲	۲۱۳۴/۲	۲۴۶۴/۲	۱۵/۵
۳	۱۳۹۷/۹	۱۳۹۷/۴	۱۵۹۶/۰	۱۴/۲
۴	۹۷۶/۶	۹۷۹/۰	۱۰۸۶/۷	۱۱/۰
۵	۷۴۴/۵	۷۵۳/۰	۸۱۰/۵	۷/۶
۶	۶۴۸/۷	۶۶۸/۱	۶۹۹/۷	۴/۷
۷	۶۶۱/۴	۶۹۵/۰	۷۱۴/۵	۲/۸
۸	۷۵۳/۲	۸۰۲/۰	۸۱۶/۷	۱/۸
۹	۸۹۷/۸	۹۶۱/۸	۹۷۵/۱	۱/۴
۱۰	۱۰۷۸/۹	۱۱۵۸/۷	۱۱۷۲/۰	۱/۱
m=5				
۱	-	۴۴۴۳/۴	۴۵۶۸/۰	۲/۸
۲	۳۳۸۴/۷	۳۳۷۹/۱	۳۵۹۸/۰	۶/۵
۳	۲۴۹۰/۷	۲۴۸۸/۹	۲۷۰۴/۵	۸/۷
۴	۱۸۶۱/۷	۱۸۶۳/۸	۲۰۲۹/۸	۸/۹
۵	۱۴۴۲/۹	۱۴۴۹/۸	۱۵۶۴/۴	۷/۹
۶	۱۱۸۱/۷	۱۱۹۶/۲	۱۲۷۲/۲	۶/۴
۷	۱۰۴۸/۳	۱۰۷۴/۳	۱۱۲۵/۴	۴/۸
۸	۱۰۲۳/۸	۱۰۶۴/۶	۱۱۰۱/۷	۳/۵
۹	۱۰۸۸/۱	۱۱۴۵/۲	۱۱۷۵/۸	۲/۷
۱۰	۱۲۱۹/۲	۱۲۹۲/۹	۱۳۲۱/۳	۲/۲

در ادامه مقایسه دیگری برای استوانه با این شرایط مرزی انجام شده که نتیجه آن در جدول ۷ ارائه شده است. در این بررسی از نتایج آزمون تجربی انجام شده بر روی پوسته استوانه‌ای توسط آرنولد و واربروتون [۲۸] نیز استفاده شده است.

۴-۲- شرایط مرزی گیردار-گیردار

با انتخاب پارامتر مودال محوری مناسب، مطالعه بسامدهای طبیعی چند استوانه با مشخصات هندسی و مواد متفاوت برای مقایسه در این شرایط مرزی صورت گرفته است. مقایسه نتایج تحقیق حاضر با مراجع در ادامه آمده است.

جدول ۵: بسامدهای طبیعی، Hz پوسته استوانه‌ای همسانگرد با شرایط مرزی گیردار-گیردار

Table 5. Natural frequencies (Hz) of isotropic cylindrical shell under clamped-clamped boundary condition

(L/R=20, h/R=0.01, E=2.1×1011Pa, ν=0.3, ρ=7850kg/m³)

شکل مودال (m,n)	ژانگ (FEM) [۱۴]	ژوبین [۱۶]	نسترن	مقاله حاضر	درصد خطا با نسترن
۱,۲	۱۲/۲۵	۱۲/۱۳	۱۲/۰۰	۱۲/۱۲	۱/۰
۱,۳	۱۹/۶۴	۱۹/۶۱	۱۹/۵۹	۱۹/۶۰	۰/۱
۲,۳	۲۳/۱۸	۲۳/۲۸	۲۳/۱۴	۲۳/۲۷	۰/۶
۲,۲	۲۷/۶۹	۲۸/۰۶	۲۷/۱۷	۲۸/۰۶	۳/۳
۱,۱	-	۳۰/۰۹	۲۸/۲۸	۳۰/۱۰	۶/۴
۳,۳	۳۱/۶۰	۳۱/۹۷	۳۱/۵۵	۳۱/۹۶	۱/۳
۱,۴	۳۶/۷۰	۳۶/۴۸	۳۶/۴۸	۳۶/۴۶	-۰/۱
۲,۴	۳۷/۵۵	۳۷/۳۸	۳۷/۳۴	۳۷/۳۶	۰/۱
۳,۴	۳۹/۸۷	۳۹/۷۷	۳۹/۶۸	۳۹/۷۵	۰/۲

لازم به توضیح است که نتایج تحقیقات ژوبین [۱۶] بر پایه نظریه پوسته نازک فلوگه، و نتایج ژانگ [۱۴]، سانتیاگو و ویسنیوسکی [۲۷] براساس روش اجزا محدود می‌باشند. با توجه به نتایج مشاهده می‌شود برای استوانه مورد بررسی در جدول ۵ همخوانی مناسبی بین نتایج حاضر با نتایج مراجع وجود دارد. همچنین از بررسی جدول ۶ مشاهده می‌شود به ازای تمامی اعداد طول موج محوری، با افزایش عدد طول موج محیطی اختلاف بین نتایج به دست آمده از تحقیق حاضر با نتایج مرجع [۲۷] و نتایج نسترن کمتر می‌شود، به گونه‌ای که به ازای عدد طول موج محوری برابر با ۱ و اعداد طول موج محیطی بالاتر از ۳، تفاوت ناچیزی بین نتایج به دست آمده با نتایج مرجع و نتایج نسترن وجود دارد. همچنین به ازای اعداد طول موج محوری برابر با ۳ و ۵ و اعداد طول موج محیطی بالاتر از ۵ تفاوت ناچیزی بین نتایج به دست آمده با نتایج مرجع و نتایج نسترن وجود دارد. با بررسی جدول ۶ که استوانه مورد بررسی آن دارای طول نسبتاً کوتاهی می‌باشد، می‌توان چنین بیان نمود که استفاده از روش گسترش موج در محدوده بسامدهای پایین دارای دقت مناسب می‌باشد. همچنین با بررسی مشخصات هندسی استوانه‌های مورد مطالعه در جدول ۵ و جدول ۶، مشخص می‌شود که برای پوسته‌های با طول کوتاه‌تر به دلیل صرف نظر کردن از تداخل (کوپلینگ) بین مودهای محوری و محیطی در روش گسترش موج، تفاوت بین نتایج حاضر با نتایج نسترن بیشتر است. اثر این تداخل برای پوسته‌های نازک طولانی و به ازای مودهای بالاتر کمتر می‌شود.

