



مطالعه اثر شرایط تکیه‌گاهی در تحلیل تنش دینامیکی گذرای پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم تحت فشار متحرک داخلی

حامد رضایی، مجید میرزایی*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۶ دی ۱۳۹۵
بازنگری: ۲۶ اردیبهشت ۱۳۹۶
پذیرش: ۳۱ اردیبهشت ۱۳۹۶
ارائه آنلاین: ۱۷ خرداد ۱۳۹۶

کلمات کلیدی:

پوسته استوانه‌ای
بارگذاری گذرای دینامیکی
پاسخ سازه‌ای
شرایط تکیه‌گاهی

چکیده: مطالعه حاضر، یک حل تحلیلی برای پاسخ سازه‌ای الاستودینامیک گذرای یک پوسته استوانه‌ای تحت شرایط تکیه‌گاهی مختلف ارائه می‌دهد. در مدل‌سازی مسأله، معادلات حرکت یک پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم در نظر گرفته شده است؛ بنابراین اثر تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی در پیش‌بینی پاسخ لحاظ شده است. فرم کلی فرمول‌بندی و روش حل ارائه شده بر تعداد زیادی از مسائل نظری و کاربردی قابل اعمال است. اگرچه، فرمول‌بندی برای بار دتونیشن گازی (تراک) در نظر گرفته شده است. فشار بارگذاری حاصل از تراک که ترکیب یک موج شوک و ناحیه واکنش است، به وسیله یک تخمین نمایی از مدل تیلور-زلدویچ بیان شده است. روش تحلیلی ارائه شده به کمک نتایج تجربی موجود در منابع صحت‌سنجی و با شبیه‌سازی‌های اجزا محدود مقایسه شده است. تحلیل‌ها و شبیه‌سازی‌ها برای یک لوله آزمایشگاهی تحت بارگذاری تراک داخلی برای شرایط مرزی دو سر ساده، دو سر گیردار و گیردار-آزاد انجام شده است. نتایج نشان می‌دهد که طیف‌های ارتعاشی پاسخ به دست آمده به شدت تحت تأثیر نوع شرایط تکیه‌گاهی است، به ویژه در انتهای لوله که تداخل بین امواج رو به جلو و امواج برگشتی قابل توجه است.

۱- مقدمه

پوسته‌های استوانه‌ای دارای کاربردهای مهندسی بسیاری مثل لوله‌های انتقال نفت و گاز، مخازن تحت فشار^۱، لوله‌های تحت دتونیشن داخلی^۲ و... هستند. پیش‌بینی پاسخ سازه‌ای پوسته‌های استوانه‌ای به فشار متحرک داخلی (مثل ضربه قوچ^۳، شوک^۴، دتونیشن و...) بخش مهمی از مسأله تحلیل تنش این نوع پوسته‌هاست.

اولین نظریه جامع برای تحلیل رفتار ارتعاشی یک پوسته استوانه‌ای تحت فشار متحرک داخلی توسط تنگ^۵ [۱] و ریسمن^۶ [۲] ارائه شد. در مدل تنگ اثر تنش برشی و اینرسی دورانی لحاظ شده و یک حل حالت پایا^۷ برای یک پوسته با طول نامحدود ارائه شده است. سیمکینز^۸ [۳] نظریه را با هدف بررسی رفتار لوله‌های تفنگ برای پوسته‌های ضخیم بسط داد.

مطالعات تجربی در مسائل انفجار گازی توسط بلتمن^۹ و شپرد^{۱۰} [۴] نشان دادند که مشخصه‌های صحیح پاسخ در مدل‌سازی گذرا، فقط با در نظر گرفتن طول محدود می‌تواند بیان شود؛ بنابراین آنها برای پوسته‌های طول محدود با دو ساده‌سازی عمده در معادلات حاکم بر مدل تنگ و همچنین حذف اثر تنش برشی و اینرسی دورانی یک حل تحلیلی گذرا ارائه کردند. بلتمن و شپرد نتایج پاسخ سازه‌ای لوله تحت منحنی فشار تیلور-زلدویچ^{۱۱} برای شرایط تکیه‌گاهی دو سر ساده و دو سر گیردار را گزارش کردند. میرزایی و همکاران [۵] با تصحیح فرمول‌بندی تنگ و با حفظ همه ترم‌های ضروری و مؤثر در معادلات حاکم با استفاده از روش جداسازی متغیرها^{۱۲} به بسط یک مدل تحلیلی گذرای جدید برای پوسته دو سر ساده پرداختند. این حل ارائه شده فقط برای دوره زمانی که بار طول پوسته را طی می‌کند صحت داشت. میرزایی و همکاران، با این فرض که هنگامی که بار از پوسته خارج می‌شود ارتعاش آزاد پوسته تحت شرایط اولیه ناشی از فاز قبل شروع می‌شود؛ به بسط روش حل برای بعد از خروج بار از پوسته و شبیه‌سازی موج‌های برگشتی^{۱۳} از دو انتهای پوسته پرداختند [۶]؛ اما در عمل وقتی بار مفروض پوسته را ترک می‌کند، اثر دنباله نمایه بارگذاری همچنان وجود دارد؛ بنابراین میرزایی

- 1 Pressure vessels
- 2 Internal detonation tubes
- 3 Water hammer
- 4 Shock
- 5 Tang
- 6 Reismann
- 7 Steady state
- 8 Simkins

- 9 Beltman
- 10 Shepherd
- 11 Taylor-Zeldovich
- 12 Separation Method
- 13 Reflected waves

$$p(x,t) = \begin{cases} P_1 + \left(P_3 - P_1 + (P_2 - P_3) e^{\frac{x-Vt_1}{VT}} \right) H(Vt_1 - x) & 0 \leq t_1 < \frac{L}{V} \\ P_3 + (P_2 - P_3) e^{\frac{x-Vt_2-L}{VT}} & 0 \leq t_2 < \infty \end{cases} \quad (1)$$

که در آن P_1, P_2, P_3, T, H, V به ترتیب فشار اولیه ترکیب گازی، فشار قله، فشار نهایی، ضریب کاهش نمایی، تابع هویساید^۸ و سرعت حرکت بار در پوسته است. منحنی واقعی و ساده شده فشار برحسب زمان که از آزمایش یک ترکیب سوختی خاص به دست آمده در شکل ۱ آورده شده است.

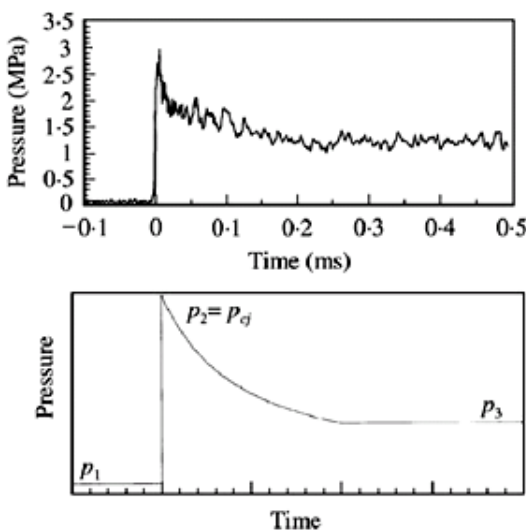


Fig.1. Variation of measured (up) and approximated (down) pressure profile with time

شکل ۱: نمودار واقعی (بالا) و شماتیک (پایین) منحنی فشار بر حسب زمان [۴]

در تصویر بالایی شکل ۱ کاهش ناگهانی فشار در زمان صفر نشاندهنده رسیدن موج فشاری به محل گیج است. کاهش ناگهانی فشار تا ۰/۰۱ میلی ثانیه بعد از آن مربوط به ناحیه واکنش است و کاهش تدریجی فشار تا ۰/۲۵ میلی ثانیه بعد از آن به علت خواص دینامیکی گاز پشت موج فشاری است. از دیدگاه سازه‌ای بار داخل پوسته یک بار متحرک غیریکنواخت بوده و منحنی فشاری آن را می‌توان با کاهش نمایی مدل کرد.

