

ارائه یک فرمول‌بندی المان محدود C^1 برای مدل میکرو ورق میندلین-رایسنر

فرزام دادگر راد^{*}، سید رضا اشرف، آرش ایمانی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۲۹ مرداد ۱۳۹۶
بازنگری: ۵ آبان ۱۳۹۶
پذیرش: ۷ آذر ۱۳۹۶
ارائه آنلاین: ۷ آذر ۱۳۹۶

کلمات کلیدی:

نظریه الاستیسیته گرادیان کرنش
روش المان محدود
میکرو ورق میندلین-رایسنر

چکیده: در این مقاله، فرمول‌بندی المان محدود میکرو ورق میندلین-رایسنر بر اساس نظریه الاستیسیته گرادیان کرنش ارائه می‌گردد. با توجه به وجود مشتقات مرتبه بالا، جهت ارائه یک فرمول‌بندی المان محدود استاندارد، باید از توابع درونیایی با پیوستگی C^1 استفاده نمود. براین اساس، شکل کلی ماتریس سفتی و بردار نیروی المان میکرو ورق براساس اصل کار مجازی استخراج شده و سپس فرمول‌بندی بر روی یک المان چهار ضلعی چهار گرهی با ۳۶ درجه آزادی اعمال می‌گردد. تغییر شکل ورق‌های مستطیلی میندلین-رایسنر گرادییانی تحت فشار یکنواخت با سه دسته شرایط مرزی مختلف مورد مطالعه قرار می‌گیرد. ابتدا میکرو ورق با لبه‌های ساده بررسی شده و حل المان محدود گرادییانی بدست آمده با حل دقیق میکرو ورق براساس این نظریه مقایسه می‌گردد، که تطابق بسیار نزدیکی بین پاسخ‌های این دو روش مشاهده می‌شود. سپس میکرو ورق با چهار لبه گیردار و نیز سه لبه ساده و یک لبه آزاد بررسی می‌گردند. در هر دو مورد، پاسخی همگرا با ریز نمودن اندازه المان‌ها بدست می‌آید. در صورت نازک بودن ورق و نیز بزرگ بودن نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول ماده، نتایج بدست آمده در تحلیل المان محدود بر مبنای نظریه گرادیان کرنش با حل ورق کرشلف بر مبنای الاستیسیته‌ی کلاسیک منطبق می‌گردند.

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، تحلیل تغییر شکل مواد در مقیاس میکرو و نانو بسیار مورد توجه قرار گرفته است. از جمله کاربردهای این تحقیقات می‌توان به مدل‌سازی رفتار بیوسنسورها، عملگرها^۱، سیستم‌های نانوالکترومکانیکی^۲، سیستم‌های میکروالکترومکانیکی^۳ و فیلم‌های نازک اشاره کرد. اگرچه نظریه مکانیک محیط پیوسته کلاسیک در شاخه‌های مختلفی از مهندسی مکانیک، هوافضا، عمران، شیمی و نیز مهندسی مواد کاربرد فراوان دارد، اما مشاهدات تجربی نشان می‌دهند که رفتار مواد در مقیاس میکرو و نانو متفاوت از آنچه هستند که نظریه کلاسیک پیش‌بینی می‌نماید [۴-۱]. به عنوان مثال در تست سختی‌سنجی مواد کریستال تک بلوری و چند بلوری که توسط مک‌المانی و همکاران [۱] انجام شد، مشخص گردید که سختی بلور مسی به شدت به ابعاد و عمق فرورفتگی بستگی دارد و در واقع به ازای عمق نفوذ کم، سختی بیشتری مشاهده می‌گردد. از آن جا که هیچ پارامتر مقیاس طول ماده در فرمول‌بندی نظریه مکانیک محیط پیوسته‌ی کلاسیک وجود ندارد، لذا این نظریه قادر به توصیف رفتار مواد در اندازه‌های پایین نخواهد بود.

به همین علت، جهت پیش بینی رفتار مواد در مقیاس کوچک، نظریه‌های تعمیم‌یافته‌ی مکانیک محیط پیوسته ابداع گردیدند. یکی از نظریه‌های موفق در پیش بینی رفتار الاستیک و پلاستیک مواد در اندازه‌های پایین، نظریه محیط پیوسته گرادیان کرنش است [۶-۲]. حالت الاستیک این نظریه، یعنی الاستیسیته گرادیان کرنش توسط میندلین [۷] در سال ۱۹۶۴ ارائه گردید. سه فرمول‌بندی متفاوت نظریه الاستیسیته گرادیان کرنش در مقالات میندلین [۷] و همچنین میندلین و اشل [۸] پیشنهاد گردیده است. سپس فرمول‌بندی الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش مرتبه دوم نیز توسط میندلین [۹] مطرح گردید. یکی از مشکلات نظریه‌های گرادییانی تعداد زیاد ثابت‌های مادی می‌باشد. ایفنتیس [۱۰] ساده‌ترین شکل نظریه الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش را با استفاده از ثوابت کلاسیک لامه^۴ و با بهره‌گیری از تنها یک پارامتر مقیاس طول ماده ارائه نمود. شایان ذکر است که فرمول‌بندی نظریه‌های گرادیان کرنش و تنش کوپلی اصلاح شده در دستگاه‌های مختصات منحنی‌الخط توسط آشوری موثق و محمودی [۱۱] ارائه شده است.

در دو دهه‌ی اخیر، از شکل‌های مختلف نظریه گرادیان کرنش جهت مدل‌سازی رفتار میکرو تیرها [۱۴-۱۲] و همچنین میکرو ورق‌ها [۲۳-۱۵] استفاده گردیده است. لازوپولوس [۱۵] اولین فرمول‌بندی ورق کرشلف گرادییانی را ارائه نموده و کمانش ورق بلند مستطیلی تحت بار

- 1 Actuators
- 2 Nano-Electro-Mechanical Systems (NEMS)
- 3 Micro-Electro-Mechanical Systems (MEMS)

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: dadgar@guilan.ac.ir

4 Lamé constants

[۲۵]، ابتدا فرمول‌بندی از یک المان هشت گرهی C^0 با ۷۲ درجه آزادی شروع شده و سپس با اعمال قیدهایی در نقاط گوسی المان و حذف گره‌های مابقی، پیوستگی C^1 به صورت تقریبی در گره‌ها حاصل شده است. اما هدف اصلی و در واقع نوآوری این مقاله، فرمول‌بندی المان محدود استاندارد C^1 جهت حل عددی معادلات میکرو ورق میندیلین-رایسنر گرادانی می‌باشد. لذا براساس فرمول‌بندی مقاله‌ی حاضر، شرایط پیوستگی مشتقات مرتبه اول بدون هیچ تقریبی ارضا می‌گردند. همچنین نیازی به در نظر گرفتن المانی با تعداد گره‌های اضافی (مانند المان هشت گرهی در مرجع [۲۵]) نیست. در نهایت نیز توابع درونیابی C^1 برای یک المان چهارگره‌ای به صورت صریح ارائه می‌گردند.

در بخش‌های بعد، ابتدا فرمول‌بندی نظریه الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش باختصار ارائه می‌گردد. سپس، کمیت‌های مهم سینماتیکی و سینتیکی مدل میکرو ورق میندیلین-رایسنر گرادانی محاسبه می‌گردند. در ادامه، فرمول‌بندی المان محدود ورق گرادانی براساس اصل کار مجازی استخراج می‌گردد. در گام بعد، با در نظر گرفتن یک المان چهار گرهی با ۳۶ درجه آزادی، دقت و عملکرد المان معرفی شده در تحلیل سه مثال مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در نهایت بحث و نتیجه‌گیری از تحقیق صورت گرفته ارائه خواهد شد.

۲- مروری مختصر بر مبانی نظریه الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش

در این بخش، روابط پایه‌ای مورد نیاز برای بخش‌های بعدی به طور خلاصه ارائه می‌گردد. به منظور مطالعه‌ی بیشتر در خصوص مفاهیم نظریه الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش و روابط مربوط به آن می‌توان به مقالات بنیادی میندیلین [۷]، میندیلین و اشل [۸] و ایفنتیس [۱۰] مراجعه نمود. در این مقاله، تمام اندیس‌های کوچک لاتین مانند i مقادیر بین ۱ تا ۳ را اختیار می‌کنند، در حالی که اندیس‌های یونانی از قبیل α و β تنها دو مقدار ۱ و ۲ را برمی‌گزینند. البته اندیس‌های لاتین با حرف بزرگ مانند I از این قاعده مستثنی هستند و در هر فرمول، در خصوص آنها توضیح لازم ارائه شده است. با این حال قرارداد جمع اینشتین برای همه‌ی اندیس‌هایی که دوبار تکرار شده‌اند صادق است.

در این بخش، یک دستگاه مختصات کارترین $\{x_1, x_2, x_3\}$ در نظر گرفته می‌شود. مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی در این دستگاه با u_i و مؤلفه‌های تانسور کرنش کوچک با $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ نشان داده می‌شوند. توجه شود که ویرگول نشان دهنده‌ی مشتق جزئی نسبت به مختصات است. در نظریه الاستیسیته‌ی کلاسیک، تابع چگالی انرژی کرنشی تنها وابسته به تانسور کرنش کوچک می‌باشد. اما در نظریه الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش، تابع چگالی انرژی کرنشی U علاوه بر کرنش کوچک به گرادیان آن یعنی تانسور گرادیان کرنش نیز وابسته است. مؤلفه‌های این تانسور، که در اینجا با نماد ϵ_{ijk} نمایش داده می‌شوند، به صورت زیر می‌باشند:

محوری فشاری و بار جانبی را مورد بررسی قرار داد. سپس این توسط سایر پژوهشگران از جمله پاپاگیری-بسکو و بسکوس [۱۶] به کار گرفته شد و تغییر شکل استاتیک، کماتش و فرانکس طبیعی ارتعاشات خطی میکرو ورق گرادانی مورد مطالعه قرار گرفت. لازوپولوس [۱۷] با استفاده از تابع چگالی انرژی کرنشی پیشنهادی ایفنتیس [۱۰] و افزودن عباراتی جهت مدل کردن اثرات سطحی، نوع دیگری از مدل ورق کرش‌هف گرادانی را فرمول‌بندی نمود. پاپاگیری-بسکو و همکاران [۱۸] از همان فرمول‌بندی مرجع [۱۶] استفاده نموده و به بررسی تغییر شکل استاتیک ورق‌های الاستیک گرادانی دایره‌ای و با دو شرط مرزی گیردار و ساده پرداختند. در مقاله‌ای دیگر، اووا و همکاران [۱۹] سرعت پخش امواج تولید شده در سطح آزاد ورق‌های الاستیک گرادانی را مورد تحلیل قرار دادند. فرمول‌بندی ورق کرش‌هف بر مبنای مدل اصلاح شده‌ی گرادیان کرنش نیز توسط ونگ و همکاران [۲۰] ارائه گردید. آشوری موثق و محمودی [۲۱] توجه نمودند که در صورت حذف جملات گرادانی، فرمول‌بندی مرجع [۲۰] به مدل ورق کرش‌هف کلاسیک کاهش نمی‌یابد. لذا این محققین، ضمن ارائه فرمول‌بندی جدیدی از ورق کرش‌هف گرادانی بر مبنای مدل اصلاح شده‌ی گرادیان کرنش، از روش کانترویچ تعمیم یافته جهت حل معادلات حاکم استفاده نمودند. فرمول‌بندی مدل میکرو ورق میندیلین-رایسنر (یا مرتبه اول برشی) بر اساس کلی‌ترین شکل نظریه الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش توسط رضانی [۲۲] انجام شد. همچنین در این مقاله یک حل ناویر^۱ جهت مطالعه‌ی خمش استاتیک و فرانکس طبیعی میکرو ورق ارائه گردید و نشان داده شد که اثرات اندازه تأثیر به سزایی در سفتی میکرو ورق‌ها دارند. سپس ارتعاشات غیرخطی میکرو ورق کرش‌هف بر اساس نظریه الاستیسیته‌ی گرادیان کرنش توسط رضانی [۲۳] مورد بررسی قرار گرفت. در این مقاله اشاره شده که هر دو عامل اثرات اندازه و هندسه‌ی غیرخطی باعث افزایش مقدار فرانکس طبیعی ارتعاشات غیرخطی میکرو ورق‌ها می‌گردند. اخیراً فرمول‌بندی تغییرشکل غیرخطی میکرو ورق مرتبه اول برشی بر مبنای شکل اصلاح شده نظریه گرادیان کرنش نیز توسط آشوری موثق و محمودی [۲۴] ارائه شده است.

در مقالات ذکر شده، مطالعات صورت گرفته روی میکرو ورق‌ها عمدتاً محدود به حل ناویر ورق‌های مستطیلی تحت شرط مرزی ساده روی هر چهار لبه‌ی ورق می‌باشند. به عبارت دیگر، روش‌های حل موجود قادر به تعیین تغییرشکل میکرو ورق‌ها تحت هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی مختلف نمی‌باشند. لذا لزوم استفاده از روش‌های عددی قدرتمند مانند المان محدود ضروری به نظر می‌رسد. اخیراً دادگر راد [۲۵] فرمول‌بندی المان محدود ورق میندیلین-رایسنر گرادانی را با استفاده از توابع درونیابی با پیوستگی C^0 ارائه نموده است. همانگونه که در بخش چهارم این مقاله ذکر خواهد شد، فرمول‌بندی المان محدود استاندارد میکرو ورق میندیلین-رایسنر گرادانی نیاز به توابع درونیابی با پیوستگی C^1 دارد، یعنی مشتقات مرتبه اول خیز و دوران‌ها نیز باید در نقاط گرهی پیوسته باشند. در مرجع

1 Navier solution

خواهد شد.

مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی در تغییرشکل خمشی مدل ورق میندیلین-رایسنر به صورت زیر می‌باشند [۲۷-۲۵]:

$$u_\alpha = z\psi_\alpha, \quad u_3 = w \quad (5)$$

که در آن w میدان خیز ورق بوده و ψ_α زوایای دوران می‌باشند. توجه می‌شود که در مواد همسانگرد، تغییرشکل‌های خمشی و درون صفحه‌ای مستقل از یکدیگر می‌باشند و مشابه مراجعی مانند [۲۷-۲۵] نیازی به در نظر گرفتن تغییرشکل درون صفحه‌ای نیست. براین اساس، مؤلفه‌های کرنش به صورت زیر حاصل می‌گردند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= z\kappa_{\alpha\beta}, \\ \gamma_{\alpha 3} &= 2\varepsilon_{\alpha 3} = \psi_\alpha + w_{,\alpha} \end{aligned} \quad (6)$$

در رابطه‌ی فوق $\kappa_{\alpha\beta} = (\psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha})/2$ مؤلفه‌های تانسور انحنای ورق هستند. با توجه به فرض تنش صفحه‌ای ($\sigma_{\alpha 3} = 0$) مؤلفه‌های غیرصفر تانسور تنش برابرند با:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \frac{Ez}{1-\nu^2} [\nu\kappa_{\phi\phi}\delta_{\alpha\beta} + (1-\nu)\kappa_{\alpha\beta}], \\ \sigma_{\alpha 3} &= K_s \mu \gamma_{\alpha 3} \end{aligned} \quad (7)$$

براساس میدان جابه‌جایی (۵) در مدل ورق میندیلین-رایسنر، توزیع تنش‌های برشی $\sigma_{\alpha 3}$ مستقل از z بوده و در راستای ضخامت ثابت به دست می‌آیند که این امر با توزیع سهمی‌وار آن‌ها در حل دقیق تفاوت دارد. لذا از ضریب تصحیح برش K_s جهت اصلاح رابطه تنش‌های برشی استفاده می‌گردد. این ضریب در ورق میندیلین-رایسنر معمولاً $\frac{5}{6}$ در نظر گرفته می‌شود [۲۲ و ۲۸-۲۵]. جزئیات بیشتر در خصوص نحوه محاسبه ضریب تصحیح برش در مدل تیر تیموشنکو و نیز ورق میندیلین-رایسنر در مرجع [۲۸] ارائه شده است. در فرمول‌بندی مقاله‌ی کنونی، از آنجا که با حذف اثرات گرادانی باید فرمول‌بندی کلاسیک ورق میندیلین-رایسنر حاصل گردد، لذا ضریب تصحیح برش همچنان در معادلات حفظ می‌گردد. در ادامه، مؤلفه‌های غیرصفر تانسور گرادیان کرنش به صورت زیرند:

$$\begin{aligned} \xi_{\phi\alpha\beta} &= z\xi_{\phi\alpha\beta}^* = \frac{1}{2}(\psi_{\alpha,\beta\phi} + \psi_{\beta,\alpha\phi})z, \\ \xi_{3\alpha\beta} &= \kappa_{\alpha\beta}, \quad \xi_{\phi\alpha 3} = \varepsilon_{\alpha 3,\phi} = \frac{1}{2}(\psi_{\alpha,\beta} + w_{,\alpha\phi}) \end{aligned} \quad (8)$$

مؤلفه‌های تانسور تنش دابل با جایگذاری معادله‌ی (۸) در (۴) به دست می‌آیند که می‌توان آن‌ها را چنین نوشت:

$$\tau_{\phi\alpha\beta} = z\tau_{\phi\alpha\beta}^*, \quad \tau_{3\alpha\beta} = z\tau_{3\alpha\beta}^*, \quad \tau_{\alpha\beta 3} = z\tau_{\alpha\beta 3}^* \quad (9)$$

در رابطه‌ی (۹) عبارات مربوط به $\tau_{\phi\alpha\beta}^*$ ، $\tau_{3\alpha\beta}^*$ و $\tau_{\alpha\beta 3}^*$ به قرار زیرند:

$$\tau_{\phi\alpha\beta}^* = l^2 \left[\lambda \delta_{\alpha\beta} \psi_{\theta,\theta\phi} + \mu (\psi_{\alpha,\beta\phi} + \psi_{\beta,\alpha\phi}) \right] \quad (10)$$

$$\tau_{3\alpha\beta}^* = l^2 \left[\lambda \psi_{\phi,\phi} \delta_{\alpha\beta} + \mu (\psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha}) \right] \quad (11)$$

$$\xi_{ijk} = \xi_{ikj} = \varepsilon_{jk,i} = \frac{1}{2}(u_{j,ki} + u_{k,ji}) \quad (1)$$

ایفنتیس [۱۰] چگالی انرژی کرنشی برای جامدات الاستیک خطی گرادانی همسانگرد را به صورت زیر پیشنهاد نمود:

$$U = \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + l^2 \xi_{ijj} \xi_{ikk}) + \mu (\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + l^2 \xi_{ijk} \xi_{ijk}) \quad (2)$$

که در آن λ و μ ثوابت کلاسیک لامه می‌باشند. لازم به ذکر است که اگر E و ν به ترتیب مدول یانگ و نسبت پواسون ماده باشند، آنگاه روابط $\lambda = E\nu/[(1-\nu)(1+\nu)]$ و $\mu = E/[2(1+\nu)]$ برقرارند. همچنین، کمیت l ثابت جدیدی بنام پارامتر مقیاس طول ماده است که در صورت صفر شدن، انرژی کرنشی فوق به همان انرژی کرنشی کلاسیک کاهش می‌یابد. لذا تنها ثابت غیر کلاسیک در نظریه گرادیان کرنش ایفنتیس [۱۰] می‌باشد.

در فرمول‌بندی نظریه گرادیان کرنش، علاوه بر تانسور تنش، تانسور تنش دابل نیز تعریف می‌گردد. مؤلفه‌های تانسورهای تنش و تنش دابل نیز با مشتق‌گیری از چگالی انرژی کرنشی و طبق روابط زیر حاصل می‌گردند:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \partial U / \partial \varepsilon_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3)$$

$$\tau_{ijk} = \tau_{ikj} = \partial U / \partial \xi_{ijk} = l^2 (\lambda \delta_{jk} \xi_{ipp} + 2\mu \xi_{ijk}) \quad (4)$$

در بخش‌های بعد، از معادلات (۱) تا (۴) جهت محاسبه‌ی کمیت‌های مهم مدل میکرو ورق میندیلین-رایسنر و سپس فرمول‌بندی المان محدود آن استفاده خواهد گردید.

۳- مدل میکرو ورق میندیلین-رایسنر گرادانی

همان گونه که در شکل ۱ نشان داده شده، ورقی همسانگرد با ضخامت h و خواص مکانیکی ثابت در نظر گرفته می‌شود. سیستم مختصات کارترین $\{x_1, x_2, x_3\}$ با بردار پایه متعامد $\{e_1, e_2, e_3\}$ در نقطه‌ای دلخواه در صفحه‌ی میانی ورق قرار داده می‌شود، به گونه‌ای که محور x_3 عمود بر سطح ورق است. در ادامه جهت سادگی و حذف اندیس، به جای x_3 از حرف z استفاده

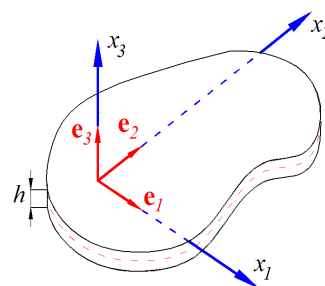


Fig. 1. Plate geometry with a Cartesian coordinate system in its mid-plane

شکل ۱: هندسه ورق به همراه یک دستگاه مختصات کارترین در صفحه میانی آن

$$\begin{aligned} \delta U &= \delta U^{(1)} + \delta U^{(2)}, \\ \delta U^{(1)} &= \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV, \\ \delta U^{(2)} &= \int_V \tau_{ijk} \delta \xi_{ijk} dV \end{aligned} \quad (۱۶)$$

به عبارت دیگر، چگالی انرژی کرنشی از حاصل جمع دو بخش اصلی تشکیل شده است. قسمت اول، یعنی $\delta U^{(1)}$ نشان‌دهنده‌ی بخش کلاسیک انرژی کرنشی مجازی است. قسمت دوم، که با $\delta U^{(2)}$ نشان داده شده، بخش گرادینانی انرژی کرنشی مجازی را نمایندگی می‌نماید. در ادامه هر یک از این بخش‌ها به طور مجزا مورد بررسی قرار گرفته و زیرماتریس سفتی المان از آن‌ها استخراج می‌گردد. در انتها ماتریس سفتی کل از حاصل جمع این دو زیرماتریس به دست می‌آید. ابتدا $\delta U^{(1)}$ به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned} \delta U^{(1)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_A \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dA dz = \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_A \left(\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \delta \varepsilon_{22} + \right. \\ &\quad \left. \sigma_{12} \delta \gamma_{12} + \sigma_{13} \delta \gamma_{13} + \sigma_{23} \delta \gamma_{23} \right) dA dz \end{aligned} \quad (۱۷)$$

که در آن A صفحه میانی المان می‌باشد. با جایگذاری روابط (۶)، (۷)، (۱۳) و (۱۵) در (۱۷) نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\delta U^{(1)} = \int_A \left(M_1 \delta \kappa_{11} + M_2 \delta \kappa_{22} + 2M_{12} \delta \kappa_{12} + Q_1 \delta \gamma_{13} + Q_2 \delta \gamma_{23} \right) dA \quad (۱۸)$$

جهت سهولت در محاسبات، بردار برآیند \mathbf{F} و نیز بردار کرنش تعمیم‌یافته‌ی $\boldsymbol{\omega}$ به صورت زیر معرفی می‌گردند:

$$\mathbf{F} = \{M_1, M_2, M_{12}, Q_1, Q_2\}^T \quad (۱۹)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \{\kappa_{11}, \kappa_{22}, 2\kappa_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}\}^T \quad (۲۰)$$

برمی‌نای معادلات (۱۵) رابطه‌ی $\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{D}} \boldsymbol{\omega}$ برقرار است که در آن $\tilde{\mathbf{D}}$ ماتریس سفتی ورق در حالت کلاسیک به شکل زیر می‌باشد:

$$\tilde{\mathbf{D}} = D_f \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{D}_s K_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{D}_s K_s \end{bmatrix} \quad (۲۱)$$

که در آن روابط $\bar{\nu} = (1-\nu)/2$ و $\bar{D}_s = D_s / D_f$ برقرارند. با این تعاریف می‌توان $\delta U^{(1)}$ را به صورت زیر نوشت:

$$\delta U^{(1)} = \int_A \delta \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{F} dA = \int_A \delta \boldsymbol{\omega} \cdot (\tilde{\mathbf{D}} \boldsymbol{\omega}) dA \quad (۲۲)$$

حال یک المان دلخواه ورق با n گره در نظر گرفته می‌شود. میدان‌های خیز جانبی و دوران به صورت زیر درونیابی می‌گردند:

$$\tau_{\alpha\beta 3}^* = \mu l^2 (\psi_{\beta,\alpha} + w_{,\alpha\beta}) \quad (۱۲)$$

با استفاده از روابط مربوط به تانسور تنش و تنش دوپل، می‌توان منتجهای تنش و تنش دوپل را به صورت زیر تعریف نمود:

$$\begin{Bmatrix} M_{\alpha\beta} \\ Q_{\alpha} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} z \sigma_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha 3} \end{Bmatrix} dz \quad (۱۳)$$

$$\begin{Bmatrix} G_{\alpha\beta} \\ B_{\alpha\beta} \\ H_{\phi\alpha\beta} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{3\alpha\beta} \\ \tau_{\alpha\beta 3} \\ z \tau_{\phi\alpha\beta} \end{Bmatrix} dz = \frac{1}{12} \begin{Bmatrix} 12h \tau_{3\alpha\beta}^* \\ 12h \tau_{\alpha\beta 3}^* \\ h^3 \tau_{\phi\alpha\beta}^* \end{Bmatrix} \quad (۱۴)$$

توجه می‌گردد که منتجهای $M_{\alpha\beta}$ و Q_{α} در رابطه‌ی (۱۳) دقیقاً شبیه منتجهای گشتاوری و نیرویی در مدل ورق میندلین-رایسنر بر مبنای نظریه الاستیسیته‌ی کلاسیک می‌باشند که به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$M_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} D_f \left[2\nu \psi_{\phi,\phi} \delta_{\alpha\beta} + (1-\nu)(\psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha}) \right], \quad (۱۵)$$

$$Q_{\alpha} = D_s K_s (\psi_{\alpha} + w_{,\alpha})$$

در روابط فوق $D_f = Eh^3 / [12(1-\nu^2)]$ و $D_s = \mu h$ به ترتیب صلبیت خمشی و برشی ورق می‌باشند. البته توجه می‌شود که مقادیر میدان‌های w و ψ_{α} در مدل ورق میندلین-رایسنر گرادینانی با مدل کلاسیک یکی نیست. لذا مقادیر $M_{\alpha\beta}$ و Q_{α} نیز در دو مدل گرادینانی و کلاسیک با هم برابر نخواهند بود.