جدول ۸: پارامتر بسامد Ω پوسته استوانه‌ای همسانگرد با شرایط مرزی گیردار-ساده

Table 8. Natural frequency parameter of isotropic cylindrical shell under clamped-simply supported boundary condition ($m=1$, $L/R=20$, $h/R=0.01$, $E=2.1 \times 10^{11}$ Pa, $\nu=0.3$, $\rho=7850$ kg/m³)

n	لوی و همکاران [۲۹]	ژانگ [۱۴]	ژوبین [۱۶]	مقاله حاضر
۱	۰/۰۲۳۹۷۴	۰/۰۲۴۷۲۱	۰/۰۲۴۷۲۲	۰/۰۲۴۷۲۱
۲	۰/۰۱۱۲۲۵	۰/۰۱۱۲۸۱	۰/۰۱۱۲۸۱	۰/۰۱۱۲۷۵
۳	۰/۰۲۲۳۱۰	۰/۰۲۲۳۳۵	۰/۰۲۲۳۳۵	۰/۰۲۲۳۲۸
۴	۰/۰۴۲۱۳۹	۰/۰۴۲۱۶۶	۰/۰۴۲۱۶۶	۰/۰۴۲۱۵۱
۵	۰/۰۶۸۰۲۴	۰/۰۶۸۰۵۴	۰/۰۶۸۰۵۵	۰/۰۶۸۰۲۲
۶	۰/۰۹۹۷۳۸	۰/۰۹۹۷۷۱	۰/۰۹۹۷۷۲	۰/۰۹۹۷۰۴
۷	۰/۱۳۷۲۴۴	۰/۱۳۷۲۷۹	۰/۱۳۷۲۸۰	۰/۱۳۷۱۵۵
۸	۰/۱۸۰۵۳۱	۰/۱۸۰۵۶۹	۰/۱۸۰۵۶۹	۰/۱۸۰۳۵۶
۹	۰/۲۲۹۵۹۶	۰/۲۲۹۶۳۶	۰/۲۲۹۶۳۶	۰/۲۲۹۲۹۳
۱۰	۰/۲۸۴۴۳۷	۰/۲۸۴۴۷۸	۰/۲۸۴۴۷۸	۰/۲۸۳۹۵۵

۴-۴- شرایط مرزی گیردار-آزاد

در این حالت شرایط مرزی در یک انتهای استوانه گیردار و در انتهای دیگر از نوع آزاد می‌باشد. با انتخاب پارامتر مودال محوری مناسب در این شرایط و اعمال آن در نظریه توسعه داده شده، بسامدهای طبیعی پوسته استوانه‌ای تعیین می‌گردند. در جدول ۹ مقایسه انجام شده بین نتایج تحقیق حاضر با نتایج مراجع، آورده شده است.

جدول ۹: بسامدهای طبیعی، Hz پوسته استوانه‌ای همسانگرد با شرایط مرزی گیردار-آزاد

Table 9. Natural frequencies (Hz) of isotropic cylindrical shell under clamped-free boundary condition ($m=1$, $L=0.502$ m, $h=0.00163$ m, $R=0.0635$ m, $E=2.1 \times 10^{11}$ Pa, $\nu=0.28$, $\rho=7800$ kg/m³)

n	گیل (آزمایش) [۳۰]	نسترن	مقاله حاضر	درصد خطا با آزمایش	درصد خطا با نسترن
۲	۲۹۳/۰	۳۱۵/۲	۲۹۴/۳	۰/۴۴	-۶/۶۳
۳	۷۶۰/۰	۷۶۸/۲	۷۶۶/۰	۰/۷۹	-۰/۲۹
۴	۱۴۵۱/۰	۱۴۶۲/۵	۱۴۶۱/۷	۰/۷۴	-۰/۰۵
۵	۲۳۳۶/۰	۲۳۵۹/۸	۲۳۵۹/۰	۰/۹۸	-۰/۰۳
۶	۳۴۲۹/۰	۳۴۵۵/۹	۳۴۵۴/۵	۰/۷۴	-۰/۰۴

با بررسی جدول ۹ مشاهده می‌گردد که همخوانی مناسبی بین نتایج تحقیق حاضر با نتایج مراجع وجود دارد.

با بررسی نتایج ارائه شده به ازای شرایط مرزی مختلف (بخش‌های ۱-۴ تا ۲-۴)، مشخص می‌شود که استفاده از میدان تغییر مکان به صورت گسترش موج در مسأله ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای، به صورت یک روش مؤثر و قابل اطمینان عمل نموده و در محدوده مناسب جهت پایش وضعیت ارتعاشی سازه (بسامدهای متناظر با تعداد طول موج محیطی بالاتر و تعداد

جدول ۷: بسامدهای طبیعی، Hz پوسته استوانه‌ای همسانگرد با شرایط مرزی گیردار-گیردار

Table 7. Natural frequencies (Hz) of isotropic cylindrical shell under clamped-clamped boundary condition ($L=0.3952$ m, $h=0.002565$ m, $R=0.04887$ m, $E=2.041 \times 10^{11}$ Pa, $\nu=0.29$, $\rho=7840$ kg/m³)

n	آرنولد و واربورتون (آزمایش) [۲۸]	نسترن	مقاله حاضر	درصد خطا با آزمایش	درصد خطا با نسترن
m=۱					
۲	۱۲۴۰	۱۲۸۹/۲	۱۳۸۱/۳	۱۱/۴	۷/۱
۳	۲۱۵۰	۲۱۰۰/۸	۲۱۳۵/۶	-۰/۷	۱/۶
۴	۳۹۷۰	۳۸۵۹/۳	۳۸۸۸/۶	-۲/۱	۰/۸
۵	۶۳۲۰	۶۱۷۴/۶	۶۱۹۷/۸	-۱/۹	۰/۴
۶	۹۲۳۰	۸۹۹۸/۵	۹۰۰۴/۳	-۲/۴	۰/۱
m=۲					
۲	۲۴۴۰	۲۶۱۵/۱	۲۹۳۹/۶	۲۰/۵	۱۲/۴
۳	۲۵۶۰	۲۵۴۹/۵	۲۶۴۷/۲	۳/۴	۳/۸
۴	۴۱۶۰	۴۰۵۰/۴	۴۱۱۱/۶	-۱/۲	۱/۵
۵	۶۴۷۵	۶۳۰۹/۸	۶۳۶۴/۱	-۱/۷	۰/۹
۶	۹۳۸۰	۹۱۱۶/۵	۹۱۵۶/۷	-۲/۴	۰/۴
m=۳					
۲	-	۴۲۸۲/۴	۴۸۱۰/۰	-	۱۲/۳
۳	۳۳۸۰	۳۳۹۱/۹	۳۵۹۰/۰	۶/۲	۵/۸
۴	۴۵۴۰	۴۴۳۶/۹	۴۵۴۲/۱	-۰/۰	۲/۴
۵	۶۷۲۰	۶۵۵۹/۸	۶۶۴۷/۷	-۱/۱	۱/۳
۶	۹۵۴۰	۹۲۲۳/۴	۹۳۹۸/۷	-۱/۵	۰/۸
m=۴					
۲	-	۶۰۴۰/۱	۶۶۷۲/۲	-	۱۰/۵
۳	۴۴۸۰	۴۵۰۶/۴	۴۸۰۵/۵	۷/۳	۶/۶
۴	۵۱۳۰	۵۰۴۰/۵	۵۲۰۰/۵	۱/۴	۳/۲
۵	۷۱۰۰	۶۹۴۳/۲	۷۰۶۹/۹	-۰/۴	۱/۸
۶	۹۸۹۰	۹۶۲۷/۱	۹۷۴۱/۰	-۱/۵	۱/۲

با بررسی و مقایسه نتایج ارائه شده در جدول ۷ می‌توان اظهار نمود که نتایج به دست آمده از پژوهش حاضر برای استوانه با مشخصات ابعادی داده شده، به ازای تمامی اعداد طول موج محوری و تعداد موج محیطی بالاتر از ۳ دارای همخوانی بیشتری با نتایج آزمون تجربی [۲۸] و نتایج نسترن می‌باشد.