لحظه‌ای که موج تراک از پوسته خارج می‌شود، مرز بین انتهای فاز اول دتونیشن و شروع فاز دوم دتونیشن است. در فاز اول، با توجه به حضور و حرکت موج در پوسته مسأله از نوع معادله دیفرانسیل جزئی غیرهمگن با بارگذاری متحرک است. در حالی که در فاز دوم با خروج بار از پوسته، مسأله به یک معادله دیفرانسیل جزئی غیرهمگن با بارگذاری تابع زمان تبدیل می‌شود.

در ادامه یک فرم دقیق از روش حل با در نظر گرفتن اثر دنباله بارگذاری و اثرهای مختلف بارگذاری (سرعت‌های بحرانی بارگذاری، ضریب تقویت^۱، پست-شوک، فشار خارجی و ...) ارائه نمود [۷]. پس از آن، فرمول‌بندی را با تعریف دو حوزه زمانی برای حل در فرآیند زمان تعمیم داد [۸]. اخیراً دقت مدل تحلیلی گذرا با تصحیح تابع بارگذاری افزایش داده شده و فرمول‌بندی برای پیش‌بینی رفتار پوسته‌های ارتوتروپیک^۲ بسط داده شده است [۹]. چائو^۳ و شپرد [۱۰] در ادامه کار بلتمن، اثر ترک بر کرنش یک لوله نازک آلومینیومی تحت دتونیشن گازی با سرعت‌های نزدیک به دومین سرعت بحرانی به صورت تجربی را بررسی کردند.

بررسی مراجع نشان می‌دهد، در حل مرجع [۴] اثر شرایط تکیه‌گاهی گیردار در پاسخ بررسی شده، اما با حذف اثر اینرسی دورانی و تنش برشی در معادلات، پاسخ سازه‌ای در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی دقت کافی را ندارد. از طرفی در حل کامل ارائه شده در مرجع [۹] که با لحاظ اثر اینرسی و تنش برشی در پاسخ، نتایج تحلیلی با دقت بسیار خوبی بر داده‌های تجربی منطبق شده، فقط شرایط تکیه‌گاهی دو سر ساده برای پوسته در نظر گرفته شده است؛ بنابراین تا کنون یک حل کامل برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف پوسته ضخیم با در نظر گرفتن اثر برش و اینرسی دورانی ارائه نشده است. در مطالعه حاضر یک حل تحلیلی دقیق با هدف بررسی اثر شرایط مرزی مختلف بر الگوی رفتار ارتعاشی پوسته ضخیم تحت تراک داخلی ارائه شده است. شرایط تکیه‌گاهی مورد مطالعه؛ دو سر ساده، دو سر گیردار و گیردار-آزاد است. سرعت حرکت دتونیشن در پوسته نزدیک سرعت بحرانی اول است. روش تحلیلی ارائه شده به وسیله نتایج تجربی موجود صحت‌سنجی و با شبیه‌سازی‌های اجزا محدود مقایسه شده است. پوسته به صورت متقارن محوری مدل شده و در مدل‌سازی از روش تجمیع مودها^۴ استفاده شده است.

۲- تشریح مسأله

برای مدل‌سازی رفتار ارتعاشی یک پوسته استوانه‌ای ضخیم با طول محدود L ، شعاع R ، و ضخامت h ، کرنش حلقوی^۵ پوسته که تحت فشار متحرک داخلی قرار دارد در نظر گرفته شده است. فشار حداکثر (فشار قله^۶) به اندازه کافی کم است؛ بنابراین رفتار سازه‌ای کاملاً الاستیک خواهد بود. فشار متقارن محوری^۷ که در امتداد طولی پوسته (محور x) منتشر می‌شود برای دو فاز ارتعاش (قبل و بعد از خروج بار از پوسته) براساس موج تیلور به صورت زیر تخمین زده می‌شود: [۴]

- 1 Amplification factor
- 2 Orthotropic
- 3 Chao
- 4 Mode Summation Method
- 5 Hoop Strain
- 6 Peak pressure
- 7 Axisymmetric

8 Heaviside function

$$W = w_b + w_s \quad (3)$$

معادله حاکم بر جابه‌جایی شعاعی خمشی به صورت زیر قابل بیان است:

$$\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + B_1 \frac{\partial^4 w_b}{\partial t^2 \partial x^2} + B_2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + B_3 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + B_4 w_b = \frac{144 F(x, t)}{h^3} \quad (4)$$

که در آن

$$B_1 = -\left(\frac{1}{V_d^2} + \frac{1}{V_s^2}\right), B_2 = \frac{12}{h^2 V_d^2} \left(1 + \beta^2 \frac{V_d^2}{V_s^2}\right), \quad (5)$$

$$B_3 = -\frac{12\beta^2(1-\nu^2)V_d^2}{h^2 V_s^2}, B_4 = \frac{144\beta^2}{h^4}$$

که در آن ν ضریب پواسون است و

$$V_d = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}, V_s = \sqrt{\frac{\kappa G}{\rho}}, \beta = \frac{h}{\sqrt{12}R} \quad (6)$$

در روابط بالا R, E, G, ρ, ν و κ به ترتیب شعاع سطح میانی پوسته، ضخامت پوسته، مدول الاستیسیته، مدول برشی، چگالی و ضریب تصحیح برش است.

رابطه بین جابه‌جایی‌های ناشی از خمش و برش به صورت زیر قابل بیان است: [۴]

$$w_s = -\frac{h^2}{12} \left(\frac{V_d^2 - V_s^2}{V_s^2} \right) \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \quad (7)$$

در معادله (۴) تابع بارگذاری گذرا به صورت زیر قابل بسط است:

$$F(x, t) = \begin{cases} \Lambda_1 + \left(\Lambda_3 - \Lambda_1 + (\Lambda_2 - \Lambda_3) e^{\frac{x-tV}{TV}} \right) H(Vt_1 - x) & (0 \leq t_1 < L/V) \\ \Lambda_3 + (\Lambda_2 - \Lambda_3) e^{\frac{x-t_2V-L}{TV}} & (0 \leq t_2 < \infty) \end{cases} \quad (8)$$

که در آن

$$\Lambda_j = \beta^2 (1-\nu^2) \left(1 - \frac{h}{2R} \right) \frac{(P_j - P_{ext}) R^2}{E h^2}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (9)$$

در این رابطه فشار خارجی P_{ext} لازم به ذکر است که ترم $\beta^2 (1-\nu^2)$ در معادله (۹) مرجع [۹] از قلم افتاده است. همچنین در ضریب B_4 در معادله (۴)، ترم مربوط به اثر پواسون با توجه به ناچیز بودن اثر آن حذف شده است.

