

# شبیه سازی عددی جریان سیال لزج با استفاده از روش المان‌های مرزی

قاسم حیدری نژاد<sup>۱</sup>، جعفر اسماعیلیان<sup>۲</sup>

## چکیده

به منظور استفاده از روش المان‌های مرزی در حل مسایل سیالات، بایستی علاوه بر انفصال روی مرز، تعدادی سلول داخلی برای محاسبه انتگرال‌های ناشی از ترم‌های جابجایی نیز در نظر گرفت. برای این منظور از روش تابع پنالتی که کاربرد زیادی در روش المان‌های محدود دارد استفاده شده است. با استفاده از این روش، ترم فشار از معادلات حاکم حذف شده و معادلات به شکل معادله ناویر در الاستواستاتیک تبدیل می‌شود. این روش از برتری‌های ویژه‌ای برخوردار است که از جمله می‌توان به سادگی استفاده از انواع المانها، محاسبه دقیق مشتقها توسط تابع حل اساسی در هر نقطه دلخواه از دامنه و کاهش حافظه مورد نیاز و تعداد محاسبات در الگوریتم تکرار اشاره کرد. در این تحقیق دو روش مختلف برای محاسبه مشتق‌های داخلی بررسی شد و معادلات حاصل برای حل جریان داخل حفره تا میزان عدد رینولدز ۴۰۰ و جریان پشت پله تا عدد رینولدز ۷۵ مورد استفاده قرار گرفت. نتایج حاصل از شبیه سازی عددی با کارهای قبلی مقایسه گردید که بر خلاف کاهش زمان محاسبات و حافظه لازم از دقت بسیار خوبی برخوردار است.

## کلمات کلیدی

روش المان‌های مرزی، تابع پنالتی، جریان حفره، جریان پله

## *Viscous Flow Analysis using Boundary Elements Method*

Ghassem Heidarinejad, Jafar Esmaeelian

### ABSTRACT

In this research, applications of the Boundary Element Method to viscous flow are investigated. The BEM formulation allows a boundary-only solution for linear Stokes flow. For higher speed flows in which the non-linear convective effects cannot be ignored, a volume integral must be retained. The proposed formulation is based on analogy between Navier's equations in elastostatics and Navier-Stokes equations expressed by using a penalty function. By using penalty function formulation, pressure term is eliminated and Navier-Stokes equations are converted to Navier equations in elastostatics. In many previous works, potential fundamental solution was used for solving viscous fluid flow with BEM but in this research elastostatics fundamental solution is used. Finally, some two-dimensional examples are provided to validate the presented approach. It is found that the boundary element method gives accurate solutions and it is more economical than other methods since the application of the method requires discretization only on the boundaries of the domain and thus it reduces the spatial dimensions of the problem by one.

### KEYWORDS

۱ استاد بخش مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس Email: [gheidari@modares.ac.ir](mailto:gheidari@modares.ac.ir)

۲ دانشجوی کارشناسی ارشد بخش مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس Email: [esmaeleian@bhrc.ac.ir](mailto:esmaeleian@bhrc.ac.ir)



این روش سینتیک و سینماتیک مساله را از هم جدا می‌کند. معادلات انتگرال تنها برای معادله پواسون که سینماتیک مساله را بیان می‌کند نوشته می‌شوند و از روش المان‌های محدود برای تحلیل قسمت سینتیک استفاده می‌شود [۸].

بر خلاف وجود مشکلات یاد شده در مورد کاربرد روش المان‌های مرزی به ویژه در مسایل غیرخطی مانند جریان سیالات، ویژگی‌های این روش به گونه‌ایست که به نظر می‌رسد پرداختن به روش المان‌های مرزی همچنان زمینه تحقیقاتی نو و چالشی برای روش‌های عددی به شمار می‌آید. در این تحقیق کاربرد روش المان‌های مرزی در حل معادلات ناویر-استوکس ارائه شده است. این معادلات با استفاده از روش تابع پنالتی به فرم معادلات ناویر در الاستوستاتیک تبدیل شده و الگوریتم فرمول‌بندی برای حل این معادلات بر اساس روش انتگرال داخلی بیان شده است. در بیشتر کارهای قبلی انجام شده از تابع حل اساسی معادله لاپلاس استفاده شده است ولی در این تحقیق از تابع حل اساسی معادله ناویر و از دو روش مختلف برای محاسبه مشتقات در نقاط داخلی استفاده شده است تا بازه عدد رینولدز قابل استفاده افزایش یابد. همانطور که گفته شد در این روش، جملات جابجایی مانند نیروهای حجمی در نظر گرفته شده و انتگرال حاصل از آنها توسط تعدادی المان داخلی محاسبه می‌شود. گرچه استفاده از المان‌های داخلی از برتری‌های روش می‌کاهد ولی باید توجه داشت که این المانها فقط برای محاسبه انتگرالهای داخلی در نظر گرفته می‌شوند و دستگاه معادلات تنها بر روی مرز تشکیل می‌شود.

## ۲- معادلات حاکم

معادلات پیوستگی و بقای اندازه حرکت خطی برای جریان سیال تراکم‌ناپذیر لزج در حالت پایا در سیستم مختصات کارتزین به صورت رابطه ۱ است [۹]:

$$\begin{cases} v_{i,i} = 0 \\ v_j v_{i,j} = -\frac{1}{\rho_0} p_{,i} + v(v_{i,j} + v_{j,i})_{,j} \end{cases} \quad (1)$$

اگر مقادیر  $V_0$  و  $L$  به عنوان مقیاس‌های سرعت و طول در نظر گرفته شده و عدد رینولدز به صورت  $V_0 L / \nu$  تعریف شود معادلات حاکم بر سیال به صورت بی‌بعد توسط معادلات (۲) بیان می‌شود [۹]:

معادلات انتگرالی برای سیال تراکم‌ناپذیر لزج در سال ۱۹۲۷ توسط اوسین برای جریان دوبعدی و سه بعدی ارائه شد [۱]. آکریوس و یانجرن در سال ۱۹۷۵ روش انتگرال عددی را برای جریان در طول اجسام و برای معادله استوکس بکار بردند که اولین کاربرد روش المان‌های مرزی برای جریان سیال لزج بود [۲]. در سال ۱۹۷۷ وو و تامسون از پیشنهاد لایت‌هیل برای بکارگیری رتیسیتی به عنوان متغیرهای ثانویه برای بیان معادلات ناویر-استوکس استفاده کردند [۳]. در این روش، معادلات حاکم بر سیالات به دو بخش سینتیک و سینماتیک تقسیم می‌شود. قسمت سینتیک، تغییرات میدان رتیسیتی با زمان را بیان می‌کند که شامل معادله انتقال رتیسیتی است. قسمت سینماتیک، میدان سرعت را به رتیسیتی مربوط می‌کند که معادلات پواسون و لاپلاس را شامل می‌شود. وو و تامسون این فرمول‌بندی را برای مطالعه جریان اطراف ایرفویل به کمک به هم پیوستن روش تفاضل‌های محدود و معادلات انتگرال مرزی توسعه دادند اما همچنان مشکلاتی در مرزهای جامد وجود داشت [۳]. کار بعدی توسط بوش و تانر انجام شد که شامل جملات غیرخطی فرمولاسیون ارائه شده توسط اوسین بود و برای جریان غیر قابل تراکم و پایدار انجام گرفت [۴]. بوش این روش را بوسیله ترکیب کردن حل اساسی با جملات جابجایی خطی شده گسترش داد و مثال‌های گوناگونی را برای جریان اطراف سیلندر حل نمود. ولی نتایج حاکی از این بود که حل غیر خطی برای اعداد رینولدز بزرگتر از ۱۰ کارایی ندارد. اونیشی و توساکا در سال ۱۹۸۵ فرمول‌بندی دیگری را برای جابجایی طبیعی پیشنهاد دادند که در آن رتیسیتی و تابع جریان به عنوان متغیرهای اصلی در نظر گرفته می‌شدند [۵]. این فرمول‌بندی کاربرد عمومی ندارد زیرا کمتر شرایط مرزی یک مساله بصورت رتیسیتی و تابع جریان و گرادیان آنها بیان می‌شود. کاکودا و توزاکا در سال ۱۹۸۶ روش بوش و تانر را بوسیله یک الگوریتم نیوتن-رافسون برای حل دستگاه معادلات غیر خطی به دست آمده گسترش دادند [۶]. طی سال‌های اخیر نیز کارهای زیادی برای حل مستقیم جریان سیال غیر قابل تراکم ویسکوز صورت گرفته است که در همه آنها از معادلات انتگرال اوسین استفاده شده و روش حل بوش و تانر دنبال شده است [۷]. محققین طی سال‌های اخیر به دنبال روش‌هایی بوده‌اند که ترم‌های غیر خطی را لحاظ نموده و به انتگرال روی مرز تبدیل نمایند. بعنوان مثال روش دیگری که توسط وو پیشنهاد شده و اسکرگت و همکارانش آنرا توسعه دادند روش سرعت-رتیسیتی است [۸].

### ۳- فرمول بندی انتگرالی معادلات

ابتدا به بررسی معادله ناویر در الاستواستاتیک پرداخته شده و سپس این معادله برای حل جریان سیال گسترش داده می شود. معادله ناویر به صورت معادله (۶) بازنویسی شده است:

$$\left(\frac{1}{1-2\nu}\right)u_{j,ji} + u_{i,jj} + \frac{1}{\mu}b_i = 0 \quad (6)$$

که در این معادله  $\nu$  ثابت پواسون بوده و رابطه بین  $\nu$  و  $\mu$  و  $\lambda$  به صورت رابطه (۷) می باشد [۱۲]:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (7)$$

با میل دادن  $\lambda$  به سمت بی نهایت و یا  $\nu$  به سمت ۰/۵، معادله پیوستگی ارضا شده و می توان از معادله ناویر برای حل جریان سیال لزج استفاده نمود. شرایط مرزی به صورت جابجایی و یا تنش های سطحی به صورت روابط شماره (۸) تعریف می شوند.

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}_i & \Gamma_u & \text{روی} \\ t &= \bar{t}_i & \Gamma - \Gamma_u & \text{روی} \end{aligned} \quad (8)$$

$t$  نشان دهنده تنش سطحی است و با دو بار انتگرال گیری جزء به جزء از معادله (۶) و اعمال قضیه گاوس معادله (۹) بدست می آید:

$$u_i^i + \int_{\Gamma} t_{ik}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ik}^* t_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^* b_k d\Omega \quad (9)$$

این معادله نقطه شروع روش المان های مرزی است و در عین حال شرایط مرزی را نیز برآورده می کند. معادله یاد شده با انتگرال گیری روی نقاط مرزی برای این نقاط به معادله (۱۰) تبدیل می شود [۱۲]:

$$\frac{1}{2}u_i^i + \int_{\Gamma} t_{ik}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ik}^* t_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^* b_k d\Omega \quad (10)$$

تابعی که برای حل اساسی در فضای دو بعدی بدست آمده است به صورت رابطه (۱۱) است [۱۳]:

$$u_{ik}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ik} + r_{,i} r_{,k} \right] \quad (11)$$

همچنین با توجه به رابطه بین ترم های جابجایی و تنش، مقادیر تنش سطحی به صورت زیر بدست می آید:

$$t_{ik}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ik} \right. \quad (12)$$

$$\left. + 2r_{,i} r_{,k} \right] + (1-2\nu)(n_i r_{,k} - n_k r_{,i})$$

توجه شود که برای مسائل الاستواستاتیک مقدار  $b$  یک عدد ثابت است که نشانگر نیروهای حجمی است ولی در حل مسائل سیالات،  $b$  شامل ترم های سرعت و مشتقات آن

$$\begin{cases} v_{i,i} = 0 \\ v_j v_{i,j} = -p_{,i} + \frac{1}{\text{Re}} (v_{i,j} + v_{j,i})_{,j} \end{cases} \quad (2)$$

در این معادلات  $\nu$  سرعت،  $p$  فشار،  $\nu$  لزجت سینماتیکی و  $\rho_0$  چگالی سیال می باشند.

تابع پناالتی در روش المان محدود کاربرد زیادی دارد و از آن برای از بین بردن ترم فشار از معادله ناویر استوکس استفاده می شود. برای این منظور فشار به صورت رابطه (۳) تقریب زده شده و دو معادله پیوستگی و اندازه حرکت خطی به یک معادله که حل اساسی آن موجود است تبدیل می شوند [۱۰]:

$$p = -\lambda v_{i,i} \quad (3)$$

که  $\lambda$  به عنوان پارامتر پناالتی شناخته می شود. چون فشار دارای مقدار محدود است، هنگامی که تابع  $\lambda$  برابر بی نهایت در نظر گرفته شود مقدار  $v_{i,i}$  به سمت صفر میل می کند. این امر موجب برآورده شدن معادله پیوستگی خواهد شد اما در محاسبات واقعی مقدار  $\lambda$  یک مقدار بزرگ ولی محدود در نظر گرفته می شود. با جایگزینی معادله (۳) در (۲)، معادله شماره (۴) بدست می آید:

$$\left(\lambda + \frac{1}{\text{Re}}\right)v_{j,ji} + \frac{1}{\text{Re}}v_{i,jj} = v_j v_{i,j} \quad (4)$$

اکنون به مقایسه معادله (۴) با معادلات حاکم بر الاستواستاتیک پرداخته می شود. تحت شرایط ایزوتروپی و هموزنی معادله اساسی الاستواستاتیک که به معادله ناویر معروف است به صورت معادله (۵) می باشد [۱۱]:

$$\left(\lambda + \mu\right)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} = -b_i \quad (5)$$

در معادله (۵)،  $b_i$  بیانگر نیروهای حجمی،  $u_i$  نشان دهنده بردارهای جابجایی و  $\lambda$  و  $\mu$  ثابت های لامه می باشند.

مقایسه معادلات (۴) و (۵) نشان می دهد که طرف چپ این معادلات مشابه است. بنابراین، برای حل معادله جریان سیال لزج می توان از روش های حل معادله ناویر در الاستواستاتیک استفاده نمود. مقایسه متغیرهای متناظر در دو معادله برای جریان سیالات و الاستواستاتیک در جدول (۱) آورده شده است.

جدول (۱) مقایسه متغیرهای متناظر در دو معادله برای جریان سیالات و الاستواستاتیک

الاستیسیته	جریان سیال لزج
$u_i$ جابجایی	$v_i$ سرعت
$\lambda$ ثابت لامه	$\lambda$ تابع پناالتی
$\mu$ ثابت لامه	$\frac{1}{\text{Re}}$ معکوس عدد رینولدز
$b_i$ نیروهای حجمی	$-v_j v_{i,j}$ ترم جابجایی و نیروهای حجمی

می باشد، بنابراین به یک روش تکرار نیاز است که در قسمت بعدی به آن پرداخته شده است.

## ۴- ارزیابی و محاسبه ترم های جابجایی

یکی از مهم ترین قسمت های حل جریان سیال لزج به وسیله روش المان های مرزی، ارزیابی و محاسبه ترم های جابجایی در معادله ناویر-استوکس است. برای محاسبه مشتقات سرعت در هر نقطه داخلی از دو روش مختلف استفاده شده است:

(الف) استفاده از تفاضل محدود

این روش، ساده ترین راه برای محاسبه عددی مشتقات سرعت است. در این حالت از روش تفاضل محدود و از روش بالادست<sup>۲</sup> استفاده شده است.

(ب) استفاده از فرمول بندی انتگرال مرزی

در این روش مشتقات سرعت بطور مستقیم از فرمول بندی انتگرالی معادلات حاصل می شود. برای این منظور معادله شماره (۱۳) با استفاده از مشتق گیری از معادله (۹) بدست می آید [۱۴]:

$$u_{l,m}^i + \int_{\Gamma} t_{lkm}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lkm}^* t_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lkm}^* b_k d\Omega \quad (13)$$

به طوری که

$$u_{lkm}^* = u_{lk,m}^* \quad (14)$$

$$t_{lkm}^* = t_{lk,m}^*$$

بدین ترتیب مشتقات سرعت نیز همانند سرعت به طور مستقیم از طریق روش انتگرال مرزی توسط معادله (۱۳) محاسبه می شوند.

## ۵- فرمول بندی المان مرزی

برای تشکیل دستگاه معادلات، مرز به  $N$  المان ثابت و دامنه به  $M$  المان داخلی تقسیم شده و فرمول (۱۰) به صورت رابطه ۱۵ نوشته می شود:

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} t^* d\Gamma \right\} u^j = \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \right\} t^j \quad (15)$$

$$+ \sum_{s=1}^M \left\{ \int_{\Omega_s} u^* b d\Omega \right\}$$

معادله بالا برای نقطه  $i$  نوشته شده است و ترم های  $\int_{\Gamma_j} u d\Gamma$

و  $\int_{\Gamma_j} t d\Gamma$  رابطه بین نقطه  $i$  را با نقطه  $j$  بیان می کنند. بعد از انتگرال گیری این انتگرال ها به زیرماتریس های  $G^{ij}$  و  $\hat{H}^{ij}$  تبدیل می شوند. انتگرال ترم های جابجایی نیز در هر سلول داخلی محاسبه شده و مجموع آنها در محاسبات اعمال می شود:

$$\sum_{s=1}^M \left\{ \int_{\Omega_s} u^* b d\Omega \right\} = \sum_{s=1}^M B^{is} \quad (16)$$

بردار  $B^{is}$  شامل دو مؤلفه  $B_1^{is}$  و  $B_2^{is}$  در دو جهت می باشد که پس از محاسبه در دستگاه معادلات جایگزین می شوند. بنابراین معادله (۱۵) به صورت رابطه (۱۷) تبدیل می شود:

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^N \hat{H}^{ij} u^j = \sum_{j=1}^N G^{ij} t^j + \sum_{s=1}^M B^{is} \quad (17)$$

این معادله رابطه بین مقدار  $u$  را در نقطه  $i$  با مقادیر  $u$  و  $t$  در همه نقاط مرزی (از جمله نقطه  $i$ ) بیان می کند. می توان با یک تغییر متغیر، معادله (۱۷) را به فرم خلاصه تری نوشت. با فرض:

$$H^{ij} = \hat{H}^{ij} \quad i = j \quad (18)$$

$$H^{ij} = \hat{H}^{ij} + c^i \quad i \neq j$$

معادله (۱۷) به معادله (۱۹) تغییر می کند:

$$\sum_{j=1}^N H^{ij} u^j = \sum_{j=1}^N G^{ij} t^j + \sum_{s=1}^M B^{is} \quad (19)$$

حال اگر معادله (۱۹) به همه نقاط مرزی اعمال شود و همه مجهولات به سمت چپ معادله منتقل شود، نتیجه به فرم ماتریسی به صورت رابطه (۲۰) خواهد بود:

$$AX = F + B \quad (20)$$

ماتریس  $X$  شامل همه مجهولات موجود بر روی مرز می باشد. با حل معادله (۲۰) کلیه مقادیر مرزی محاسبه می شود. وقتی که مقدار مجهولات بر روی مرز مشخص شد می توان مقادیر سرعت و مشتقات آن را در هر نقطه داخلی محاسبه نمود. مقدار سرعت در هر نقطه داخلی و با قرار دادن  $c^i = I$  (ماتریس واحد) در معادله (۱۷) قابل محاسبه است.

## ۶- الگوریتم حل مسئله

همانطوری که توضیح داده شد ترم های جابجایی به صورت نیروی حجمی در نظر گرفته شده اند:

$$b_i = -\nu \nu_{i,j} \quad (21)$$

پس از تشکیل دستگاه معادلات و حل آن مقادیر سرعت و مشتقات آن در همه نقاط داخلی محاسبه می شود ولی بایستی این نکته را در نظر گرفت که با توجه به معادله (۲۱)، مقدار بردار  $b$  تابعی از سرعت و مشتقات آن می باشد بنابراین به یک روش تکرار نیاز است که مراحل آن عبارت است از [۱۰]:

گام ۱: حدس مقدار سرعت و مشتقات آن. با این عمل مقدار بردار  $b$  محاسبه می شود.

گام ۲: حل دستگاه معادلات و بدست آوردن مقادیر

مجهول بر روی مرز

گام ۳: با استفاده از مجهولات بدست آمده در گام ۲ و بردار  $b$  محاسبه شده در گام ۱ مقادیر سرعت و مشتقات آن در نقاط داخلی محاسبه می‌شود.

گام ۴: همگرایی مقدار سرعت و مشتق آن در کلیه نقاط داخلی بررسی می‌شود. اگر همگرایی برقرار باشد که حل پایان می‌یابد در غیر اینصورت به گام ۱ بازگشته و الگوریتم تکرار می‌شود.

## ۷- ارائه نتایج

برابر الگوریتم گفته شده یک کد کامپیوتری نوشته شد. در ادامه نتایج عددی حاصل برای جریان داخل یک حفره<sup>۲</sup> و جریان پشت پله ارائه می‌شود.

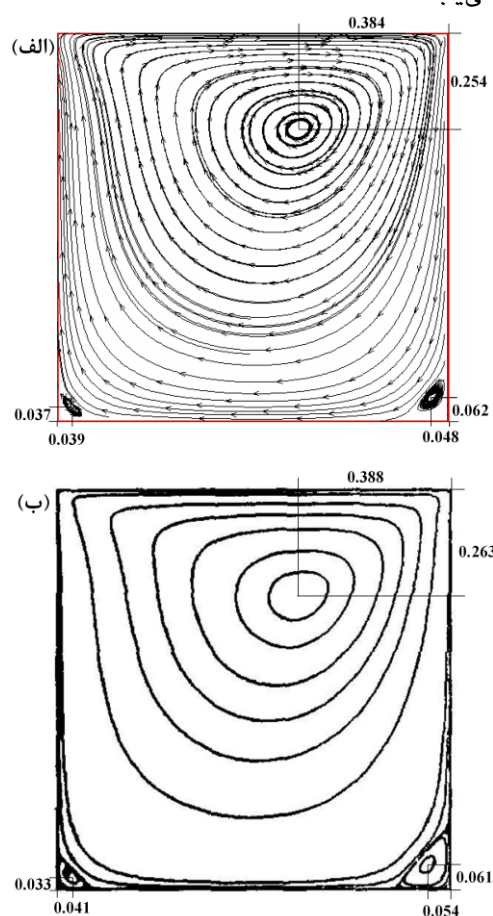
### ۷-۱- جریان داخل یک حفره

نتایج عددی برای اعداد رینولدز ۱۰۰ و ۴۰۰ آورده شده است. برای رینولدز ۱۰۰ از ۹۶ المان مرزی و ۸۱ سلول داخلی و برای رینولدز ۴۰۰ از ۱۲۰ المان مرزی و ۱۲۱ سلول داخلی استفاده شده است. ابتدا شبکه مورد استفاده در این تحقیق با شبکه مورد استفاده در کارهای قبلی مقایسه می‌شود. عنوان مثال قیا و همکارانش [۱۶] در حل این مسئله در  $Re=100$  با روش اختلاف محدود از یک شبکه ۱۲۹ در ۱۲۹ استفاده کردند که منجر به تشکیل دستگاه معادله با ۱۶۶۴۱ معادله و ۱۶۶۴۱ مجهول می‌شود. این در حالی است که در روش المانهای مرزی دستگاه معادلات تنها بر روی مرز تشکیل می‌شود و نقاط داخلی تنها به عنوان نقاط کمکی در محاسبه مشتقات داخلی مورد استفاده قرار می‌گیرند که به این ترتیب منجر به تشکیل یک دستگاه معادله با ۹۶ معادله و ۹۶ مجهول می‌شود.

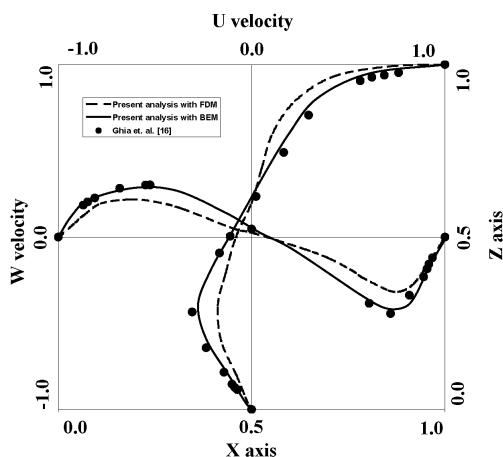
در  $Re=100$  هر دو روش اختلاف محدود و انتگرال مرزی نتایج خوبی ارائه دادند که مقایسه خطوط جریان و مکان گردابه‌ها در شکل (۱) و مقایسه سرعت‌های افقی و عمودی در خطوط میانی داخل حفره با کارهای قبلی انجام شده در شکل (۲) دیده می‌شود. در  $Re=400$  نتایج حاصل از روش اختلاف محدود دارای اختلاف زیادی با کارهای انجام شده در گذشته بود ولی روش انتگرال مرزی نتایج بسیار خوبی ارائه داد که مقایسه خطوط جریان و مکان گردابه‌ها در شکل (۳) و مقایسه سرعت‌های افقی و عمودی در خطوط میانی حفره در شکل (۴) نشان داده شده است. الگوریتم تکرار استفاده شده در این تحقیق برای جریان حفره در رینولدزهای بالاتر از ۴۰۰ همگرا نمی‌شود زیرا در اعداد رینولدز بالاتر، جریان حفره ناپایدار است [۱۵]. به نظر می‌رسد که این ناپایداری دلیل واگرایی الگوریتم تکرار در این اعداد رینولدز باشد. در واقع در این حالت ترم‌های جابجایی رفتاری متفاوت نسبت به

حالت پایدار جریان دارند و نمی‌توان مانند قبل آنها را به صورت نیروهای حجمی در نظر گرفت.

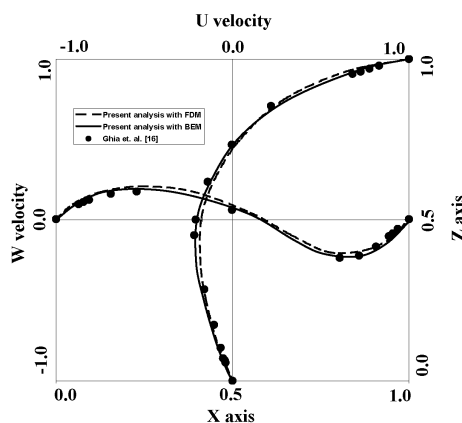
همانطور که پیشتر گفته شد در این روش دستگاه معادلات تنها بر روی مرز تشکیل می‌شود و این امر موجب اشغال حافظه کامپیوتر به میزان بسیار کمتری در مقایسه با روشهای دیگر مانند المان محدود می‌شود. در ضمن با توجه به اینکه ماتریسهای  $G$  و  $H$  و پیرو آن ماتریس  $A$  فقط تابع خواص سیال و شکل هندسی مساله هستند این ماتریس‌ها تنها در مرحله اول تکرار محاسبه می‌شوند و در مراحل بعدی فقط بردار  $B$  با توجه به سرعت‌های جدید محاسبه شده و در دستگاه معادلات جایگزین می‌شود. بدین ترتیب حجم محاسبات در مراحل بعدی تکرار به شدت کاهش می‌یابد.



شکل (۱) خطوط جریان برای جریان حفره در  $Re=100$  الف) کار این تحقیق و ب) قیا و همکاران [۱۶]



شکل (۴) ارائه و مقایسه سرعت‌های افقی و عمودی در خطوط میانی حفره برای  $Re=400$



شکل (۲) ارائه و مقایسه سرعت‌های افقی و عمودی در خطوط میانی حفره برای  $Re=100$

### ۷-۲- جریان پشت پله

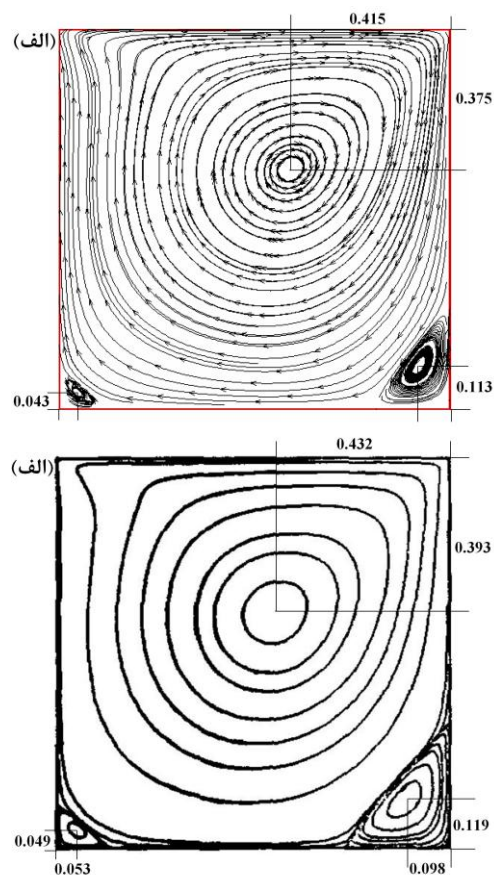
باید توجه داشت به دلیل اینکه در روش انتگرال مرزی محاسبه سرعت و مشتقات آن در هر نقطه داخلی به صورت مستقیم امکان پذیر است به راحتی می‌توان این روش را برای هر نوع شبکه محاسباتی مورد استفاده قرار داد. برای مش بندی از ۱۴۰ المان مرزی و ۳۴۴ سلول داخلی استفاده شده است. خطوط جریان برای رینولدزهای ۲۵، ۵۰ و ۷۳ در شکل (۵) نشان داده شده است. همانطوریکه در شکل‌ها دیده می‌شود با افزایش عدد رینولدز گردابه تشکیل شده در پایین پله بزرگتر می‌شود. جدول ۱، مقایسه طول این گردابه را نسبت به ارتفاع پله با کارهای قبلی نشان می‌دهد.

با توجه به اینکه در حل این مساله از شبکه غیر یکنواخت استفاده شد و در این حالت بکار بردن روش تفاضل محدود مشکل است، تنها از روش انتگرال مرزی برای محاسبه جملات جابجایی استفاده شد.

جدول (۱) مقایسه طول نسبی گردابه تشکیل شده

باربر و فنتی [۱۹]	دنهام و پاتریک [۱۸]	کار این تحقیق	
۳/۴۹	۲/۷۲	۳/۰۵	$Re=50$
۴/۶۵	۳/۷۸	۴/۳	$Re=73$

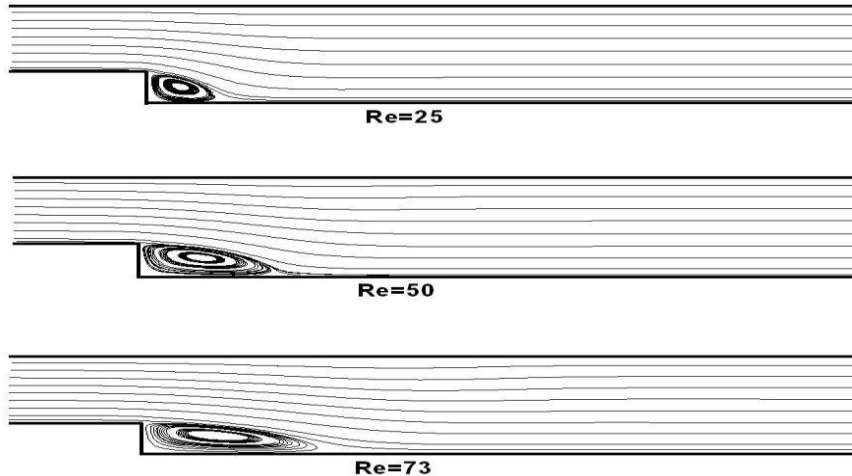
همچنین در شکل (۶) بردارهای سرعت افقی در مقاطع مختلف کانال برای  $Re=73$  ارائه و با کارهای قبلی انجام شده مقایسه شده است. همانطوری‌که دیده می‌شود نتایج به دست آمده توافق بسیار خوبی با کارهای قبلی دارد. به منظور مقایسه روش حاضر با روشهای کلاسیک، جریان پشت پله برای رینولدز ۷۳ توسط نرم افزار Fluent در خطای مساوی با روش BEM حل شد که نتایج آن در جدول ۲ آورده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود زمان محاسبات و حافظه اشغالی در روش المانهای مرزی کمتر از روش محدود می‌باشد.



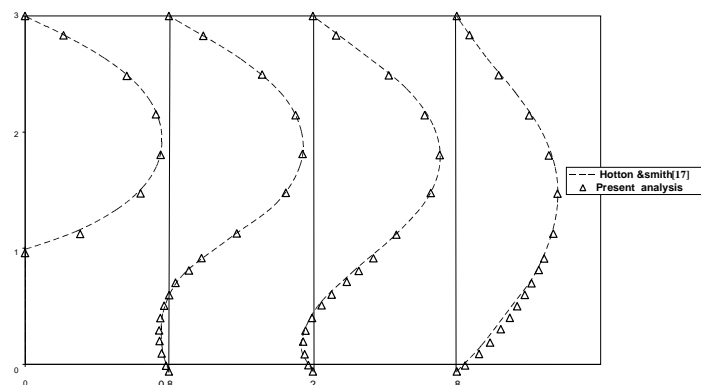
شکل (۳) خطوط جریان برای جریان حفره در  $Re=400$  (الف) کار این تحقیق و (ب) قیا و همکاران [۱۶]

جدول (۲) مقایسه زمان محاسبات و حافظه اشغالی در روشهای المان مرزی و حجم محدود

روش حل	حافظه اشغالی (Mbyte)	زمان محاسبات (s)
BEM	۲/۳	۳/۶
FVM	۷/۶	۴/۳



شکل (۵) خطوط جریان در جریان پشت پله برای رینولدزهای ۲۵، ۵۰ و ۷۳



شکل (۶) ارائه و مقایسه سرعت افقی در مقاطع مختلف برای جریان پله در رینولدز ۷۳

## ۸- نتیجه

با توجه به اینکه با استفاده از روش انتگرال مرزی محاسبه ترم‌های سرعت و مشتقات آن در هر نقطه داخلی به طور مستقیم توسط تابع حل اساسی به راحتی امکان پذیر است، می‌توان از هر نوع مش داخلی استفاده نمود. در اینصورت مشکلات سایر روش‌ها در محاسبه مشتقات در نقاط داخلی و خطای حاصل از آن وجود ندارد، همچنین استفاده از انواع المانها به آسانی امکان پذیر است که این امر استفاده از این روش برای اشکال پیچیده را آسان می‌سازد. نتایج، برای جریان داخل حفره و جریان پشت پله آورده شد و با کارهای قبلی انجام شده مقایسه گردید که توافق بسیار خوبی را نشان داد.

در این مقاله از روش المان‌های مرزی که کمتر در ایران مورد توجه قرار گرفته، استفاده شد. در بیشتر روش‌های انتگرال مرزی از تابع حل اساسی معادله لاپلاس برای حل جریان سیال استفاده شده است در صورتی که در این تحقیق از روش تابع پنالتی و تابع حل اساسی معادله ناویر در الاستواستاتیک استفاده شده است که منجر به نتایج بسیار دقیقی می‌شود. اگر چه از تعدادی سلول داخلی برای محاسبه انتگرالهای داخلی استفاده شد ولی دستگاه معادلات تنها بر روی مرز تشکیل شد که این امر منجر به کاهش حافظه مورد نیاز و حجم محاسبات در مراحل تکرار شده است. علاوه بر این

[۱۵] Yang Y. and Straatman A.G. , A study of laminar flow in low aspect ratio lid-driven cavities, Canadian Journal of Civil Engineering, VOL. 29, NO. 3, pp. 436-447,(2002).

[۱۶] Ghia U., Ghia K. N. and Shin C. T., High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, Journal of computational physics, Vol. 48 ,pp 387-411, (1982).

[۱۷] Hutton A.G. and Smith R.M., The prediction of laminar flow over a downstream-facing step by the finite element method, CEGB Report, No. N3660, (1979).

[۱۸] Denham M.K. and Patrick M.A., Laminar flow over a downstream-facing step in a two-dimensional flow channel, Transcript of the Institute of Chemical Engineers Vol. 52 ,pp 361-367, (1974).

[۱۹] Barber R. W. and Fonty A., a numerical study of laminar flow over a confined backward-facing step using a novel viscous splitting vortex algorithm, 4th GRACM Congress on Computational Mechanics GRACM 2002.

[۱] Banerjee P. K., The Boundary element Methods in Engineering, McGraw-Hill, UK, (1981).

[۲] Youngren G.K. and Acrivos A., Stokes flow past a particle of arbitrary shape: a numerical method of solution, Journal of Fluid Mechanics, vol. 69, pp. 377-403, (1975).

[۳] Wrobel L.C. and Brebbia C.A., Boundary element methods in heat transfer, Kluwer Academic Publishers (1992).

[۴] Bush M.B. and Tanner R.I, Numerical solution of viscous flow using integral equation methods, International Journal for Numerical Methods in Fluids VOL. 3, pp. 71-92, (1983).

[۵] Tosaka N. and Onishi K., Boundary integral equation formulation for steady Navier-Stokes equations using the Stokes fundamental solution, Engineering Analysis with Boundary Elements, VOL 2, pp. 128-132, (1985).

[۶] Tosaka N. and Kakuda K., Development of BEM for convective viscous flow problems, International Journal of solids and structures, vol. 31, pp. 1847-1859, (1994)

[۷] Roumeliotis J., A boundary integral method applied to Stokes flow, University of New South Wales, PhD thesis, (2000).

[۸] Wrobel L.C., The Boundary Element Method-Applications in thermo-fluids and acoustics, John Wiley & Sons, Vol. 1, (2002).

[۹] Robert W. Fox and Alan T. McDonald, Introduction to fluid mechanics, Fourth edition, John Wiley & Sons, (1992).

[۱۰] Hughes T.J.R , Liu W.K. and Brooks A., Finite Element Analysis of Incompressible Viscous flows by penalty function formulation , Journal of computational physics, Vol. 30, pp. 1-60, (1979).

[۱۱] Park K.H, A BEM formulation for axisymmetric elasticity with arbitrary body force using particular integrals, , Journal of Computers & Structures, Vol 80, pp 2507-2514, (2002)

[۱۲] Brebbia C.A. and Dominguez J. , Boundary Elements An Introductory course, second edition, Computational Mechanics Publications, McGraw-Hill, London, (1992).

[۱۳] Alarcon E. , Brebbia C.A. and Dominguez J. The boundary element method in elasticity, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 20, pp 625-639, (1978).

[۱۴] Gregoriev M.M. and Fafurin A.V., A boundary element method for steady viscous fluid flow using penalty function formulation, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 25, pp 907-929, (1997).

### ۱- زیر نویس ها

- <sup>۱</sup> Vorticity  
<sup>۲</sup> Upwind  
<sup>۳</sup> Cavity