۴-۳- شرایط مرزی گیردار-ساده

در این بخش از مقاله شرایط مرزی در یک انتهای استوانه گیردار و در انتهای دیگر از نوع ساده می‌باشد. با انتخاب پارامتر مودال محوری مناسب در این شرایط و اعمال آن در نظریه توسعه داده شده، پارامتر بسامد پوسته استوانه‌ای در حالت شرایط مرزی گیردار-ساده، تعیین می‌گردد. در جدول ۸ مقایسه انجام شده بین نتایج تحقیق حاضر با نتایج مراجع، آورده شده است. با بررسی جدول ۸ مشاهده می‌گردد که همخوانی مناسبی بین نتایج تحقیق حاضر با نتایج مراجع وجود دارد.

جدول ۱۱: بسامدهای طبیعی، Hz پوسته استوانه‌ای همسانگرد با شرایط مرزی ساده و بستر الاستیک پسترناک

Table 11. Natural frequencies (Hz) of isotropic cylindrical shell under simply supported boundary condition and Pasternak elastic foundation
($m=1$, $L/R=20$, $h/R=0.002$, $E=2.07788 \times 10^{11}$ Pa, $\nu=0.317756$, $\rho=8166$ kg/m³)

شاه [۲۶]	مقاله حاضر	n
۱۹۳/۹۰	۱۹۳/۹۰	۱
۴۱۴/۷۱	۴۱۴/۷۱	۲
۶۳۴/۷۶	۶۳۴/۷۶	۳
۸۵۳/۱۹	۸۵۳/۲۰	۴
۱۰۷۰/۷۱	۱۰۷۰/۷۰	۵
۱۲۸۷/۷۰	۱۲۸۷/۷۰	۶
۱۵۰۴/۳۸	۱۵۰۴/۴۰	۷
۱۷۲۰/۸۷	۱۷۲۰/۹۰	۸
۱۹۳۷/۲۳	۱۹۳۷/۳۰	۹
۲۱۵۲/۵۲	۲۱۵۲/۶۰	۱۰

الاستیک وجود دارد. با توجه به بررسی‌های صورت گرفته و اطمینان از صحت نظریه توسعه داده شده و همچنین روش حل گسترش موج، در ادامه اثرات بستر الاستیک، نیروهای مکانیکی و شرایط مرزی مختلف بر رفتار ارتعاشی پوسته استوانه‌ای هدفمند مطالعه می‌شوند.

۵- بحث و بررسی نتایج عددی

با توجه به صحت‌سنجی انجام شده در بخش قبل، ابتدا اثر پارامترهای بستر الاستیک بر رفتار ارتعاشی پوسته استوانه‌ای هدفمند با شرایط مرزی ساده در دو انتها مطالعه می‌شود. در ادامه اثر شرایط مرزی مختلف برای یک استوانه هدفمند بررسی می‌شود. سپس اثر بستر الاستیک، نیروی محوری و فشار جانبی بر ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای هدفمند تحت شرایط مرزی مختلف بررسی خواهد شد.

سطح داخلی پوسته استوانه‌ای هدفمند مورد نظر از آلومینا و سطح خارجی آن از آلومینیوم تشکیل یافته است. خواص مواد شامل مدول الاستیسیته و چگالی برای آلومینا برابر $E_i = 380$ GPa, $\rho_i = 3800$ kg/m³ و برای آلومینیوم برابر $E_o = 70$ GPa, $\rho_o = 2700$ kg/m³ می‌باشند. ضریب پواسون هر دو ماده برابر $\nu_i = \nu_o = 0.3$ در نظر گرفته شده است. نسبت‌های طول و ضخامت به شعاع استوانه به ترتیب برابر $L/R=20$ و $h/R=0.002$ می‌باشند. لازم به توضیح است که خصوصیات مواد و مشخصات هندسی پوسته معرفی شده در تمامی نتایج ارائه شده در ادامه مقاله ثابت می‌باشند.

به منظور بررسی مناسب‌تر نتایج، پارامترهای بدون بعد بستر الاستیک به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$K1 = \frac{k_1 R^2 (1 - \nu_m^2)}{E_m h}, Ks = \frac{k_s (1 - \nu_m^2)}{E_m h} \quad (26)$$

که در آنها از خواص فلز (آلومینیوم) جهت بدون بعد نمودن پارامترها استفاده

طول موج محوری پایین‌تر) به ازای شرایط مرزی مختلف نتایج قابل قبولی ارائه می‌دهد. البته در حالت شرایط مرزی ساده در دو انتها نتایج این روش در تمامی محدوده‌های بسامدی کاملاً دقیق می‌باشد. همچنین محدودیت این روش را می‌توان در عدم تخمین دقیق بسامدهای طبیعی مربوط به مودهای پایین در پوسته‌های استوانه‌ای با طول کوتاه و به ازای شرایط مرزی گیردار دانست.

۴-۵- ارتعاش آزاد استوانه هدفمند

به منظور اعتبارسنجی نتایج نظریه توسعه داده شده برای بررسی ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای هدفمند، استوانه‌ای با مشخصات ذکر شده در جدول ۱۰ که سطح درونی و بیرونی آن به ترتیب از جنس نیکل و فولاد تشکیل شده است، در نظر گرفته می‌شود. جدول ۱۰ تغییرات بسامد طبیعی پوسته را با عدد موج محیطی نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که همخوانی مناسبی بین نتایج حاضر و نتایج لوی و همکاران [۳۱] که از نظریه پوسته لاو استفاده نموده‌اند، وجود دارد.

جدول ۱۰: بسامدهای طبیعی، Hz پوسته استوانه‌ای هدفمند با شرایط مرزی ساده

Table 10. Natural frequencies (Hz) of functionally graded cylindrical shell under simply supported boundary condition
($E_o=2.07788 \times 10^{11}$ Pa, $\nu_o=0.317756$, $\rho_o=8166$ kg/m³
 $E_i=2.05098 \times 10^{11}$ Pa, $\nu_i=0.31$, $\rho_i=8900$ kg/m³
 $m=1$, $h/R=0.002$, $L/R=20$)

n	N=5		N=0.5	
	مقاله حاضر	لوی و همکاران [31]	مقاله حاضر	لوی و همکاران [31]
۱	۱۲/۹۹۷۷	۱۲/۹۹۸	۱۳/۳۲۱۱	۱۳/۳۲۱
۲	۴/۴۰۶۲	۴/۴۰۶۸	۴/۵۱۶۲	۴/۵۱۶۸
۳	۴/۰۸۸۴	۴/۰۸۹۱	۴/۱۹۰۲	۴/۱۹۱۱
۴	۶/۹۲۴۵	۶/۹۲۵۱	۷/۰۹۶۶	۷/۰۹۷۲
۵	۱۱/۰۶۰۳	۱۱/۰۶۱	۱۱/۳۳۴۹	۱۱/۳۳۶
۶	۱۶/۱۹۱۰	۱۶/۱۹۲	۱۶/۵۹۲۹	۱۶/۵۹۴
۷	۲۲/۲۷۲۰	۲۲/۲۷۳	۲۲/۸۲۴۷	۲۲/۸۲۶
۸	۲۹/۲۹۳۹	۲۹/۲۹۶	۳۰/۰۲۰۸	۳۰/۰۲۳
۹	۳۷/۲۵۳۹	۳۷/۲۵۷	۳۸/۱۷۸۴	۳۸/۱۸۱
۱۰	۴۶/۱۵۱۳	۴۶/۱۵۵	۴۷/۲۹۶۵	۴۷/۳۰۱

۴-۶- ارتعاش آزاد استوانه بر روی بستر الاستیک

جهت لحاظ نمودن بستر الاستیک، پوسته استوانه‌ای همسانگرد بر روی بستر الاستیک پسترناک با پارامتر وینکلر برابر 2×10^7 N/m³ و پارامتر برشی برابر 3×10^7 N/m مورد بررسی قرار گرفته و بسامدهای طبیعی سیستم حاصل شده‌اند. نتیجه به دست آمده در جدول ۱۱ ارائه و با نتایج مرجع مقایسه شده است.