۳- فرمول‌بندی مسأله

یک بارگذاری دینامیک تعداد زیادی از مودهای طبیعی سازه را تحریک می‌کند. مقدار مشارکت هر یک از مودها در پاسخ به تحریک، توسط مفهوم

برای ترکیب دو حوزه زمانی قبل و بعد از خروج بار از پوسته، متغیر t به عنوان پارامتر عمومی برای کل زمان مسأله (هر دو فاز دتونیشن) به صورت زیر تعریف می‌شود: (شکل ۲ را ببینید)

$$t_1 = t, \quad t_2 = t - \frac{L}{V} \quad (2)$$

همانطور که شکل ۳ نمایش می‌دهد جابه‌جایی شعاعی پوسته، w ، ترکیبی از جابه‌جایی ناشی از خمش، w_b و جابه‌جایی ناشی از برش، w_s است:

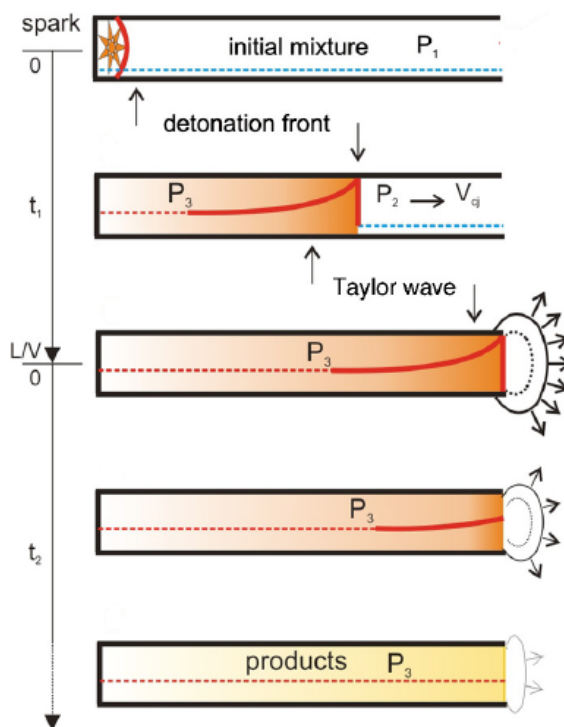


Fig.2. A PDE cycle

شکل ۲: سیکل یک موتور تراک ضربه‌ای [۹]

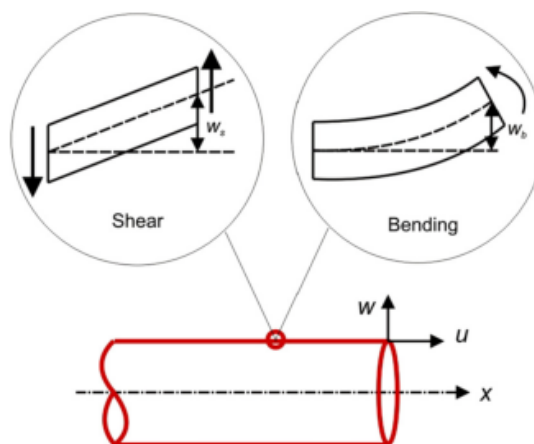


Fig. 3. Schematic of the radial displacement due to bending and shear components

شکل ۳: شماتیک جابه‌جایی‌های شعاعی ناشی از برش و خمش [۹]

$$\eta_n(t_1) = \frac{1}{N_n \omega_n^2} \int_0^L \frac{144}{h^3} \Lambda_1 \phi_n(x) dx + \frac{1}{N_n \omega_n} \int_0^{t_1} \int_0^L \frac{144}{h^3} \left(\Lambda_3 - \Lambda_1 + (\Lambda_2 - \Lambda_3) e^{\frac{x-V\tau}{VT}} \right) \phi_n(x) \sin(\omega_n(t_1 - \tau)) dx d\tau$$

نحوه محاسبه فرم کلی ضریب مشارکت مودال در مرجع [۱۱] آورده شده است. ضریب مشارکت مودال برای منحنی فشار معادله (۱) در فاز اول:

$$\eta_n(t_1) = \frac{1}{Y_n \omega_n^2} \int_0^L \frac{144}{h^3} \Lambda_1 \phi_n(x) dx + \frac{1}{Y_n \omega_n} \int_0^{t_1} \int_0^L \frac{144}{h^3} \left(\Lambda_3 - \Lambda_1 + (\Lambda_2 - \Lambda_3) e^{\frac{x-V\tau}{VT}} \right) \phi_n(x) \sin(\omega_n(t_1 - \tau)) dx d\tau \quad (16)$$

و در فاز دوم:

$$\eta_n(t_2) = \left(\eta_n \left(\frac{L}{V} \right) \right)_{phase 1} - \frac{\Lambda_3}{Y_n \lambda_n \omega_n^2} (1 - \cos(\lambda_n L)) \cos(\omega_n t_2) + \left(\frac{d\eta_n \left(\frac{L}{V} \right)}{dt_1} \right)_{phase 1} \frac{\sin(\omega_n t_2)}{\omega_n} + \frac{1}{Y_n \omega_n^2} \int_0^L \frac{144}{h^3} \Lambda_3 \phi_n(x) dx + \frac{1}{Y_n \omega_n} \int_0^{t_2} \int_0^L \frac{144}{h^3} (\Lambda_2 - \Lambda_3) e^{\frac{x-V\tau-L}{VT}} \phi_n(x) \sin(\omega_n(t_2 - \tau)) dx d\tau \quad (17)$$

است. در معادلات (۱۶) و (۱۷):

$$Y_n = \int_0^L \left(B_1 \frac{\partial^2 \phi_n(x)}{\partial x^2} + B_2 \phi_n(x) \right) \phi_n(x) dx, \quad (18)$$

برای یافتن ضریب مشارکت مودال، بسته به شرایط تکیه‌گاهی، یکی از معادله‌های (۱۱)، (۱۲) و یا (۱۳) را در معادله‌های (۱۶) و (۱۷) جایگزین می‌کنیم. بسط معادلات (۱۸-۱۵) برای تکیه‌گاه دو سر ساده در ضمیمه آورده شده است.

چهار سرعت بحرانی برای حرکت موج فشاری در پوسته قابل محاسبه است و دو سرعت اول در مطالعه پوسته‌های دتونیشن گازی اهمیت دارند. اگر سرعت موج دتونیشن به هر یک از این دو سرعت بحرانی (سرعت حرکت امواج خمشی و برشی در پوسته) نزدیک باشد امکان تشدید در پاسخ سازه وجود دارد. سرعت حرکت امواج خمشی در پوسته که برابر سرعت بحرانی اول است از رابطه زیر به دست می‌آید. [۴]

$$A_2^2 - 4A_0 A_4 = 0 \quad (19)$$

که در آن:

$$A_4 = \left(\left(\frac{V}{V_d} \right)^2 - 1 \right) \left(\left(\frac{V}{V_s} \right)^2 - 1 \right), \quad (20)$$

$$A_2 = \left(\frac{V}{V_d} \right)^2 \left(1 + \beta^2 \left(\frac{V_d}{V_s} \right)^2 \right) - \beta^2 (1 - \nu^2) \left(\frac{V_d}{V_s} \right)^2,$$

$$A_0 = \beta^2 + \frac{\beta^2 \nu^2}{(V/V_d)^2 - 1}.$$

ضریب مشارکت مودال^۱، $\eta(t)$ ، تعریف می‌شود؛ بنابراین از دیدگاه ریاضی، شکل موده‌های ارتعاشی یک سازه، $\phi(x)$ ، بردارهای متعامدی^۲ هستند که شرایط تکیه‌گاهی را ارضا کرده و می‌توانند برای نشان دادن پاسخ آن سازه به هر نوع بار دینامیکی استفاده شوند. در سامانه‌های پیوسته^۳ (مثل پوسته‌ها) که دارای بی‌نهایت درجه آزادی (بی‌نهایت شکل مود) هستند، حل عمومی به کمک سری‌های بی‌نهایت قابل بیان است. بر این اساس، جابه‌جایی شعاعی پوسته تحت بار را به کمک بسط مودها می‌توان نوشت:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \eta_n(t) \quad (10)$$

که در آن n شماره مود است.