۴- فرمول‌بندی المان محدود

در این بخش، فرمول‌بندی المان محدود ورق میندلین-رایسنر گرادینانی با پیوستگی C^1 در حالت کلی ارائه می‌گردد. سپس یک المان چهارضلعی چهارگره‌ی خاص جهت حل مثال‌ها پیشنهاد می‌گردد. ابتدا به این نکته توجه می‌گردد که تابع انرژی کرنشی U در رابطه (۲) شامل مؤلفه‌های گرادینان کرنش ξ_{ijk} است که توسط مشتقات مرتبه دوم میدان جابه‌جایی بیان می‌شوند. لذا حداکثر درجه‌ی مشتق که در تابع انرژی کرنشی مشاهده می‌گردد برابر دو است. براساس یک اصل کلی، درجه‌ی پیوستگی توابع درونیابی در فرمول‌بندی المان محدود استاندارد باید یک درجه کمتر از حداکثر درجه‌ی مشتقی باشد که در تابع انرژی کرنشی دیده می‌شود [۲۹]. لذا در ورق میندلین-رایسنر گرادینانی، باید پیوستگی C^1 لحاظ گردد، یعنی مشتقات مرتبه اول خیز و دوران‌ها نیز باید در نقاط گره‌ی پیوسته باشند. یادآوری می‌گردد که در مرجع [۲۵]، تنها پیوستگی C^0 لحاظ شده (یعنی فقط خود خیز و دوران‌ها و نه مشتقات آنها در نقاط گره‌ی پیوستگی دارند) و پیوستگی مشتقات به صورت تقریبی توسط قیدهایی که در نقاط گوسی اعمال شده‌اند، ارضا شده است. حال در گام نخست، برای استخراج ماتریس سفتی المان، انرژی کرنشی مجازی δU به صورت زیر تجزیه می‌گردد:

$$\mathbf{F}^* = \left\{ \begin{matrix} H_{111}, H_{222}, H_{122}, H_{211}, H_{112}, \\ H_{212}, G_{11}, G_{22}, G_{12}, B_{11}, B_{22}, B_{12}, B_{21} \end{matrix} \right\}^T \quad (28)$$

همچنین بردار $\boldsymbol{\omega}^*$ متشکل از مؤلفه‌های تانسور گرادیان کرنش را نیز می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$\boldsymbol{\omega}^* = \left\{ \begin{matrix} \xi_{111}^*, \xi_{222}^*, \xi_{122}^*, \xi_{211}^*, 2\xi_{112}^*, 2\xi_{212}^*, \xi_{113}, \\ \xi_{223}, 2\xi_{123}, 2\xi_{311}, 2\xi_{322}, 2\xi_{312}, 2\xi_{321} \end{matrix} \right\}^T \quad (29)$$

با توجه به معادلات (۸) تا (۱۲) و (۱۴)، ارتباط بین بردارهای \mathbf{F}^* و $\boldsymbol{\omega}^*$ نیز توسط رابطه‌ی ماتریسی $\mathbf{F}^* = \tilde{\mathbf{D}}^* \boldsymbol{\omega}^*$ قابل بیان است، که در آن $\tilde{\mathbf{D}}^*$ ماتریس سفتی ورق ناشی از اثرات گرادینانی بوده و به صورت زیر است:

$$\tilde{\mathbf{D}}^* = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}^{*(1)} & \mathbf{0}_{6 \times 7} \\ \mathbf{0}_{7 \times 6} & \tilde{\mathbf{D}}^{*(2)} \end{bmatrix} \quad (30)$$

در رابطه فوق، زیرماتریس‌های سفتی $\tilde{\mathbf{D}}^{*(1)}$ و $\tilde{\mathbf{D}}^{*(2)}$ متقارن بوده و به

صورت زیر قابل نمایش می‌باشند:

$$\tilde{\mathbf{D}}^{*(1)} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ & \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ & & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \alpha_1 & 0 & 0 \\ & & & & \alpha_3 & 0 \\ sym & & & & & \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}^{*(2)} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \alpha_3 & 0 & 0 \\ & & & & & \alpha_3 & 0 \\ sym & & & & & & \alpha_3 \end{bmatrix}$$

که در آن sym بیانگر متقارن بودن ماتریس است و کمیت‌های α_1 ، α_2 و α_3 از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\alpha_1 = l^2 (\lambda + 2\mu), \quad \alpha_2 = l^2 \lambda, \quad \alpha_3 = l^2 \mu \quad (32)$$

حال براساس معادلات (۸)، (۲۳) و (۲۹)، می‌توان $\boldsymbol{\omega}^*$ را به صورت $\boldsymbol{\omega}^* = \mathbf{B}^* \mathbf{d}^e$ بیان نمود. در این رابطه می‌توان \mathbf{B}^* را ماتریس گرادیان کرنش-جابجایی نامید که به شکل زیر قابل نمایش است:

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} N_{,11} & 0 & 0 & N_{,12} & N_{,12} & N_{,22} & N_{,1} & 0 & N_{,2} & N_{,1} & 0 & 0 & N_{,2} \\ 0 & N_{,22} & N_{,12} & 0 & N_{,11} & N_{,12} & 0 & N_{,2} & N_{,1} & 0 & N_{,2} & N_{,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{,22} & N_{,22} & N_{,12} & N_{,12} \end{bmatrix} \quad (33)$$

بنابراین با توجه به روابط (۲۹) تا (۳۵)، بخش گرادینانی ماتریس سفتی المان را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{N} \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{N} \mathbf{d}_3 \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^{3n} N_I \begin{Bmatrix} d_{1I} \\ d_{2I} \\ d_{3I} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

که در آن \mathbf{N} برداری سطری با $3n$ مؤلفه است که از کنار هم قرار دادن توابع درونیایی ساخته می‌شود. بردار \mathbf{d}_1 نیز برداری ستونی و $3n$ مؤلفه‌ای بوده و شامل درجات آزادی $\psi_{1,1}$ ، $\psi_{1,2}$ و $\psi_{1,2}$ در n گره المان است. به صورت مشابه بردارهای $3n$ مؤلفه‌ای \mathbf{d}_2 و \mathbf{d}_3 به ترتیب برای میدان‌های ψ_2 و w تعریف می‌گردند. حال فرض می‌شود که $\mathbf{d}^e = \{\mathbf{d}_1^T, \mathbf{d}_2^T, \mathbf{d}_3^T\}^T$ بردار جابه‌جایی تعمیم‌یافته‌ی تمامی گره‌های المان با $9n$ مؤلفه است که از زیر هم قرار دادن مؤلفه‌های بردارهای ستونی \mathbf{d}_1 ، \mathbf{d}_2 و \mathbf{d}_3 تشکیل شده است. براین اساس، بردار کرنش تعمیم یافته $\boldsymbol{\omega}$ را می‌توان به صورت $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{B} \mathbf{d}^e$ نوشت که در آن \mathbf{B} ماتریس کرنش-جابجایی بوده و نمایش زیر را داراست:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_{,2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_{,2} & \mathbf{N}_{,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{,1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} & \mathbf{N}_{,2} \end{bmatrix} \quad (24)$$

در رابطه‌ی فوق، $\mathbf{N}_{,1}$ برداری است که شامل مشتق توابع درونیایی نسبت به مختصه‌ی x_1 است. بردار $\mathbf{N}_{,2}$ نیز به صورت مشابه تعریف می‌گردد. حال بخش کلاسیک ماتریس سفتی المان \mathbf{K}_1^e را می‌توان به صورت زیر استخراج نمود:

$$\delta U^{(1)} = \int_A \delta \mathbf{d}^e \cdot (\mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{B}) \mathbf{d}^e dA = \delta \mathbf{d}^e \cdot (\mathbf{K}_1^e \mathbf{d}^e) \quad (25)$$

یعنی ماتریس سفتی \mathbf{K}_1^e توسط رابطه‌ی زیر ارائه می‌گردد:

$$\mathbf{K}_1^e = \int_A \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{B} dA \quad (26)$$

جهت استخراج بخش گرادینانی ماتریس سفتی المان، می‌توان $\delta U^{(1)}$ را این‌گونه نوشت:

$$\delta U^{(2)} = \int_{-h/2}^{h/2} \int_A \{ \tau_{111} \delta \xi_{111} + \tau_{222} \delta \xi_{222} + \tau_{122} \delta \xi_{122} + \tau_{211} \delta \xi_{211} + 2\tau_{112} \delta \xi_{112} + 2\tau_{111} \delta \xi_{212} + \tau_{211} \delta \xi_{211} + 2\tau_{112} \delta \xi_{112} + 2\tau_{111} \delta \xi_{212} + \tau_{311} \delta \xi_{311} + \tau_{322} \delta \xi_{322} + 2\tau_{312} \delta \xi_{312} + 2\tau_{113} \delta \xi_{113} + 2\tau_{223} \delta \xi_{223} + 2\tau_{123} \delta \xi_{123} + 2\tau_{213} \delta \xi_{213} \} dAdz \quad (27)$$

جهت ارائه نمایش ماتریسی $\delta U^{(2)}$ ، براساس روابط (۱۴) و (۲۷) بردار برآیندهای گرادینانی \mathbf{F}^* به صورت زیر قابل تعریف است:

۳۶ مجهول خواهد بود که شامل خیز عرضی ورق، دوران‌ها و مشتقات آنها در دو جهت x_1 و x_2 در گره‌های المان چهار ضلعی می‌باشد. اگر راستای محورهای مختصات در راستای اضلاع المان مستطیلی در نظر گرفته شوند، می‌توان مختصه‌های بی‌بعد $\zeta = (x_1 - a)/a$ و $\eta = (x_2 - b)/b$ را تعریف نمود که در بازه‌ی $[-1, 1]$ قرار دارند و لذا مستطیل به ابعاد $2a \times 2b$ (۲۳) سه متغیر میدانی w ، ψ_1 و ψ_2 به صورت مشابه درونیابی می‌گردند، لذا در این مرحله فقط میدان خیز $w = \mathbf{N} \mathbf{d}_p$ در نظر گرفته می‌شود. در این حالت، بردار جابه‌جایی گرهی \mathbf{d}_p به صورت بردار ستونی 12×1 زیر است:

$$\mathbf{d}_3 = \{W_1, W_{1,1}, W_{1,2}, W_2, W_{2,1}, W_{2,2}, W_3, W_{3,1}, W_{3,2}, W_4, W_{4,1}, W_{4,2}\}^T \quad (38)$$

از آنجا که ۱۲ درجه آزادی گرهی مربوط به این میدان در المان چهارگره‌ی وجود دارد، لذا می‌توان میدان خیز ورق را برحسب متغیرهای بی‌بعد ζ و η به صورت ۱۲ جمله‌ای زیر بیان نمود:

$$w(\zeta, \eta) = r_1 + r_2 \zeta + r_3 \eta + r_4 \zeta^2 + r_5 \zeta \eta + r_6 \eta^2 + r_7 \zeta^3 + r_8 \zeta^2 \eta + r_9 \zeta \eta^2 + r_{10} \eta^3 + r_{11} \zeta^3 \eta + r_{12} \zeta \eta^3 \quad (39)$$

که در آن r_1 تا r_{12} ضرایبی مجهول هستند که در ادامه تعیین خواهند شد. در واقع می‌توان رابطه‌ی فوق را بصورت ضرب ماتریسی $w = \mathbf{pr}$ نوشت که در آن $\mathbf{p} = \{1, \zeta, \eta, \zeta^2, \zeta \eta, \eta^2, \zeta^3, \zeta^2 \eta, \zeta \eta^2, \eta^3, \zeta^3 \eta, \zeta \eta^3\}$ یک بردار سطری 1×12 و $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, \dots, r_{12}\}^T$ یک بردار ستونی 12×1 می‌باشند. حال ضرایب مجهول r_1 تا r_{12} از شرایط زیر قابل محاسبه می‌باشند:

$$w|_{(\zeta_I, \eta_I)} = W_I, \quad \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \zeta} \Big|_{(\zeta_I, \eta_I)} = W_{I,1}, \quad \frac{1}{b} \frac{\partial w}{\partial \eta} \Big|_{(\zeta_I, \eta_I)} = W_{I,2} \quad (I = 1, 2, 3, 4) \quad (40)$$

که در آن $(\zeta_I, \eta_I) = (\pm 1, \pm 1)$ مختصات بی‌بعد چهار گره المان می‌باشند. از روی روابط (۴۳) و (۴۴)، یک دستگاه ۱۲ معادله و ۱۲ مجهول برای r_1 تا r_{12} به دست می‌آید که می‌توان آن را به صورت $\mathbf{Cr} = \mathbf{d}_p$ نوشت که از آن بردار $\mathbf{r} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{d}_p$ قابل محاسبه است. در این رابطه، ماتریس ضرایب 12×12 دستگاه معادلات می‌باشد. به دلیل زیاد بودن تعداد مؤلفه‌ها، از ذکر آن‌ها در اینجا خودداری می‌گردد. می‌توان تحقیق نمود که دترمینان این ماتریس دقیقاً برابر $\det \mathbf{C} = -1048576(ab)^{11}$ است و لذا \mathbf{C}^{-1} همواره موجود است. حال با ترکیب دو رابطه‌ی $w = \mathbf{Nd}_3$ و $w = \mathbf{pr} = \mathbf{pC}^{-1} \mathbf{d}_p$ بردار توابع درونیابی به صورت

$$\delta U^{(2)} = \int_A \delta \omega^{*T} \mathbf{F}^* dA = \int_A \delta \mathbf{d}^e \cdot (\mathbf{B}^{*T} \tilde{\mathbf{D}}^* \mathbf{B}^*) \mathbf{d}^e dA = \delta \mathbf{d}^e \cdot (\mathbf{K}_2^e \mathbf{d}^e) \quad (34)$$