همان‌گونه که مشاهده می‌شود مطابقت کاملاً مناسبی بین نتایج حاصل از نظریه توسعه داده شده و نتایج مرجع در حالت تداخل پوسته با بستر

($SS-SS$)، گیردار-گیردار ($C-C$)، گیردار-ساده ($C-SS$) و گیردار-آزاد ($C-F$) نشان می‌دهند. نتایج حاصل شده به ازای عدد موج محوری $m=1$ به دست آمده‌اند. از بررسی نمودارهای ارائه شده مشخص می‌شود که با افزایش عدد کسر حجمی، بسامد طبیعی پوسته نیز به ازای تمامی اعداد طول موج محیطی افزایش می‌یابد. دلیل این افزایش مربوط به زیادتیر شدن درصد آلومینا در ترکیب ماده هدفمند می‌شود. از آنجا که میزان سفتی این ماده از آلومینیوم بسیار بیشتر است، این موضوع باعث افزایش بسامد طبیعی پوسته می‌شود. البته این میزان افزایش به ازای مقادیر حداقل بسامد (بسامد متناظر

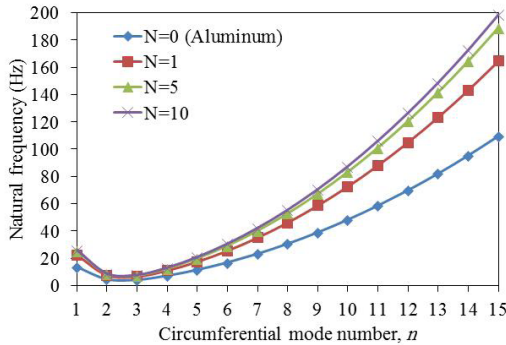


Fig. 7. Natural frequency variations of functionally graded cylindrical shell under simply supported-simply supported boundary condition
شکل ۷: تغییرات بسامد طبیعی پوسته استوانه‌ای هدفمند با شرایط مرزی ساده-ساده

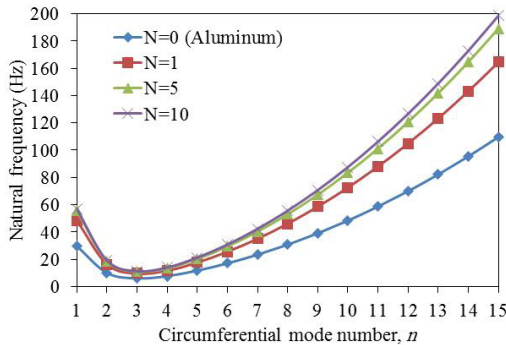


Fig. 8. Natural frequency variations of functionally graded cylindrical shell under clamped-clamped boundary condition
شکل ۸: تغییرات بسامد طبیعی پوسته استوانه‌ای هدفمند با شرایط مرزی گیردار-گیردار

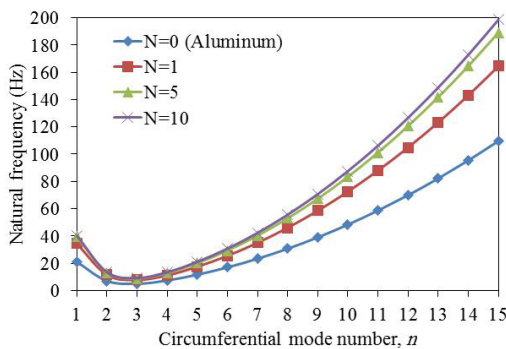


Fig. 9. Natural frequency variations of functionally graded cylindrical shell under clamped-simply supported boundary condition
شکل ۹: تغییرات بسامد طبیعی پوسته استوانه‌ای هدفمند با شرایط مرزی گیردار-ساده

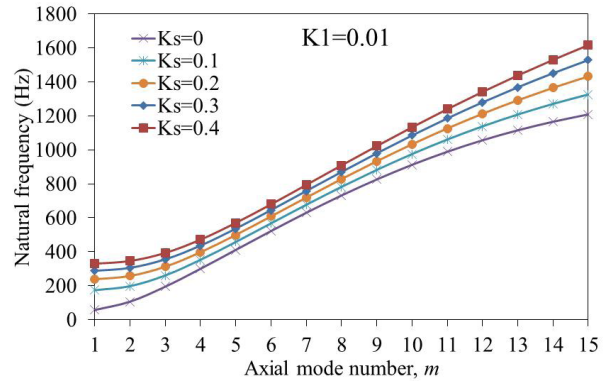


Fig. 5. Natural frequency variations of functionally graded cylindrical shell with axial mode number and shear parameter of the foundation for simply supported boundary condition

شکل ۵: تغییرات بسامد طبیعی پوسته استوانه‌ای هدفمند با عدد طول موج محوری و پارامتر برشی بستر برای شرایط مرزی ساده

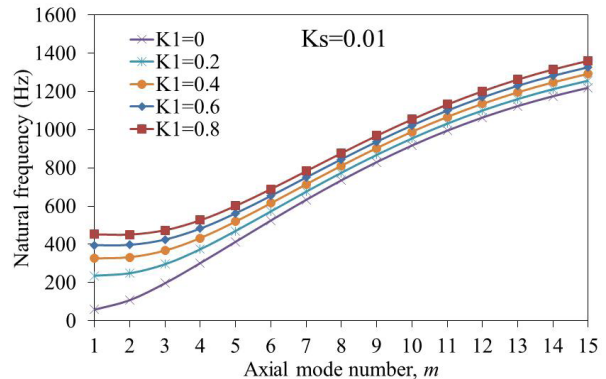


Fig. 6. Natural frequency variations of functionally graded cylindrical shell with axial mode number and Winkler parameter of the foundation for simply supported boundary condition

شکل ۶: تغییرات بسامد طبیعی پوسته استوانه‌ای هدفمند با عدد طول موج محوری و پارامتر وینکلر بستر برای شرایط مرزی ساده

شده است. شکل ۵ و شکل ۶ به ترتیب اثرات پارامترهای برشی و وینکلر بستر الاستیک پسترناک را بر بسامد طبیعی پوسته استوانه‌ای هدفمند بر حسب عدد طول موج محوری در حالت شرایط مرزی ساده در دو انتهای پوسته، نشان می‌دهد. عدد کسر حجمی پوسته مورد بررسی برابر ۵ و تعداد موج محیطی برابر ۱ می‌باشد.

همانگونه که مشاهده می‌شود بسامدهای طبیعی پوسته استوانه‌ای هدفمند به مقادیر پارامترهای سفتی بستر الاستیک وابسته هستند؛ به طوری که با افزایش مقادیر پارامترهای بستر، بسامد طبیعی پوسته نیز افزایش می‌یابد. با ثابت ماندن پارامتر وینکلر بستر ($K_1=0.01$)، منحنی‌های بسامد ابتدا صعودی بوده و در نهایت نسبت به هم واگرا می‌شوند (شکل ۵). در حالی که با تغییر این پارامتر و ثابت ماندن مقدار پارامتر برشی بستر پسترناک ($K_s=0.01$)، منحنی‌های بسامد ابتدا صعودی بوده، سپس شیب آنها کاهش یافته و در انتها با هم موازی می‌شوند (شکل ۶).