شکل مودها را با اعمال شرایط مرزی در دو انتهای پوسته برای انواع

شرایط تکیه‌گاهی به صورت زیر می‌توان نشان داد: [۱۱]

۱. دو سر ساده:

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\lambda_n x); \lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad (11)$$

۲. دو سر گیردار:

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{L}} \left(\varphi_1(\lambda_n x) - \frac{\varphi_1(\lambda_n L)}{\varphi_2(\lambda_n L)} \varphi_2(\lambda_n x) \right) \quad (12)$$

۳. گیردار-آزاد:

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{L}} \left(\varphi_1(\lambda_n x) - \frac{\varphi_3(\lambda_n L)}{\varphi_4(\lambda_n L)} \varphi_2(\lambda_n x) \right) \quad (13)$$

که در معادله‌های (۱۲) و (۱۳):

$$\begin{aligned} \varphi_1(\lambda_n x) &= \cosh(\lambda_n x) - \cos(\lambda_n x) \\ \varphi_2(\lambda_n x) &= \sinh(\lambda_n x) - \sin(\lambda_n x) \\ \varphi_3(\lambda_n x) &= \cosh(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x) \\ \varphi_4(\lambda_n x) &= \sinh(\lambda_n x) + \sin(\lambda_n x) \end{aligned} \quad (14)$$

مقادیر ویژه، λ_n ، در معادله‌های (۱۲) و (۱۳) به ترتیب از حل معادله‌های غیر جبری $\cosh(\lambda_n x) \cos(\lambda_n x) + 1 = 0$ و $\cosh(\lambda_n x) \cos(\lambda_n x) - 1 = 0$ مشخص می‌شوند.

برای بسامدهای ویژه، ω_n ، پاسخ هارمونیک به صورت $w_b(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) e^{i\omega t}$ در فرم همگن رابطه (۴) جایگذاری شده است. با ضرب $\phi_n(x)$ در طرفین معادله، استفاده از شرط تعامد و سپس انتگرال‌گیری در طول پوسته برای هر یک از شرایط تکیه‌گاهی خواهیم داشت:

$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^L \left(\frac{\partial^4 \phi_n(x)}{\partial x^4} + B_3 \frac{\partial^2 \phi_n(x)}{\partial x^2} + B_4 \phi_n(x) \right) \phi_n(x) dx}{\int_0^L \left(B_1 \frac{\partial^2 \phi_n(x)}{\partial x^2} + B_2 \phi_n(x) \right) \phi_n(x) dx} \quad (15)$$

- 1 Modal Participation Factor
- 2 Orthogonal vectors
- 3 Continuous systems

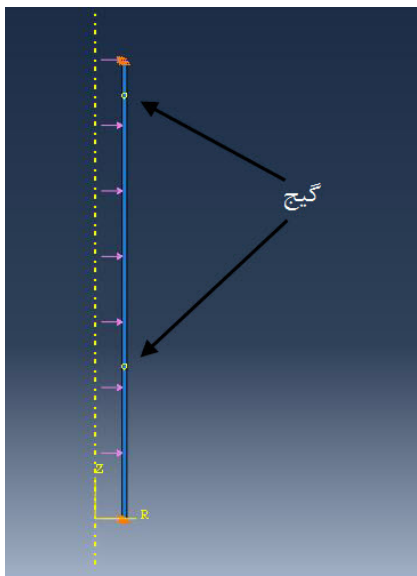


Fig. 4. Axisymmetric finite element model

شکل ۴: مدل اجزا محدود متقارن محوری

سر ساده به ترتیب در مقایسه با نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی موجود در مرجع [۹، ۴] لحاظ شده است؛ بنابراین همه پارامترهای مدل اجزا محدود قبل از اعمال شرایط مرزی جدید به دقت کالیبره شده‌اند. شکل ۴ نحوه مدل‌سازی در نرم‌افزار اجزا محدود را نشان می‌دهد.

بارگذاری بر روی هر جزء به صورت فشار تابعی از زمان و مکان (معادله (۱)) به کمک سابروتین VDLOAD انجام شده است. گیج‌ها در فاصله‌های ۰/۷۹ و ۲/۱۹۵ متر از ابتدای لوله است. شرایط تکیه‌گاهی در جدول ۱ آورده شده است.

توضیح مفصل درباره تکنیک اجزا محدود در تحلیل تنش پوسته‌های تحت فشار متحرک داخلی در مرجع [۱۲] قابل دسترسی است.

۵- نتایج تحلیلی

در این بخش ابتدا با ترسیم رابطه (۲۱) تعداد مودهای لازم برای همگرایی جواب به دست می‌آید. سپس با مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از روش تحلیلی و نتایج موجود در مراجع به صحت‌سنجی روش پرداخته می‌شود. لوله مورد آزمایش دارای طول ۲/۳۸ متر، شعاع ۰/۱۵۲۴ متر، و ضخامت ۰/۰۲۵۴

جدول ۱: نحوه مقید کردن دو انتها در مدل اجزا محدود متقارن محوری

Table 1. Specification of constraints at both ends in axisymmetric finite element model

نوع تکیه‌گاه	جابه‌جایی طولی	جابه‌جایی عرضی	دوران حول محور عمود بر صفحه
ساده	نامقید	مقید	نامقید
گیردار	مقید	مقید	مقید
آزاد	نامقید	نامقید	نامقید

از دیگر نتایج مهم در مطالعه سرعت‌های بحرانی می‌توان به امکان محاسبه تعداد مودهای لازم برای حل دقیق اشاره نمود. توضیحات کامل درباره سرعت‌های بحرانی و تعیین تعداد مودهای لازم برای لحاظ در حل در مرجع [۷] آورده شده است. در وضعیت تشدید، رابطه سرعت‌های بحرانی و تعداد مودها به صورت زیر است.

$$V = \frac{\omega_n L}{n\pi} \quad (21)$$

با لحاظ معادله (۳)، پاسخ جابه‌جایی شعاعی گذرای پوسته حاصل مجموع جابه‌جایی شعاعی ناشی از خمش و جابه‌جایی شعاعی ناشی از برش (معادله (۷)) است:

$$w(x,t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{2n^*} \eta_n(t_1) \left(\phi_n(x) - \frac{h^2}{12} \left(\frac{V_d^2 - V^2}{V_s^2} \right) \frac{\partial^2 \phi_n(x)}{\partial x^2} \right), & t < \frac{L}{V} \\ \sum_{n=1}^{2n^*} \eta_n(t_2) \left(\phi_n(x) - \frac{h^2}{12} \left(\frac{V_d^2 - V^2}{V_s^2} \right) \frac{\partial^2 \phi_n(x)}{\partial x^2} \right), & t \geq \frac{L}{V} \end{cases} \quad (22)$$

n^* عدد مود مرتبط با اولین سرعت بحرانی است. با این مفهوم که نتایج دقیق در معادله (۲۲) فقط با تعداد n^* ترم در بسط سری‌های بی‌نهایت حاصل می‌شود. بر این اساس، مجموع $2n^*$ ترم در سری‌ها در نظر گرفته می‌شود که منجر به همگرایی کافی و لازم در معادله (۱۰) خواهد شد [۹، ۷]. کرنش هوپ، ϵ_θ ، با تقسیم جابه‌جایی شعاعی بر شعاع به دست می‌آید.