در نتیجه ماتریس سفتی \mathbf{K}_2^e توسط رابطه‌ی زیر ارائه می‌گردد:

$$\mathbf{K}_2^e = \int_A \mathbf{B}^{*T} \tilde{\mathbf{D}}^* \mathbf{B}^* dA \quad (35)$$

حال ماتریس سفتی کل المان n گرهی از حاصل جمع روابط (۲۶) و (۳۵) به صورت $\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_1^e + \mathbf{K}_2^e$ حاصل می‌شود. از آنجا که هر گره از المان دارای ۹ درجه آزادی است، لذا ماتریس سفتی \mathbf{K}^e برای یک المان ورق n گرهی به صورت ماتریسی با اندازه $9n \times 9n$ خواهد بود. بردار نیروی المان نیز از روی رابطه‌ی مربوط به کار مجازی بارهای خارجی قابل محاسبه است. به عنوان مثال، اگر یک المان تحت میدان فشار برآیند p در جهت z و گشتاور خمشی گسترده بر واحد سطح q_α حول محورهای مختصات و هم‌جهت با دوران‌های ψ_α قرار گرفته باشد، آنگاه کار مجازی بارهای خارجی روی المان، δW^{ext} ، را می‌توان چنین نوشت:

$$\delta W^{ext} = \int_A (q_1 \delta \psi_1 + q_2 \delta \psi_2 + p \delta w) dA = \int_A (q_1 \mathbf{N} \delta \mathbf{d}_1 + q_2 \mathbf{N} \delta \mathbf{d}_2 + p \mathbf{N} \mathbf{d}_3) dA \quad (36)$$

که در تساوی آخر از رابطه (۲۳) استفاده شده است. حال توجه می‌شود که می‌توان رابطه‌ی فوق را به صورت ضرب داخلی یک بردار نیروی تعمیم یافته \mathbf{f}^e در بردار جابه‌جایی مجازی گرهی کل المان، یعنی $\delta \mathbf{d}^e$ ، نوشت:

$$\delta W^{ext} = \left[\int_A \{q_1 \mathbf{N}, q_2 \mathbf{N}, p \mathbf{N}\}^T dA \right] \cdot \delta \{\mathbf{d}_1^T, \mathbf{d}_2^T, \mathbf{d}_3^T\}^T = \mathbf{f}^e \cdot \delta \mathbf{d}^e \quad (37)$$

که از آن برداری نیروی گره‌های المان به صورت $\mathbf{f}^e = \int_A \{q_1 \mathbf{N}, q_2 \mathbf{N}, p \mathbf{N}\}^T dA$ استخراج می‌گردد. توجه می‌شود که نظریه گرادیان کرنش براساس برقراری اصل کار مجازی توسط میندیلین [۹] و فرمول‌بندی شده است و فرض می‌گردد که این اصل برای هر قسمتی از جسم، از جمله المان مورد بررسی در این مقاله برقرار است. براین اساس، اصل کار مجازی روی المان به صورت $\delta U - \delta W^{ext} = 0$ منجر به رابطه $\delta \mathbf{d}^e = 0$ می‌شود که با توجه به دلخواه بودن بردار جابه‌جایی مجازی $\delta \mathbf{d}^e$ ، رابطه $\mathbf{K}^e \mathbf{d}^e = \mathbf{f}^e$ برای المان حاصل می‌گردد. در نهایت بردار جابه‌جایی تعمیم یافته از دستگاه معادلات جبری خطی $\mathbf{Kd} = \mathbf{f}$ به دست می‌آید که در آن ماتریس سفتی اسمبل شده، \mathbf{d} بردار جابه‌جایی اسمبل شده، و \mathbf{f} بردار نیروی اسمبل شده‌ی کل سیستم می‌باشند.

در فرمول‌بندی فوق، المانی با n گره در نظر گرفته شد. حال، یک المان مستطیلی چهارگره‌ی ($n = 4$) به ابعاد $2a \times 2b$ در نظر گرفته می‌شود که گره‌ها در گوشه‌های آن قرار دارند. در این حالت، ماتریس سفتی به صورت یک ماتریس 36×36 بوده و بردار جابه‌جایی تعمیم‌یافته‌ی المان نیز دارای

$$X = \frac{h}{l}, \quad Y = \frac{L_1}{h}, \quad Z = \frac{L_1}{L_2}, \quad (42)$$

$$W = \frac{w}{w^c}, \quad M = \frac{M_{11}}{M_{11}^c}$$

که در آن w^c حداکثر جابه‌جایی عرضی ورق و M_{11}^c مؤلفه گشتاور خمشی حول محور x_1 در مرکز ورق، بر مبنای مدل کرشلف و براساس نظریه الاستیسیته کلاسیک می‌باشند. مقادیر w^c و M_{11}^c به ازای شرایط مرزی مختلف از ورق (بر مبنای مدل ورق کرشلف کلاسیک) در کتب استاندارد نظریه ورق و پوسته از جمله مرجع [۳۰] آورده شده‌اند و در ادامه، در موقیبت مناسب ارائه خواهند شد. توجه شود که دلیل معرفی w^c و M_{11}^c براساس مدل کرشلف بر مبنای الاستیسیته کلاسیک آن است که مقادیر خیز بی‌بعد W و گشتاور بی‌بعد M در ورق‌های نازک (یعنی Y بزرگ) و در زمانی که اثرات گرادیانی کوچک هستند (یعنی X بزرگ) به سمت یک میل خواهد نمود. در ضمن فرمول‌های صریح مربوط به w^c و M_{11}^c براساس مدل کرشلف در کتب کلاسیک نظریه ورق و پوسته موجود می‌باشند که این امر مطالعه رفتار ورق به ازای مقادیر مختلفی از پارامترهای بی‌بعد X ، Y و Z را ساده‌تر می‌نماید.

۵-۱- میکرو ورق مستطیلی روی تکیه‌گاه ساده

در این مثال، تغییرشکل یک میکرو ورق مستطیلی میندلین-رایسنر گرادیانی با چهار لبه‌ی ساده و تحت فشار خارجی ثابت p مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرمول‌بندی حل تحلیلی این مسأله در مرجع [۲۲] ارائه شده و جهت صحت سنجی عملکرد المان پیشنهادی، در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد. از این رو، جزئیات حل تحلیلی در ضمیمه این مقاله آورده شده است. در کلیه‌ی شبیه‌سازی‌های عددی انجام شده در این مثال، مدل یک چهارم ورق توسط المان گرادیانی معرفی شده به صورت $n \times n$ مش‌بندی شده است، یعنی مستطیلی به ابعاد $\frac{1}{2}L_1 \times \frac{1}{2}L_2$ تحلیل می‌گردد. حال شرایط مرزی ورق مورد بررسی قرار می‌گیرند. یادآوری می‌گردد که مرکز دستگاه مختصات در مرکز ورق مستطیلی بوده و لذا مدل یک چهارم ورق، در ربع اول دستگاه مختصات قرار می‌گیرد. روی لبه‌ی ساده‌ی $x_1 = L_1/2$ از ورق که به موازات محور x_1 است، خیز عرضی w برابر صفر است. همچنین نقاط روی این لبه‌ی ساده، حرکتی در جهت x_1 ندارند، لذا براساس میدان جابه‌جایی در رابطه (۵)، زاویه‌ی دوران $\psi_{1,1}$ روی کل این لبه صفر است. با توجه به تعریف مشتق در راستای x_1 ، $\psi_{1,1}$ نیز روی این لبه صفر خواهد بود. همچنین توجه می‌گردد که روی این لبه‌ی ساده، باید گشتاور خمشی M_{11} برابر صفر باشد. اما از معادلات (۱۵) رابطه‌ی $M_{11} = D_f(\psi_{1,1} + \psi_{1,2})$ برقرار است که جایگزینی $M_{11} = 0$ و نیز $\psi_{1,2} = 0$ در این رابطه، به شرط مرزی اساسی $\psi_{1,1} = 0$ منتهی می‌گردد. لذا شرایط مرزی روی لبه‌ی $x_1 = L_1/2$ به صورت $w = 0$ ، $\psi_{1,1} = 0$ و $\psi_{1,2} = 0$ خواهند بود. تحلیل شرایط مرزی روی لبه‌ی ساده‌ی $x_1 = L_1/2$ از ورق که به موازات محور

$\mathbf{N} = \mathbf{pC}^{-1}$ به دست می‌آید. به کمک نرم افزار میپل^۱، توابع درونیایی N_1 تا N_{12} برای المان چهارگره‌ی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$N_1 = -\frac{1}{8}(\xi-1)(\eta-1)(\eta^2 + \eta + \xi^2 + \xi - 2),$$

$$N_2 = -\frac{1}{8}a(\xi+1)(\xi-1)^2(\eta-1)$$

$$N_3 = -\frac{1}{8}b(\eta+1)(\eta-1)^2(\xi-1),$$

$$N_4 = \frac{1}{8}(\xi+1)(\eta-1)(\eta^2 + \eta + \xi^2 - \xi - 2)$$

$$N_5 = -\frac{1}{8}a(\xi-1)(\xi+1)^2(\eta-1),$$

$$N_6 = -\frac{1}{8}b(\eta+1)(\eta-1)^2(\xi+1)$$

$$N_7 = -\frac{1}{8}(\xi+1)(\eta+1)(\eta^2 - \eta + \xi^2 - \xi - 2), \quad (41)$$

$$N_8 = \frac{1}{8}a(\xi-1)(\xi+1)^2(\eta+1)$$

$$N_9 = \frac{1}{8}b(-1+\eta)(\eta+1)^2(\xi+1),$$

$$N_{10} = \frac{1}{8}(\xi-1)(\eta+1)(\eta^2 - \eta + \xi^2 + \xi - 2)$$

$$N_{11} = \frac{1}{8}a(\xi+1)(\xi-1)^2(\eta+1),$$

$$N_{12} = -\frac{1}{8}b(\eta-1)(\eta+1)^2(\xi-1)$$

حال با داشتن توابع درونیایی، ابتدا ماتریس‌های \mathbf{B} و \mathbf{B}^* از روابط (۲۴) و (۳۳) محاسبه شده و سپس ماتریس‌های سختی \mathbf{K}_1^e و \mathbf{K}_p^e محاسبه می‌گردند. بردار نیرو نیز به سادگی از رابطه‌ی (۳۷) به ازای $n = 4$ قابل محاسبه است.

۵- نتایج عددی

به منظور بررسی رفتار میکرو ورق‌ها براساس فرمول‌بندی المان محدود ارائه شده در بخش قبل، تغییر شکل ورق مستطیلی با چهار لبه ساده، چهار لبه گیردار، و همچنین سه لبه ساده و یک لبه آزاد در این بخش مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای این منظور، یک کد المان محدود نوشته شده و جهت المان‌بندی هندسه، از المان مذکور در بخش قبل استفاده شده است. در این راستا، یک میکرو ورق مستطیلی با طول L_1 عرض L_2 و ضخامت h در نظر گرفته می‌شود. در دومثال اول، یک دستگاه مختصات کارتزین در مرکز ورق قرار داده می‌شود به گونه‌ای که محورهای مختصات موازی با اضلاع مستطیل باشند. در مثال سوم، در حالی که همچنان محورهای مختصات موازی با اضلاع ورق هستند، اما مرکز دستگاه مختصات در مرکز لبه‌ی پایینی ورق قرار داده می‌شود. جهت ارائه نتایج بی‌بعد، مشابه مرجع [۲۲]، پارامترهای بی‌بعد زیر معرفی می‌گردند:

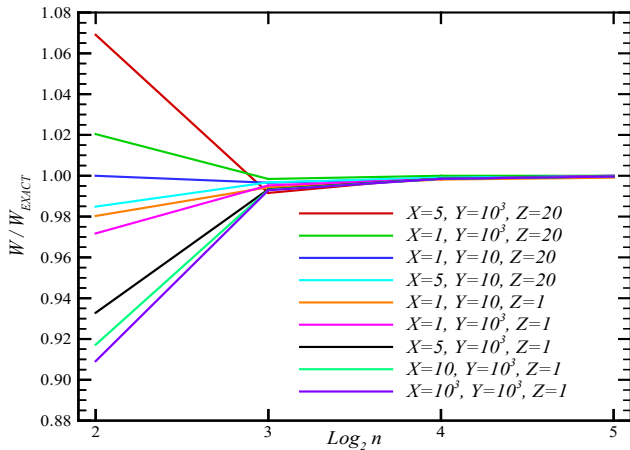


Fig. 2. Convergence of the nondimensional deflection W versus the logarithm of the number of elements along the sides of one-quarter model of the plate with simply-supported boundaries (exact solution has been calculated based on the formulation given in Ref. [22])

شکل ۲: همگرایی خیز بی بعد W برحسب لگاریتم تعداد المان‌ها در راستای اضلاع مدل یک چهارم ورق با شرایط مرزی ساده (حل دقیق بر مبنای فرمول‌بندی ارائه شده در مرجع [۲۲] محاسبه شده است)

برای ورق با $Z = 20$ به دست می‌آید (جدول ۸، ص ۱۲۰ مرجع [۳۰]) که جهت بی‌بعد سازی خیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. همانطور که از شکل پیداست، به ازای تمام مقادیر از پارامترهای بی‌بعد X و Y ، منحنی‌های به دست آمده از حل المان محدود بر حل دقیق ورق میندلین-رایسنر گرادانی که براساس فرمول‌بندی مرجع [۲۲] محاسبه شده‌اند منطبق می‌باشند. به عبارت دیگر، المان معرفی شده در این مقاله قادر به تولید پاسخ‌هایی است که کاملاً منطبق بر حل دقیق ورق مستطیلی گرادانی بر روی تکیه‌گاه ساده

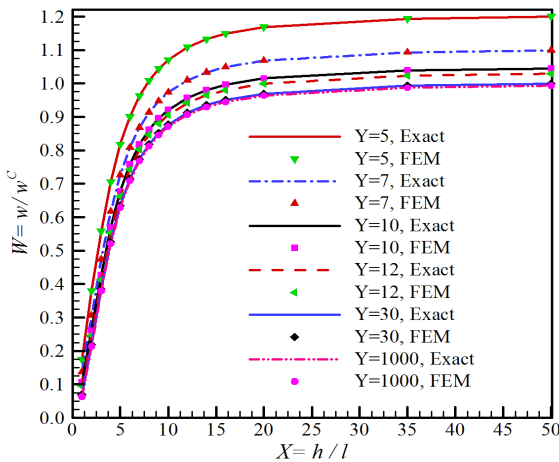


Fig. 3. Variation of the nondimensional deflection W versus the nondimensional variable X in a microplate with simply-supported boundaries (exact solution has been calculated based on the formulation given in Ref. [22])

شکل ۳: تغییرات خیز بی‌بعد W برحسب متغیر بی‌بعد X در یک میکرو ورق مربعی با لبه‌های ساده (حل دقیق بر مبنای فرمول‌بندی ارائه شده در مرجع [۲۲] محاسبه شده است)

x_1 است، دقیقاً مشابه لبه‌ی $x_1 = L_1 / 2$ است، منتها باید نقش اندیس‌های ۱ و ۲ را تعویض نمود. به عبارت دیگر، شرایط مرزی روی لبه $x_2 = L_2 / 2$ و $x_1 = L_1 / 2$ به صورت $w = 0$ ، $\psi_1 = 0$ و $\psi_{2,2} = 0$ خواهند بود. محورهای x_1 و x_2 از دستگاه مختصات، محورهای تقارن ورق می‌باشند. روی محور x_1 ، نقاط ورق هیچ نوع حرکتی در راستای محور x_2 ندارند و لذا شرط صفر بودن زاویه دوران ψ_2 روی این محور برقرار است. از طرف دیگر، خیز و حرکات درون صفحه‌ای نقاط ورق در بالا و پایین محور x_1 وضعیت متقارنی دارند. به عبارت دیگر، مشتق خیز و دوران‌ها نسبت به راستای x_2 باید صفر باشد. بنابراین شرایط مرزی روی محور تقارن x_1 به صورت $\psi_2 = 0$ ، $\psi_{1,2} = 0$ و $\psi_{2,2} = 0$ است. تحلیل شرایط مرزی روی محور x_2 نیز به صورتی کاملاً مشابه است و فقط باید نقش اندیس‌های ۱ و ۲ را تعویض نمود. یعنی شرایط مرزی روی محور تقارن x_2 به صورت $\psi_1 = 0$ ، $\psi_{1,1} = 0$ و $\psi_{2,1} = 0$ است.

به منظور یافتن حداقل تعداد المان‌ها در مش‌بندی هندسه، مسأله به ازای المان‌بندی‌های متفاوت حل شده و با حل دقیق که در ضمیمه شرح داده شده مقایسه می‌گردد. در شکل ۲ همگرایی خیز بی‌بعد W برحسب لگاریتم n در مبنای دو و برحسب مقادیر مختلفی از پارامترهای بی‌بعد X ، Y و Z ترسیم شده است. در واقع محور قائم بیانگر کمیت W / W^* است که در آن W^* مقدار دقیق خیز بی‌بعد محاسبه شده بر مبنای فرمول‌بندی ارائه شده در مرجع [۲۲] می‌باشد. ضریب پواسون $\nu = 0.3$ نیز در تولید منحنی‌های مختلف اعمال شده است. مقادیر کمیت $X = h/l$ از یک تا هزار در نظر گرفته شده، که به ازای $X = 1$ اثرات گرادانی زیاد بوده و به ازای $X = 1000$ اثرات گرادانی قابل صرف‌نظر می‌باشند. مقادیر کمیت $Y = L_1 / h$ از ده تا هزار لحاظ شده‌اند. به ازای $Y = 10$ ورق ضخیم بوده و اثرات برشی در آن مهم می‌باشند. در عوض به ازای $Y = 1000$ ورق نازک بوده و اثرات برشی در آن بسیار ناچیز هستند. از سوی دیگر، برای پارامتر Z نیز اعداد ۱ و ۲۰ مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به ازای $Z = 1$ ورق مربعی است، و به ازای $Z = 20$ ورق به صورت یک نوار مستطیلی نازک است. همانگونه که ذکر شد، در همه‌ی موارد، مش‌بندی مدل یک چهارم ورق به صورت $n \times n$ می‌باشد، لذا به ازای $Z = 20$ ، شکل المان‌ها نیز به صورت یک نوار مستطیلی نازک می‌باشد. شکل ۲ نشان می‌دهد که در همه‌ی موارد مذکور، همگرایی در پاسخ المان با افزایش تعداد المان‌ها رخ می‌دهد. در نهایت مشاهده می‌گردد که یک مش 16×16 از المان‌ها جهت داشتن پاسخ دقیق کفایت می‌نماید. اما جهت داشتن توزیع هموارتر، از مش 32×32 در تولید شکل‌های ۴-الف و ۴-ب استفاده شده است.

خیز بی‌بعد میکرو ورق مربعی ($Z = 1$) برحسب متغیر بی‌بعد X و چند مقدار مختلف از پارامتر Y در شکل ۳ ترسیم شده است. حداکثر جابه‌جایی عرضی ورق با شرایط مرزی ساده تحت بار یکنواخت p بر مبنای مدل کرشهف و براساس نظریه الاستیسیته کلاسیک از رابطه‌ی $w^C = 0.0046 p L_1^4 D_f^{-1}$ و $Z = 1$ به ازای $w^C = 0.01302 p L_1^4 D_f^{-1}$

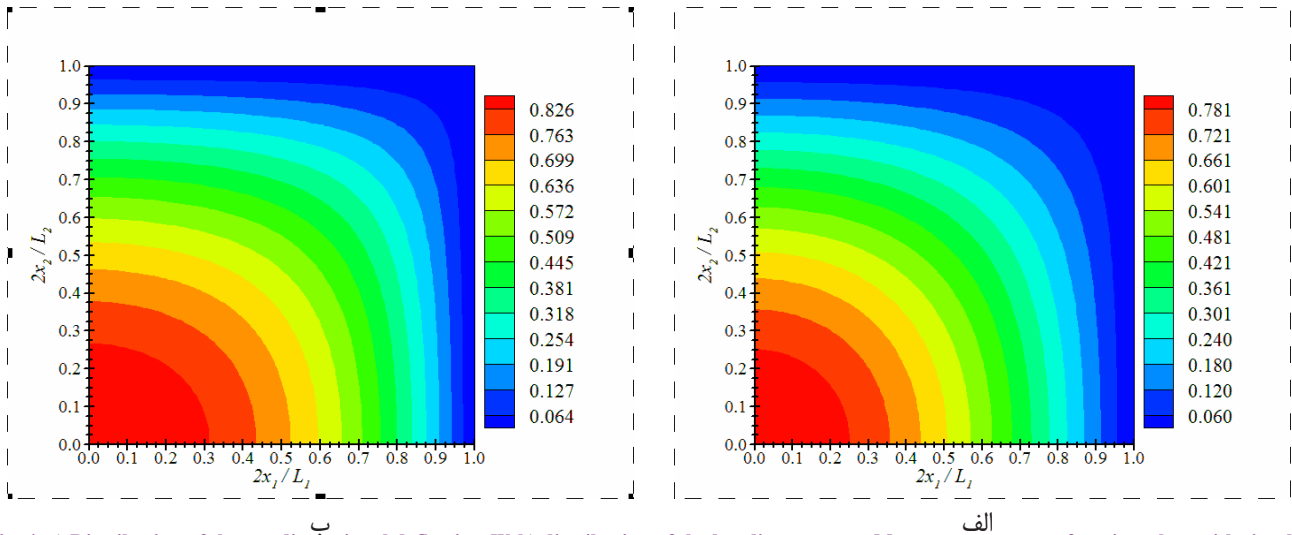


Fig. 4. a) Distribution of the nondimensional deflection W , b) distribution of the bending moment M over one-quarter of a microplate with simply-supported boundaries.

شکل ۴: الف) توزیع خیز بی بعد W ، ب) توزیع گشتاور خمشی بی بعد M بر روی یک چهارم از میکرو ورق با شرایط مرزی ساده

M بر روی مدل یک چهارم ورق مشاهده می‌گردد. توجه شود که برای ورق مربعی شکل با شرایط مرزی ساده و تحت بار یکنواخت p ، مؤلفه گشتاور خمشی حول محور x_1 در مرکز ورق، بر مبنای مدل کرشهف و براساس نظریه الاستیسیته کلاسیک از رابطه $M_{11}^C = 0.479pL_1^2$ به دست می‌آید (جدول ۸، ص ۱۲۰ مرجع [۳۰]) که جهت بی بعد سازی استفاده شده است. همانگونه که از روی شکل مشخص است، این بار نیز مقادیر بیشینه و کمینه به ترتیب در مرکز و لبه‌های ورق مشاهده می‌گردند. بیشینه گشتاور خمشی در این حالت اندکی بیشتر از $0/8$ برابر مقدار متناظر براساس نظریه کلاسیک است.

۵-۲- میکرو ورق با چهار لبه‌ی گیردار

در این مثال، رفتار میکرو ورق میندلین-رایسنر گرادیدانی با شرط مرزی گیردار بر روی هر چهار لبه و تحت فشار خارجی یکنواخت p مورد بررسی قرار می‌گیرد. هندسه و دستگاه مختصات در این مثال دقیقاً مشابه مثال قبل می‌باشد و همچنان مدل یک چهارم ورق تحلیل می‌گردد. روی لبه‌ی گیردار $x_1 = L_1/2$ از ورق که به موازات محور x_1 است، خیز عرضی w برابر صفر است. همچنین نقاط روی این لبه حرکتی در جهت x_1 ندارند، لذا براساس میدان جابه‌جایی در رابطه (۵)، زاویه‌ی دوران ψ_1 روی کل این لبه برابر صفر است. همچنین، در این لبه‌ی گیردار نباید دورانی حول محور x_2 صورت گیرد، لذا مقدار ψ_1 نیز صفر است. لذا شرایط مرزی روی لبه‌ی $x_1 = L_1/2$ به صورت $w = 0$ و $\psi_1 = \psi_2 = 0$ خواهند بود. تحلیل شرایط مرزی روی لبه‌ی گیردار $x_2 = L_2/2$ از ورق که به موازات محور x_2 است، دقیقاً مشابه لبه‌ی $x_1 = L_1/2$ است و همچنان منجر به $w = 0$ و $\psi_1 = \psi_2 = 0$ خواهد شد. محورهای x_1 و x_2 از دستگاه مختصات، محورهای تقارن ورق می‌باشند. شرایط روی این دو محور تقارن نیز در مثال قبل ارائه گردیدند.

می‌باشند. این نکته بیانگر دقت بالای فرمول‌بندی المان محدود گرادیدانی ارائه شده در این مقاله می‌باشد. پارامتر بی بعد $Y = L_1/h$ در واقع بیانگر اثرات برشی در ورق می‌باشد. معمولاً به ازای $Y > 20$ ، می‌توان ورق را نازک فرض نمود. در این حالت اثرات برشی کوچک بوده و قابل صرف نظر می‌باشند. پارامتر $X = h/l$ نیز بیانگر اهمیت اثرات گرادیدان کرنش در میکرو ورق می‌باشد. از روی شکل واضح است که به ازای مقادیر $1 < X < 10$ ، اثرات گرادیدان کرنش باعث کاهش چشم‌گیری در مقدار جابه‌جایی بی بعد W می‌گردند. به ازای $X > 30$ اثرات گرادیدان کرنش کاملاً قابل صرف نظر می‌باشند. به ازای مقادیر بزرگ از هر دو پارامتر بی بعد X و Y ، منحنی مربوط بر خیز بی بعد بر عدد یک مماس می‌گردد، یعنی پاسخ المان محدود گرادیدانی بر حل بر مبنای ورق کرشهف بر مبنای الاستیسیته‌ی کلاسیک منطبق می‌گردد.

در ادامه، توزیع خیز بی بعد W و نیز گشتاور خمشی بی بعد M مربوط به میکرو ورق با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده در شکل ۴-الف و ۴-ب ارائه می‌گردد. در ترسیم این شکل‌ها، فرض شده که جنس ورق از اپوکسی با خواص $E = 1/44 \text{ GPa}$ ، $\nu = 0/38$ و $l = 17/6 \mu\text{m}$ می‌باشد [۱۲] و میکرو ورق تحت بار یکنواخت $p = 1 \text{ bar}$ قرار گرفته است. پارامترهای بی بعد نیز $X = 10$ و $Y = 50$ فرض شده‌اند. این مقادیر بیانگر یک ورق تقریباً نازک هستند که اثرات گرادیدان کرنش نیز در آن حائز اهمیت است. در شکل ۴-الف توزیع خیز بی بعد میکرو ورق نمایش داده شده است که مقادیر بیشینه و کمینه به ترتیب در مرکز و لبه‌ها مشاهده می‌گردند. بیشینه خیز ورق در این حالت حدود $0/78$ خیز مرکز ورق براساس نظریه کلاسیک است که با توجه به مقدار پارامتر بی بعد X قابل پیش بینی نیز می‌باشد. به عبارت دیگر، به ازای پارامتر بی بعد $X = 10$ ، سفتی میکرو ورق حدود ۲۰ درصد بیشتر از مقداری است که توسط مدل‌های ورق بر مبنای الاستیسیته کلاسیک پیش‌بینی می‌گردد. در شکل ۴-ب توزیع گشتاور خمشی بی بعد

می‌دهند. مقایسه‌ی شکل‌های ۳ و ۶ نشان می‌دهد که در ورق با تکیه‌گاه ساده، اثرات برشی تا مقدار تقریبی $Y \approx 30$ مهم هستند، اما در ورق با تکیه‌گاه گیردار، تا مقدار $Y \approx 50$ باید اثرات برشی را لحاظ نمود. همچنین به ازای مقادیر $10 < X < 1$ اثرات گرادبان کرنش باعث کاهش قابل توجهی در مقدار W می‌گردند، اما به ازای $X > 50$ اثرات گرادبان کرنش تأثیر ملموسی در تغییر شکل ورق با شرایط تکیه‌گاه گیردار ندارند. مشابه مثال قبل، به ازای مقادیر بزرگ از هر دو پارامتر بی‌بعد X و Y ، منحنی مربوط بر خیز بی‌بعد در نهایت بر عدد یک مماس می‌گردد، یعنی پاسخ المان محدود گرادبانی بر حل‌های موجود بر مبنای ورق کرشلف کلاسیک منطبق می‌گردد.

در ادامه، توزیع خیز بی‌بعد W و گشتاور بی‌بعد M مربوط به میکرو ورق با شرط مرزی گیردار ترسیم می‌گردد. همانند مثال قبل، در این بخش نیز جنس ورق پوکسی بوده و پارامترهای بی‌بعد به صورت $X = 10$ و $Y = 50$ فرض می‌گردند. در شکل ۷-الف توزیع خیز بی‌بعد میکرو ورق ارائه گردیده است. الگوی کلی توزیع این کمیت مانند مثال قبل است. بیشینه خیز ورق در این حالت که در مرکز ورق رخ می‌دهد اندکی بیشتر از 0.8 برابر خیز ورق براساس نظریه کلاسیک می‌باشد. در مقایسه با میکرو ورق تحت بار مشابه و در شرایط مرزی ساده، اندکی افزایش در خیز بی‌بعد مشاهده می‌گردد، البته باید به این نکته توجه داشت که میزان خیز در ورق با شرایط مرزی گیردار کمتر از خیز ورق با شرایط مرزی ساده است، اما خیز بی‌بعد بیشتری در ورق با لبه‌های گیردار به دست آمده است.

در شکل ۷-ب توزیع گشتاور خمشی بی‌بعد M ارائه شده است. توجه شود که برای ورق مربعی شکل با شرایط مرزی گیردار و تحت بار یکنواخت p ، مؤلفه گشتاور خمشی حول محور x_1 در مرکز ورق، بر مبنای مدل کرشلف و براساس نظریه الاستیسیته کلاسیک از رابطه‌ی $M_{11}^C = 0.231pL_1^2$ (جدول ۳۵ ص ۲۰۲ مرجع [۳۰])

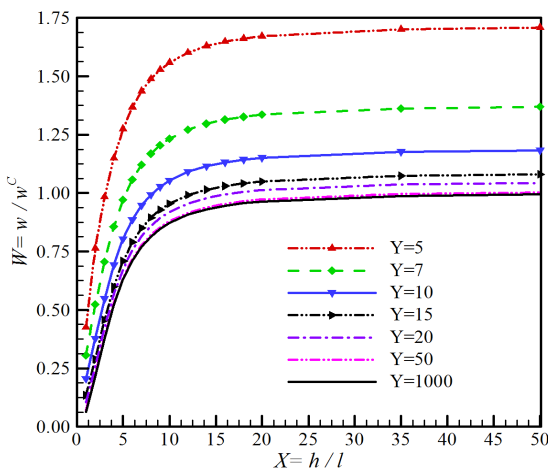


Fig. 6. Variation of the nondimensional deflection W versus the nondimensional variable X in a microplate with clamped boundaries
 شکل ۶: تغییرات خیز بی‌بعد W بر حسب متغیر بی‌بعد X در میکرو ورق مربعی با لبه‌های گیردار

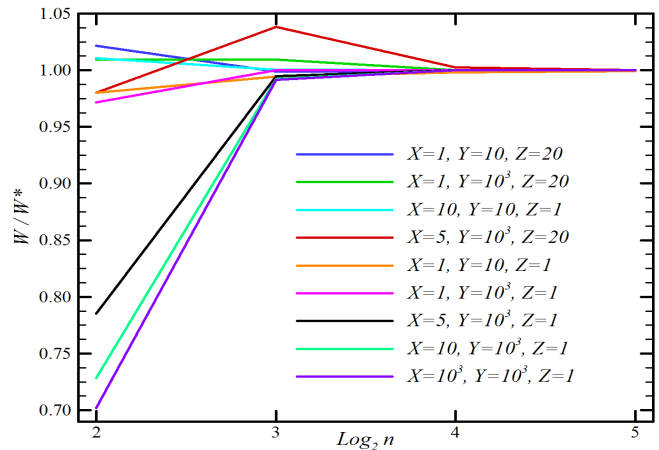


Fig. 5. Convergence of the nondimensional deflection W versus the logarithm of the number of elements along the sides of one-quarter model of the plate with clamped boundaries

شکل ۵: همگرایی خیز بی‌بعد W بر حسب لگاریتم تعداد المان‌ها در راستای اضلاع مدل یک چهارم ورق با شرایط مرزی گیردار

مشابه مثال قبل، مدل یک چهارم ورق توسط المان جدید معرفی شده به صورت $n \times n$ مش‌بندی شده است. در شکل ۵ همگرایی خیز بی‌بعد W بر حسب لگاریتم n (در مبنای دو) و نیز بر حسب مقادیر مختلفی از پارامترهای بی‌بعد X ، Y و Z مشاهده می‌گردد. در این شکل، محور قائم بیانگر کمیت W/W^* است که در این مثال، مقدار همگرا شده‌ی خیز بی‌بعد است. ضریب پواسون $\nu = 0.3$ نیز در تولید منحنی‌ها اعمال شده است. این شکل نیز نشان می‌دهد که به ازای ورق‌های ضخیم و نازک (یعنی Y کوچک و بزرگ)، ورق‌های مربعی و مستطیلی (یعنی Z برابر یک و بزرگتر از یک)، و نیز در ورق‌های با اثرات گرادبانی شدید و ضعیف (یعنی X کوچک و بزرگ)، همگرایی در پاسخ المان با افزایش تعداد المان‌ها رخ می‌دهد. نمودارهای مختلف نشان می‌دهند که یک مش 16×16 از المان‌ها جهت داشتن پاسخ دقیق کفایت می‌نماید. اما جهت داشتن شکل‌های هموارتر، از مش 32×32 در تولید توزیع خیز و گشتاور بی‌بعد روی سطح ورق که در شکل‌های ۷-الف و ۷-ب ارائه می‌گردند استفاده می‌شود. به این نکته نیز توجه می‌شود که حداکثر جابه‌جایی عرضی ورق با شرایط مرزی گیردار تحت بار یکنواخت p بر مبنای مدل کرشلف و براساس نظریه الاستیسیته کلاسیک از رابطه‌ی $w^C = 0.100126pL_1^4 D_f^{-1}$ برای ورق مربعی (یعنی $Z = 1$) و نیز از رابطه‌ی $w^C = 0.100260pL_1^4 D_f^{-1}$ در ورق مستطیلی باریک با $Z = 20$ به دست می‌آید (جدول ۳۵ ص ۲۰۲ مرجع [۳۰]) که جهت بی‌بعد سازی خیز استفاده می‌گردد.

در شکل ۶ منحنی جابه‌جایی بی‌بعد در یک میکرو ورق مربعی بر حسب متغیر X و چند مقدار متفاوت از Y رسم شده است. از روی شکل، ورق با نسبت Y کوچکتر دارای نسبت جابه‌جایی عرضی بزرگتری است که بیانگر اهمیت اثرات برشی در میکرو ورق‌های ضخیم می‌باشد. در مقایسه با شرایط مرزی ساده، اثرات برشی در ورق با تکیه‌گاه گیردار بیشتر خود را نشان

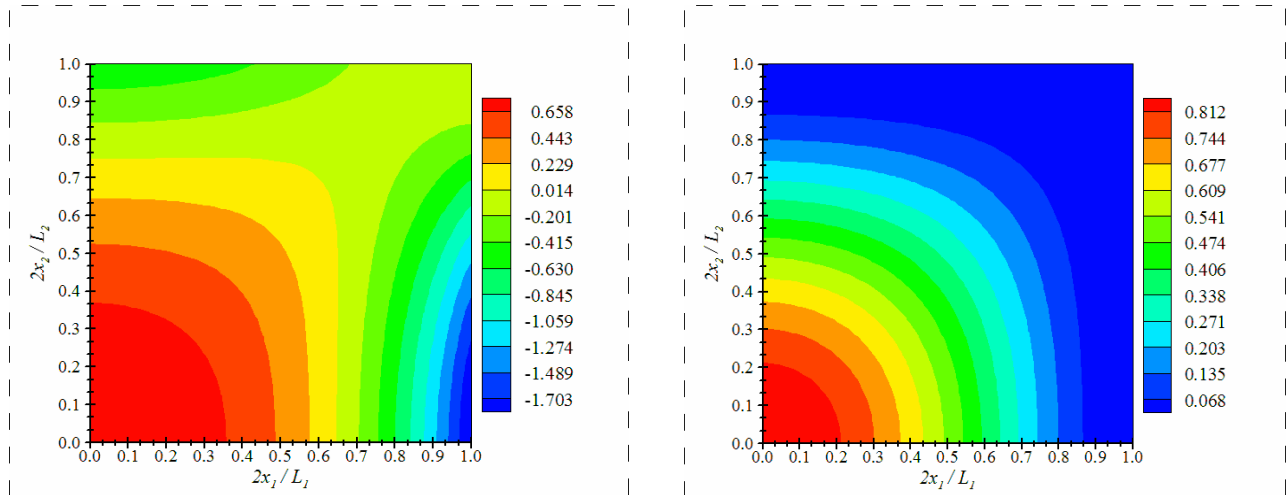


Fig. 7. a) Distribution of the nondimensional deflection W , b) distribution of the bending moment M over one-quarter of a microplate with clamped boundaries

شکل ۷: الف) توزیع خیز بی‌بعد W ، ب) توزیع گشتاور خمشی بی‌بعد M بر روی یک‌چهارم از میکرو ورق با شرایط مرزی گیردار

دو) و نیز برحسب مقادیر مختلفی از پارامترهای بی‌بعد X ، Y و Z مشاهده می‌گردد. مشابه مثال قبل، محور قائم بیانگر کمیت W/W^* است که در آن W^* مقدار همگرا شده‌ی خیز بی‌بعد است. ضریب پواسون $\nu = 0.3$ نیز در تولید منحنی‌ها اعمال شده است. این شکل نیز نشان می‌دهد که به ازای ورق‌های ضخیم و نازک، ورق‌های مربعی و مستطیلی باریک، و نیز در ورق‌های با اثرات گرادیانی شدید و ضعیف، همگرایی در پاسخ المان با افزایش تعداد المان‌ها رخ می‌دهد. نمودارهای مختلف نشان می‌دهند که یک مش 16×32 از المان‌ها جهت داشتن پاسخ دقیق کفایت می‌نماید. اما جهت داشتن شکل‌های هموارتر، از مش 32×64 در تولید توزیع خیز و گشتاور بی‌بعد روی سطح ورق که در شکل‌های ۱۰-الف و ۱۰-ب ارائه شده‌اند، استفاده می‌گردد.

که جهت بی‌بعد سازی استفاده شده است. در این حالت برخلاف ورق با تکیه ساده، گشتاور خمشی در راستای محور x_1 تغییر علامت نیز می‌دهد. در واقع این تغییر علامت گشتاور خمشی هم در مدل‌های کلاسیک و هم در مدل‌های گرادیانی رخ می‌دهد. همچنین مقدار بیشینه در مجاورت لبه و در راستای محور تقارن افقی ورق رخ می‌دهد. مقدار حداکثر گشتاور ورق در این حالت در حدود $1/74$ برابر مقدار گشتاور ورق براساس نظریه کلاسیک می‌باشد.

