

تحلیل مخازن استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند

(FGMs) تحت بارهای مکانیکی و حرارتی

مسعود طهانی^۱، طاها طالبیان^۲

چکیده

در این مقاله به تحلیل استاتیکی مخازن استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند تحت بارهای مکانیکی و حرارتی متقارن محوری پرداخته شده است. توزیع خواص مکانیکی مواد در راستای ضخامت پیوسته و به صورت تابع توزیع توانی در نظر گرفته شده است. برای حل معادلات از روش اجزاء محدود دوبعدی استفاده شده است. به منظور دستیابی به مدل اجزاء محدود دقیق استوانه با توزیع پیوسته و دلخواه خواص مکانیکی در راستای ضخامت و اجتناب از محدودیت در نسبت شعاع به ضخامت، المان خاص تعریف شده است. بارگذاری مکانیکی به صورت فشار داخلی در استوانه‌ی دو سر گیردار و بارگذاری حرارتی به صورت اختلاف دما در راستای ضخامت استوانه‌ی دو سر تکیه گاه ساده در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد که توزیع تنش در مخازن استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند، به نوع مواد و نحوه‌ی توزیع خواص آن وابسته است که می‌توان از آنها برای کنترل توزیع تنش و دما استفاده نمود.

کلمات کلیدی

مواد هدفمند، مخزن استوانه‌ای، روش اجزاء محدود، بارگذاری مکانیکی، بارگذاری حرارتی

Analysis of Functionally Graded Cylindrical Vessels under Mechanical and Thermal Loads

M. Tahani, T. Talebian

ABSTRACT

In this paper, a static analysis of functionally graded cylinders under axisymmetric mechanical and thermal loads is presented. It is assumed that the distribution of material properties through the thickness of the cylinder is continuous and graded according to a power law distribution. For solving equations, two-dimensional finite element method is employed. To this end, a functionally graded material element is defined for accurate finite element modeling of cylinder with continuous distribution of material properties and avoiding the limitation in the radius to thickness ratio. Numerical results are obtained for a clamped cylinder subjected to a uniform internal pressure and a simply supported cylinder subjected to a temperature distribution through the thickness. In addition, the numerical results for thick and thin cylinders are obtained. The results show that the stress and temperature distribution in functionally graded cylindrical shells are dependent on the material kind and distribution of material properties and this dependency can be utilized for controlling the stress level.

^۱دانشیار دانشگاه فردوسی مشهد - دانشکده مهندسی - گروه مکانیک: Email: mtahani@ferdowsi.um.ac.ir

^۲دانشجوی دکتری دانشگاه فردوسی مشهد - دانشکده مهندسی - گروه مکانیک: Email: taha_talebian@yahoo.com



KEYWORDS

Functionally graded materials, Cylindrical vessels, Finite element method, Mechanical loading, Thermal loading

۱- مقدمه

مواد هدفمند (Functionally Graded Materials)، مواد مرکب غیر همگنی هستند که از دو یا چند ماده مختلف تشکیل شده و ترکیب یا درصد حجمی اجزاء تشکیل دهنده به طور پیوسته و به عنوان تابع موقعیت در امتداد یک یا دو بعد خاص متغیر است. در نتیجه خواص و ساختار آنها به طور پیوسته در امتداد همان ابعاد تغییر خواهد کرد. بیشتر ورق‌های ساخته شده از مواد هدفمند که به عنوان سد حرارتی در دماهای بسیار بالا مورد استفاده قرار می‌گیرند، مخلوطی از سرامیک و فلز هستند. به طوری که سطح سرامیکی دارای مقاومت حرارتی بالا در سمتی قرار می‌گیرد که دمای آن بسیار بالا است و سطح فلزی دارای استحکام مکانیکی مناسب در سمتی قرار می‌گیرد که دمای آن پایین است و بین دو سطح تغییرات تدریجی پیوسته در درصد حجمی سرامیک- فلز صورت می‌گیرد. از مزایای دیگر مواد هدفمند استفاده از آنها به عنوان فصل مشترک دو ماده متفاوت است. این کار باعث می‌شود که مقاومت اتصال بهبود یافته، تنش‌های پسماند کاهش یافته و توزیع تنش یکنواخت‌تر شود. تغییرات تدریجی و پیوسته‌ی این مواد، آنها را برای محیط‌ها و کاربردهای متفاوت قابل استفاده می‌سازد. به همین دلیل در سال‌های اخیر استفاده از مواد هدفمند در محیط‌های با دمای بسیار بالا مانند راکتورهای هسته‌ای، کارخانجات شیمیایی و نیز در ساخت سفینه‌های فضایی سرعت بالا، اهمیت بسیار زیادی پیدا کرده است.

مسائل مواد ناهمگن، منجر به معادله‌های دیفرانسیل جزئی با ضرایب متغیر می‌شود که در حالت کلی نمی‌توان برای آنها حل تحلیلی پیدا نمود. بنابراین از انواع روش‌های تحلیلی و عددی برای حل این‌گونه مسائل استفاده می‌شود. به عنوان چند نمونه، Tutuncu و Ozturk [۱] حل تحلیلی تنش و تغییر شکل مخازن استوانه‌ای و کروی FGM تحت فشار داخلی را مورد بررسی قرار دادند. آنها نشان دادند که بیشتر شدن سفتی یا مدول الاستیسیته در نزدیکی سطح داخلی باعث کاهش تنش در راستای ضخامت استوانه می‌شود. Chan و Horgan [۲] سیلندرها و دیسک‌های تو خالی FGM با طول محدود تحت فشار داخلی را مورد بررسی قرار دادند. Jabbari و همکارانش [۳] مسائل تنش حرارتی حالت پایدار و تک بعدی را برای سیلندرها FGM جدار ضخیم تحلیل نمودند. آنها تنش‌های

حرارتی و مکانیکی را با حل مستقیم معادلات به دست آوردند. همچنین Jabbari و همکارانش [۴] حالت نامتقارن مسئله قبل را مورد بررسی قرار دادند. آنها این تحلیل را با بسط فوریه توزیع دما و جابه‌جایی انجام دادند. Awaji و Sivakuman [۵] توزیع تنش و دمای گذرا و پایدار در استوانه‌های FGM تو خالی را بررسی کردند. Liew و Kitipornchai [۶] به تحلیل رفتار ترمومکانیکی سیلندرها تو خالی FGM پرداختند. آنها استوانه‌ی FGM را به چند استوانه‌ی همگن مجزا با ضخامت کمتر تقسیم کرده و با برقراری شرط پیوستگی تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها در سطح مشترک استوانه‌ها، توزیع تنش و جابه‌جایی را به دست آوردند. آنها نشان دادند که با ازدیاد تعداد لایه‌ها تقریب خوبی از استوانه FGM به دست می‌آید. بدین ترتیب بدون نیاز به حل معادلات ماده‌ی غیرهمگن، می‌توان رفتار استوانه FGM را مورد مطالعه قرار داد. Shakeri و همکارانش [۷] و Hoseini و همکارانش [۸] نیز به همین شیوه به تحلیل دینامیکی استوانه‌های FGM جدار ضخیم پرداختند. ایشان به منظور حل معادلات بدست آمده در هر استوانه همگن مجزا از روش اجزا محدود بهره گرفتند. Oral و Anlas [۹] توزیع تنش در استوانه‌های FGM غیر ایزوتروپیک را مورد بررسی قرار دادند. آنها نشان دادند که با توزیع مناسب و پیوسته مواد می‌توان توزیع مناسب و دلخواه تنش را در مواد هدفمند به دست آورد. Obata و Kanayama [۱۰] تنش‌های حرارتی استوانه‌های جدار ضخیم تحت توزیع دمای گذرای دو بعدی را بررسی کردند. Hosseini و همکارانش [۱۱] حل تحلیلی انتقال حرارت گذرا در استوانه‌های FGM جدار ضخیم و متقارن محوری را با استفاده از توابع بسط بدست آوردند. همچنین Reddy و Chin [۱۲] تحلیل ترمومکانیکی استوانه‌های FGM جدار ضخیم را با استفاده از روش اجزاء محدود بررسی کردند. آنها خواص مواد را وابسته به دما فرض نمودند تا نتایج بهتری به دست آورند. حسینی [۱۳] به تحلیل همزمان ترمومکانیکی پوسته استوانه‌ای FGM جدار ضخیم پرداختند. Obata و Noda [۱۴] در بررسی‌هایشان سعی کردند ترکیب استوانه‌ی FGM را به منظور کاهش تنش‌های حرارتی که در اثر اختلاف دمای بین سطوح داخلی و خارجی به وجود می‌آید را بهینه کنند. Ye و Chen [۱۵] حالت ترموالاستیک دو بعدی متقارن محوری در استوانه‌ی FGM ایزوتروپیک عرضی را بررسی کردند. همچنین Woo و Meguid [۱۶] به تحلیل

غیرخطی تغییر شکل‌های بزرگ صفحه و استوانه‌ای FGM تحت بارگذاری مکانیکی عرضی و میدان حرارتی پرداختند.

در اکثر پژوهش‌های انجام شده در زمینه‌ی تحلیل استوانه‌های ساخته شده از مواد هدفمند، از روش چند لایه استفاده شده است. به این صورت که جداری استوانه در راستای شعاعی به چند لایه تقسیم شده و خواص ماده در هر لایه ثابت و یا خطی در نظر گرفته می‌شود. همچنین در بسیاری از موارد برای استخراج معادلات از تئوری‌های مهندسی مانند تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT) استفاده شده است. در این مقاله، مخزن استوانه‌ای FGM با طول محدود و ضخامت و شرایط مرزی دلخواه تحت بارگذاری‌های مکانیکی و حرارتی متقارن محوری در نظر گرفته شده است. معادلات تعادل الاستیسیته بدون هیچ فرض ساده کننده‌ای استفاده شده و توزیع درصد حجمی مواد در راستای ضخامت استوانه به صورت دقیق مطابق قانون توزیع توانی درصد حجمی عناصر مختلف در استوانه‌ی FGM، در نظر گرفته شده است.

۲- استخراج معادلات

در اینجا یک مخزن استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند در نظر گرفته شده است و فرض می‌شود خواص مکانیکی و حرارتی ماده به‌طور پیوسته در راستای ضخامت مخزن تحت تابع توزیع توانی که در رابطه (۱) آمده تغییر می‌کند:

$$V = (V_{out} - V_{in}) \left(\frac{r - r_{in}}{r_{out} - r_{in}} \right)^n + V_{in} \quad (1)$$

در رابطه (۱)، V معرف یک خاصیت عمومی ماده در شعاع r است. همچنین V_{in} و V_{out} همان خاصیت به ترتیب در سطوح خارجی و داخلی مخزن بوده و n ضریب توزیع توانی می‌باشد. به‌عنوان مثال، با انتخاب مقدار $n=1$ خواص ماده به‌طور خطی در راستای ضخامت تغییر می‌کند.

فرض می‌شود که استوانه‌ی FGM جدار ضخیم، دارای طول محدود است و بارگذاری آن به‌صورت بارهای مکانیکی و حرارتی با تقارن محوری باشد. در نتیجه می‌توان از عبارات مشتق نسبت به θ در روابط صرف نظر کرد. به این ترتیب، معادله‌های موضعی تعادل به‌صورت رابطه (۲) ساده می‌شوند:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} - \frac{\sigma_\theta}{r} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

روابط کرنش - تغییر مکان نیز در مختصات استوانه‌ای به-

صورت رابطه (۳) می‌باشد:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (3)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z}$$

همچنین روابط تنش-کرنش در حالت سه بعدی برای یک ماده ایزوتروپیک عبارت است از:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \sigma_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_r \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{Bmatrix} \Delta T \quad (4)$$

$$\sigma_{r\theta} = C_{66} \gamma_{r\theta}, \quad \sigma_{rz} = C_{66} \gamma_{rz}, \quad \sigma_{z\theta} = C_{66} \gamma_{z\theta}$$

که در آن

$$C_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$C_{12} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (5)$$

$$C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2$$

با توجه به اینکه شرایط مرزی و بارگذاری متقارن محوری می‌باشند، می‌توان u_θ را صفر در نظر گرفت و مسئله را به صورت دو بعدی در صفحه r و z حل کرد. با جایگذاری (۳) در (۴)، روابط تنش - تغییر مکان به‌صورت رابطه (۶) به‌دست می‌آید:

$$\sigma_z = C_{11} \frac{\partial u_z}{\partial z} + C_{12} \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \sigma_T$$

$$\sigma_\theta = C_{11} \frac{u_r}{r} + C_{12} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \sigma_T$$

$$\sigma_r = C_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{12} \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \sigma_T$$

$$\sigma_{r\theta} = C_{66} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (6)$$

$$\sigma_{rz} = C_{66} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)$$

$$\sigma_{\theta z} = C_{66} \frac{\partial u_\theta}{\partial r}$$

که در آن

$$\sigma_T = \alpha \Delta T (C_{11} + 2C_{12}) \quad (7)$$

با جایگذاری (۶) در معادله‌های تعادل الاستیسیته (۲)، دو معادله‌ی دیفرانسیل کوپل با مشتقات جزئی به‌صورت رابطه (۸) به‌دست می‌آید:

که در آن

$$k_{11} = \int \left\{ C_{11} r \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + C_{12} \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \psi_j + \frac{C_{11}}{r} \psi_i \psi_j + C_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \psi_i + C_{66} r \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \right\} dr dz$$

$$k_{12} = k_{21} = \int \left\{ C_{12} r \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \frac{\partial \psi_j}{\partial z} + C_{12} \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial z} + C_{66} r \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \right\} dr dz$$

$$k_{22} = \int \left\{ C_{66} r \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + C_{11} r \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \right\} dr dz$$

$$F_1 = \iint \psi_i t_r ds, \quad F_2 = \iint \psi_i t_z ds$$

$$Q_1 = \int \left(r \frac{\partial \psi_i}{\partial r} + \psi_i \right) \sigma_r dr dz, \quad Q_2 = \int \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \sigma_r r dr dz \quad (14)$$

در مدل اجزاء محدود از المان‌های مستطیلی با چهار گره و دو درجه آزادی در هر گره استفاده شده است. چیدمان المان‌ها در صفحه‌ی r و z عمود بر جداره‌ی استوانه می‌باشد. شکل (۱) نحوه‌ی المان بندی را در مدل اجزاء محدود در یک مقطع تقارن محوری استوانه، نشان می‌دهد.

توابع درونیاب نیز به فرم رابطه (۱۵) انتخاب شده است:

$$\psi_1 = \left(1 - \frac{r}{a} \right) \left(1 - \frac{z}{b} \right), \quad \psi_2 = \frac{r}{a} \left(1 - \frac{z}{b} \right) \quad (15)$$

$$\psi_3 = \frac{z}{b} \left(1 - \frac{r}{a} \right), \quad \psi_4 = \frac{z}{b} \cdot \frac{r}{a}$$

در المان‌های تعریف شده، هر گره دارای دو درجه آزادی است و بنابراین ابعاد ماتریس سختی هر یک از المان‌ها 8×8 است که هر یک از درایه‌های آن با انتگرالگیری روی همان المان حاصل می‌شود. به دلیل وابسته بودن ضرایب C به r و همچنین وجود ضرایب r در بعضی از عبارات انتگرال، مقدار انتگرال‌ها برای المان‌های مختلف در راستای z یکسان ولی در راستای r متفاوت می‌باشد. در نتیجه می‌توان در راستای z از انتگرالگیری مجدد صرف نظر کرد ولی در راستای r باید از تک تک المان‌ها انتگرالگیری نمود. به منظور افزایش دقت در نتایج به دست آمده، از حل تحلیلی انتگرال‌های در جهت ضخامت در برنامه‌ی اجزاء محدود استفاده شده است.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(C_{11} r \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{12} \left(u_r + r \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - r \sigma_T \right) - C_{11} \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(C_{66} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \right) - \frac{C_{12}}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\sigma_T}{r} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(C_{11} \frac{\partial u_z}{\partial z} + C_{12} \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \sigma_T \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(C_{66} r \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \right) = 0 \quad (8)$$

برای حل این دستگاه معادله به روش اجزاء محدود، شکل ضعیف (weak form) به صورت رابطه (۹) تشکیل می‌شود:

$$\int \left\{ \frac{\partial w_1}{\partial r} \left(C_{11} r \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{12} \left(u_r + r \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - r \sigma_T \right) + \frac{\partial w_1}{\partial z} \left(C_{66} r \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \right) + w_1 \left(C_{11} \frac{u_r}{r} + C_{12} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \sigma_T \right) \right\} dr dz - \iint w_1 t_r ds = 0$$

$$\int \left\{ \frac{\partial w_2}{\partial z} \left(C_{11} r \frac{\partial u_z}{\partial z} + C_{12} \left(u_r + r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - r \sigma_T \right) + \frac{\partial w_2}{\partial r} \left(C_{66} r \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \right) \right\} dr dz - \iint w_2 t_z ds = 0 \quad (9)$$

که در آن

$$t_r = r \sigma_r n_r + \sigma_{rz} n_z \quad (10)$$

$$t_z = \sigma_z n_z + r \sigma_{rz} n_r$$

همچنین با استفاده از توابع درونیاب ψ می‌توان نوشت:

$$u_r = \sum_{j=1}^{n_c} u_j \psi_j$$

$$u_z = \sum_{j=1}^{n_c} v_j \psi_j \quad (11)$$

$$w_1 = w_2 = \psi_i$$

با جایگذاری (۱۱) در (۹) به دست می‌آید:

$$\int \left\{ C_{11} r \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} u_j + C_{12} \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \psi_j u_j + C_{12} r \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \frac{\partial \psi_j}{\partial z} v_j + \frac{C_{11}}{r} \psi_i \psi_j u_j + C_{66} r \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} v_j + C_{66} r \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \psi_j \frac{\partial \psi_j}{\partial z} u_j + C_{12} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \psi_j v_j + C_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \psi_i u_j - \left(r \frac{\partial \psi_i}{\partial r} + \psi_i \right) \sigma_T \right\} dr dz = \iint \psi_i t_r$$

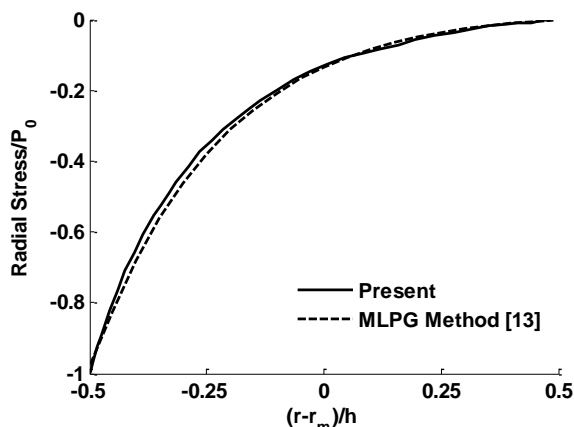
$$\int \left\{ C_{66} r \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} v_j + C_{66} r \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \frac{\partial \psi_j}{\partial z} u_j + C_{11} r \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \frac{\partial \psi_j}{\partial z} v_j \right\} dr dz = \iint \psi_i t_z ds \quad (12)$$

$$+ C_{12} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \psi_j u_j + C_{12} r \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} u_j - \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \sigma_T \right\} dr dz = \iint \psi_i t_z ds$$

روابط (۱۲) را می‌توان به فرم ماتریسی رابطه (۱۳) نوشت:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Petrov-Galerkin بدون المان به دست آمده است. طول استوانه به مقدار کافی بلند در نظر گرفته می‌شود تا بتوان نتایج را با حالت کرنش صفحه ای مقایسه کرد. مقادیر بی بعد تنش شعاعی در راستای ضخامت استوانه‌ی FGM به ازاء ضریب توان $n=1$ در شکل (۲) با حل ارائه شده در این مقاله مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که تطابق بسیار خوبی بین نتایج وجود دارد.

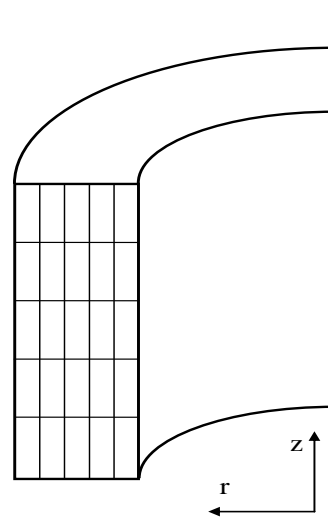


شکل (۲): مقایسه‌ی مقادیر بی بعد تنش شعاعی در راستای ضخامت استوانه با حل ارائه شده در مرجع [۱۷]

در ادامه مقایسه‌های دیگر بین حل اجزاء محدود و حل تحلیلی به روش تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول (FSDT) برای استوانه‌ی جدار نازک ارائه شده است. بدین منظور، حل تحلیلی مخزن FGM با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول به دست آورده شده است. فرض‌های استفاده شده در حل تحلیلی عبارتند از:

- ۱- استفاده از قانون توزیع توانی برای مدل کردن تغییرات خواص در امتداد ضخامت،
- ۲- ثابت بودن ضریب پواسون،
- ۳- صفحه‌ای بودن تنش‌ها،
- ۴- مستقل بودن خواص از دما،
- ۵- ایزوتروپیک بودن ماده،
- ۶- کوچک بودن تغییر شکل‌های پوسته،
- ۷- متقارن محوری بودن مسأله از لحاظ هندسی و بارگذاری و
- ۸- استفاده از فرض Love-Timoshenko (یعنی $1+z/R \ll 1$). در فرض آخر از نسبت ضخامت به شعاع در برابر یک صرف نظر شده است. در نتیجه این حل تحلیلی فقط برای استوانه‌های جدار نازک صادق است.

به‌منظور ارائه‌ی حل عددی، یک مخزن استوانه‌ای که سطح داخلی آن از جنس فلز آلومینیوم با مدول الاستیسیته 70 GPa ، ضریب پواسون $0/3$ ، ضریب هدایت گرمایی 204 W/mK و ضریب انبساط حرارتی $23 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ و سطح خارجی آن از



شکل (۱): نمایش چیدمان المان‌ها در جداره‌ی استوانه

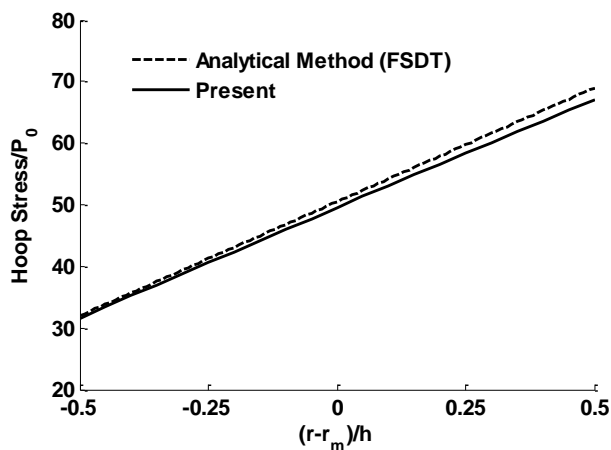
لازم به ذکر است که در بارگذاری‌های حرارتی، ابتدا باید توزیع دما در راستای ضخامت را از حل معادله‌ی انتقال حرارت پایدار یک‌بعدی در راستای ضخامت به دست آورد و سپس معادله‌های تعادل را حل نمود. این معادله به صورت رابطه (۱۶) می‌باشد:

$$-\frac{d}{dr} \left(k_r(r) \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (16)$$

به دلیل وابسته بودن ضریب k_r به r ، حل تحلیلی معادله‌ی (۱۶) فقط برای ضرایب صحیح n و ضرایب غیر صحیح $n=0/2$ و $n=0/5$ موجود است. بنابراین ترجیح داده می‌شود که معادله‌ی یاد شده نیز به روش اجزاء محدود یک بعدی در راستای ضخامت حل شود. بدین ترتیب هیچگونه محدودیتی در وجود حل برای ضرایب مختلف n وجود نخواهد داشت.

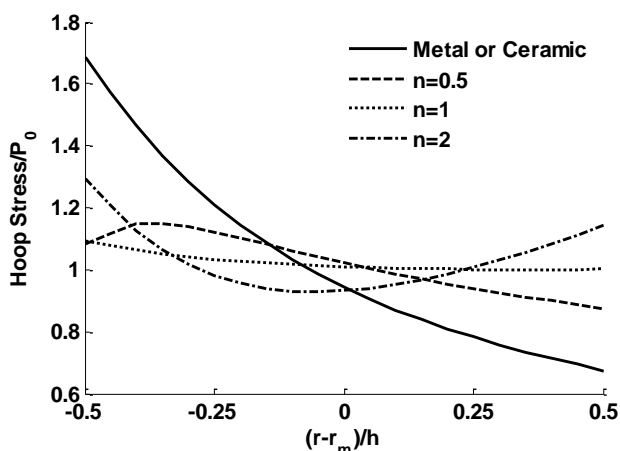
۳- نتایج عددی

به‌منظور بررسی دقت و صحت نتایج برنامه‌ی اجزاء محدود و المان تعریف شده، توزیع تنش در مخزن جدار ضخیم با حل ارائه شده در مرجع [۱۷] مقایسه شده است. استوانه به صورت کرنش صفحه‌ای با شعاع داخلی 5 mm و شعاع خارجی 10 mm در نظر گرفته شده است. سطح داخلی استوانه از جنس سرامیک کاربید سیلیسیم با مدول الاستیسیته 427 GPa و سطح خارجی آن از جنس فلز آلومینیوم با مدول الاستیسیته 70 GPa می‌باشد. همچنین ضریب پواسون به طور ثابت $0/3$ فرض شده است. بارگذاری مکانیکی فشار داخلی $P_0 = 1 \text{ MPa}$ در نظر گرفته شده است. در مرجع [۱۷]، حل عددی بر اساس روش



شکل (۳): توزیع تنش محیطی بی بعد در راستای ضخامت

استوانه‌ی جدار نازک ($r_{in}/h = 50$) به ازاء $n=1$



شکل (۴): توزیع تنش محیطی بی بعد در راستای ضخامت

استوانه‌ی جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار داخلی

نمودارهای مقادیر بی بعد تنش‌های محیطی در راستای ضخامت استوانه‌های جدار ضخیم و جدار نازک به ازاء مقادیر مختلف ضریب توان n در شکل‌های (۴) و (۵) نشان داده شده است. دیده می‌شود که تنش‌های محیطی در استوانه‌های FGM نسبت به استوانه‌ی خالص با کاهش در سطح داخلی و افزایش در سطح خارجی همراه است. این رفتار نشان می‌دهد که در استوانه‌های جدار ضخیم FGM تنش حداکثر کاهش و در استوانه‌های جدار نازک FGM تنش حداکثر افزایش می‌یابد.

نمودارهای مقادیر بی بعد تنش‌های محیطی در سطح میانی و در راستای طول استوانه‌های جدار ضخیم و جدار نازک به ازاء مقادیر مختلف ضریب توان n در شکل‌های (۶) و (۷) نشان داده شده است. به دلیل تقارن در دو انتهای استوانه به لحاظ بارگذاری و شرایط مرزی و اجتناب از انجام محاسبات اضافی، صفحه‌ی تقارن در وسط طول استوانه در نظر گرفته شده و فقط نیمی از طول استوانه مدل شده است. در نتیجه نمودارهای در راستای طول نیز فقط برای نیمی از طول استوانه می‌باشد.

جنس سرامیک زیرکونیا با مدول الاستیسیته 151 GPa ، ضریب پواسون 0.3 ، ضریب هدایت گرمایی 2.09 W/mK و ضریب انبساط حرارتی $10 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ در نظر گرفته شده است. دو نوع شرایط مرزی شامل استوانه‌ی دو سر تکیه گاه ساده و دو سر گیر دار در نظر گرفته شده است. بارگذاری‌های استاتیکی به صورت فشار داخلی برای استوانه‌ی دو سر گیر دار و حرارتی به صورت اختلاف دمای سطوح داخلی و خارجی برای استوانه‌ی دو سر تکیه گاه ساده اعمال شده است. نمودارهای توزیع دما و تنش در راستای ضخامت و طول استوانه‌ی ساخته شده از مواد هدفمند به دست آمده و با استوانه سرامیکی یا فلزی مقایسه شده است.

نتایج برای دو نوع استوانه‌ی جدار ضخیم و جدار نازک به دست آمده است. در مواردی که نسبت شعاع داخلی به ضخامت استوانه ذکر نشده است، در استوانه‌ی جدار ضخیم این نسبت برابر یک و در استوانه‌ی جدار نازک برابر بیست فرض می‌شود. در هر دو نوع استوانه، نسبت طول به شعاع داخلی برابر بیست فرض می‌شود. نمودارهای مختلف به ازای مقادیر بی بعد شعاع استوانه رسم شده است به طوری که شعاع بی بعد از مقدار 0.5 در سطح داخلی به 0.5 در سطح خارجی افزایش می‌یابد. کلیه‌ی نمودارهایی که در ادامه آورده شده است مربوط به مقطعی است که از وسط طول استوانه می‌گذرد.

۳-۱- بارگذاری استاتیکی فشار داخلی برای استوانه‌ی دو

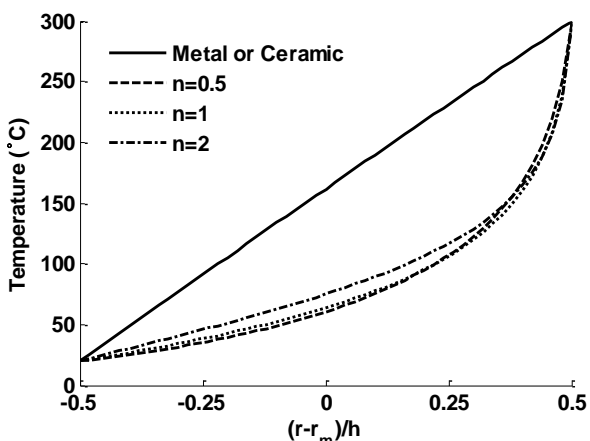
سر گیردار

در این قسمت، فشار داخلی برابر $P_0 = 1 \text{ MPa}$ در نظر گرفته می‌شود. برای مقایسه با حل تحلیلی، نمودار تنش محیطی بی بعد در راستای ضخامت استوانه به ازاء ضریب توان $n=1$ برای استوانه‌ی جدار نازک ($r_{in}/h = 50$) در شکل (۳) نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که تطابق بسیار خوبی بین نتایج برقرار است. نمودارهای مقادیر بی بعد تنش‌های محیطی در راستای ضخامت استوانه‌های جدار ضخیم و جدار نازک به ازاء مقادیر مختلف ضریب توان n در شکل‌های (۴) و (۵) نشان داده شده است.

و به ازاء مقادیر مختلف n در لبه‌های استوانه به مقدار تنش در استوانه‌ی خالص همگرا می‌شود. همچنین ملاحظه می‌شود که برای استوانه‌های جدار ضخیم و جدار نازک تحت فشار داخلی، به ترتیب در حدود ۱۵ درصد و ۵ درصد طول استوانه در لبه‌ها تفاوت محسوس در مقادیر تنش نسبت به مقادیر آن در غیر از لبه‌های استوانه وجود دارد.

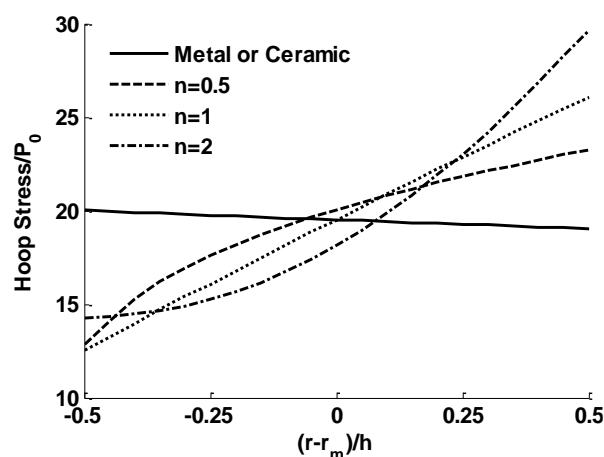
۲-۳- بارگذاری حرارتی پایدار برای استوانه‌ی دو سر تکیه‌گاه ساده

در این قسمت، دمای سطح داخلی ۲۰ درجه‌ی سانتی‌گراد و سطح خارجی ۳۰۰ درجه‌ی سانتی‌گراد فرض می‌شود. خواص مواد را در این بازه‌ی دمایی تقریباً می‌توان ثابت در نظر گرفت. همچنین دمای بدون تنش، صفر درجه‌ی سانتی‌گراد فرض می‌شود. نمودار توزیع دما در راستای ضخامت استوانه به ازای مقادیر مختلف ضریب توان n برای استوانه‌های جدار ضخیم و جدار نازک تقریباً یکسان است که در شکل (۸) نشان داده شده است. همانطور که انتظار می‌رود، توزیع دما در استوانه‌های خالص فلزی یا سرامیکی به صورت خطی است. اما در استوانه‌های ساخته شده از مواد هدفمند، توزیع دما غیر خطی و تفاوت زیادی با ماده‌ی همگن دارد و به نظر می‌رسد که این اختلاف عمده منشأ تفاوت زیاد رفتار مواد هدفمند نسبت به مواد همگن در بارگذاری حرارتی باشد. همچنین دیده می‌شود که توزیع دما در مواد هدفمند به ازای ضرایب مختلف n تقریباً یکسان بوده و با نزدیک شدن به سمت سطح داخلی استوانه، گرادیان حرارتی کاهش می‌یابد و این یک عامل مثبت در کاهش تنش سطح داخلی در بارگذاری حرارتی است.

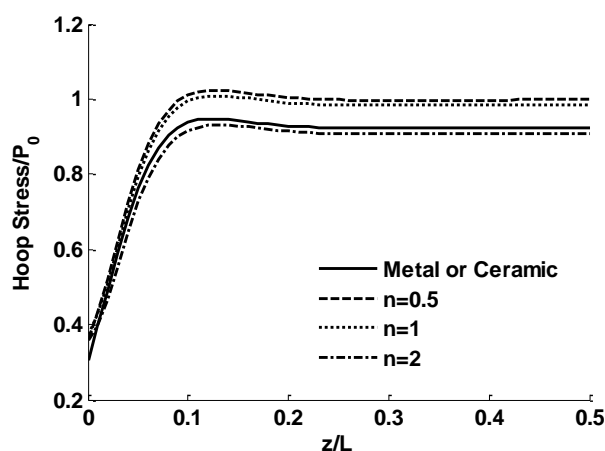


شکل (۸): نمودار توزیع درجه‌ی حرارت در راستای ضخامت استوانه تحت بارگذاری حرارتی پایدار

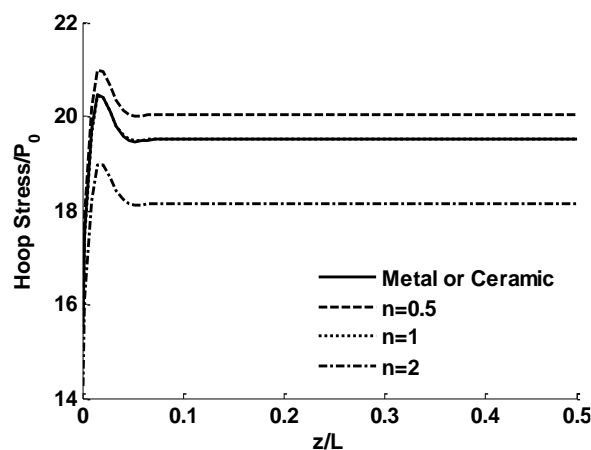
برای مقایسه نتایج با حل تحلیلی، نمودار تنش محیطی در



شکل (۵): توزیع تنش محیطی بی بعد در راستای ضخامت استوانه‌ی جدار نازک تحت بارگذاری فشار داخلی

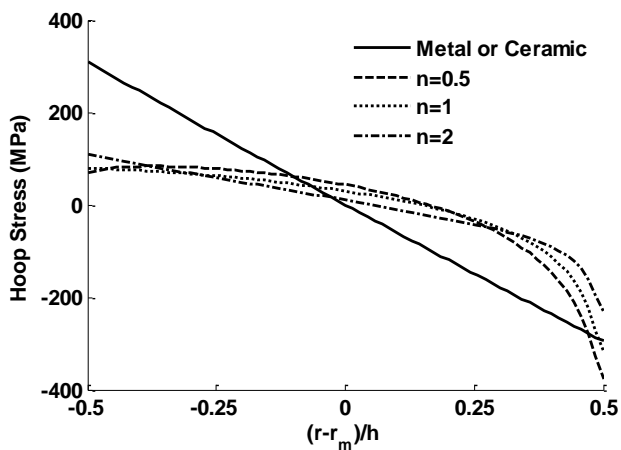


شکل (۶): توزیع تنش محیطی بی بعد در راستای طول استوانه‌ی جدار ضخیم تحت بارگذاری فشار داخلی



شکل (۷): توزیع تنش محیطی بی بعد در راستای طول استوانه‌ی جدار نازک تحت بارگذاری فشار داخلی

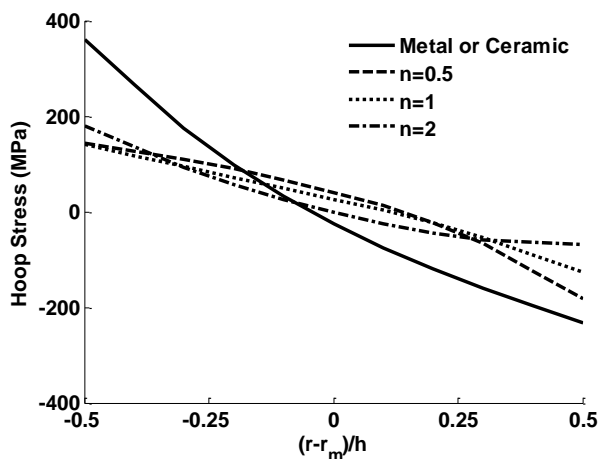
در شکل‌های (۶) و (۷) ملاحظه می‌شود که در استوانه‌های تحت فشار داخلی توزیع مقادیر تنش در راستای طول استوانه برای استوانه‌های FGM مشابه رفتار استوانه‌ی خالص می‌باشد



شکل (۱۱): توزیع تنش محیطی در راستای ضخامت استوانه‌ای جدار نازک تحت بارگذاری حرارتی دائم

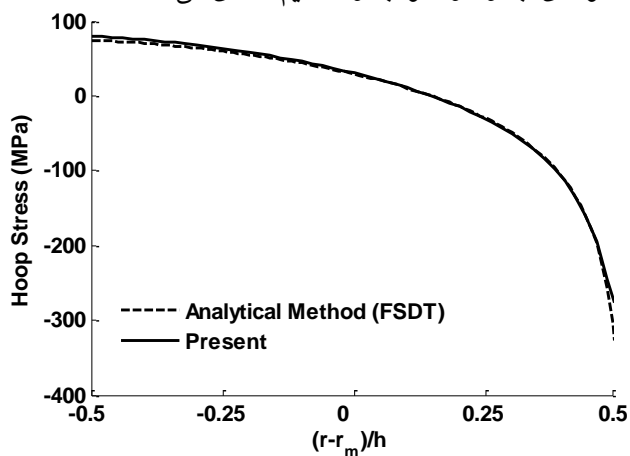
۳-۳- آزاد بارگذاری مکانیکی و حرارتی در استوانه دو سر

در این قسمت، استوانه‌ای دو سر آزاد تحت بارهای توام مکانیکی و حرارتی در نظر گرفته است. بارگذاری حرارتی مشابه قسمت قبل و بارگذاری مکانیکی بصورت اعمال فشار داخلی $P_0 = 10 \text{ MPa}$ فرض شده است. نمودارهای تنش محیطی در راستای ضخامت استوانه‌های جدار ضخیم و جدار نازک به ازاء مقادیر مختلف ضریب ضریب توان n در شکل های (۱۲) و (۱۳) نشان داده شده است.

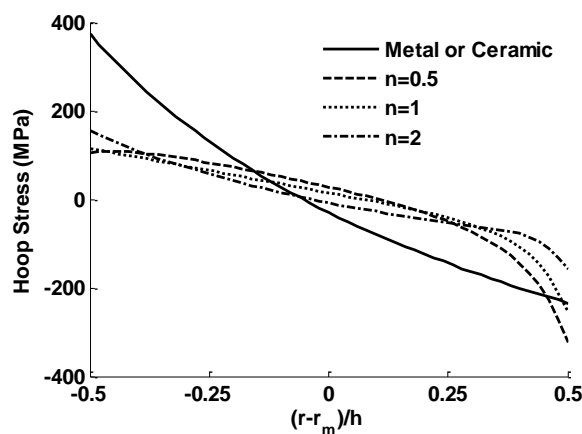


شکل (۱۲): توزیع تنش محیطی در راستای ضخامت استوانه‌ای جدار ضخیم تحت بارگذاری ترمومکانیکال

راستای ضخامت استوانه‌ای جدار نازک به ازاء ضریب توان $n=1$ در شکل (۹) نشان داده شده است. همچنین نمودارهای مقادیر تنش‌های محیطی در راستای ضخامت استوانه‌های جدار ضخیم و جدار نازک به ازاء مقادیر مختلف ضریب توان n در شکل های (۱۰) و (۱۱) نشان داده شده است. با توجه به این شکل‌ها دیده می‌شود که در بارگذاری حرارتی، مقادیر تنش محیطی در راستای ضخامت استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدمند در مقایسه با استوانه‌ای خالص در سطح خارجی تفاوت چندان زیادی ندارد ولی در سطح داخلی کاهش بسیار زیادی را نشان می‌دهد. می‌توان به این نکته‌ی جالب اشاره کرد که استفاده از مواد هدمند، تنش محیطی حداکثر را در هر دو نوع استوانه‌ای جدار نازک و جدار ضخیم کاهش می‌دهد.



شکل (۹): توزیع تنش محیطی در راستای ضخامت استوانه‌ای جدار نازک به ازاء $n=1$



شکل (۱۰): توزیع تنش محیطی در راستای ضخامت استوانه‌ای جدار ضخیم تحت بارگذاری حرارتی پایدار

Jabbari, M.; Sohrabpour, S.; Eslami, M.R.; "General Solution for Mechanical and Thermal Stresses in a Functionally Graded Hollow Cylinder Due to Nonaxisymmetric Steady-State Loads", Journal of Applied Mechanics, p.p. 111-118, 2003.

Awaji, H.; Sivakuman, R.; "Temperature and Stress Distributions in a Hollow Cylinder of Functionally Graded Material: The Case of Temperature-Dependent Material Properties", Journal of American Ceramic Society, p.p. 1059-1065, 2001.

Liew, K.M.; Kitipornchai, S.; Zhang, X.Z.; Lim, C.W.; "Analysis of the Thermal Stress Behavior of Functionally Graded Hollow Circular Cylinders", International Journal of Solids and Structures, p.p. 2355-2380, 2003.

Shakeri, M.; Akhlaghi, M.; Hoseini, S.M.; "Vibration and radial wave propagation velocity in functionally graded thick hollow cylinder", Composite Structures, p.p. 174-181, 2006.

Hoseini, S.M.; Akhlaghi, M.; Shakeri, M.; "Dynamic response and radial wave propagation velocity in thick hollow cylinder made of functionally graded materials", Engineering Computations, p.p. 288-303, 2007.

Oral, A.; Anlas, G.; "Effects of radially varying moduli on stress distribution of nonhomogeneous anisotropic cylindrical bodies", International Journal of Solids and Structures, p.p. 5568-5588, 2005.

Obata, Y.; Kanayama, K.; Ohji, T.; Noda, N.; "Two-Dimensional Unsteady Thermal Stresses in a Partially Heated Circular Cylinder Made of Functionally Graded Material", Proceeding of Thermal Stress, p.p. 13-17, 1999.

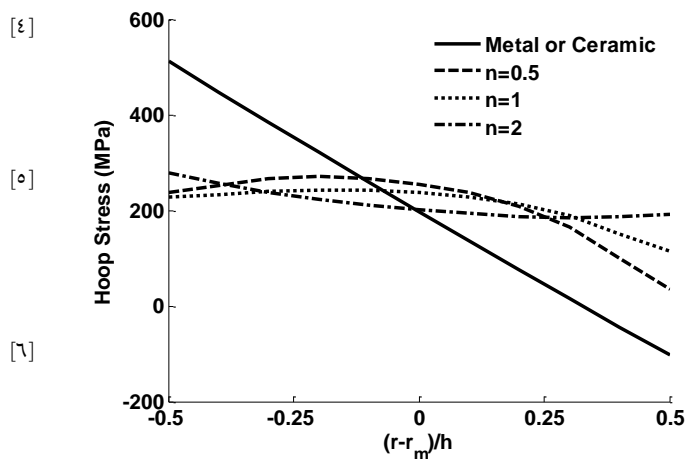
Hoseini, S.M.; Akhlaghi, M.; Shakeri, M.; "Transient heat conduction in functionally graded thick hollow cylinders by analytical method", Heat Mass Transfer, p.p. 669-675, 2007.

Reddy, J.N.; Chin, C.D.; "Thermomechanical Analysis of Functionally Graded Cylinders and Plates", Journal of Thermal Stresses, p.p. 593-626, 1998.

حسینی، سید محمود؛ تحلیل همزمان حرارتی مکانیکی پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم از جنس مواد هدفمند (رساله‌ی دوره‌ی دکتری)، شاکری، اخلاقی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ۱۳۸۶.

Obata, Y.; Noda, N.; "Steady Thermal Stresses in a Hollow Circular Cylinder and a Hollow Sphere of a Functionally Gradient Material", Journal of Thermal Stresses, p.p. 471-487, 1994.

Ye, G.R.; Chen, W.Q.; Cai, J.B.; "A Uniformly Heated Functionally Graded Cylindrical Shell with Transverse Isotropy", Mechanics Research Communications, p.p. 535-542, 2001.



شکل (۱۳): توزیع تنش محیطی در راستای ضخامت استوانه‌ای جدار نازک تحت بارگذاری ترمومکانیکال

۴- نتیجه

در این مقاله برای تحلیل مخازن جدار ضخیم FGM که خواص مکانیکی و فیزیکی آنها در جهت ضخامت به صورت تابع توزیع توانی تغییر می‌کند، یک نوع المان تعریف شد. در این نوع المان، تغییرات دقیق خواص در راستای ضخامت در نظر گرفته شده است. با توجه به نتایج ارائه شده ملاحظه شد که توزیع تنش در مخزن استوانه‌ای ساخته شده از فلز یا سرامیک خالص فقط تابع بار و هندسه‌ی مخزن می‌باشد، در حالی که توزیع تنش و دما در مخزن استوانه‌ای FGM، علاوه بر این که تابع بار و هندسه مخزن است، به نوع ماده و نحوه‌ی تغییرات خواص آن نیز وابسته است. این وابستگی جهت کنترل توزیع تنش و دما مفید است. همچنین استفاده از FGM در ساخت مخازن استوانه‌ای، باعث کاهش تنش محیطی در سطح داخلی می‌شود. اثر این کاهش در بارگذاری حرارتی نسبت به مکانیکی بسیار قابل توجه است.

۵- مراجع

- [۱] Tutuncu, N.; Ozturk, M.; "Exact Solutions for Stresses in Functionally Graded Pressure Vessels", Composites: Part B, p.p. 683-686, 2001.
- [۲] Horgan, C.O.; Chan, A.M.; "The Pressurized Hollow Cylinder or Disk Problem for Functionally Graded Isotropic Linearly Elastic Materials", Journal of Elasticity, p.p. 43-59, 1999.
- [۳] Jabbari, M.; Sohrabpour, S.; Eslami, M.R.; "Mechanical and Thermal Stresses in a Functionally Graded Hollow Cylinder Due to Radially Symmetric Loads", International Journal of Pressure Vessels and Piping, p.p. 493-497, 2002.

Woo, J.; Meguid, S.A.; "Nonlinear Analysis of Functionally Graded Plates and Shallow Shells", International Journal of Solids and Structures, p.p. 7409-21, 2001. [۱۶]

Ching, H.K.; Yen, S.C.; "Meshless Local Petrov-Galerkin Analysis for 2D Functionally Graded Elastic Solids Under Mechanical and Thermal Loads", Composites Part B, p.p. 223-240, 2005. [۱۷]