$$\epsilon_\theta = w(x,t) / R \quad (23)$$

کرنش طولی و کرنش برشی عرضی به ترتیب از: [۷]

$$\epsilon_a = \frac{vw(x,t)}{R \left((V/V_d)^2 - 1 \right)} \quad (24)$$

$$\gamma_s = \frac{\partial w_s(x,t)}{\partial x} \quad (25)$$

به دست می‌آید. براساس قانون هوک برای تنش هوپ و تنش برشی می‌توان نوشت:

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_a) \quad (26)$$

$$\tau_s = \kappa G \gamma_s \quad (27)$$

۴- حل عددی

از آنجا که مقادیر آزمایشگاهی برای لوله با شرایط تکیه‌گاهی دو سر گیردار و گیردار-آزاد در منابع موجود نیست؛ بنابراین نتایج روش تحلیلی ارائه شده در این دو حالت با شبیه‌سازی اجزا محدود به کمک نرم‌افزار تجاری آباکوس مقایسه شده است. مدل اجزا محدود دارای ۱۰۰۰۰ جزء متقارن محوری (۱۰۰۰ جزء در جهات طولی و ۱۰ جزء در جهات ضخامت) است. این تعداد جزء پس از مطالعه همگرایی در دقت و صحت مدل‌سازی لوله دو

۱ و سرعت‌های ۱۴۷۸/۸ و ۱۶۹۹/۷ متر بر ثانیه در گیج شماره ۲ گزارش شده‌اند.

نتایج روش تحلیلی دارای تطابق بسیار خوب با نتایج تجربی گزارش شده در مرجع [۴] است. در حالت کلی دامنه نوسان‌ها در نتایج آزمایشگاهی کمتر از مقادیر پیش‌بینی شده توسط روش تحلیلی است، اگرچه بسامد نوسان‌ها، الگوی کلی رفتار ارتعاشی و دامنه موج اصلی دارای تطابق خوبی است. دلیل این پدیده بر این واقعیت استوار است که در حالت کلی در آزمون‌های آزمایشگاهی نمی‌توان تکیه‌گاه‌ها را به صورت ایده‌آل ایجاد کرد. این انحراف

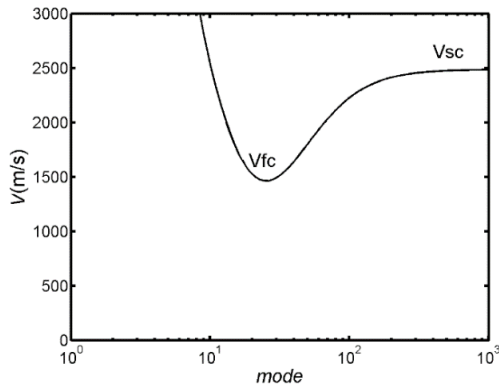


Fig. 5. An implicit plot of Eq. (21), showing the first two critical speeds for a detonation tube. The mode numbers are shown using logarithmic scale for clarity.

شکل ۵: ترسیم معادله (۲۱). دو سرعت بحرانی اول در لوله دتونیشن مشخص شده است. تعداد مودها در مقیاس لگاریتمی نشان داده شده‌اند.

متر است. ماده لوله ایزوتروپیک فرض شده و دارای مدول الاستیسیته ۱۹۳ گیگاپاسکال، چگالی جرمی ۸۰۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب، ضریب پواسون ۰/۲۳ و ضریب تصحیح برش ۰/۸۳۳۳۴ است. از آنجا که سرعت بحرانی اول لوله مورد مطالعه حدود ۱۵۵۰ متر بر ثانیه است؛ بنابراین بارگذاری‌ها در آزمایش‌ها دارای سرعت‌های حرکت ۱۴۷۸/۸ و ۱۶۹۹/۷ متر بر ثانیه و فشارهای قلّه مربوط به هر سرعت به ترتیب ۱/۳۵ و ۱/۷ مگاپاسکال است. فشار اولیه و فشار نهایی به ترتیب ۰/۱ مگاپاسکال و ۴۰٪ فشار قلّه، مطابق با نتایج حاصل از آزمایش لحاظ شده است. فشار خارجی و مقدار ضریب کاهش نمایی به ترتیب ۰/۱ مگاپاسکال و ۰/۰۰۴۳۴ ثانیه در نظر گرفته شده است. کرنش‌ها مربوط به دو گیج به شماره‌های ۱ و ۲ به ترتیب واقع در فاصله‌های ۰/۷۹ و ۲/۱۹۵ متر از ابتدای لوله است. لازم به ذکر است که کرنش‌سنج‌های ۱ و ۲ به ترتیب منطبق بر گیج‌های ۵ و ۱۰ مرجع [۴] است. با ترسیم رابطه (۲۱) نقاط اکسترم که معرف سرعت‌های بحرانی هستند به دست می‌آیند (شکل ۵ را ببینید). اولین اکسترم، سرعت بحرانی خمشی است که با V_{fc} نمایش داده می‌شود و حد نمودار به سمت بی‌نهایت (دومین اکسترم)، معرف سرعت بحرانی برشی، V_{sc} ، است. همانطور که در شکل ۵ مشخص است، برای حرکت دتونیشن با سرعت حدود ۱۵۰۰ متر بر ثانیه در طول لوله (نزدیک سرعت بحرانی اول) فقط ۵۰ مود اول برای حل در نظر گرفته شده است.

همانطور که شکل ۶ نشان می‌دهد، نتایج کرنش هوپ یک لوله دو سر ساده تحت دتونیشن با سرعت حرکت ۱۶۹۹/۷ متر بر ثانیه در گیج شماره

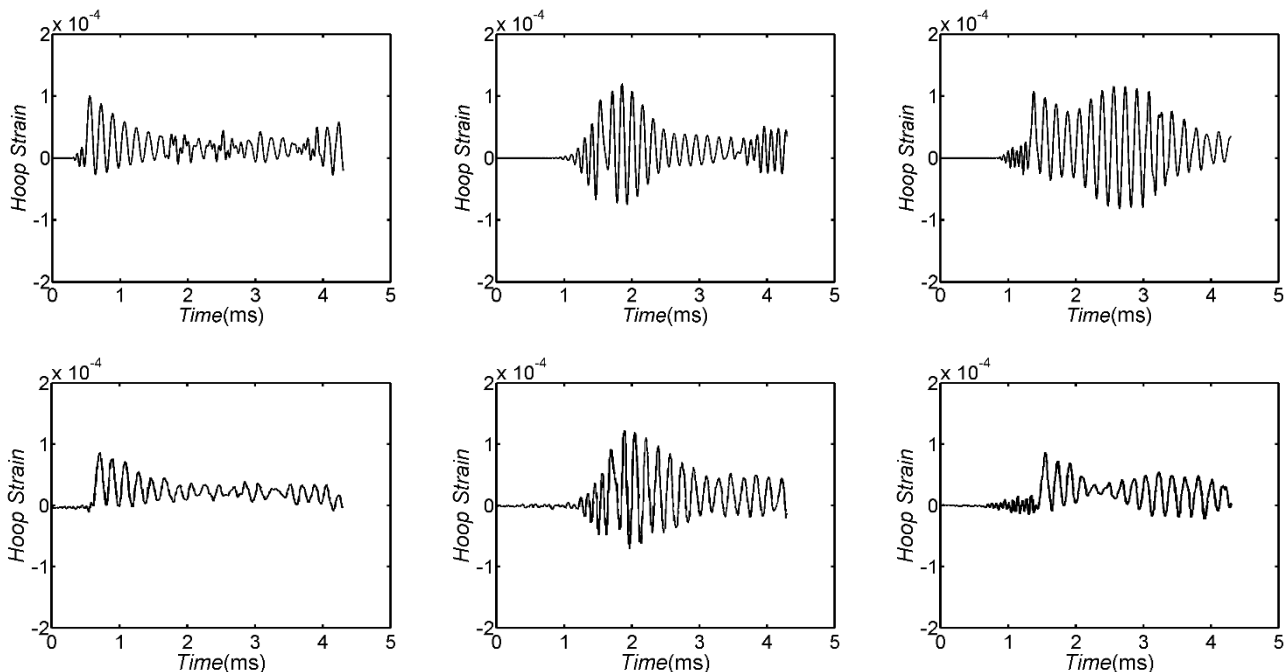


Fig. 6. Variation of hoop strain with time for a simple-supported tube under detonation loading. Top row; analytical solution. Bottom row; experimental data [4]. Left column are for gauge 1, detonation velocity of 1699.7 m/s. Middle and right columns are for gauge 2, detonation velocities of 1478.8 and 1699.7 m/s, respectively

شکل ۶: تغییرات کرنش هوپ نسبت به زمان برای یک لوله دو سر ساده تحت بار دتونیشن. ردیف بالا؛ حل تحلیلی و ردیف پایین؛ نتایج تجربی [۴]. ستون سمت چپ برای نتایج مربوط به گیج شماره ۱، سرعت دتونیشن ۱۶۹۹/۷ متر بر ثانیه، و ستون‌های میانی و سمت راست برای گیج شماره ۲، به ترتیب با سرعت‌های دتونیشن ۱۴۷۸/۸ و ۱۶۹۹/۷ متر بر ثانیه

فشاری متحرک و متغیر با زمان می‌شود و همچنین سبب برانگیختن امواج الاستیک می‌گردد که انتشار این امواج الاستیک در محیط لوله و همچنین انعکاس آن‌ها از انتهای لوله تعیین کننده بخشی از رفتار و پاسخ لوله می‌باشد. با آغاز انفجار در لوله با توجه به سرعت هر یک از امواج، پیش از رسیدن موج

از حالت ایده‌آل اثر دمپینگ تکیه‌گاه بر امواج برگشتی را تقویت کرده و بر پاسخ سازه اثر می‌گذارد.

تحلیل لوله‌های دتونیشن نیاز به درکی سیستماتیک از پاسخ سازه‌های لوله به بارگذاری انفجار گازی دارد. انفجار گازی درون لوله سبب ایجاد امواج

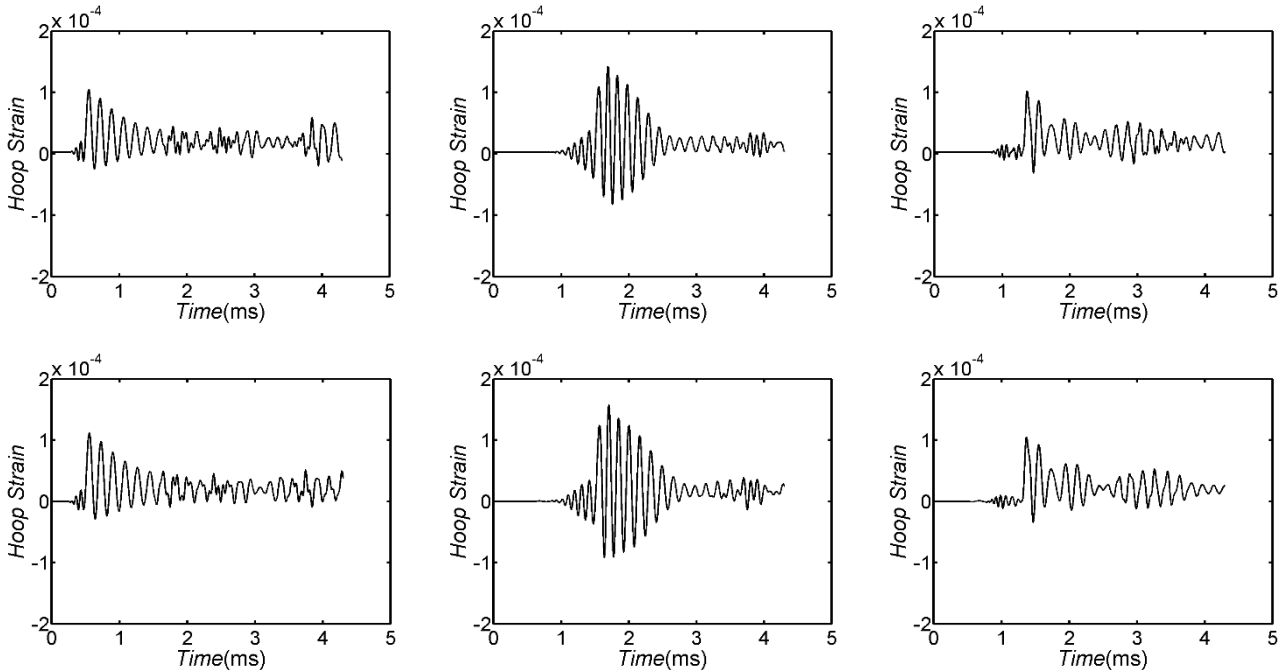


Fig. 7. Variation of hoop strain with time for a clamped-free tube under detonation loading. Top row; analytical solution. Bottom row; finite element results. Left column are for gauge 1, detonation velocity of 1699.7 m/s. Middle and right columns are for gauge 2, detonation velocities of 1478.8 and 1699.7 m/s, respectively

شکل ۷: تغییرات کرنش هوب نسبت به زمان برای یک پوسته گیردار-آزاد تحت بار دتونیشن. ردیف بالا؛ حل تحلیلی و ردیف پایین؛ نتایج اجزا محدود. ستون سمت چپ برای نتایج مربوط به گیج شماره ۱، سرعت دتونیشن ۱۶۹۹/۷ متر بر ثانیه، و ستون‌های میانی و سمت راست برای گیج شماره ۲، به ترتیب با سرعت‌های دتونیشن ۱۴۷۸/۸ و ۱۶۹۹/۷ متر بر ثانیه