در ادامه اثرات ترکیب ماده هدفمند بر ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای بدون تداخل با بستر الاستیک به ازای شرایط مرزی مختلف بررسی می‌شوند. شکل ۷ تا شکل ۱۰ به ترتیب تغییرات بسامد طبیعی پوسته با عدد موج محیطی (n) و عدد کسر حجمی را به ازای شرایط مرزی ساده-ساده

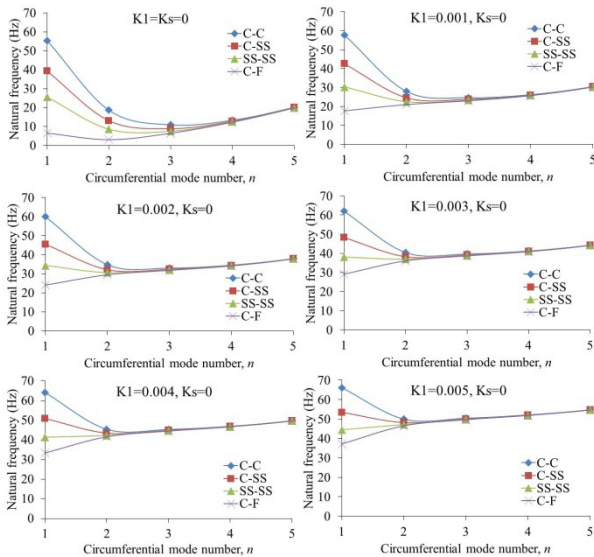


Fig. 12. Natural frequency variations of functionally graded cylindrical shell under Winkler elastic foundation and various boundary conditions

شکل ۱۲: تغییرات بسامد طبیعی پوسته استوانه‌ای هدفمند در تداخل با بستر الاستیک وینکلر به ازای شرایط مرزی مختلف

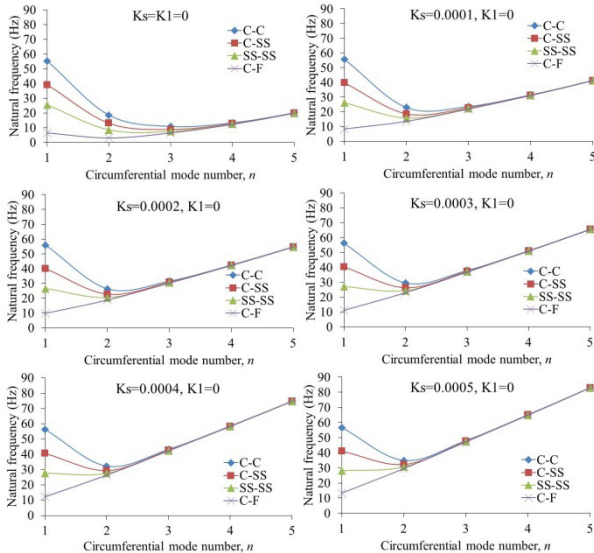


Fig. 13. Natural frequency variations of functionally graded cylindrical shell under shear parameter elastic foundation and various boundary conditions

شکل ۱۳: تغییرات بسامد طبیعی پوسته استوانه‌ای هدفمند در تداخل با پارامتر برشی بستر الاستیک به ازای شرایط مرزی مختلف

شرایط مرزی مختلف محدود به تعداد موج محیطی برابر با ۱ می‌شود. به عبارت دیگر با افزایش تعداد موج محیطی تغییری در بسامد طبیعی پوسته به ازای شرایط مرزی مختلف به وجود نمی‌آید؛ بنابراین با افزودن بستر الاستیکی با خواص مناسب به پوسته، می‌توان اثر شرایط مرزی مختلف در بررسی ارتعاشات آزاد را کنترل نمود. همچنین با توجه به مقادیر پارامترهای بستر در نمودارهای ارائه شده، اثر بیشتر پارامتر برشی نسبت به پارامتر وینکلر بر بسامدهای طبیعی پوسته تحت شرایط مرزی مختلف، نتیجه‌گیری می‌شود. شکل ۱۴ و شکل ۱۵ نمودارهای بسامدهای طبیعی پوسته در برابر پارامتر وینکلر بستر الاستیک را به ازای شرایط مرزی مختلف و دو مقدار

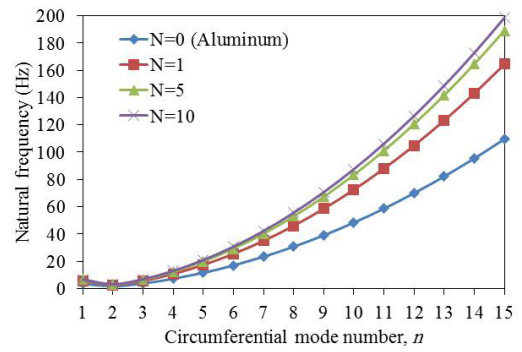


Fig. 10. Natural frequency variations of functionally graded cylindrical shell under clamped-free boundary condition

شکل ۱۰: تغییرات بسامد طبیعی پوسته استوانه‌ای هدفمند با شرایط مرزی گیردار-آزاد

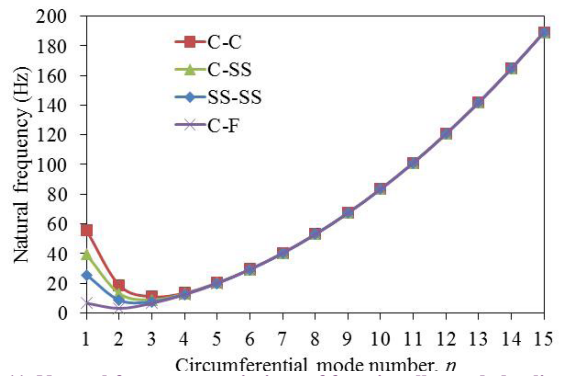


Fig. 11. Natural frequency variations of functionally graded cylindrical shell under various boundary conditions

شکل ۱۱: تغییرات بسامد طبیعی پوسته استوانه‌ای هدفمند به ازای شرایط مرزی مختلف

با عدد طول موج محیطی برابر ۳) کمتر است. همچنین با افزایش عدد طول موج محیطی، تغییرات بسامد طبیعی با عدد کسر حجمی بیشتر می‌شود. شکل ۱۱ تغییرات بسامد طبیعی پوسته استوانه‌ای هدفمند با عدد موج محیطی تحت شرایط مرزی مختلف و عدد کسر حجمی ۵ ($N=5$) را نشان می‌دهد. این بررسی به ازای عدد موج محوری برابر ۱ ($m=1$) صورت گرفته است. همان‌گونه که مشاهده می‌گردد اثر شرایط مرزی به ازای اعداد موج محیطی کمتر از ۴ قابل مشاهده بوده و در این محدوده بسامد طبیعی پوسته در حالت شرایط مرزی گیردار-گیردار نسبت به بقیه شرایط مرزی بالاتر قرار می‌گیرد و بعد از آن به ترتیب بسامدهای طبیعی به ازای شرایط مرزی گیردار-ساده، ساده-ساده و گیردار-آزاد قرار می‌گیرند.

