



پایداری پره چرخان سرعت متغیر با در نظر گرفتن حرکت عرضی خارج از صفحه

هادی آروین بروجنی*

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۱ بهمن ۱۳۹۵
بازنگری: ۲۹ فروردین ۱۳۹۶
پذیرش: ۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۶
ارائه آنلاین: ۱۷ خرداد ۱۳۹۶

کلمات کلیدی:

تشدید پارامتری اصلی
روش مقیاس‌های چندگانه
پره‌های چرخان
فرمولاسیون دقیق هندسی
نیروی کریولیس

چکیده: در این مقاله تشدید پارامتری اصلی در پره‌های چرخان سرعت متغیر بررسی می‌گردد. در مدل مورد بررسی وابستگی حرکت‌های عرضی خارج از صفحه-محوری ناشی از نیروی کریولیس در نظر گرفته شده است. معادلات حرکت حاکم، معادلات موجود در مقالات بر اساس فرمولاسیون دقیق هندسی برای پره‌های بدون اثر تغییرشکل برشی می‌باشد. سرعت چرخش پره دارای مقدار میانگین ثابت در نظر گرفته شده، که این سرعت ثابت با تغییرات هارمونیک کوچکی مختل شده است. فرکانس تغییرات این اغتشاش وارد شده، دو برابر یکی از فرکانس‌های طبیعی عرضی خارج از صفحه و یا محوری پره در نظر گرفته شده است و بدین ترتیب باعث تشدید پارامتری اصلی خواهد گردید. روش مستقیم مقیاس‌های چندگانه جهت مطالعه‌ی ناپایداری دینامیکی ایجاد شده توسط تشدید پارامتری اصلی به کار گرفته شده است. با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، رابطه‌ای بسته جهت مشخص نمودن مرز منطقه‌ی پایداری تحت شرایط تشدید پارامتری اصلی، به دست آمده است. نتایج حاضر با نتایج موجود در مقالات مقایسه و اعتبارسنجی شده است. پس از اعتبارسنجی نتایج، مطالعه‌ی موردی جهت شفاف‌سازی اثر سرعت چرخش و شماره‌ی مود بر منطقه‌ی پایداری پارامتری، انجام پذیرفته است.

۱- مقدمه

پره‌های چرخان یکی از مهم‌ترین بخش‌های تشکیل دهنده‌ی سازه‌های هوافضایی، دریایی و بادی می‌باشند. کارکرد این نوع سازه‌ها، به کارکرد پره‌های چرخان آنها بستگی دارد. بنابراین، جهت بهبود کیفیت کارایی این سازه‌ها، از هرگونه ارتعاش با دامنه‌ی بزرگ در این پره‌ها باید جلوگیری شود. تشدید پارامتری، دارای نقش کلیدی در به وجود آوردن ارتعاش با دامنه‌ی بزرگ در پره‌ها می‌باشد. بنابراین، طراحان و مهندسان مکانیک باید از احتمال رخ دادن این پدیده آگاه باشند. تشدید پارامتری پدیده‌ای فیزیکی است که در آن تحریک خارجی، در یک فرکانس مشخص، تغییراتی پریودیک در یکی از پارامترهای سیستم ایجاد می‌نماید [۱]. اگر مدل ریاضی سازه، دارای ضریبی متغیر با زمان با رفتار پریودیک در زمان باشد، تشدید پارامتری می‌تواند رخ دهد. در این حالت، اگر رابطه‌ی میان فرکانس تحریک، Ω ، و یکی از فرکانس‌های طبیعی، ω ، به صورت $\Omega = 2/m \cdot \omega, m = 1, 2, 3, \dots$ باشد، آنگاه تحریک پارامتری اتفاق می‌افتد. زمانی که فرکانس ضریب پریودیک دو برابر یکی از فرکانس‌های طبیعی سیستم باشد، یعنی $m = 1$ ، تحریک پارامتری مرتبه اول یا به عبارت دیگر تحریک پارامتری اصلی اتفاق می‌افتد [۱].

تشدیدهای پارامتری مرتبه بالاتر در مقادیری برابر فرکانس‌های طبیعی

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: hadi.arvin@sku.ac.ir

سیستم ($m = 2$) و یا ضریب‌های دیگر فرکانس‌های طبیعی سیستم ($m = 3, 4, \dots$) اتفاق می‌افتند. در تشدید داخلی مستقیم، پاسخ فرکانسی همیشه با فرکانس تحریک برابر است. با این وجود، بدون در نظر گرفتن اینکه چه نوع تشدید پارامتری فعال شده است، پاسخ فرکانسی در تشدید پارامتری در مجاورت فرکانس طبیعی است [۱]. تعدادی از پژوهشگران نیز به گسترش استفاده از تشدیدگرهای پارامتری به عنوان تقویت کننده‌های مکانیکی، در گستره‌ی کوچکی از فرکانس‌ها، پرداخته‌اند [۲].

با توجه به موارد ذکر شده و بر اساس معادلات حرکت پره‌های چرخان تشدید پارامتری اصلی در پره‌ها، در صورتی که پره‌ها دارای سرعت چرخان متغیر باشند، می‌تواند اتفاق بیفتد. پژوهشگران بسیاری بر روی تشدید پارامتری سازه‌های پیوسته کار کرده‌اند. چین و نایفه [۳]، به مطالعه‌ی پاسخ غیرخطی تیر یکسر ساده-یکسر گیردار، تحت تحریک پارامتری اصلی مودهای اول و دوم و تشدید بین آنها پرداختند. آنها بدین منظور روش مقیاس‌های چندگانه را به صورت مستقیم بر روی معادلات پاره‌ای انتگرالی غیرخطی سازه و شرایط مرزی متناظرش، اعمال نموده و بدین ترتیب معادلات مدولاسیون مرتبط با فاز و دامنه‌ی مودهای اول و دوم را به دست آوردند. آنها ادعان داشتند که حل‌های مرتبط با نقاط تعادل معادلات مدولاسیون به دست آمده که شامل حل‌های بدیهی و غیربدیهی بودند، ممکن است در بارگذاری‌های طولی مختلف، انشقاق‌های فوق و یا زیر بحرانی هوفپ را تجربه کنند.

حامل سیالی از جنس ویسکوالاستیک را برای مطالعه‌ی موردی انتخاب نموده و منحنی‌های پاسخ فرکانسی و نقاط انشقاق و همچنین مناطق پایداری و ناپایداری حل‌های بدیهی و غیر بدیهی را نیز بررسی و مشخص نمودند. ساهو و همکاران [۱۰] به مطالعه‌ی ارتعاشات عرضی غیرخطی تیر اویلر-برنولی متحرک با تکیه‌گاه‌های ساده، تحت تحریک پارامتری اصلی در حضور تشدید داخلی با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه که به طور مستقیم بر معادلات پاره‌ای غیرخطی انتگرالی سیستم اعمال شد، پرداختند. ایشان پاسخ ماندگار غیرخطی سیستم و پایداری و انشقاق پاسخ تیر را مورد تحلیل قرار دادند.

در میان پژوهش‌های انجام شده بر روی سازه‌های چرخان، برخی از پژوهشگران به بررسی پایداری تیرها و پره‌های چرخان پرداخته‌اند. کرسپو داسیلوا و هاجز [۱۱ و ۱۲] به مطالعه‌ی پاسخ دینامیکی و پایداری تیرهای چرخان مانند پره‌های هلیکوپتر با در نظر گرفتن اثرات نیروهای آیرودینامیکی به صورت تحلیلی پرداختند. آن‌ها اصل همپلتون را برای به دست آوردن معادلات حاکم برای تیرهای با و بدون قابلیت تغییر طول با پیش‌پیچش اولیه متغیر در طول تیر، به کار گرفتند. ایشان دریافتند که تأثیرگذارترین ترم‌های غیرخطی مرتبه سوم، غیرخطی‌های هندسی سازه‌ی در معادله‌ی پیچش می‌باشند. کرسپو داسیلوا [۱۳] به بررسی پایداری پره‌های چرخان با اغتشاش بی‌نهایت کوچک حول موقعیت تعادل تیر مذکور پرداخت. تحلیل ارائه شده منجر به نتایج بسیار دقیق برای موقعیت تعادل و مقادیر و بردارهای ویژه‌ی متناظر با اغتشاش اعمال شده حول موقعیت تعادل گردید. ساراویا و همکاران [۱۴] به بررسی پایداری دینامیکی تیری چرخان با در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی با استفاده از روش بلوتین پرداختند. آن‌ها نشان دادند که با افزایش سرعت چرخش زاویه‌ای، منطقه‌ی ناپایداری به سمت راست جابجا می‌شود و اندازه‌ی منطقه‌ی ناپایداری نیز تحت تأثیر سرعت چرخش تغییر خواهد کرد. به علاوه، مرزهای ناپایداری با تغییرات جهت‌گیری زاویه‌ای الیاف‌های لایه‌ها تغییر خواهد نمود. تورهان و بولت [۱۵] معادلات پاره‌ای غیرخطی انتگرالی حاکم بر تیر چرخان را برای بررسی ارتعاشات خمشی غیرخطی صفحه‌ای به دست آوردند. آن‌ها روش اغتشاشات را بر مدل‌های یک و دو درجه آزادی به دست آمده توسط روش جداسازی گلرکین، جهت به دست آوردن پاسخ فرکانسی و فرکانس‌های وابسته به دامنه اعمال نمودند. والورده و گارچا-والجو [۱۶] با استفاده از روش فرمولاسیون مختصات گرهی، معادلات حاکم بر تیرهای چرخان را به دست آوردند. آن‌ها همچنین معادلات حاکم را بر اساس فرمولاسیون غیرخطی دقیق هندسی و بر مبنای تئوری کوزرات برای میله‌ها نیز به دست آوردند. ایشان به بررسی پایداری تیر چرخان با بررسی هر دو مدل ارائه شده پرداختند. آن‌ها با بررسی فرمولاسیون ارائه شده بر اساس مختصات گرهی به پیکره‌بندی تعادل جدیدی دست یافتند که با پیکره‌بندی سیستم در حالت تعادل استاتیکی اولیه (پیکره‌بندی سیستم در موقعیت اولیه بدون تنش) متفاوت بود. آن‌ها با بررسی پایداری این پیکره‌بندی تعادلی جدید دریافتند