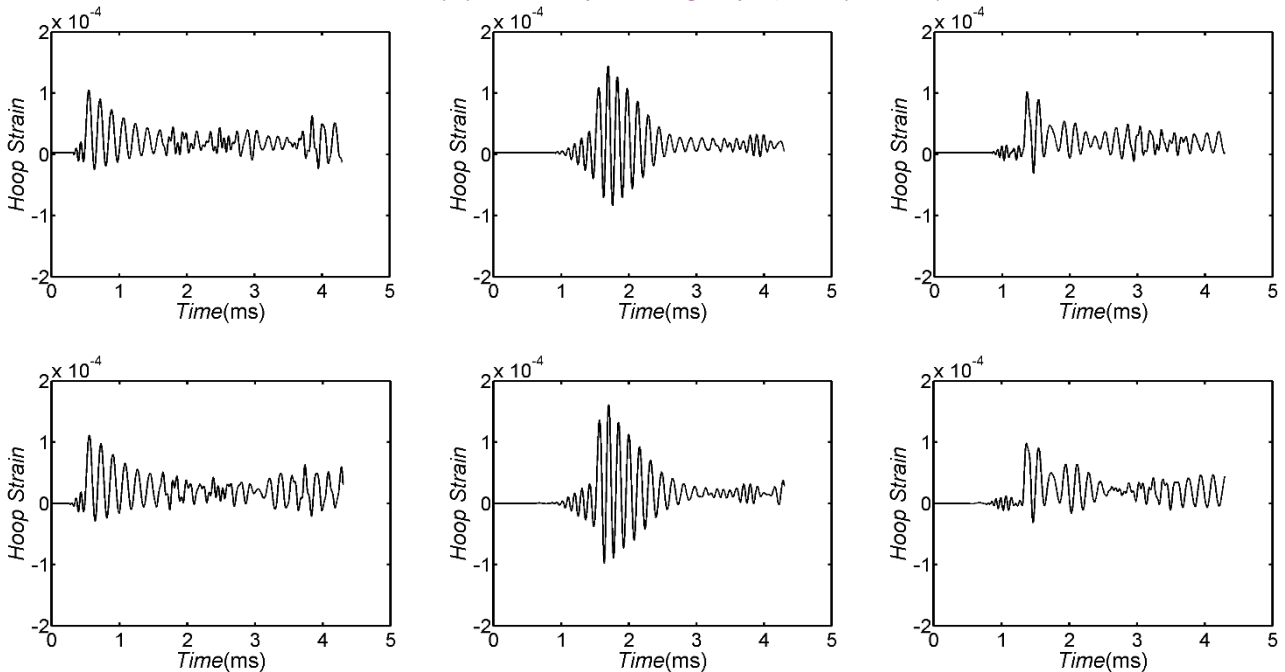


Fig. 8. Variation of hoop strain with time for a clamped-clamped tube under detonation loading. Top row; analytical solution. Bottom row; finite element results. Left column are for gauge 1, detonation velocity of 1699.7 m/s. Middle and right columns are for gauge 2, detonation velocities of 1478.8 and 1699.7 m/s, respectively

شکل ۸: تغییرات کرنش هوب نسبت به زمان برای یک پوسته دو سر گیردار تحت بار دتونیشن. ردیف بالا؛ حل تحلیلی و ردیف پایین؛ نتایج اجزا محدود. ستون سمت چپ برای نتایج مربوط به گیج شماره ۱، سرعت دتونیشن ۱۶۹۹/۷ متر بر ثانیه و ستون‌های میانی و سمت راست برای گیج شماره ۲، به ترتیب با سرعت‌های دتونیشن ۱۴۷۸/۸ و ۱۶۹۹/۷ متر بر ثانیه

با نتایج حاصل از داده‌های آزمایشگاهی برای لوله دو سر ساده گزارش شده در مرجع [۴] مقایسه گردید و تطبیق آن‌ها، حاکی از صحت روش ارائه شده است.

۲. الگوی رفتار ارتعاشی، دامنه موج اصلی، دامنه نوسان‌ها، و بسامد نوسان‌ها در لوله‌های گیردار که به کمک روش تحلیلی پیش‌بینی شده در مقایسه با نتایج شبیه‌سازهای اجزا محدود از دقت بسیار خوبی برخوردار است.

۳. دامنه پاسخ سازه‌ای گذرای لوله در نقاط انتهایی لوله (نزدیک به تکیه‌گاه، محلی که برهمکنش امواج برگشتی و امواج اولیه شدیدتر است) کاملاً متأثر از نحوه مقید کردن لوله و سرعت بارگذاری است. دامنه و الگوی تغییرات کرنش هوپ در نقاط ابتدایی لوله (دور از تکیه‌گاه)، در مقایسه با نقاط نزدیک به تکیه‌گاه، از وابستگی کمتری به نوع شرایط مرزی برخوردار است.

فهرست علائم

E	مدول الاستیسیته، Pa
G	مدول برشی، Pa
P_1	فشار اولیه، Pa
P_2	فشار حداکثر، Pa
P_3	فشار نهایی، Pa
P_{ext}	فشار خارجی، Pa
T	ضریب کاهش نمایی، s
V	سرعت بارگذاری، ms^{-1}
t	متغیر زمانی، s
x	متغیر مکانی، m
w	جابه‌جایی شعاعی، m
w_b	جابه‌جایی شعاعی ناشی از خمش، m
w_s	جابه‌جایی شعاعی ناشی از برش، m
\mathcal{E}_a	کرنش طولی
\mathcal{E}_θ	کرنش هوپ
γ_s	کرنش برشی
τ_s	تنش برشی
σ_θ	تنش هوپ
η	ضریب مشارکت مودال، s
K	ضریب تصحیح برش
λ	مقدار ویژه
ρ	چگالی، kgm^{-3}
ν	ضریب پواسون

دتونیشن به محل گیج، امواج پیشرو شامل امواج انبساطی و برشی از این محل عبور می‌کنند که نوسان‌های پیشرو را منجر می‌شود. هنگام رسیدن موج دتونیشن به محل گیج، یک افزایش ناگهانی در کرنش روی می‌دهد. موج خمشی نیز با فاصله زمانی بسیار اندک به دنبال موج دتونیشن شروع به حرکت کرده و از محل گیج عبور می‌کند. امواج الاستیک در اثر برخورد با انتهای لوله منعکس شده و باز می‌گردند؛ لذا بعد از مدت نسبتاً طولانی‌تری، نوسان کرنش به واسطه برگشت امواج سازه‌ای انعکاسی از انتهای لوله ادامه می‌یابد. همچنین امواج انعکاسی از انتهای لوله با رسیدن به ابتدای لوله مجدداً منعکس شده و همچنان به حرکت خود در لوله، ادامه می‌دهند.

نحوه و معیار مقایسه نتایج براساس چهار پارامتر اصلی به ترتیب اهمیت عبارتند از؛ ۱- الگوی کلی رفتار ارتعاشی، ۲- دامنه موج اصلی دتونیشن، ۳- بسامد نوسان‌ها، و ۴- دامنه نوسان‌ها.

در ادامه، مقایسه‌ای بین نتایج عددی و مقادیر پیش‌بینی شده توسط روش تحلیلی برای پوسته‌های دو سر گیردار و گیردار-آزاد انجام شده است. شکل‌های ۷ و ۸ این مقایسه‌ها را به ترتیب برای پوسته گیردار-آزاد و دو سر گیردار نمایش می‌دهند.

نتایج کرنش هوپ پوسته تحت دتونیشن با سرعت حرکت $1699/7$ متر بر ثانیه در گیج ۱ و سرعت‌های $1478/8$ و $1699/7$ متر بر ثانیه در گیج ۲ گزارش شده‌اند. در هر دو پوسته نتایج تحلیلی و عددی با لحاظ هر چهار معیار ذکر شده برای ارزیابی دقت و صحت، در هر دو گیج با دقت خوبی بر هم منطبق هستند.

در انتها می‌توان با مقایسه نتایج تحلیلی در شرایط مرزی مختلف (ردیف اول در شکل‌های ۶ تا ۸) به اثر نحوه مقید کردن پوسته بر پاسخ سازه، به ویژه در نقاط انتهایی، پی برد. همانطور که قابل مشاهده است، دامنه نوسان‌های کرنش و الگوی رفتار ارتعاشی برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف در گیج شماره ۲ متفاوت پیش‌بینی شده است. اثر بازگشت امواج انعکاسی و برهم نهی این امواج با امواج ارتعاشی اولیه در نقاط انتهایی پوسته، نزدیک به تکیه‌گاه، اثر قوی‌تری بر مقدار کرنش ایجاد شده دارد، هرچند، در گیج شماره ۱ که در نزدیکی ابتدایی پوسته قرار دارد این اثر کمتر بوده و تفاوت ایجاد شده در دامنه ناچیز است.