در ادامه اثرات شرایط مرزی مختلف بر ارتعاشات آزاد پوسته با لحاظ نمودن بستر الاستیک بررسی می‌شوند. شکل ۱۲ و شکل ۱۳ تغییرات بسامد طبیعی پوسته استوانه‌ای هدفمند با عدد موج محیطی به ازای شرایط مرزی مختلف را به ترتیب برای مقادیر مختلف پارامترهای وینکلر و برشی بستر الاستیک نشان می‌دهند. نتایج ارائه شده به ازای عدد موج محوری برابر ۱ ($m=1$) و عدد کسر حجمی ۵ ($N=5$) محاسبه شده‌اند. با بررسی دو شکل ارائه شده، مشاهده می‌شود که با در نظر گرفتن تداخل پوسته با بستر الاستیک (نوع وینکلر یا نوع برشی)، با افزایش مقدار پارامترهای بستر اثر

بررسی می‌باشد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، نیروی محوری کششی با افزایش سختی سازه باعث افزایش بسامد طبیعی پوسته به خصوص به ازای مقادیر حداقل بسامد می‌شود.

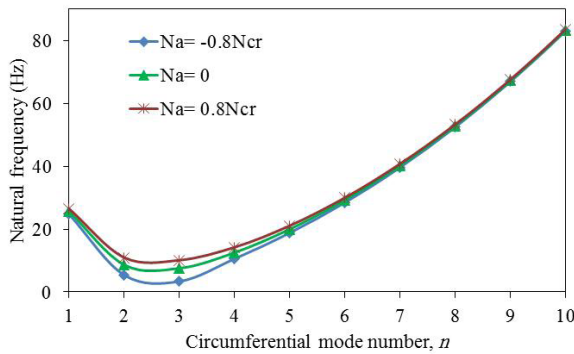


Fig. 16. Natural frequency variations of functionally graded cylindrical shell with circumferential mode number and axial force for simply supported boundary condition

شکل ۱۶: تغییرات بسامد طبیعی پوسته استوانه‌ای هدفمند با عدد موج محیطی و نیروی محوری برای شرایط مرزی ساده

تغییرات بسامد طبیعی با عدد موج محیطی پوسته استوانه‌ای هدفمند بدون تداخل با بستر الاستیک به ازای فشارهای جانبی مختلف برای شرایط مرزی ساده در شکل ۱۷ و به ازای شرایط مرزی مختلف و فشار جانبی مشخص ($q=0.05$ MPa) در شکل ۱۸ نشان داده شده است. در این بررسی نیز مشابه قبل، عدد کسر حجمی برابر ۵ و تعداد موج محوری برابر ۱ می‌باشند.

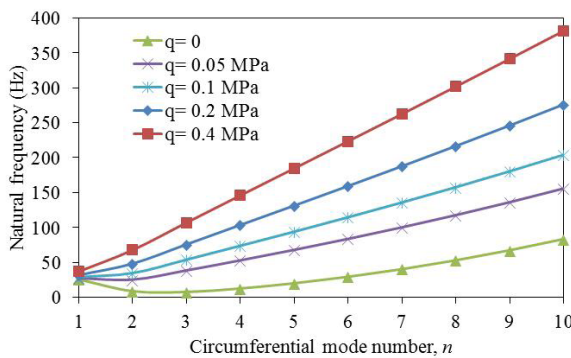


Fig. 17. Natural frequency variations of functionally graded cylindrical shell with circumferential mode number and lateral pressure for simply supported boundary condition

شکل ۱۷: تغییرات بسامد طبیعی پوسته استوانه‌ای هدفمند با عدد موج محیطی و فشار جانبی برای شرایط مرزی ساده

همانطور که در شکل ۱۷ ملاحظه می‌شود با افزایش فشار جانبی بسامدهای طبیعی پوسته نیز افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش عدد موج محیطی، میزان تغییرات بسامد طبیعی پوسته با فشار جانبی نیز بیشتر می‌شود. با توجه به نتایج ارائه شده در شکل ۱۸ اثر شرایط مرزی مختلف برای پوسته استوانه‌ای تحت فشار جانبی تنها به ازای عدد موج محیطی برابر ۱ قابل مشاهده است.

متفاوت پارامتر برشی بستر نشان می‌دهند. این نتایج به ازای تعداد موج محوری و محیطی برابر ۱ و عدد کسر حجمی ۵ به دست آمده‌اند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود با افزایش پارامتر وینکلر، ابتدا بسامدهای طبیعی پوسته به میزان قابل توجهی افزایش یافته و سپس با افزایش بیشتر پارامتر، تغییر چندانی در بسامد طبیعی پوسته حاصل نمی‌شود. همچنین به ازای هر مقدار پارامتر برشی بستر، مقدار مشخصی از پارامتر وینکلر وجود دارد که از آن بیشتر اثر شرایط مرزی بر بسامدهای طبیعی پوسته برعکس می‌شود. به عبارت دیگر، بسامدهای طبیعی پوسته به ازای کمتر از این مقدار مشخص پارامتر وینکلر، به ترتیب به ازای شرایط مرزی گیردار-آزاد، ساده-ساده، گیردار-ساده و گیردار-گیردار کاهش یافته و در حالت بیشتر از این مقدار، افزایش می‌یابند. همچنین با افزایش پارامتر برشی، مکان این برعکس شدن به ازای مقادیر کمتر پارامتر وینکلر منتقل می‌شود (شکل ۱۵).

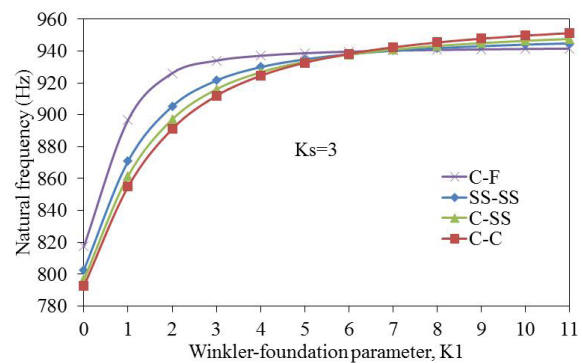


Fig. 14. Natural frequency variations of functionally graded cylindrical shell under Winkler elastic foundation and various boundary conditions

شکل ۱۴: تغییرات بسامد طبیعی پوسته استوانه‌ای هدفمند با پارامتر بستر الاستیک وینکلر به ازای شرایط مرزی مختلف

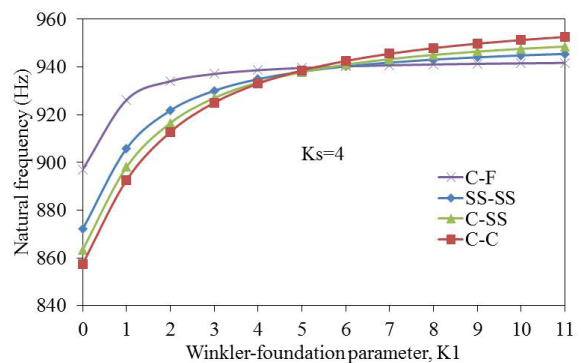


Fig. 15. Natural frequency variations of functionally graded cylindrical shell under Winkler elastic foundation and various boundary conditions

شکل ۱۵: تغییرات بسامد طبیعی پوسته استوانه‌ای هدفمند با پارامتر بستر الاستیک وینکلر به ازای شرایط مرزی مختلف

شکل ۱۶ تغییرات بسامد طبیعی با عدد موج محیطی پوسته استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند بدون تداخل با بستر الاستیک را به ازای نیروی محوری کششی و فشاری برای حالت شرایط مرزی ساده نشان می‌دهد. در این بررسی، عدد کسر حجمی برابر ۵ و تعداد موج محوری برابر ۱ می‌باشند. لازم به ذکر است که نیروی کماتش مکانیکی پوسته استوانه‌ای مورد

منحنی‌های بسامد در برابر تعداد طول موج محوری ابتدا صعودی بوده و در نهایت نسبت به هم واگرا می‌شوند. در حالی که با ثابت ماندن پارامتر برشی بستر و تغییر پارامتر وینکلر، منحنی‌های بسامد ابتدا صعودی بوده، سپس شیب آنها کاهش یافته و در انتها با هم موازی می‌شوند.