۱-۱- میکرو ورق با سه لبه‌ی ساده و یک لبه‌ی آزاد

در این مثال، رفتار میکرو ورق میندین-رایسنر گرادیانی با سه لبه ساده و یک لبه آزاد تحت فشار یکنواخت p مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرض می‌شود که ضلع پایینی ورق منطبق بر محور x_1 از دستگاه مختصات بوده و محور $x_2 = L_2$ نیز محور تقارن آن است. لبه‌ی بالایی ورق، یعنی ضلع $x_2 = L_2$ به عنوان لبه‌ی آزاد فرض می‌گردد و سه ضلع دیگر مستطیل دارای شرط مرزی ساده می‌باشند. همچنین به دلیل تقارن می‌توان تنها نصف ورق، یعنی مستطیلی به ابعاد $\frac{1}{2}L_1 \times L_2$ را تحلیل نمود که به صورت $n \times 2n$ المان‌بندی شده است. تحلیل شرایط مرزی در این مثال مشابه مثال اول است. یعنی روی لبه‌ی ساده‌ی $x_1 = L_1/2$ از ورق که به موازات محور x_2 است، شرایط مرزی به صورت $w = 0$ ، $\psi_1 = 0$ و $\psi_2 = 0$ خواهند بود. روی محور x_1 که ضلع پایینی ورق با شرایط ساده را تشکیل می‌دهد، تحلیل شرایط مرزی مشابه لبه‌ی $x_1 = L_1/2$ است، منتها باید نقش اندیس‌های ۱ و ۲ را تعویض نمود. یعنی شرایط روی لبه‌ی پایینی به صورت $w = 0$ ، $\psi_1 = 0$ و $\psi_2 = 0$ خواهند بود. محور x_2 از دستگاه مختصات نیز محور تقارن ورق است. لذا مشابه مثال اول، شرایط مرزی روی آن به صورت $w = 0$ ، $\psi_1 = 0$ ، $\psi_{1,2} = 0$ و $\psi_{2,1} = 0$ می‌باشند.

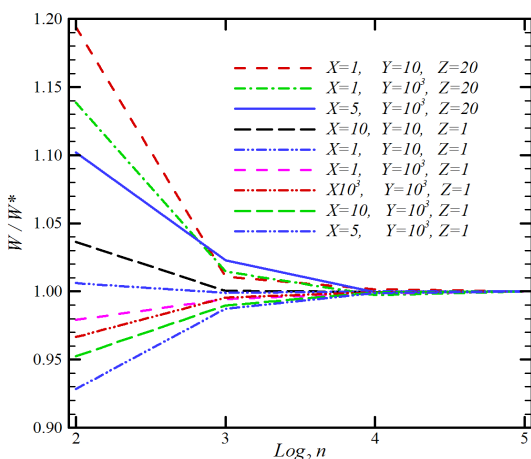


Fig. 8. Convergence of the nondimensional deflection W versus the logarithm of the number of elements along the horizontal side of a plate with three edges simply-supported and a free edge

شکل ۸: همگرایی خیز بی‌بعد W برحسب لگاریتم تعداد المان‌ها در راستای ضلع افقی مدل نیمه یک ورق با سه لبه ساده و یک لبه آزاد

در شکل ۵ همگرایی خیز بی‌بعد W برحسب لگاریتم n (در مبنای

مشابه دو مثال قبل، به ازای مقادیر بزرگ از هر دو پارامتر بی بعد X و Y ، هم اثرات برشی و هم اثرات گرادیانی قابل صرف نظر بوده و منحنی خیز بی بعد در نهایت بر عدد یک مماس می گردد. یعنی با توجه به نازک بودن ورق، پاسخ المان محدود گرادیانی برابر با پاسخ بر مبنای ورق کرش هف کلاسیک خواهد شد.

در ادامه، توزیع خیز بی بعد W و گشتاور بی بعد M مربوط به میکرو ورق ترسیم می گردد. همانند دو مثال قبل، جنس ورق اپوکسی بوده و پارامترهای بی بعد به صورت $X = 10$ و $Y = 50$ فرض می گردند. در شکل ۱۰-الف توزیع خیز بی بعد میکرو ورق ارائه گردیده است. حداکثر خیز ورق در این حالت که در مرکز لبه ی بالایی ورق رخ می دهد، حدود 0.83 خیز خمشی بی بعد M روی مدل نیمه ی ورق ارائه شده است. توجه شود که برای ورق مربعی شکل با شرایط مرزی این مثال و تحت بار یکنواخت p ، مؤلفه گشتاور خمشی حول محور x_2 در مرکز لبه ی بالایی ورق، بر مبنای مدل کرش هف و براساس نظریه الاستیسیته ی کلاسیک از رابطه ی $M_{11}^C = 0.112 p L_1^2$ (جدول ۴۲ ص ۲۱۲ مرجع [۳۰]) که بی بعد سازی گشتاور براساس این مقدار صورت گرفته است. مشابه خیز، مقدار بیشینه ی این مؤلفه ی گشتاور نیز در وسط لبه ی آزاد ورق رخ می دهد. همچنین مقدار بیشینه گشتاور در این حالت در حدود 0.82 مقدار گشتاور ورق با همین شرایط مرزی و براساس نظریه کلاسیک می باشد.

۶- نتیجه گیری

در این مقاله، فرمول بندی المان محدود میکرو ورق میندلین-رایسنر ارائه گردید. جهت مدل نمودن پدیده ی اثرات اندازه که توسط آزمایشات تجربی به اثبات رسیده است، از نظریه الاستیسیته ی گرادیان کرنش استفاده شد. محاسبات کلیه ی کمیت های سینماتیکی و سینتیکی میکرو ورق و نیز فرمول بندی المان محدود مربوطه براساس نظریه گرادیان کرنش ایفنتیس

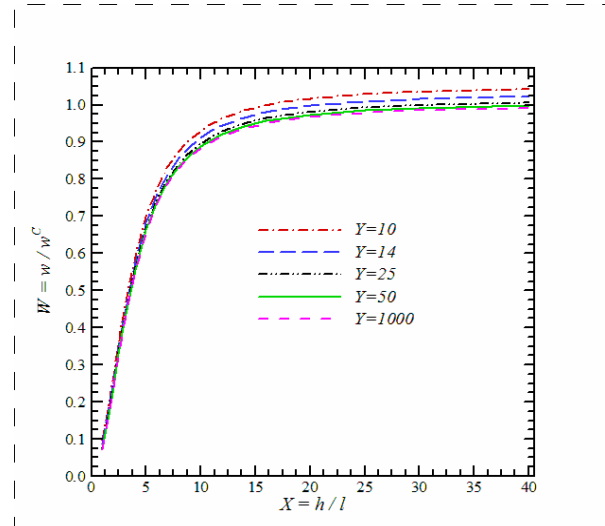


Fig. 9. Variation of the nondimensional deflection W versus the nondimensional variable X in a microplate with three edges simply-supported and a free edge

شکل ۹: تغییرات خیز بی بعد W بر حسب متغیر بی بعد X در میکرو ورق مربعی با سه لبه ساده و یک لبه آزاد

در شکل ۹ منحنی جابه جایی بی بعد در یک میکرو ورق مربعی بر حسب متغیر X و چند مقدار متفاوت از Y رسم شده است. توجه می شود که حداکثر جابه جایی عرضی ورق با شرایط مرزی این مثال و تحت بار یکنواخت p در وسط ضلع بالایی ورق رخ می دهد. بر مبنای مدل کرش هف و براساس نظریه الاستیسیته کلاسیک، خیز حداکثر از رابطه ی $w^C = 0.12286 p L_1^2 D_f^{-1}$ برای ورق مربعی ($Z = 1$) و نیز از رابطه ی $w^C = 0.1522 p L_1^2 D_f^{-1}$ در ورق مستطیلی باریک با $Z = 20$ به دست می آید (جدول ۴۲ ص ۲۱۲ مرجع [۳۰]). از روی شکل، واضح است که منحنی خیز بی بعد ورق به ازای $Y = 50$ و $Y = 1000$ بسیار به هم نزدیک می باشند. یعنی در این مثال اثرات برشی تا مقدار تقریبی $Y \approx 50$ قابل ملاحظه هستند. اثرات گرادیان کرنش نیز تقریباً تا مقدار $X = 30$ مهم می باشند.

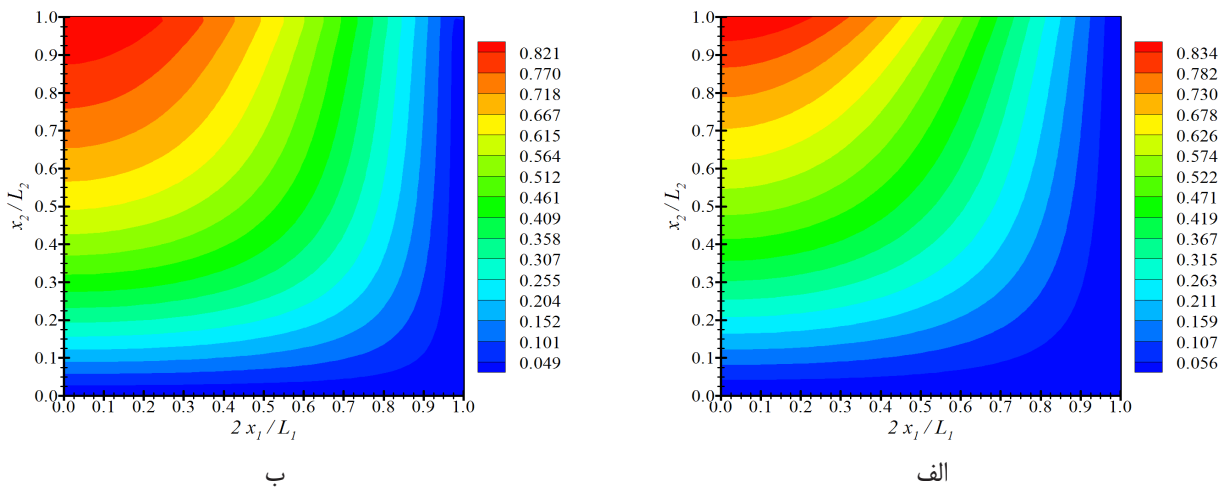


Fig. 10. a) Distribution of the nondimensional deflection W , b) distribution of the bending moment M over one-quarter of a microplate with three edges simply-supported and top free edge

شکل ۱۰: الف) توزیع خیز بی بعد W ، ب) توزیع گشتاور خمشی بی بعد M بر روی مدل نیمه ی میکرو ورق با سه لبه ساده و لبه بالایی آزاد

$$p - I_0 \ddot{w} + D_s K_s (\psi_{\alpha, \alpha} + w_{, \alpha \alpha}) - h \mu l^2 (w_{, \beta \beta \alpha \alpha} + \psi_{\beta, \beta \alpha \alpha}) = 0 \quad (\text{ب})$$

که در آن $I = \rho h$ و $I_\gamma = \rho h^3 / 12$ می‌باشند. همچنین بارهای خارجی q_β و p قبلاً در بخش ۴ معرفی شده‌اند. با توجه به شرایط مرزی ورق مستطیلی با چهار تکیه گاه ساده که در مثال ۵-۱ نیز عنوان گردید، حل ناویر برای متغیرهای میدان جابه‌جایی به صورت سری‌های زیر پیشنهاد می‌گردد که کلیه‌ی شرایط مرزی را ارضا می‌نماید [۲۲]:

$$\begin{cases} \psi_1 \\ \psi_2 \\ w \end{cases} = \sum_{I=1}^{\infty} \sum_{J=1}^{\infty} \begin{cases} S_{1IJ} \cos(\alpha_I x_1) \sin(\beta_J x_2) \\ S_{2IJ} \sin(\alpha_I x_1) \cos(\beta_J x_2) \\ W_{IJ} \sin(\alpha_I x_1) \sin(\beta_J x_2) \end{cases} \quad (\text{پ})$$

که در آن روابط $\beta_J = J\pi / L_2$ و $\alpha_I = I\pi / L_1$ برقرارند. همچنین S_{1IJ} ، S_{2IJ} و W_{IJ} دامنه‌های مجهول توابع میدانی می‌باشند. علاوه بر این، باید فشار p را به صورت سری فوریه دوگانه سینوسی $p = \sum_{I=1}^{\infty} \sum_{J=1}^{\infty} p_{IJ} \sin(\alpha_I x_1) \sin(\beta_J x_2)$ نوشت که در آن p_{IJ} از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$p_{IJ} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} p \sin(\alpha_I x_1) \sin(\beta_J x_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{ت})$$

با جایگذاری معادلات (پ) و (ت) در (الف) و (ب)، دستگاه معادلات جبری خطی $\bar{\mathbf{k}} \{W_{IJ}, S_{1IJ}, S_{2IJ}\}^T = \{p_{IJ}, \dots\}^T$ حاصل می‌گردد. به ازای هر مقدار از I و J مؤلفه‌های ماتریس ضرایب متقارن $\bar{\mathbf{k}}$ براساس مدل ایفنتیس [۱۰] به صورت زیرند:

$$\bar{k}_{11} = (\alpha_I^2 + \beta_J^2) \left[K_s D_s + h \mu l^2 (\alpha_I^2 + \beta_J^2) \right] \quad (\text{ث-۱})$$

$$\bar{k}_{12} = \frac{\alpha_I}{\beta_J} \bar{k}_{13} = \alpha_I \left[K_s D_s + h \mu l^2 (\alpha_I^2 + \beta_J^2) \right] \quad (\text{ث-۲})$$

$$\begin{aligned} \bar{k}_{22} &= K_s D_s + \left(\alpha_I^2 + \frac{1-\nu}{2} \beta_J^2 \right) D_f \\ &+ \frac{1}{12} \lambda l^2 \alpha_I^2 h \left[12 + h^2 (\alpha_I^2 + \beta_J^2) \right] \end{aligned} \quad (\text{ث-۳})$$

$$+ \frac{1}{12} \mu l^2 h \left[(\alpha_I^2 + \beta_J^2) (2\alpha_I^2 + \beta_J^2) h^2 + 12 (3\alpha_I^2 + 2\beta_J^2) \right]$$

$$\bar{k}_{23} = \frac{1}{12} \alpha_I \beta_J \left\{ 6(1+\nu) D_f + l^2 (\lambda + \mu) h \left[12 + h^2 (\alpha_I^2 + \beta_J^2) \right] \right\} \quad (\text{ث-۴})$$

[۱۰] صورت گرفت. جهت استخراج ماتریس سفتی المان میکرو ورق، انرژی کرنشی مجازی المان به دو بخش کلاسیک و گرادیانی تقسیم گردید و سهم ماتریس سفتی المان براساس هر یک از این بخش‌ها به صورت جداگانه مورد محاسبه قرار گرفت. در ادامه برای بررسی عددی رفتار میکرو ورق‌ها، سه مثال ارائه گردید که در آنها تغییر شکل میکرو ورق‌های مستطیلی با چهار لبه ساده، چهار لبه گیردار، و نیز سه لبه ساده و یک لبه آزاد مورد بررسی قرار گرفت. در ورق با تکیه گاه ساده، پاسخ به دست آمده از فرمول‌بندی المان محدود در تحقیق حاضر دقیقاً منطبق بر پاسخ‌های دقیق میکرو ورق میندیلین-رایسنر گرادیانی می‌باشد که بیانگر دقت بالای المان معرفی شده در این مقاله می‌باشد. همچنین در ورق با چهار لبه گیردار و نیز ورق با سه لبه ساده و یک لبه آزاد، از یک‌سو پاسخی همگرا به ازای کلیه‌ی پارامترهای هندسی معرفی شده به دست آمده و از سوی دیگر به ازای حالتی که ضخامت ورق بسیار بزرگتر از پارامتر مقیاس طول ماده‌ی ورق است، پاسخ‌های کلاسیک حاصل می‌گردند. به عبارت دیگر، المان میکرو ورق معرفی شده قادر به بازتولید نتایج براساس مدل‌های ورق مبتنی بر الاستیسیته‌ی کلاسیک نیز می‌باشد. نتایج عددی در هر سه مثال نشان می‌دهند هنگامی که ضخامت میکرو ورق در حدود پارامتر مقیاس طول ماده است، میکرو ورق رفتار سخت‌تری از خود بروز می‌دهد. از سوی دیگر با افزایش ضخامت ورق، این اثرات اندازه کاهش یافته و به مرور به طور کلی از بین می‌روند. در این حالت، مدل ورق میندیلین-رایسنر بر مبنای الاستیسیته‌ی کلاسیک جهت پیش‌بینی رفتار ورق کفایت می‌نماید. البته در صورت نازک بودن ورق، مدل ورق کرشلف بر مبنای الاستیسیته‌ی کلاسیک نیز قادر به پیش‌بینی دقیق رفتار ورق می‌باشد. اما در همه‌ی این حالات، المان جدید ارائه شده قادر به پیش‌بینی رفتار میکرو ورق می‌باشد.

۷- ضمیمه: حل تحلیلی میکرو ورق مستطیلی میندیلین-رایسنر گرادیانی با چهار لبه روی تکیه‌گاه‌های ساده

در مثال ۵-۱، نتایج فرمول‌بندی المان محدود این مقاله با نتایج حل تحلیلی که براساس فرمول‌های استخراج شده در مرجع [۲۲] محاسبه شده بودند مورد مقایسه قرار گرفتند. در این ضمیمه، حل مرجع [۲۲] به اختصار شرح داده می‌شود. ابتدا توجه می‌شود که معادلات دیفرانسیل حاکم بر خمش ورق میندیلین-رایسنر (مرتب اول برشی) گرادیانی و براساس مدل ایفنتیس [۱۰] به صورت زیرند (معادلات ۷۰ و ۷۱ از مرجع [۲۲]):

$$\begin{aligned} q_\beta - I_2 \ddot{\psi}_\beta - D_s K_s (\psi_\beta + w_{, \beta}) \\ + \frac{1}{2} D_f \left[(1+\nu) \psi_{\alpha, \alpha \beta} + (1-\nu) \psi_{\beta, \alpha \alpha} \right] \\ - \frac{1}{2} h \mu l^2 \left[\frac{1}{6} h^2 \left(\frac{1}{1-2\nu} \psi_{\alpha, \alpha \phi \phi \beta} + \psi_{\beta, \alpha \alpha \phi \phi} \right) \right. \\ \left. - \frac{2}{1-2\nu} \psi_{\alpha, \alpha \beta} - 4 \psi_{\beta, \alpha \alpha} - 2 w_{, \alpha \alpha \beta} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{الف})$$

بردار کرنش تعمیم یافته کلاسیک و گرادایانی ω^*, ω
زاویه دوران ψ_1, ψ_2

مراجع

- [1] K.W. McElhane, J.J. Vlassak, W.D. Nix, Determination of indenter tip geometry and indentation contact area for depth-sensing indentation experiments, *Journal of Materials Research*, 13(5) (1998) 1300-1306.
- [2] N.A. Fleck, G.M. Muller, M.F. Ashby, J.W. Hutchinson, Strain gradient plasticity: theory and experiment, *Acta Metallurgica et Materialia*, 42(2) (1994) 475-487.
- [3] W.D. Nix, H.Gao, Indentation size effects in crystalline materials: a law for strain gradient plasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(3) (1998) 411-425.
- [4] A.W. McFarland, J.S. Colton, Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 15(5) (2005) 1060-1067.
- [5] N.A. Fleck, J.W. Hutchinson, Strain gradient plasticity, *Advances in Applied Mechanics*, 33 (1997) 296-361.
- [6] M.E. Gurtin, A gradient theory of small-deformation isotropic plasticity that accounts for the Burgers vector and for dissipation due to plastic spin, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52(11) (2004) 2545-2568.
- [7] R.D. Mindlin, Micro-structure in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16(1) (1964) 51-78.
- [8] R.D. Mindlin, N.N. Eshel, On first strain-gradient theories in linear elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 4(1) (1968) 109-124.
- [9] R.D. Mindlin, Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 1(4) (1965) 417-438.
- [10] E.C. Aifantis, On the role of gradients in the localization of deformation and fracture, *International Journal of Engineering Sciences*, 30(10) (1992) 1279-1299.
- [11] A. Ashoori movasagh, M.J. Mahmoodi, The modified version of strain gradient and couple stress theories in general curvilinear coordinates, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 49 (2015) 441-454.
- [12] M. Asghari, M.T. Ahmadian, M.H. Kahrobaian, M. Rahaeifard, On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams, *Materials & Design*, 31(5) (2010) 2324-2329.
- [13] F. Rajabi, S. Ramezani, A nonlinear microbeam model

$$\bar{k}_{33} = K_s D_s + \frac{1}{2} D_f \left[2\beta_J^2 + (1-\nu)\alpha_I^2 \right] + \frac{1}{12} \lambda l^2 h \left[\beta_J^2 h^2 (\alpha_I^2 + \beta_J^2) + 12\beta_J^2 \right] + \frac{1}{12} h \mu l^2 \left[(\alpha_I^2 + \beta_J^2)(\alpha_I^2 + 2\beta_J^2) h^2 + 12(2\alpha_I^2 + 3\beta_J^2) \right] \quad (5-ت)$$

به ازای فشار ثابت و یکنواخت p که در مثال ۵-۱ مدنظر بوده است، حاصل انتگرال دوگانه در معادله (د) نشان می‌دهد به ازای جملاتی که در آن‌ها هریک از اندیس‌های I یا J زوج باشند، مقدار p_{IJ} برابر صفر شده و از آن مقادیر $\{W_{IJ}, S_{1IJ}, S_{2IJ}\}$ نیز صفر می‌گردند. لذا فقط I و J فرد قابل قبول خواهند بود. محاسبات نشان می‌دهند که در نظر گرفتن تنها ۲۵ جمله‌ی اول سری (ج) کفایت می‌نماید (یعنی $I, J = 1, 3, 5, 7, 9$). اما در این مقاله، صد جمله‌ی اول غیرصفر سری (ج) در نظر گرفته شده‌اند (یعنی $I, J = 1, 3, 5, \dots, 19$).

فهرست علائم

علائم انگلیسی

B	ماتریس کرنش-جابجایی
$\mathbf{d}, \mathbf{d}^e, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$	بردارهای جابجایی گرهی
$\bar{\mathbf{D}}^*, \bar{\mathbf{D}}$	ماتریس سفتی ورق بر مبنای اثرات کلاسیک و گرادایانی
D_f, D_s	صلبیت برشی، صلبیت خمشی
h, E	مدول یانگ، ضخامت ورق
f	بردار نیروی اسمبل شده‌ی کل سیستم
\mathbf{F}^*, \mathbf{F}	بردار نیروی برآیند تعمیم یافته کلاسیک و گرادایانی
$\mathbf{K}, \mathbf{K}^e, \mathbf{K}_1^e, \mathbf{K}_2^e$	ماتریس‌های سفتی
l	پارامتر مقیاس طول ماده
$M_{\alpha\beta}, Q_\alpha$	منتجه نیروی برشی، منتجه گشتاور
N_I	توابع درونیایی
\mathbf{u}, w	میدان خیز ورق، بردار میدان جابجایی
U	تابع انرژی کرنشی
علائم یونانی	
ξ, ε	تانسور کرنش، تانسور گرادایان کرنش
K	تانسور انحنا
$\{\lambda, \mu\}, \nu$	ضریب پواسون، ضرایب لامه
τ, σ	تانسور تنش، تانسور تنش دوپل

- Mechanics-A/Solids*, 40 (2013) 50-59.
- [22] S. Ramezani, A shear deformation micro-plate model based on the most general form of strain gradient elasticity, *International Journal of Mechanical Sciences*, 57(1) (2012) 34-42.
- [23] S. Ramezani, Nonlinear vibration analysis of micro-plates based on strain gradient elasticity theory, *Nonlinear Dynamics*, 73(3) (2013) 1399-1421.
- [24] A. Ashoori movasagh, M.J. Mahmoodi, A nonlinear thick plate formulation based on the modified strain gradient theory, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 1 (2017) 1-7.
- [25] F. Dadgar-Rad, Analysis of strain gradient Reissner-Mindlin plates using a C0 four-node quadrilateral element, *International Journal of Mechanical Sciences*, 122 (2017) 79-94.
- [26] I. Katili, A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields part II: an extended DKQ element for thick-plate bending analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36 (11) (1993) 1885-1908.
- [27] J. Dolbow, N. Moes, T. Belytschko, Modeling fracture in Mindlin-Reissner plates with the extended finite element method, *International Journal of Solids and Structures*, 37(48-50) (2000) 7161-7183.
- [28] J.N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*, CRC Press, 2007.
- [29] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, *The Finite Element Method*, Butterworth-Heinemann, 2000.
- [30] S. P. Timoshenko, S. Woinowsky-Kreiger, *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill, 1959.
- based on strain gradient elasticity theory with surface energy, *Archive of Applied Mechanics*, 82(3) (2012) 363-376.
- [14] S. Ramezani, A micro scale geometrically non-linear Timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47(8) (2012) 863-873.
- [15] K.A. Lazopoulos, On the gradient strain elasticity theory of plates, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 23(5) (2004) 843-852.
- [16] S. Papargyri-Beskou, D. Beskos, Static, stability and dynamic analysis of gradient elastic flexural Kirchhoff plates, *Archive of Applied Mechanics*, 78(8) (2008) 625-635.
- [17] K.A. Lazopoulos, On bending of strain gradient elastic micro-plates, *Mechanics Research Communications*, 36(7) (2009) 777-783.
- [18] S. Papargyri-Beskou, A.E. Giannakopoulos, D.E. Beskos, Variational analysis of gradient elastic flexural plates under static loading, *International Journal of Solids and Structures*, 47(20) (2010) 2755-2766.
- [19] M.G. Vavva, V.C. Protopappas, L.N. Gergidis, A. Charalambopoulos, D.I. Fotiadis, D. Polyzos, Velocity dispersion of guided waves propagating in a free gradient elastic plate: Application to cortical bone, *The Journal of Acoustical Society of America*, 125(5) (2009) 3414-3427.
- [20] B. Wang, S. Zhou, J. Zhao, X. Chen, A size-dependent Kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 30(4) (2011) 517-524.
- [21] A. Ashoori movasagh, M.J. Mahmoodi, A micro-scale modeling of Kirchhoff plate based on modified strain-gradient elasticity theory, *European Journal of*

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

F. Dadgar-Rad, S. R. Ashraf, A. Imani, A C¹ Finite Element Formulation for Mindlin-Reissner Microplate Model, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 51(1) (2018) 3-18.

DOI: 10.22060/mej.2017.13299.5592