۶- نتیجه‌گیری

هدف از این مطالعه ارائه یک حل برای شرایط تکیه‌گاهی دو سر گیردار، دو سر ساده و گیردار-آزاد در مدل‌سازی پاسخ الاستودینامیک لوله‌ها به انفجارهای گازی است. نتایج حل ارائه شده دارای دقت بسیار خوبی در مقایسه با داده‌های آزمایشگاهی موجود در مراجع و شبیه‌سازی‌های اجزا محدود است. نتایج نشان داد که شرایط مرزی لوله تأثیر به‌سزایی در تعیین الگوی رفتار ارتعاشی گذرای لوله دارد. نتایج به دست آمده از مطالعه حاضر را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

۱. مقادیر کرنش به دست آمده به کمک روش تحلیلی ارائه شده

Civil Engineers, *Engineering Mechanics Division*, 5 (1965) 97–122.

- [2] H. Reismann, Response of a pre-stressed cylindrical shell to moving pressure load, in: S. Ostrach, R.H. Scanlon (Eds.), *Eighth Midwest Mechanics Conference*, Pergamon Press, Oxford, (1965) 349–363.
- [3] T. E. Simkins, Amplification of flexural waves in gun tubes, *J. Sound Vib.*, 172 (1994) 145–154.
- [4] W. M. Beltman, J. E. Shepherd, Linear elastic response of tubes to internal detonation loading, *J. Sound Vib*, 252 (2002) 617–655.
- [5] M. Mirzaei, K. Mazaheri, H. Biglari, Analytical modeling of the elastic response of tubes to internal detonation loading, *Int. J. Press. Vessels Piping*, 82(12) (2005) 883–895.
- [6] M. Mirzaei, H. Biglari, M. Salavatian, Analytical and numerical modeling of the transient elasto-dynamic response of a cylindrical tube to internal detonation loading, *Int. J. Press. Vessels Piping*, 83(7) (2006) 531–539.
- [7] M. Mirzaei, On amplification of stress waves in cylindrical tubes under internal dynamic pressures, *Int. J. Mech. Sci.*, 50(8) (2008) 1292–1303.
- [8] M. Mirzaei, Vibrational response of thin tubes to sequential moving pressures, *Int. J. Mech. Sci.*, 59 (2012) 44–54.
- [9] M. Mirzaei, M. J. Torkaman Asadi, R. Akbari, On vibrational behavior of pulse detonation engine tubes, *Aerospace Science and Technology*, 47 (2015) 177–190.
- [10] T. W. Chao, J. E. Shepherd, comparison of fracture response of preflawed tubes under internal static and detonation loading, *Journal of Pressure Vessel Technology*, *Transactions of the ASME*, 126 (2004) 345–353.
- [11] W. Soedel, *Vibrations of Shells and Plates*, 3rd Edition, Marcel Dekker Inc., New York, USA, 2004.
- [12] M. Mirzaei, Finite element analysis of deformation and fracture of cylindrical tubes under internal moving pressures, in: D. Moratal (Ed.) *Finite Element Analysis*, IntechOpen, 2010.

φ شکل مود
 ω بسامد ویژه، rad/s

ضمیمه

بسط معادلات (۱۷-۱۵) برای تکیه‌گاه دو سر ساده:

$$\omega_n^2 = -\frac{\lambda_n^4 - B_3 \lambda_n^2 + B_4}{B_4 \lambda_n^2 - B_2} \quad (\text{ض-۱})$$

$$\eta_n(t_1) = \frac{R_4 \lambda_n^2 - B_2}{Y_n \lambda_n \omega_n^2} (1 - \cos(\lambda_n L)) +$$

$$\frac{\Omega_n T (\Lambda_2 - \Lambda_3)}{Y_n \lambda_n (\omega_n^2 - \Omega_n^2) (1 + \Omega_n^2 T^2)} \sin(\Omega_n t_1) \quad (\text{ض-۲})$$

$$- \frac{(\Lambda_3 - \Lambda_1) + (\Lambda_2 - \Lambda_1) \Omega_n^2 T^2}{Y_n \lambda_n (\omega_n^2 - \Omega_n^2) (1 + \Omega_n^2 T^2)} \cos(\Omega_n t_1)$$

$$+ \frac{\Omega_n^2 T^4 (\Lambda_2 - \Lambda_3)}{Y_n \lambda_n (1 + \Omega_n^2 T^2) (1 + \omega_n^2 T^2)} e^{-\Lambda_3/T} + \frac{(\Lambda_3 - \Lambda_1)}{Y_n \lambda_n \omega_n^2}$$

$$+ \frac{(\Lambda_3 - \Lambda_2) \Omega_n^2 T}{Y_n \lambda_n \omega_n (\omega_n^2 - \Omega_n^2) (1 + \omega_n^2 T^2)} \sin(\omega_n t_1) +$$

$$\left(\frac{(\Lambda_3 - \Lambda_1) + (\Lambda_2 - \Lambda_1) \Omega_n^2 T^2}{Y_n \lambda_n (\omega_n^2 - \Omega_n^2) (1 + \Omega_n^2 T^2)} - \frac{\Omega_n^2 T^4 (\Lambda_2 - \Lambda_3)}{Y_n \lambda_n (1 + \Omega_n^2 T^2) (1 + \omega_n^2 T^2)} - \frac{(\Lambda_3 - \Lambda_1)}{Y_n \lambda_n \omega_n^2} \right) \cos(\omega_n t_1)$$

$$\eta_n(t_2) = \left[\eta_n \left(\frac{L}{V} \right) \right]_{\text{phase1}} - \frac{\Lambda_3}{Y_n \lambda_n \omega_n^2} (1 - \cos(\lambda_n L)) \cos(\omega_n t_2) +$$

$$\left(\frac{d\eta_n \left(\frac{L}{V} \right)}{dt_1} \right)_{\text{phase1}} \left[\frac{\sin(\omega_n t_2)}{\omega_n} + \frac{\Lambda_3}{Y_n \lambda_n \omega_n^2} (1 - \cos(\lambda_n L)) \right] \quad (\text{ض-۳})$$

$$\frac{(\Lambda_2 - \Lambda_3) \Omega_n^2 T^3 e^{-(L+Vt_1)/TV}}{Y_n \lambda_n (1 + \omega_n^2 T^2) (1 + \Omega_n^2 T^2)} (-1 + e^{L/TV} \cos(\lambda_n L)) (-T \omega_n + e^{h/TV} (T \omega_n \cos(\omega_n t_1) - \sin(\omega_n t_1)))$$

که در آن

$$\Omega_n = \frac{n\pi V}{L} \quad (\text{ض-۴})$$

$$Y_n = -\frac{L}{2} (B_1 \lambda_n^2 - B_2) \quad (\text{ض-۵})$$

به دلیلی پیچیدگی و جلوگیری از اشتباه محاسباتی، انتگرال‌گیری‌های ضرایب مشارکت مودال برای تکیه‌گاه‌های گیردار توسط نرم‌افزار تجاری متمتیکا^۱ انجام شده و مستقیم در کد نوشته شده توسط نویسندگان قرار گرفته است.

مراجع

- [1] S. Tang, Dynamic response of a tube under moving pressure, in: Proceedings of the American Society of

1 Mathematica V.10

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

H. Ramezani, M. Mirzaei, Study on Effect of Boundary Conditions in Transient Dynamic Stress Analysis of Thick Cylindrical Shells under Internal Moving Pressure, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 50(5) (2018) 951-960.

DOI: 10.22060/mej.2017.12283.5304