۶- برای پوسته استوانه‌ای با ترکیب ماده هدفمند مورد مطالعه، ملاحظه شد که با افزایش عدد کسر حجمی که منجر به افزایش درصد ماده با سفتی بالاتر در ساختار پوسته می‌شود، بسامد طبیعی پوسته نیز افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش عدد طول موج محیطی، میزان تغییرات بسامد طبیعی با عدد کسر حجمی بیشتر می‌شود.

۷- برای یک پوسته استوانه‌ای مشخص و بدون تداخل با بستر الاستیک، اثر شرایط مرزی مختلف به ازای اعداد موج محیطی کمتر از ۴ قابل مشاهده است و در این محدوده، بسامد طبیعی پوسته در حالت شرایط مرزی گیردار-گیردار نسبت به بقیه شرایط مرزی بالاتر قرار می‌گیرد و بعد از آن به ترتیب بسامدهای طبیعی به ازای شرایط مرزی گیردار-ساده، ساده-ساده و گیردار-آزاد قرار می‌گیرند.

۸- با بررسی نمودارهای بسامد طبیعی پوسته استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند در تداخل با بستر الاستیک در برابر تعداد موج محیطی، مشاهده می‌شود که اثر شرایط مرزی مختلف تنها به ازای تعداد موج محیطی برابر با ۱ قابل تفکیک بوده و با افزایش تعداد موج محیطی تغییری در بسامد طبیعی پوسته به ازای شرایط مرزی مختلف به وجود نمی‌آید. این موضوع در طراحی پوسته‌های استوانه‌ای بسیار قابل استفاده است.

۹- با بررسی منحنی‌های بسامد طبیعی پوسته استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند در برابر مقدار پارامتر بستر الاستیک وینکلر، مشاهده می‌شود که ابتدا بسامد طبیعی پوسته افزایش یافته و سپس با افزایش بیشتر پارامتر بستر، تغییر چندانی در بسامد طبیعی حاصل نمی‌شود.

۱۰- به ازای هر مقدار از پارامتر برشی بستر، مقدار مشخصی از پارامتر وینکلر وجود دارد که کمتر از این مقدار مشخص، بسامدهای طبیعی پوسته به ترتیب به ازای شرایط مرزی گیردار-آزاد، ساده-ساده، گیردار-ساده و گیردار-گیردار کاهش یافته و به ازای بیشتر از این مقدار، افزایش می‌یابند. به عبارت دیگر با انتخاب بستر الاستیکی با مقادیر پارامترهای مناسب می‌توان اثر شرایط مرزی بر خواص ارتعاشی پوسته را کنترل نمود. این موضوع در طراحی پوسته‌های استوانه‌ای برای کاربردهای مختلف بسیار حائز اهمیت است.

۱۱- با افزایش نیروی محوری کششی و فشار جانبی، بسامدهای طبیعی پوسته استوانه‌ای افزایش می‌یابند. مقدار این افزایش برای پوسته تحت نیروی محوری به ازای مقادیر حداقل بسامد (نمودار بسامد در برابر عدد موج محیطی) و برای پوسته تحت فشار جانبی به ازای مقادیر بالاتر عدد موج محیطی، بیشتر است. همچنین برای پوسته تحت فشار جانبی اثر شرایط مرزی مختلف تنها به ازای عدد موج محیطی برابر ۱ متفاوت است.

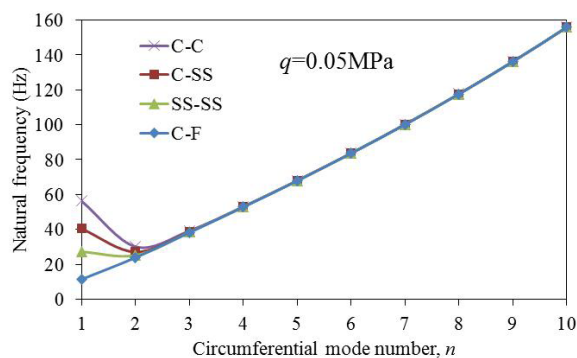


Fig. 18. Natural frequency variations of functionally graded cylindrical shell under various boundary conditions and specified lateral pressure

شکل ۱۸: تغییرات بسامد طبیعی پوسته استوانه‌ای هدفمند به ازای شرایط مرزی مختلف و فشار جانبی مشخص

۶- نتیجه‌گیری

در این تحقیق با استفاده از میدان تغییر مکان به صورت گسترش موج، ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند بر روی بستر الاستیک تحت نیروی محوری، فشار جانبی و شرایط مرزی مختلف مبتنی بر نظریه مرتبه اول برشی سندرز-کویتز بررسی گردید. نتایج عمده قابل اشاره به صورت زیر ارائه می‌گردد:

۱- استفاده از میدان تغییر مکان به صورت گسترش موج در بررسی ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای، به صورت یک روش مؤثر و قابل اطمینان عمل نموده و در محدوده مناسب جهت پایش وضعیت ارتعاشی سازه (بسامدهای متناظر با تعداد طول موج محیطی بالاتر و تعداد طول موج محوری پایین‌تر) به ازای شرایط مرزی مختلف نتایج قابل قبولی ارائه می‌دهد.

۲- استفاده از روش گسترش موج برای تخمین بسامدهای طبیعی پوسته استوانه‌ای در شرایط مرزی گیردار-گیردار، گیردار-ساده و گیردار-آزاد برای استوانه‌های با نسبت طول به شعاع بالاتر، نتایج کاملاً مناسب در تمامی محدوده بسامدی و برای استوانه‌های با طول محدودتر در محدوده بسامدهای پایین (محدوده بسامدی مورد توجه در طراحی سازه‌ها) ارائه می‌دهد. همچنین دقت این روش برای شرایط مرزی ساده در دو انتهای استوانه، در تمامی محدوده بسامدی بسیار مناسب است؛ بنابراین با توسعه این روش می‌توان از آن در شرایط مرزی پیچیده‌تر نیز استفاده نمود.

۳- روش گسترش موج با دقت مناسب بسامدهای طبیعی پوسته استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند و احاطه شده با بستر الاستیک را تخمین می‌زند؛ بنابراین این روش قابل کاربرد در بررسی پوسته‌های دارای پیچیدگی‌های هندسی و مواد نیز می‌باشد.