کودیس و واکاکیس [۴] به مطالعه‌ی دینامیک نوسان‌گرهای یک درجه آزادی خطی تحت تحریک پارامتری پرداختند. آن‌ها راه حلی تحلیلی بر اساس مجزاسازی دامنه و فاز پاسخ ارائه نمودند که منجر به مجموعه‌ی معادلات دیفرانسیل مرتبه اولی برای به دست آوردن دامنه و فاز حرکت می‌گردید. ایشان روش اغتشاشات را برای بررسی پایداری این مجموعه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول استفاده نمودند. قایش و بالار [۵] به بررسی ارتعاشات غیرخطی و پایداری پارامتری تیر رایلی ویسکوالاستیک متحرک طولی با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه پرداختند. در شرایط تحریک پارامتری اصلی، سیستم ارائه شده‌ی آنها دو نقطه‌ی انشقاق فوق بحرانی را تجربه کرد. ایشان نشان دادند که افزایش ضریب ویسکوزیته، دامنه‌ی ارتعاشات و منطقه‌ی ناپایداری حل بدیهی در پاسخ فرکانسی را کاهش داده و افزایش اینرسی چرخشی، باعث افزایش منطقه‌ی ناپایداری پاسخ بدیهی سیستم خواهد گردید. قایش و همکاران [۶] به بررسی ارتعاشات و پایداری تیرهای کامپوزیتی چندلایه‌ی متحرک طولی با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه پرداختند. آن‌ها معادلات حرکت را بر اساس تئوری تیرهای کلاسیک چندلایه و برای سرعت طولی متغیر با زمان با استفاده از قانون دوم نیوتن و روابط ساختاری به دست آوردند. ایشان مرزهای پایداری سیستم نزدیک تشدید را با استفاده از معیار روٹ-هورویتز تعیین نمودند. سپس، مطالعه‌ی موردی را جهت بررسی تأثیر سرعت متوسط و دامنه‌ی نوسانات سرعت متوسط بر روی پاسخ ارتعاشی، فرکانس‌های طبیعی و مرزهای پایداری سیستم انجام دادند. چن و همکاران [۷] به بررسی دینامیک انشقاق و آشوبناک کابل‌های معلق با غیرخطی‌های مرتبه دوم و سوم، تحت تحریک خارجی و پارامتری با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه پرداختند. ایشان روش شبه قوس را جهت محاسبه و تعیین شاخه‌های مختلف حل حول نقطه تعادل به کار گرفته و سپس با بررسی مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین به ارزیابی پایداری این حل‌ها پرداختند. آن‌ها نشان دادند که حل‌های به دست آمده از تعادل، انشقاق‌های مختلفی مانند، هوپف را تجربه می‌نمایند. چن و تانگ [۸] به بررسی ناپایداری پارامتری تیرهای ویسکوالاستیک شتاب گیرنده‌ی طولی با در نظر گرفتن اثرات کشش متغیر طولی پرداختند. آن‌ها روش مقیاس‌های چندگانه را در کنار روش تربیع دیفرانسیلی، جهت اعتبارسنجی نتایج روش مقیاس‌های چندگانه، برای به دست آوردن مرز پایداری به کار گرفتند. ایشان به بررسی اثرات صلب بودن تکیه‌گاه‌ها، ضریب میرایی، سرعت متوسط طولی و سفتی تیر بر روی مرزهای ناپایداری پرداختند. ایشان دریافتند که در نظر گرفتن تغییرات کشش طولی، آستانه‌ی متناظر با ناپایداری دامنه‌ی نوسانات سرعت محوری را برای یک فرکانس نوسانات سرعت محوری مفروض، کاهش و گستره‌ی ناپایداری فرکانسی را در یک دامنه‌ی مشخص، افزایش می‌دهد. اوژان و پاکدمیرلی [۹] مدل ارتعاشی کلی عمومی سیستمی پیوسته دارای غیرخطی مرتبه سوم را با تحریک پارامتری دلخواه در نظر گرفتند. آن‌ها روش مقیاس‌های چندگانه را برای محاسبه‌ی حل تحلیلی تقریبی برای سیستمی تحت تحریک پارامتری اولیه به کار گرفتند. ایشان لوله‌ی

سیستم را به مجموعه‌ای از معادلات مدولاسیون مرتبه اول تبدیل می‌نماید. معادلات مدولاسیون حاصل، جهت بررسی پایداری و ناپایداری حل‌های بدیهی و غیربدیهی سیستم مورد استفاده قرار می‌گیرند. نمودار انشقاق، مناطق پایداری و ناپایداری پاسخ سیستم تحت تحریک پارامتری را، به صورت تابعی از دامنه‌ی تحریک و پارامتر نزدیکی برای مودهای متفاوت و سرعت‌های مختلف چرخش مشخص می‌نماید.

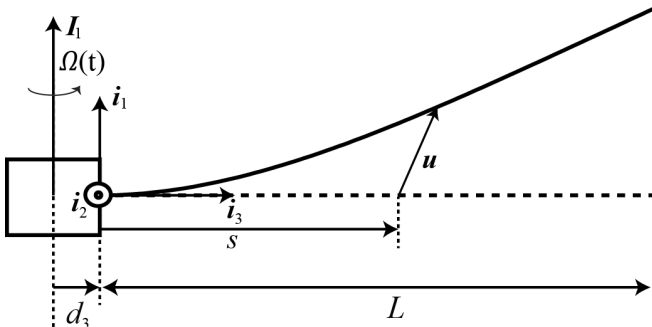


Fig. 1. A schema of undeformed (dashed-lines) and deformed (solid-line) rotating blade.

شکل ۱: شمای بدون تغییرشکل یافته (خط چین) و تغییرشکل یافته (خط پر) پره‌ی چرخان

۲- معادلات حرکت

شماتیک پره‌ی چرخان مورد بررسی، در شکل ۱ نشان داده شده است. پارامترهای هندسی d_p و L به ترتیب شعاع روتور، و طول پره را مشخص می‌نمایند.

پره‌ی نشان داده شده با سرعت $\Omega(t)$ حول محور I_1 می‌چرخد. S متغیر مکانی است که موقعیت هر سطح مقطع در جهت طول تیر را از سطح مقطع متصل به روتور مشخص می‌نماید.

شکل تغییر فرم یافته‌ی پره نیز به صورت خط پر در شکل ۱ نشان داده شده است. با در نظر گرفتن حرکت‌های عرضی خارج از صفحه و محوری، بردار تغییرشکل سطح مقطعی در مکان S ، به صورت $\mathbf{u} := \mathbf{u}(S, t) = u_p(S, t)\mathbf{i}_p + u_r(S, t)\mathbf{i}_r$ خواهد بود که در این رابطه، u_r تغییرمکان عرضی خارج از صفحه در راستای محور \mathbf{i}_p و u_p تغییرمکان محوری در راستای محور \mathbf{i}_r می‌باشد.

همان‌گونه که در فرضیات مسأله ذکر شد، به دلیل وابستگی موجود بین حرکت‌های عرضی خارج از صفحه و محوری این دو حرکت در نظر گرفته شده است و از آنجایی که حرکت‌های عرضی و پیچشی هیچ‌گونه وابستگی در قسمت خطی خود با دو حرکت در نظر گرفته شده ندارند، این دو حرکت در نظر گرفته نشده‌اند (معادلات (۲۳) تا (۲۶) از مرجع [۱۸] مشاهده گردد). معادلات خطی سازی شده‌ی حرکت با فرض سطح مقطع ثابت به صورت روابط (۱) و (۲) خواهد بود [۱۸]:

که این موقعیت تعادلی جدید پایدار بوده و می‌تواند سیستم را در هنگام ارتعاش وادار به ارتعاش حول خود نماید، ولی با مطالعه فرمولاسیون ارائه شده بر مبنای تئوری کوزرات مشخص نمودند که پیکره‌بندی تعادلی جدید به دست آمده در روش گرهی واقعی نیست. آروین و بختباری‌نژاد [۱۷] به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی تیری چرخان با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه در حالت وجود و یا نبود تشدید داخلی پرداختند. معادلات مورد تحلیل قرار گرفته بر مبنای روابط کرنش-تغییرمکان غیرخطی فون-کارمن استخراج شده و دارای غیرخطی‌های هندسی مرتبه دوم و سوم بودند. آن‌ها به بررسی پایداری مودهای غیرخطی به دست آمده در حالت تشدید داخلی میان مودهای عرضی با یکدیگر و یا بین مودهای عرضی و طولی پرداختند. لاکاربونارا و همکاران [۱۸] معادلات حاکم بر پره‌های چرخان ایزوتروپ را بر اساس فرمولاسیون غیرخطی دقیق هندسی و بر مبنای تئوری کوزرات برای میله‌ها به دست آوردند. آروین و همکاران [۱۹] روش مقیاس‌های چندگانه را به صورت مستقیم بر معادلات مرتبه سوم به دست آمده از بسط تیلور که بر روی معادلات ارائه شده بر اساس فرمولاسیون غیرخطی دقیق هندسی توسط لاکاربونارا و همکاران [۱۸] به دست آمده بود، اعمال و منحنی‌های تغییرات فرکانس‌های طبیعی خمشی بر حسب دامنه را رسم نمودند. آن‌ها نشان دادند که نوع غیرخطی پره‌های چرخان، نرم‌شوندگی و سخت‌شوندگی، کاملاً وابسته به سرعت چرخش پره می‌باشد و در سرعت‌های خاصی نوع غیرخطی تغییر می‌کند. آروین و لاکاربونارا [۲۰] تحلیل مشابهی را برای پره‌های کامپوزیتی انجام دادند. آروین و همکاران [۲۱] به بررسی تشدید پارامتری اصلی در تیرهای چرخان اوپلر-برنولی با در نظر گرفتن رابطه‌ی کرنش-تغییر مکان فون-کارمن پرداختند. ایشان معادلات عرضی و طولی را تنها در نظر گرفتند و از آنجا که وابستگی بین این دو حرکت در قسمت خطی معادلات نبود نتوانستند مودهای عرضی را نیز با تحریک پارامتری اصلی مورد بررسی قرار دهند و بنابراین تنها به تحریک پارامتری اصلی حرکت محوری پرداختند.

همان‌گونه که از مقالات مرور شده مشخص گردید، مطالعات انجام شده بر روی تشدید پارامتری در زمینه‌ی پره‌های چرخان با سرعت چرخش متغیر بسیار کم می‌باشد در صورتی که حضور گسترده این سازه در صنایع مختلف بسیار تعیین کننده است و بدین ترتیب لزوم بررسی آن کاملاً مشخص است. لذا در این مقاله، تشدید پارامتری اصلی پره‌های چرخان سرعت متغیر، با وابستگی حرکت‌های عرضی خارج از صفحه و محوری مورد بررسی قرار گرفته است. وابستگی اشاره شده به دلیل در نظر گرفتن اثر نیروی کریولیس می‌باشد. مدل مورد استفاده بر اساس فرمولاسیون دقیق هندسی و برای پره‌های بدون اثر تغییر شکل برشی می‌باشد [۱۸]. روش مقیاس‌های چندگانه جهت بررسی دینامیک تحریک پارامتری اصلی، به صورت مستقیم بر معادلات حرکت سیستم اعمال گردیده است. نتایج به دست آمده توسط روش مقیاس‌های چندگانه با استفاده از نتایج موجود در مقاله مشابه [۲۱] اعتبارسنجی گردیده است. روش مقیاس‌های چندگانه معادلات پاره‌ای

$$u_3^0 + \frac{1}{\gamma^2}(r + s + u_3^0) = 0, \quad (5)$$

$$u_3^0(0) = 0, \quad u_3^0(1) = 0$$

که در این رابطه $r = d_r / L$ و $\gamma = \lambda_r / \lambda_a$ و دامنه‌ی سرعت چرخش میانگین می‌باشد. با حل این رابطه تغییر مکان طولی ناشی از پیش تنش به صورت رابطه‌ی (۶) به دست می‌آید:

$$u_3^0 = \frac{(1 + r\gamma \sin(\gamma))}{(\gamma \cos(\gamma))} \sin(\gamma x) + r \cos(\gamma x) - x - r \quad (6)$$

۳- آنالیز دینامیکی

۳-۱- روش مقیاس‌های چندگانه

سرعت چرخش متغیر، در پره‌های چرخان می‌تواند در هنگام شتاب‌گیری و کاهش شتاب و یا حتی به دلایل خارجی مانند نیروهای آبرولاستیسیته به وجود آید. مطابق مطالب ذکر شده در مقدمه، معادلات حرکت با ضرایب متغیر پریودیک زمانی، کاندید قرار گرفتن در معرض تشدید پارامتری می‌باشند. اگر پره با سرعت متغیری به شکل تابعی با مقدار متوسط ثابت که توسط تغییرات هارمونیک مغشوش شده است، یعنی به فرم $\lambda_R(t) = \lambda_r (1 + \hat{\Omega} \cos \hat{\Omega}_f t)$ بچرخد، مطابق روابط (۳) و (۴)، در این شرایط پره چرخان می‌تواند تحت تحریک پارامتری قرار گیرد. در این رابطه $\hat{\Omega}_f$ و $\hat{\Omega}$ به ترتیب دامنه‌ی تحریک پارامتری و فرکانس متناظر بدون بعد آن می‌باشند.

روش مقیاس‌های چندگانه به عنوان روش حل جهت تحلیل دینامیکی مسأله انتخاب گردیده است. در این روش، فرض می‌گردد که تحریک پارامتری به صورت پریشیدگی حول حل خطی سیستم می‌باشد [۱]. بنابراین مرتبه‌بندی معادلات حرکت، یکی از مراحل کلیدی در روش مقیاس‌های چندگانه است. به منظور داشتن اثر تحریک پارامتری به صورت پریشیدگی در حل خطی، ترم‌های متناظرش باید در پارامتر کوچک بدون بعد ε ضرب گردند [۱]. ε ، پارامتر مصطلح مورد استفاده در تئوری اغتشاشات جهت مرتبه‌بندی معادلات و حل متناظرشان می‌باشد [۱]. بدین ترتیب سرعت چرخش به صورت $\lambda_R(t) = \lambda_r (1 + \varepsilon \hat{\Omega} \cos \hat{\Omega}_f t)$ در نظر گرفته می‌شود. حل‌های مرتبه دوم عرضی خارج از صفحه و محوری متناظر به ترتیب به صورت روابط (۷) و (۸) در نظر گرفته می‌شود [۱]:

$$u_2(s, t) := u_2(s, T_0, T_1) = \varepsilon u_{2,0}(s, T_0, T_1) + \varepsilon^2 u_{2,1}(s, T_0, T_1) + O(\varepsilon^3) \quad (7)$$

$$u_3(s, t) := u_3(s, T_0, T_1) = \varepsilon u_{3,0}(s, T_0, T_1) + \varepsilon^2 u_{3,1}(s, T_0, T_1) + O(\varepsilon^3) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \rho A \partial_{tt} u_2 - 2\rho A \Omega(t) \partial_t u_3 - \rho A \Omega(t)^2 u_2 - \rho A \dot{\Omega}(t) u_3 \\ & + EJ_{11} [S'(s) \{S''(s) \partial_s u_2 + 2S'(s) \partial_{ss} u_2 + S(s) \partial_{sss} u_2\} \\ & + S(s) \{S'''(s) \partial_s u_2 + 3S''(s) \partial_{ss} u_2 + 3S'(s) \partial_{sss} u_2 \\ & + S(s) \partial_{ssss} u_2\}] + EAS'(s) \partial_s u_2 - (EA - EAS(s)) \partial_{ss} u_2 \\ & - \rho J_{11} [2S(s) S'(s) \partial_{ts} u_2 + S(s)^2 \partial_{tss} u_2] = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \rho A \partial_{tt} u_3 + 2\rho A \Omega(t) \partial_t u_2 + \rho A \dot{\Omega}(t) u_2 \\ & - \rho A \Omega(t)^2 u_3 - EA \partial_{ss} u_3 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

که در این رابطه $S(s) = 1 / (1 + u_r')$ ، وارون کشش پیش تنش و $u_r' := u_r'(s)$ نشان‌دهنده‌ی تغییر شکل محوری استاتیکی ناشی از نیروی گریز از مرکز پیش تنش می‌باشد. ρA و ρJ_{11} به ترتیب جرم پره بر واحد طول و ممان اینرسی جرمی حول \hat{i}_1 می‌باشند که در این روابط، ρ ، چگالی جرمی، J_{11} ، گشتاور اینرسی سطح حول \hat{i}_1 و A ، سطح مقطع پره می‌باشند. EJ_{11} و EA به ترتیب سفتی محوری و خمشی خارج از صفحه می‌باشند که در این روابط، E ، مدول الاستیسیته می‌باشد. علامت ∂ نشان‌دهنده‌ی مشتق پاره‌ای متغیر پس از این علامت نسبت به پارامتری که زیرنویس آن شده است بوده و $\{ \}$ و $\{ \}^{\dot{}}$ به ترتیب نشان‌دهنده‌ی مشتق نسبت به پارامترهای s و t می‌باشند.

با در نظر گرفتن $\hat{s} = \frac{s}{L}$ و $\hat{t} = \omega_f t$ که در این رابطه $\omega_f = \sqrt{EJ_{11} / \rho AL^3}$ می‌باشد و $\hat{u}_r = u_r / L$ ، $\hat{u}_r = u_r / L$ و $\chi(\hat{s}) = S(s/L)$ معادلات بدون بعد عرضی خارج از صفحه و محوری برای پره‌های چرخان سرعت متغیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \partial_{tt} u_2 - 2\lambda_R(t) \partial_t u_3 - \lambda_R(t)^2 u_2 - \dot{\lambda}_R(t) u_3 \\ & + \lambda_{b,1}^2 \chi'(s) \chi''(s) \partial_s u_2 + 2\lambda_{b,1}^2 \chi'(s)^2 \partial_{ss} u_2 \\ & + 4\lambda_{b,1}^2 \chi'(s) \chi(s) \partial_{sss} u_2 + \lambda_{b,1}^2 \chi(s) \chi'''(s) \partial_s u_2 \\ & + 3\lambda_{b,1}^2 \chi(s) \chi''(s) \partial_{ss} u_2 + \lambda_{b,1}^2 \chi(s)^2 \partial_{ssss} u_2 \\ & + \lambda_a^2 \chi'(s) \partial_s u_2 - \lambda_a^2 \partial_{ss} u_2 + \lambda_a^2 \chi(s) \partial_{sss} u_2 \\ & - 2\chi(s) \chi'(s) \partial_{tss} u_2 / \alpha_1^2 - \chi(s)^2 \partial_{tss} u_2 / \alpha_1^2 = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \partial_{tt} u_3 + 2\lambda_R(t) \partial_t u_2 + \dot{\lambda}_R(t) u_2 \\ & - u_3 \lambda_R(t)^2 - \lambda_a^2 \partial_{ss} u_3 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

که در این روابط $\lambda_{b,1}^2 = EJ_{11} / (\rho AL^3 \omega_f^2)$ ، $\lambda_R(t) = \Omega(t) / \omega_f$ ، $\lambda_a^2 = EA / (\rho AL^3 \omega_f^2)$ ، $\alpha_1^2 = \rho AL^3 / (\rho J_{11})$ می‌باشند.

تغییر شکل استاتیکی ناشی از نیروی گریز از مرکز، یعنی u_r' نیز با استفاده از معادله‌ی ارائه شده در مرجع [۱۸]، قابل محاسبه است. فرم بدون بعد این معادله‌ی دیفرانسیل معمولی و شرایط مرزی متناظرش، به صورت رابطه‌ی (۵)، به دست می‌آید:

$$D_0^2 u_{2,1} - 2\lambda_r D_0 u_{3,1} - \lambda_r^2 u_{2,1} + \lambda_{b,1}^2 \chi'(s) \chi''(s) \partial_s u_{2,1} + 2\lambda_{b,1}^2 \chi'(s)^2 \partial_{ss} u_{2,1} + 4\lambda_{b,1}^2 \chi'(s) \chi(s) \partial_{sss} u_{2,1} + \lambda_{b,1}^2 \chi(s) \chi'''(s) \partial_s u_{2,1} + 3\lambda_{b,1}^2 \chi(s) \chi''(s) \partial_{ss} u_{2,1} + \lambda_{b,1}^2 \chi(s)^2 \partial_{ssss} u_{2,1} + \lambda_a^2 \chi'(s) \partial_s u_{2,1} - \lambda_a^2 \partial_{ss} u_{2,1} + \lambda_a^2 \chi(s) \partial_{ss} u_{2,1} - \frac{2\chi(s) \chi'(s) D_0^2 \partial_s u_{2,1}}{\alpha_1^2} - \frac{\chi(s)^2 D_0^2 \partial_{ss} u_{2,1}}{\alpha_1^2} = \quad (13)$$

$$2\lambda_r^2 \widehat{\Omega} \cos(\widehat{\Omega}_f T_0) u_{2,0} + \frac{4\chi(s) \chi'(s) D_0 D_1 \partial_s u_{2,0}}{\alpha_1^2} + 2\lambda_r \widehat{\Omega} \cos(\widehat{\Omega}_f T_0) D_0 u_{3,0} - 2D_0 D_1 u_{2,0} - \lambda_r \widehat{\Omega} \widehat{\Omega}_f \sin(\widehat{\Omega}_f T_0) u_{3,0} + 2\lambda_r D_1 u_{3,0} + 2\chi(s)^2 D_0 D_1 \partial_{ss} u_{2,0} / \alpha_1^2 D_0^2 u_{3,1} + 2\lambda_r D_0 u_{2,1} - \lambda_r^2 u_{3,1} - \lambda_a^2 \partial_{ss} u_{3,1} = -2\lambda_r D_1 u_{2,0} + \lambda_r \widehat{\Omega} \widehat{\Omega}_f \sin(\widehat{\Omega}_f T_0) u_{2,0} - 2D_0 D_1 u_{3,0} - 2\lambda_r \widehat{\Omega} \cos(\widehat{\Omega}_f T_0) D_0 u_{2,0} + 2\lambda_r^2 \widehat{\Omega} \cos(\widehat{\Omega}_f T_0) u_{3,0} \quad (14)$$

با در نظر گرفتن روابط (۱۱) و (۱۲) و جایگذاری آن‌ها در سمت راست معادله‌های (۱۳) و (۱۴)، معادله‌های مرتبه دوم عرضی خارج از صفحه و محوری به ترتیب به صورت روابط (۱۵) و (۱۶) تبدیل می‌گردد:

$$D_0^2 u_{2,1} - 2\lambda_r D_0 u_{3,1} - \lambda_r^2 u_{2,1} + \lambda_{b,1}^2 \chi'(s) \chi''(s) \partial_s u_{2,1} + 2\lambda_{b,1}^2 \chi'(s)^2 \partial_{ss} u_{2,1} + 4\lambda_{b,1}^2 \chi'(s) \chi(s) \partial_{sss} u_{2,1} + \lambda_{b,1}^2 \chi(s) \chi'''(s) \partial_s u_{2,1} + 3\lambda_{b,1}^2 \chi(s) \chi''(s) \partial_{ss} u_{2,1} + \lambda_{b,1}^2 \chi(s)^2 \partial_{ssss} u_{2,1} + \lambda_a^2 \chi'(s) \partial_s u_{2,1} - \lambda_a^2 \partial_{ss} u_{2,1} + \lambda_a^2 \chi(s) \partial_{ss} u_{2,1} - \frac{2\chi(s) \chi'(s) D_0^2 \partial_s u_{2,1}}{\alpha_1^2} - \frac{\chi(s)^2 D_0^2 \partial_{ss} u_{2,1}}{\alpha_1^2} = (1/2)(-iA_k \lambda_r \widehat{\Omega} \widehat{\Omega}_f \alpha_1^2 \psi_{3,k} \quad (15)$$

$$+ 2iA_k \lambda_r \widehat{\Omega} \omega_{2,k} \alpha_1^2 \psi_{3,k} + 2A_k \lambda_r^2 \widehat{\Omega} \alpha_1^2 \psi_{2,k} e^{-iT_0(-\omega_{2,k} + \widehat{\Omega}_f)} / \alpha_1^2 + (1/2)(iA_k \lambda_r \widehat{\Omega} \widehat{\Omega}_f \alpha_1^2 \psi_{3,k} + 2iA_k \lambda_r \widehat{\Omega} \omega_{2,k} \alpha_1^2 \psi_{3,k} + 2A_k \lambda_r^2 \widehat{\Omega} \alpha_1^2 \psi_{2,k} e^{iT_0(\omega_{2,k} + \widehat{\Omega}_f)} / \alpha_1^2 + (1/2)(4iD_1 A_k \omega_{2,k} \chi(s)^2 \psi_{2,k} + 8iD_1 A_k \omega_{2,k} \chi'(s) \chi(s) \psi_{2,k} - 4iD_1 A_k \omega_{2,k} \alpha_1^2 \psi_{2,k} + 4D_1 A_k \lambda_r \alpha_1^2 \psi_{3,k}) e^{i\omega_{2,k} T_0} / \alpha_1^2 + CC D_0^2 u_{3,1} + 2\lambda_r D_0 u_{2,1} - \lambda_r^2 u_{3,1} - \lambda_a^2 \partial_{ss} u_{3,1} = (A_k \lambda_r^2 \widehat{\Omega} \psi_{3,k} + \frac{1}{2} iA_k \lambda_r \widehat{\Omega} \widehat{\Omega}_f \psi_{2,k} - iA_k \lambda_r \widehat{\Omega} \omega_{2,k} \psi_{2,k}) e^{-iT_0(-\omega_{2,k} + \widehat{\Omega}_f)} + (-iA_k \lambda_r \widehat{\Omega} \omega_{2,k} \psi_{2,k} + A_k \lambda_r^2 \widehat{\Omega} \psi_{3,k} - \frac{1}{2} iA_k \lambda_r \widehat{\Omega} \widehat{\Omega}_f \psi_{2,k}) e^{iT_0(\omega_{2,k} + \widehat{\Omega}_f)} + (-2iD_1 A_k \omega_{2,k} \psi_{3,k} - 2\lambda_r D_1 A_k \psi_{2,k}) e^{i\omega_{2,k} T_0} + CC \quad (16)$$

با حذف ترم ناهنجار موجود در معادلات وابسته‌ی (۱۵) و (۱۶) این معادله‌ها دارای حل هارمونیک خواهند بود [۱]. از طرفی به دلیل وجود تشدید پارامتری اصلی رابطه‌ی $\widehat{\Omega}_f = 2\omega_{r,k} + \varepsilon\sigma$ بین فرکانس طبیعی عرضی خارج از صفحه-محوری k ام و فرکانس تحریک پارامتری وجود دارد [۱] که در این رابطه σ پارامتر نزدیکی است که نزدیکی فرکانس تحریک و

که در این روابط T_1 و T به ترتیب، مقیاس‌های زمانی سریع و کند مورد استفاده در روش مقیاس‌های چندگانه می‌باشند [۱]. مشتق‌های مرتبه اول و دوم زمانی برحسب مقیاس‌های چندگانه نیز به ترتیب به صورت $d^r/dt^r = D_0^r + \varepsilon D_1^r + O(\varepsilon^r)$ و $d/dt = D_0 + \varepsilon D_1 + O(\varepsilon)$ نظر گرفته می‌شوند که در این روابط $D_i \equiv \partial/\partial T_i$ است [۱]. جایگذاری روابط (۷) و (۸) در معادلات مرتبه‌بندی‌شده‌ی حرکت و استفاده از فرم مشتق‌های زمانی مرتبه اول و دوم در روش مقیاس‌های چندگانه و سرانجام، برابر صفر قرار دادن توان‌های مشابه ε و حذف ترم (s, T, T_1) جهت ساده‌سازی روابط، معادلات مرتبه اول ε در جهت عرضی خارج از صفحه و محوری، به ترتیب، به صورت روابط (۹) و (۱۰) خواهند گردید:

$$D_0^2 u_{2,0} - 2\lambda_r D_0 u_{3,0} - \lambda_r^2 u_{2,0} + \lambda_{b,1}^2 \chi'(s) \chi''(s) \partial_s u_{2,0} + 2\lambda_{b,1}^2 \chi'(s)^2 \partial_{ss} u_{2,0} + 4\lambda_{b,1}^2 \chi'(s) \chi(s) \partial_{sss} u_{2,0} + \lambda_{b,1}^2 \chi(s) \chi'''(s) \partial_s u_{2,0} + 3\lambda_{b,1}^2 \chi(s) \chi''(s) \partial_{ss} u_{2,0} + \lambda_{b,1}^2 \chi(s)^2 \partial_{ssss} u_{2,0} + \lambda_a^2 \chi'(s) \partial_s u_{2,0} - \lambda_a^2 \partial_{ss} u_{2,0} + \lambda_a^2 \chi(s) \partial_{ss} u_{2,0} - \frac{2\chi(s) \chi'(s) D_0^2 \partial_s u_{2,0}}{\alpha_1^2} - \frac{\chi(s)^2 D_0^2 \partial_{ss} u_{2,0}}{\alpha_1^2} = 0 \quad (9)$$

$$D_0^2 u_{3,0} + 2\lambda_r D_0 u_{2,0} - \lambda_r^2 u_{3,0} - \lambda_a^2 \partial_{ss} u_{3,0} = 0 \quad (10)$$

حل روابط (۹) و (۱۰) منجر به پاسخ خطی سیستم معادلات سازه می‌گردد. حل خطی این دسته معادله را می‌توان با استفاده از روش گلرکین به دست آورد [۱۸]. به دلیل وابستگی این دو معادله به یکدیگر این دو معادله به صورت ترکیبی حل می‌گردند. حل این دو معادله به ترتیب به صورت روابط (۱۱) و (۱۲) خواهد گردید:

$$u_{2,0} = \psi_{2,k}(s) A_k(T_1) e^{i\omega_{2,k} T_0} + CC \quad (11)$$

$$u_{3,0} = \psi_{3,k}(s) A_k(T_1) e^{i\omega_{2,k} T_0} + CC \quad (12)$$

که در این رابطه $\psi_{r,k}(s)$ و $\psi_{r,k}(s)$ به ترتیب مود خطی عرضی خارج از صفحه و محوری k ام پره‌ی چرخان و $A_k(T_1)$ دامنه‌ی متناظرش می‌باشد؛ فرکانس طبیعی عرضی خارج از صفحه-محوری k ام، i واحد موهومی و CC به جای مزدوج مختلط ترم‌های سمت راست رابطه و پیش از خود می‌نشیند. لازم به ذکر است که موده‌های خطی و فرکانس طبیعی متناظر با استفاده از روش گلرکین به دست می‌آیند [۱۸]. معادلات مرتبه دوم ε در جهت عرضی خارج از صفحه و محوری، به ترتیب، به صورت روابط (۱۳) و (۱۴) به دست خواهند آمد:

$$D_1 q = -\frac{1}{2} \left(\sigma + \frac{\lambda_r^2 \hat{\Omega} \alpha_1^2 (x_1 + x_2)}{(\alpha_1^2 x_1 + \alpha_1^2 x_2 - x_3 - 2x_4) \omega_{2,k}} \right) p \quad (22)$$

پاسخ بدیهی که از حل پایایی روابط $D_1 p$ و $D_1 q$ به دست می‌آید، پایدار است به شرطی که مقادیر ویژه‌ی ماتریس ژاکوبین، ξ ، حاصل از معادلات (۲۱) و (۲۲) دارای قسمت حقیقی منفی باشد [۱]. از طرفی، معادله‌ی مشخصه‌ی متناظر ماتریس ژاکوبین، توسط رابطه‌ی (۲۳) تعیین می‌گردد:

$$\lambda^2 + \frac{1}{4} \left(\sigma^2 - \left(\frac{\lambda_r^2 \hat{\Omega} \alpha_1^2 (x_1 + x_2)}{(\alpha_1^2 x_1 + \alpha_1^2 x_2 - x_3 - 2x_4) \omega_{2,k}} \right)^2 \right) = 0 \quad (23)$$

با استفاده از معیار روث-هورویتز [۲۱]، شرط لازم و کافی برای مرز منطقه‌ی پایداری به صورت رابطه‌ی (۲۴) به دست می‌آید:

$$\frac{\lambda_r^2 \hat{\Omega} \alpha_1^2 (x_1 + x_2)}{(\alpha_1^2 x_1 + \alpha_1^2 x_2 - x_3 - 2x_4) \omega_{2,k}} > |\sigma| \quad (24)$$

مقایسه‌ی روابط (۲۰) و (۲۴) مشخص می‌کند که منطقه‌ی پایداری خارج از مرزهای پیش‌بینی شده توسط رابطه‌ی (۲۰) قرار می‌گیرد.

۴- آنالیز عددی

پس از حل معادلات حرکت سیستم، در این بخش شبیه‌سازی عددی جهت روشن‌سازی و تحلیل نتایج روش‌های ذکر شده انجام می‌گیرد. ابتدا نتایج تحریک پارامتری اصلی به دست آمده توسط روش مقیاس‌های چندگانه در مقایسه با نتایج ارائه شده در مرجع [۲۱] که مربوط به تحریک پارامتری اصلی مودهای اول و دوم محوری می‌باشد اعتبارسنجی می‌گردد. پس از اعتبارسنجی نتایج به دست آمده، مطالعه‌ی موردی بر روی اثرات شماره‌ی مودها و سرعت چرخش بر مرز منطقه پایداری انجام خواهد گرفت.

۴-۱- اعتبار سنجی نتایج تشدید پارامتری اصلی

در این بخش اعتبارسنجی نتایج روش مقیاس‌های چندگانه حاضر با مقایسه با نتایج موجود در مقاله‌ی [۲۱] انجام می‌پذیرد. مسأله مورد بررسی، تیری آلومینیومی با مدول الاستیسیته ۷۰ GPa و چگالی 2700 kg/m^3 می‌باشد [۲۱]. شعاع روتور، عرض، ضخامت و طول تیر به ترتیب ۰/۵، ۰/۰۵، ۰/۰۵ و ۵ m در نظر گرفته می‌شوند. با استفاده از روش گلرکین (برای مشاهده‌ی طرز اعمال روش گلرکین، به مرجع [۱۸] مراجعه شود)، در سرعت چرخش ۱۵۰۰ rpm، اولین و دومین فرکانس‌های محوری محاسبه شده در مرجع [۲۱] به ترتیب برابر ۱۵۹۱/۸۹ و ۴۷۹۶/۲۹ rad/s می‌باشند که به دلیل در نظر گرفتن اثر نیروی کریولیس اولین و دومین فرکانس‌های محوری محاسبه شده جاری به ترتیب برابر ۱۶۲۲/۶۹ و ۴۸۰۶/۶۳ rad/s به دست می‌آیند. مطابق مرجع [۱۸] نیروی کریولیس دارای اثر سخت شونده بر فرکانس‌های طولی می‌باشد. نتایج تحلیل پایداری

فرکانس طبیعی عرضی خارج از صفحه-محوری k ام را نشان می‌دهد. بدین ترتیب، در کنار ضریب $e^{i\omega_{r,k}T}$ که تولید ترم ناهنجار می‌نماید، ضریب $e^{-iT(-\omega_{r,k} + \hat{\Omega}_r)}$ نیز در تولید رفتار ناهنجار در پاسخ مؤثر است. خارج نمودن ترم‌های ناهنجار مطابق با روش ارائه شده در مرجع [۲۲] از معادلات وابسته منجر به معادله‌ی مدولاسیون مختلط به صورت رابطه‌ی (۱۷) خواهد گردید:

$$ST = (-2i\omega_{2,k}x_1\alpha_1^2 - 2i\alpha_1^2x_2\omega_{2,k} + 2i\omega_{2,k}x_3 + 4i\omega_{2,k}x_4)D_1A_k / \alpha_1^2 + (\lambda_r^2 \hat{\Omega} \alpha_1^2 x_1 + \lambda_r^2 \hat{\Omega} \alpha_1^2 x_2) \bar{A}_k e^{i\sigma T_1} / \alpha_1^2 \quad (17)$$

که در این رابطه، $x_1 = \int \psi_{r,k} \psi_{r,k} ds$ ، $x_2 = \int \psi_{r,k} \psi_{r,k} ds$ ، $x_3 = \int x(s) x(s) \psi_{r,k} \psi_{r,k} ds$ و $x_4 = \int x(s) \psi_{r,k} \psi_{r,k} ds$ است.

با جایگذاری فرم قطبی دامنه‌ی مود عرضی خارج از صفحه-محوری k ام یعنی A_k به صورت $A_k = \frac{1}{\sqrt{2}} a_k (T_1) e^{i\beta_k(T_1)}$ در معادله‌ی (۱۵)، فرم حقیقی معادلات مدولاسیون به دست می‌آید [۱]:

$$D_1 a_k = \frac{1}{2} \frac{\lambda_r^2 \hat{\Omega} \alpha_1^2 (x_1 + x_2)}{(\alpha_1^2 x_1 + \alpha_1^2 x_2 - x_3 - 2x_4) \omega_{2,k}} a_k \sin(\theta_k) \quad (18)$$

$$a_k D_1 \theta_k = a_k \sigma + \frac{\lambda_r^2 \hat{\Omega} \alpha_1^2 (x_1 + x_2)}{(\alpha_1^2 x_1 + \alpha_1^2 x_2 - x_3 - 2x_4) \omega_{2,k}} a_k \cos(\theta_k) \quad (19)$$

که در این روابط $\theta_k := \theta_k(T_1) = \sigma T_1 - 2\beta_k(T_1)$ اختلاف فاز می‌باشد. حل پایایی معادلات (۱۸) و (۱۹)، زمانی به دست می‌آید که $D_1 a_k = 0$ و $D_1 \theta_k = 0$ باشند. حل پایایی این دو معادله با حل پرودیک سیستم معادلات اصلی سازه مرتبط می‌باشد و لذا بررسی پایداری و ناپایداری این حل‌های پایا، متناظر با بررسی پایداری معادلات سیستم اصلی خواهد بود [۱]. پاسخ پایایی به دست آمده از روابط (۱۸) و (۱۹) به جز حل بدیهی $a_k = 0$ ، دارای حل غیربدیهی نیز می‌باشد. این حل غیر بدیهی، با توجه به رابطه‌ی (۱۸)، $\sin(\theta_k) = 0$ است که بدین ترتیب $\cos(\theta_k) = \pm 1$ خواهد گردید. با جایگذاری این رابطه در رابطه‌ی (۱۹) و با در نظر گرفتن $D_1 \theta_k = 0$ ، مقدار آستانه‌ی پارامتر نزدیکی برای مشخص نمودن مرز پایداری به صورت رابطه‌ی (۲۰) محاسبه می‌گردد:

$$\sigma = \pm \frac{\lambda_r^2 \hat{\Omega} \alpha_1^2 (x_1 + x_2)}{(\alpha_1^2 x_1 + \alpha_1^2 x_2 - x_3 - 2x_4) \omega_{2,k}} \quad (20)$$

تحلیل پایداری حل به دست آمده معادلات (۱۸) و (۱۹) با استفاده از فرم کارترین دامنه‌ی مود محوری یعنی A_k صورت می‌پذیرد. در این راستا A_k به صورت $A_k = (p(T_1) + iq(T_1)) e^{\frac{1}{2}\sigma T_1}$ در نظر گرفته می‌شود [۱]. با جایگذاری این فرم کارترین در معادله‌ی (۱۷) و جداسازی رابطه‌ی حاصل شده به دو بخش حقیقی و موهومی، داریم:

$$D_1 p = \frac{1}{2} \left(\sigma - \frac{\lambda_r^2 \hat{\Omega} \alpha_1^2 (x_1 + x_2)}{(\alpha_1^2 x_1 + \alpha_1^2 x_2 - x_3 - 2x_4) \omega_{2,k}} \right) q \quad (21)$$

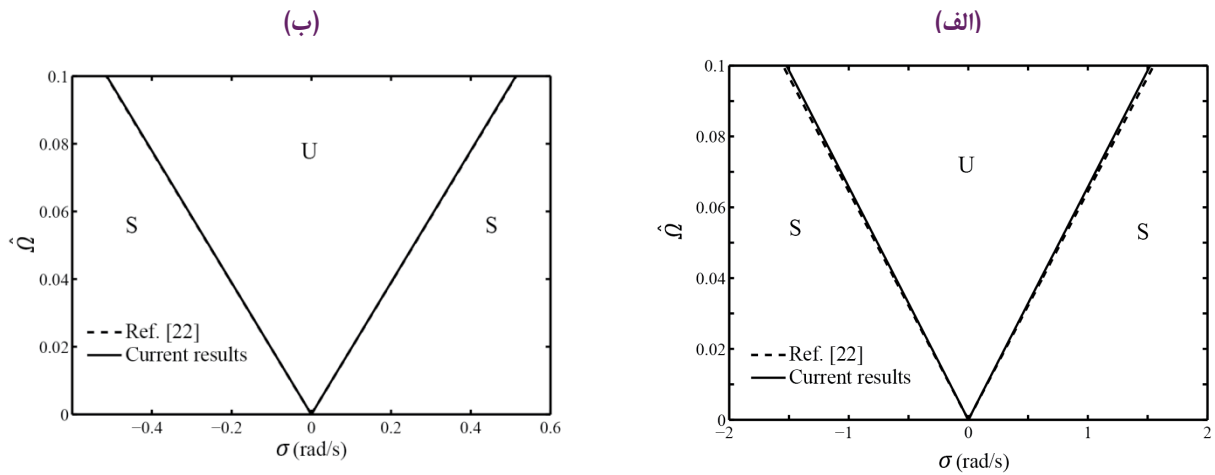


Fig. 2. The stability region for the first and the second axial modes; The current results versus the results of Ref. [21]: (U: the unstable region, S: the stable region): (a)-the first axial mode and (b)-the second axial mode.

شکل ۲: منطقه‌ی پایداری برای مدهای اول و دوم محوری؛ نتایج حاضر در برابر نتایج مرجع [۲۱]: (U: منطقه‌ی ناپایدار، S: منطقه‌ی پایدار): (الف) مود اول محوری و (ب) مود دوم محوری.

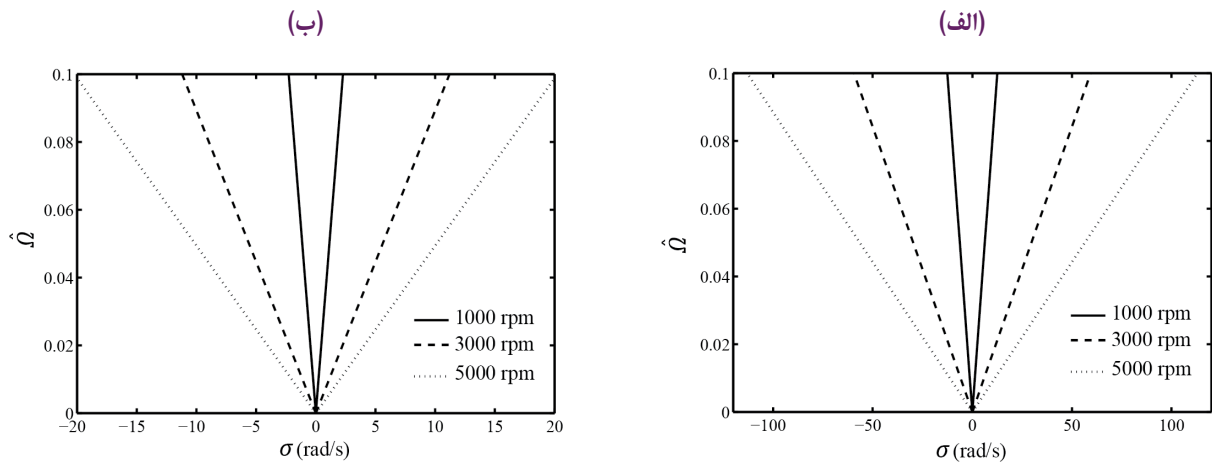


Fig. 3. The stability region for the first and the second lagging modes for three different rotation speeds: (a)-the first lagging mode and (b)-the second lagging mode.

شکل ۳: منطقه‌ی پایداری برای مدهای عرضی اول و دوم برای سه مقدار متفاوت سرعت چرخش: (الف) مود عرضی خارج از صفحه‌ی اول و (ب) مود عرضی خارج از صفحه‌ی دوم.

به ترتیب در شکل‌های ۳ و ۴ رسم شده است. با مشاهده‌ی شکل‌های ۳ و ۴ می‌توان مشاهده نمود که با افزایش سرعت چرخش، گستره‌ی مقدار پارامتر نزدیکی، یعنی σ ، جهت تعیین مرزهای منطقه‌ی ناپایداری برای مدهای عرضی خارج از صفحه و محوری افزایش می‌یابد. از طرف دیگر مدهای پایین‌تر که دارای فرکانس‌های طبیعی کمتری نیز می‌باشند، دارای گستره‌ی پارامتر نزدیکی بزرگتری برای منطقه‌ی ناپایداری می‌باشند و بدین ترتیب در محدوده‌ی فرکانس تحریک بزرگتری تشدید پارامتری اصلی رخ می‌دهد. جهت روشن شدن بیشتر این مطلب محدوده‌ی ناپایداری برای سه مود عرضی خارج از صفحه اول در شکل ۵ نشان داده شده است. محور افقی نمایش دهنده‌ی محدوده‌ی فرکانس تحریک و محور عمودی نمایشگر سرعت چرخش می‌باشد. مقدار فرکانس تحریک مشخص کننده‌ی منطقه‌ی ناپایداری از رابطه‌ی $\hat{\Omega}_f = 2\omega_{p,k} + \varepsilon\sigma$ به دست آمده است. همانگونه که مشاهده می‌شود منطقه‌ی ناپایداری مشخص شده توسط فرکانس

به دست آمده، برای تشدید پارامتری اصلی مود اول و دوم محوری در شکل ۲ ارائه شده است. نتایج روش مقیاس‌های چندگانه از رابطه‌ی (۲۴) استخراج شده است. مطابق با شکل ۲ نتایج ارائه شده در مرجع [۲۱] نتایج به دست آمده‌ی حاضر را تأیید می‌کند.

۴-۲- تحلیل پایداری

پس از اعتبارسنجی نتایج و تأیید نتایج روش مقیاس‌های چندگانه، مطالعه‌ی پایداری تشدید پارامتری اصلی برای مدهای عرضی خارج از صفحه و محوری اول و دوم با تغییر سرعت چرخش در این بخش انجام می‌گیرد. کلیه پارامترها مشابه قبل بوده اما شعاع روتور و طول پره به ترتیب 2 m و 0.2 در نظر گرفته می‌شوند. با استفاده از رابطه‌ی (۲۴) منطقه‌ی پایداری برای مدهای عرضی خارج از صفحه و محوری اول و دوم برای سه مقدار سرعت چرخش مختلف، برابر 1000 ، 3000 ، و 5000 rpm

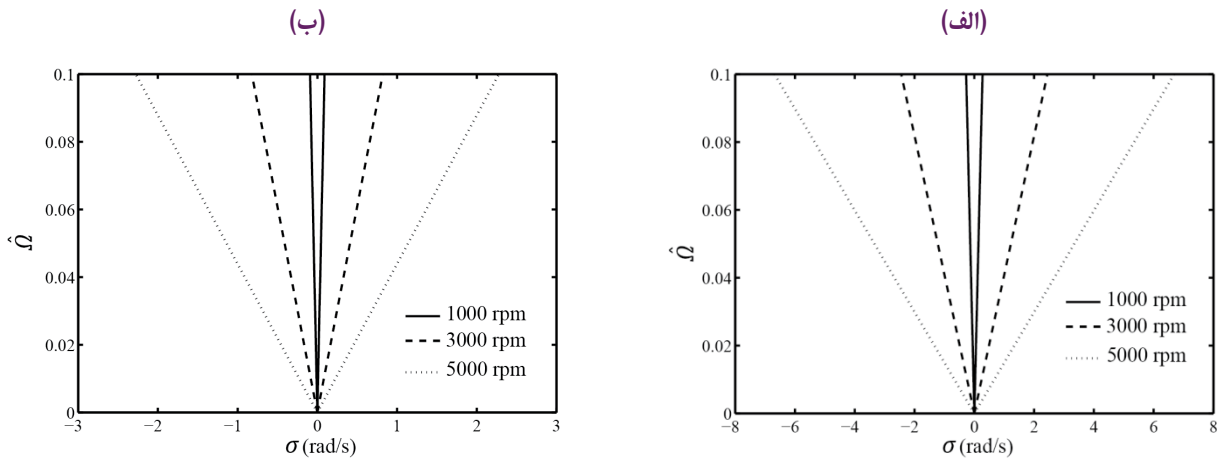


Fig. 4. The stability region for the first and the second axial modes for three different rotation speeds: (a)-the first axial mode and (b)-the second axial mode.

شکل ۴: منطقه‌ی پایداری برای مودهای محوری اول و دوم برای سه مقدار متفاوت سرعت چرخش: (الف) مود محوری اول و (ب) مود محوری دوم.

است. بدین ترتیب مشخص می‌گردد که در محدوده‌ی فرکانس تحریک بین فاصله‌ی سایه زده شده تحریک پارامتری اصلی مودهای عرضی خارج از صفحه‌ی پنجم و محوری اول با یکدیگر در سرعتی نزدیک ۱۹۴۰ rpm فعال می‌گردند که بسیار برای پره‌ی چرخان حادثه آور است.

۵- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله، به تحلیل دینامیکی پره‌های چرخان تحت تحریک پارامتری اصلی پرداخته شد. معادلات حرکت بر مبنای معادلات دقیق هندسی به کار برده شده و این معادلات برای امکان داشتن تشدید پارامتری اصلی اصلاح شدند. روش مقیاس‌های چندگانه به صورت مستقیم بر معادلات حرکت مرتبه‌بندی شده اعمال و رابطه‌ای بسته جهت مشخص‌سازی مرز پایداری بر حسب تابعی از سرعت بدون بعد چرخش و فرکانس‌های طبیعی به دست آورده شد. نتایج با مقایسه با مقالات موجود اعتبارسنجی گردید. پس از اعتبارسنجی نتایج حاصل از روش مقیاس‌های چندگانه، مطالعات موردی بر روی اثرات شماره‌ی مود و سرعت چرخش بر روی مرزهای منطقه‌ی پایداری انجام گرفت. مهم‌ترین نتایج به دست آمده از این قرار است؛

با افزایش سرعت چرخش، گستره‌ی مقدار پارامتر نزدیکی، یعنی σ ، جهت تعیین مرزهای منطقه‌ی ناپایداری برای مودهای عرضی خارج از صفحه و محوری افزایش می‌یابد. از طرف دیگر مودهای پایین‌تر که دارای فرکانس‌های طبیعی کمتری نیز می‌باشند دارای گستره‌ی پارامتر نزدیکی بزرگتری برای منطقه‌ی ناپایداری می‌باشند و بدین ترتیب در محدوده‌ی فرکانس تحریک بزرگتری تشدید پارامتری اصلی رخ می‌دهد. منطقه‌ی ناپایداری مشخص شده توسط فرکانس تحریک برای مودهای پایین‌تر از منطقه‌ی ناپایداری مشخص شده برای مودهای بالاتر بسیار گسترده‌تر است. منطقه‌ی ناپایداری مودهای عرضی خارج از صفحه بسیار بزرگتر از محدوده متناظر برای مودهای محوری است. با افزایش شماره مودهای عرضی خارج از صفحه محدوده‌ی ناپایداری پیش‌بینی شده برای مودهای عرضی خارج

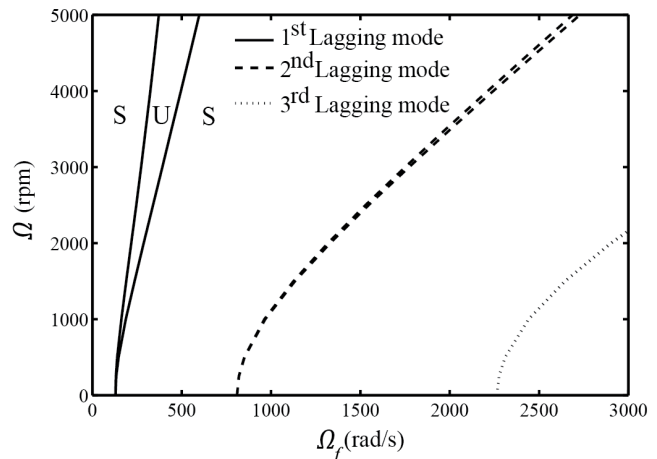


Fig. 5. The stability region for the first three lagging modes: (U: the unstable region, S: the stable region).

شکل ۵: منطقه‌ی پایداری برای سه مود عرضی خارج از صفحه‌ی اول: (U: منطقه‌ی ناپایدار، S: منطقه‌ی پایدار).

تحریک برای مودهای پایین‌تر از منطقه‌ی ناپایداری مشخص شده برای مودهای بالاتر بسیار گسترده‌تر است.

محدوده‌ی ناپایداری برای مود محوری اول در کنار سه مود عرضی خارج از صفحه‌ی اول در شکل ۶ رسم شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود منطقه‌ی ناپایداری مودهای عرضی خارج از صفحه بسیار بزرگتر از محدوده متناظر برای مودهای محوری است.

نکته قابل تأمل دیگر مطابق شکل ۶ (الف)، نزدیک شدن محدوده‌ی ناپایداری پیش‌بینی شده توسط مودهای عرضی خارج از صفحه به محدوده متناظر مودهای محوری با افزایش شماره مود عرضی خارج از صفحه است که بدین ترتیب امکان تداخل این محدوده‌ها وجود خواهد داشت. جهت روشن‌سازی این مطلب محدوده‌ی ناپایداری برای مودهای عرضی خارج از صفحه‌ی پنجم و محوری اول در شکل ۷ رسم گردیده است. همانگونه که مشاهده می‌گردد منطقه‌ی این تداخل مودی در شکل ۷ (ب) بزرگنمایی شده

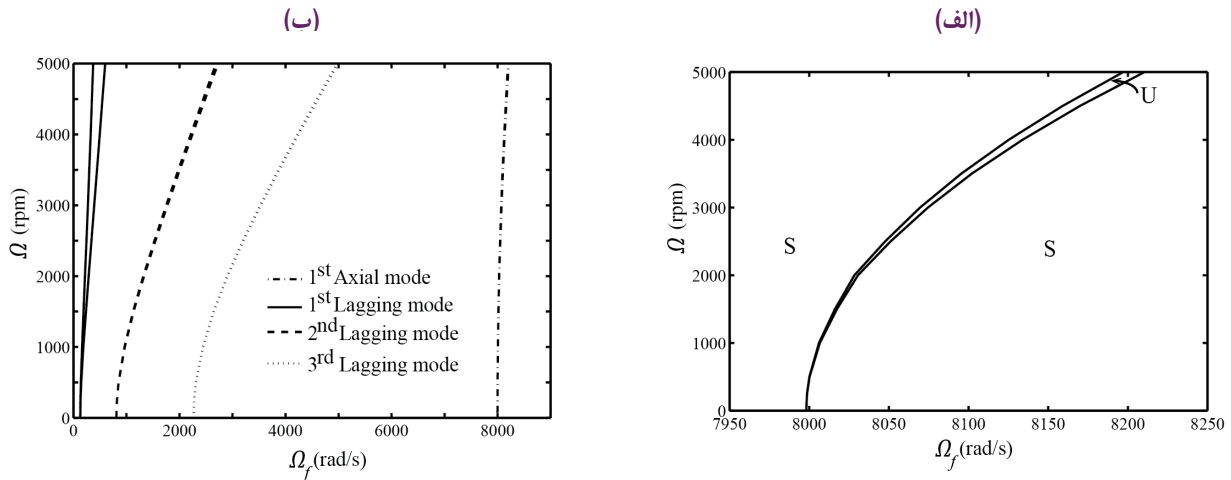


Fig. 6. The stability region for the first axial mode and the first three lagging modes: (U: the unstable region, S: the stable region): (a)-the first axial mode and (b)-the first three lagging modes beside the first axial mode.

شکل ۶: منطقه‌ی پایداری برای مود محوری اول و سه مود عرضی خارج از صفحه‌ی اول: (U: منطقه‌ی ناپایدار، S: منطقه‌ی پایدار): (الف) مود محوری اول و (ب) سه مود عرضی خارج از صفحه‌ی اول در کنار مود محوری اول.

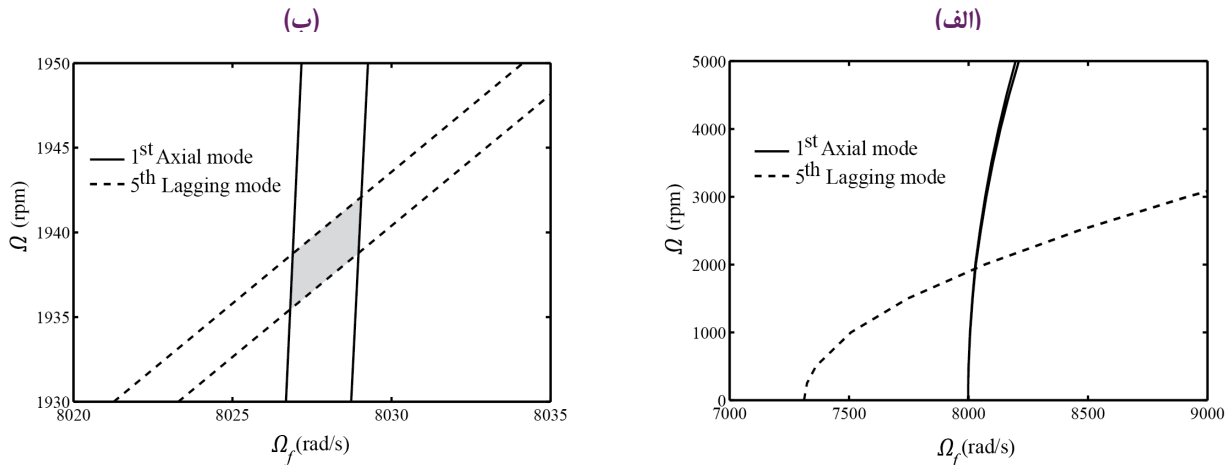


Fig. 7. The stability region for the first axial mode compared with the fifth lagging mode: (a)-the normal range and (b)-the zoomed in range.

شکل ۷: منطقه‌ی پایداری برای مود محوری اول در مقایسه با مود عرضی خارج از صفحه‌ی پنجم: (الف) گستره‌ی طبیعی و (ب) گستره‌ی بزرگنمایی شده.

resonances in parametrically excited hinged-clamped beams, *Nonlinear Dynamics*, 20(2) (1999) 131-158.

- [4] P.D. Kourdis, A.F. Vakakis, Some results on the dynamics of the linear parametric oscillator with general time-varying frequency, *Applied mathematics and computation*, 183(2) (2006) 1235-1248.
- [5] M.H. Ghayesh, S. Balar, Non-linear parametric vibration and stability of axially moving visco-elastic Rayleigh beams, *International Journal of Solids and Structures*, 45(25-26) (2008) 6451-6467.
- [6] M.H. Ghayesh, M. Yourdkhani, S. Balar, T. Reid, Vibrations and stability of axially traveling laminated beams, *Applied Mathematics and Computation*, 217(2) (2010) 545-556.
- [7] H. Chen, D. Zuo, Z. Zhang, Q. Xu, Bifurcations and chaotic dynamics in suspended cables under simultaneous

از صفحه به محدوده متناظر مودهای محوری نزدیک می‌گردد که بدین ترتیب امکان تداخل این محدوده‌ها وجود خواهد داشت. در محدوده تداخلی به دست آمده، تحریک پارامتری اصلی مودهای عرضی خارج از صفحه و محوری با یکدیگر در سرعتی خاص فعال می‌گردند که بسیار برای پرهی چرخان حادثه آور است.

مراجع

- [1] W. Lacarbonara, Nonlinear structural mechanics: theory, dynamical phenomena and modeling, *Springer Science & Business Media*, 2013.
- [2] A.N. Cleland, Foundations of nanomechanics: from solid-state theory to device applications, *Springer Science & Business Media*, 2013.
- [3] C.-M. Chin, A.H. Nayfeh, Three-to-one internal

- [15] Ö. Turhan, G. Bulut, On nonlinear vibrations of a rotating beam, *Journal of sound and vibration*, 322(1-2) (2009) 314-335.
- [16] J. Valverde, D. García-Vallejo, Stability analysis of a substructured model of the rotating beam, *Nonlinear dynamics*, 55(4) (2009) 355-372.
- [17] H. Arvin, F. Bakhtiari-Nejad, Non-linear modal analysis of a rotating beam, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46(6) (2011) 877-897.
- [18] W. Lacarbonara, H. Arvin, F. Bakhtiari-Nejad, A geometrically exact approach to the overall dynamics of elastic rotating blades—part 1: *linear modal properties*, *Nonlinear Dynamics*, 70(1) (2012) 659-675.
- [19] H. Arvin, W. Lacarbonara, F. Bakhtiari-Nejad, A geometrically exact approach to the overall dynamics of elastic rotating blades—part 2: flapping nonlinear normal modes, *Nonlinear Dynamics*, 70(3) (2012) 2279-2301.
- [20] H. Arvin, W. Lacarbonara, A fully nonlinear dynamic formulation for rotating composite beams: nonlinear normal modes in flapping, *Composite structures*, 109 (2014) 93-105.
- [21] H. Arvin, Y.-Q. Tang, A.A. Nadooshan, Dynamic stability in principal parametric resonance of rotating beams: Method of multiple scales versus differential quadrature method, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 85 (2016) 118-125.
- [22] H. Arvin, F. Bakhtiari-Nejad, Nonlinear free vibration analysis of rotating composite Timoshenko beams, *Composite Structures*, 96 (2013) 29-43.
- parametric and external excitations, *Nonlinear Dynamics*, 62(3) (2010) 623-646.
- [8] L.-Q. Chen, Y.-Q. Tang, Parametric stability of axially accelerating viscoelastic beams with the recognition of longitudinally varying tensions, *Journal of vibration and acoustics*, 134(1) (2012) 011008.
- [9] B.B. Özhan, M. Pakdemirli, Principal parametric resonances of a general continuous system with cubic nonlinearities, *Applied Mathematics and Computation*, 219(5) (2012) 2412-2423.
- [10] B. Sahoo, L. Panda, G. Pohit, Nonlinear dynamics of an Euler-Bernoulli beam with parametric and internal resonances, *Procedia Engineering*, 64 (2013) 727-736.
- [11] M.C. Da Silva, D. Hodges, Nonlinear flexure and torsion of rotating beams, with application to helicopter rotor blades-I. Formulation, *Vertica*, 10(2) (1986) 151-169.
- [12] M.C. da Silva, D. Hodges, NONLINEAR FLEXURE AND TORSION OF ROTATING BEAMS, WITH APPLICATION TO HELICOPTER ROTOR BLADES-II. RESPONSE AND STABILITY RES UL TS, *Vertica*, 10(2) (1986) 171-186.
- [13] M.C. Da Silva, A comprehensive analysis of the dynamics of a helicopter rotor blade, *International Journal of Solids and Structures*, 35(7-8) (1998) 619-635.
- [14] C. Saravia, S. Machado, V. Cortínez, Dynamic stability of rotating thin-walled composite beams, *Mec Comput*, 28 (2009) 3297-3317.

Please cite this article using:

H. Arvin Boroujeni, Stability of a Blade with Varying Rotation Speed by Considering the Lagging Motion, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 50(5) (2018) 147-156.
DOI: 10.22060/mej.2017.12468.5346

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