۴- بسامدهای طبیعی پوسته استوانه‌ای ساخته شده از جنس مواد هدفمند به مقادیر پارامترهای سفتی بستر الاستیک وابسته هستند. با افزایش مقادیر پارامترهای بستر، بسامد طبیعی پوسته نیز افزایش می‌یابد. با ثابت ماندن مقدار پارامتر وینکلر بستر و افزایش پارامتر برشی،

- 22.
- [4] C.B. Sharma, Vibration characteristics of thin circular cylinders, *Journal of sound and vibration*, 63 (1979) 581-592.
- [5] W. Soedel, A new frequency formula for closed circular cylindrical shells for a large variety of boundary conditions, *Journal of sound and vibration*, 70 (1980) 309-317.
- [6] K.Y. Lam, C.T. Loy, Effects of boundary conditions on frequencies of a multi-layered cylindrical shell, *Journal of sound and vibration*, 188(3) (1995) 363-384.
- [7] A. Messina, K.P. Soldatos, Ritz-type dynamic analysis of cross-ply laminated circular cylinders subjected to different boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration*, 227(4) (1999) 749-768.
- [8] R. Ansari, M. Darvizeh, M. Hemmatnezhad, Vibration Analysis of FGM Cylindrical Shells Under Various Boundary Conditions, *Iranian Aerospace Society*, 5(3) (2008) 129-138.
- [9] D.N. Paliwal, R.K. Pandey, T. Nath, Free vibration of circular cylindrical shell on Winkler and Pasternak foundation, *Journal of pressure vessel and piping*, 69 (1996) 79-89.
- [10] D.N. Paliwal, R.K. Pandey, The free vibration of a cylindrical shell on an elastic foundation, *Journal of vibration and acoustics*, 120 (1998) 63-71.
- [11] G.G. Sheng, X. Wang, Thermal vibration, buckling and dynamic stability of functionally graded cylindrical shells embedded in an elastic medium, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 27(2) (2008) 117-134.
- [12] A.G. Shah, T. Mahmood, M.N. Naeem, Z. Iqbal, S.H. Arshad, Vibrations of functionally graded cylindrical shells based on elastic foundations, *Acta Mechanica*, 211 (2010) 293-307.
- [13] M. Mohammadimehr, M. Moradi, A. Loghman, Influence of the elastic foundation on the free vibration and buckling of thin-walled piezoelectric-based FGM cylindrical shells under combined loadings, *Journal of Solid Mechanics*, 6(4) (2014) 347-365.
- [14] X.M. Zhang, G.R. Liu, K.Y. Lam, Vibration analysis of thin cylindrical shells using the wave propagation approach, *Journal of sound and vibration*, 239(3) (2001) 397-403.
- [15] X.M. Zhang, G.R. Liu, K.Y. Lam, Coupled vibration analysis of fluid-filled cylindrical shells using the wave propagation approach, *Applied Acoustics*, 62 (2001) 229-243.
- [16] L. Xuebin, Study on free vibration analysis of circular cylindrical shells using wave propagation, *Journal of*

$$L_{11} = A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \left(A_{66} - \frac{B_{66}}{R} + \frac{D_{66}}{4R^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{1}{R} \left(A_{12} + A_{66} - \frac{D_{66}}{4R^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}$$

$$L_{13} = -L_{31} = \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_{14} = L_{41} = B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \left(B_{66} - \frac{D_{66}}{2R} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{15} = L_{51} = \frac{1}{R} \left(B_{12} + B_{66} - \frac{D_{66}}{2R} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}$$

$$L_{22} = \left(A_{66} + \frac{B_{66}}{R} + \frac{D_{66}}{4R^2} + N_a \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{A_{22}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{C_{55}}{R^2} - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{23} = -L_{32} = \frac{1}{R^2} (C_{55} + A_{22}) \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$L_{24} = L_{42} = \frac{1}{R} \left(B_{12} + B_{66} + \frac{D_{66}}{2R} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}$$

$$L_{25} = L_{52} = \left(B_{66} + \frac{D_{66}}{2R} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{B_{22}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{C_{55}}{R} - I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{33} = (C_{44} + k_s + N_a) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} (C_{55} + k_s + P_e) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{A_{22}}{R^2} - k_1 - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{34} = -L_{43} = \left(C_{44} - \frac{B_{12}}{R} \right) \frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_{35} = -L_{53} = \frac{1}{R} \left(C_{55} - \frac{B_{22}}{R} \right) \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$L_{44} = -C_{44} + D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{D_{66}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - I_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{45} = L_{54} = \frac{1}{R} (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}$$

$$L_{55} = -C_{55} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{D_{22}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - I_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

- [1] A.W. Leissa, Vibration of Shells, The Acoustical Society of America, 1973.
- [2] K. Forsberg, Influence of boundary conditions on modal characteristics of cylindrical shells, *Journal of American institute of aeronautics and astronautics*, 2 (1964) 182-189.
- [3] F. Shadmehri, S. Hoa, M. Hojjati, The Effect of Displacement Field on Bending, Buckling, and Vibration of Cross-Ply Circular Cylindrical Shells, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 21(21) (2014) 14-

- order shear deformation plate theory with ring support, *Acta Mechanica*, 191 (2007) 75-91.
- [25] M.N. Naeem, C.B. Sharma, Prediction of natural frequencies for thin circular cylindrical shell, *Journal of mechanical engineering science*, 214 (2000) 1313-1328.
- [26] A.G. Shah, Vibration characteristics of fluid-filled functionally graded cylindrical shells on elastic foundations, *The Islamia University of Bahawalpur*, Pakistan, 2011.
- [27] J.M. Santiago, H.L. Wisniewski, Convergence of finite element frequency prediction for a thin walled cylinder, *Computers and Structures*, 32(3/4) (1989) 745-759.
- [28] R.N. Arnold, G.B. Warburton, The flexural vibrations of thin cylinders, in: *Proceedings of the institution of mechanical engineers A*, 1953, pp. 62-80.
- [29] C.T. Loy, K.Y. Lam, C. Shu, Analysis of cylindrical shells using generalized differential quadrature method, *Shock and vibration*, 4 (1997) 193-198.
- [30] P.A.T. Gill, Vibrations of clamped-free circular cylindrical shells, *Journal of Sound and Vibration*, 25 (1972) 501-502.
- [31] C.T. Loy, K.Y. Lam, J.N. Reddy, Vibration of functionally graded cylindrical shells, *International Journal of Mechanical Sciences*, 41 (1999) 309-324.
- Sound and Vibration*, 311 (2008) 667-682.
- [17] S. Wang, D.J. Dawe, Buckling of composite shell structures using the spline finite strip method, *Composites: Part B*, 30 (1999) 351-364.
- [18] J.N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*, second ed., *CRC Press*, Boca Raton, FL, 2004.
- [19] C.W. Lim, Y.F. Ma, S. Kitipornchai, C.M. Wang, R.K.K. Yuen, Buckling of Vertical Cylindrical Shells Under Combined End Pressure and Body Force, *Journal of Engineering Mechanics*, 129 (2003) 876-884.
- [20] H. Huang, Q. Han, N. Feng, X. Fan, Buckling of functionally graded cylindrical shells under combined loads, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 18(5) (2011) 337-346.
- [21] P.B. Goncalves, R.S.S. Ramos, Numerical Method for Vibration Analysis of Cylindrical Shells, *Journal of Engineering Mechanics*, (1997) 544-550.
- [22] L.F.F. Gasser, Free Vibrations of thin cylindrical shells containing liquid, Federal Univ. of Rio de Janeiro, 1987.
- [23] C.T. Loy, K.Y. Lam, Vibration of cylindrical shells with ring support, *International Journal of Mechanical Sciences*, 39(4) (1997) 455-471.
- [24] M.M. Najafizadeh, M.R. Isvandzibaei, Vibration of functionally graded cylindrical shells based on higher

Please cite this article using:

A. Hadi, S. Shakhesi, H. Ovesy, J. Fazilati, Free Vibration of, Functionally graded materials Cylindrical Shells on Elastic Foundation under Axial force, Lateral Pressure and Different Boundary Conditions, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 50(5) (2018) 1097-1112.

DOI: 10.22060/mej.2017.12362.5319

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:



