



Developing a Bidirectional Evolutionary Topology Algorithm for Continuum Structures with the Objective Functions of Stiffness and Fundamental Frequency with Geometrical Symmetry Constraint

M. Teimouri, M. Asgari*

Faculty of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

ABSTRACT: Topology optimization of structures, seeking the best distribution of mass in the design space to improve the performance and weight of a structure, is one of the most comprehensive issues raised in the field of structural optimization. In addition to the structure stiffness as the most common objective function, frequency optimization is of great importance in automotive and aerospace industries achieved by maximizing the fundamental frequency or the gap between two consecutive eigenfrequencies. The phenomenon of multiple frequencies, mesh dependency of topology responses, checkerboarding, geometric symmetry constraint, and occurrence of artificial localized vibration modes in low-density regions are the most important challenges faced by the designer in stiffness and frequency optimization problems which influence the manufacturability of the design too. In this paper, Bidirectional Evolutionary Structural Optimization (BESO) method which is a successful approach in stiffness problems is applied for a frequency and stiffness problem separately via creating a software package including a Matlab code and Abaqus FE solver linked to each other. Also, in this paper, the effect of geometric symmetry constraint is considered on resulted topologies from stiffness and frequency problems. So the BESO method is applied for modeling a 2D beam and its stiffness and frequency optimization and finally, the optimization results of both objective functions will be compared with the initial structure.

Review History:

Received: 30 Dec. 2017
Revised: 3 Mar. 2018
Accepted: 29 Apr. 2018
Available Online: 1 May. 2018

Keywords:

Topology optimization
BESO
Frequency optimization
Stiffness optimization

1- Introduction

The main objective of structural optimization is to improve the functional and technological design of load-bearing structures by considering objectives that are oftentimes contradictory, like minimizing total mass or volume, minimizing stress, maximizing stiffness, maximizing fundamental frequency, etc. Topology optimization as the most comprehensive type of structural optimization is performed in the initial phases of the design process. The purpose is to determine the best material distribution in the design space, with respect to objective functions in order to improve structural efficiency and reduce weight [1]. Various optimization methods such as homogenization [1], solid isotropic material with penalization parameter [2-6], evolutionary structural optimization [7, 8], and Level-set [9, 10] have been presented over the past decades. Evolutionary structural optimization methods (ESO), is performed for discrete values of the design variable. It can be said that only two conditions are considered for a material used in the design space. In the BESO approach, first introduced by Yang et al. in 1999 [11], unlike the original methods that gradually eliminated unnecessary elements from the finite element model, the possibility of adding deleted elements was provided at the same time too.

*Corresponding author's email: asgari@kntu.ac.ir

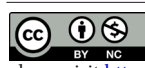
In this paper, the Bidirectional Evolutionary Structural Optimization (BESO) method is modified (MBESO) and developed for frequency problems while solving it for a stiffness problem. The proposed MBESO is applied for stiffness and frequency optimization of a 2D beam via creating a software package including a Matlab code and Abaqus FE solver linked to each other. Also, in this paper, the effect of geometric symmetry constraint is considered on resulted topologies from stiffness and frequency problems and is considered as an effective factor in the convergence of the objective function for symmetric problems. Finally, the optimization results of both objective functions will be compared with the initial structure.

2- Topology Optimization Problem Statement

Topology optimization for stiffness objective function and a given volume of material is stated as:

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} f^T u \\ \text{Minimize:} & \\ \text{Subject to:} & \\ V^* - \sum_{i=1}^N V_i x_i &= 0 \\ x_i &= \{0 \text{ or } x_{\min}, 1\} \end{aligned} \quad (1)$$

where f and u are the applied load and displacement vectors



and C is known as the mean compliance. If we assume that the design variable x_i continuously changes from 1 to x_{\min} (soft-kill approach) the sensitivity of the objective function with respect to the change in the design variable is:

$$\begin{cases} \alpha_i^e = \left(\frac{1}{2}u_i^T K_i^0 u_i\right) & \text{when } x_i = 1 \\ 0 & \text{when } x_i = x_{\min} \end{cases} \quad (2)$$

The natural frequency ω_j optimization problem can be stated as:

$$\begin{aligned} & \omega_j \\ \text{Maximize: } & V^* - \sum_{i=1}^N V_i x_i = 0 \\ \text{Subject to: } & x_i = \{x_{\min}, 1\} \end{aligned} \quad (3)$$

An alternative material interpolation scheme can be expressed as below to solve the artificial localized vibration modes in the low-density regions:

$$\begin{aligned} \rho(x_i) &= x_i \rho_e^1 \\ E(x_i) &= \left[\frac{1-x_{\min}}{1-x_{\min}^p} x_i^p - \frac{x_{\min}^p - x_{\min}}{1-x_{\min}^p} \right] E^1 \end{aligned} \quad (4)$$

From Eq. (4), the sensitivity of the objective function ω_j can be expressed as:

$$\alpha_i = \frac{1}{p} \frac{d\omega_j}{dx_i} = \begin{cases} \frac{1}{2\omega_j} u_j^T \left(K_i^1 - \frac{\omega_j^2}{p} M_i^1 \right) u_j & x_i = 1 \\ -\frac{\omega_j^2}{p} u_j^T M_i^1 u_j & x_i = x_{\min} \end{cases} \quad (5)$$

3- Sensitivity Number Improvement

In addition to the sensitivity filter scheme [12] used in the BESO method in order to solve numerical problems, based on the computer experience, averaging the elemental sensitivity number in one or two successive steps in the optimization process, improves numerical instabilities:

$$\begin{aligned} \text{First Step: } & \alpha_i = \frac{\alpha_i^k + \alpha_i^{k-1}}{2} \\ \text{Second Step: } & \hat{\alpha}_i = \frac{\hat{\alpha}_i^k + \hat{\alpha}_i^{k-1}}{2} \end{aligned} \quad (6)$$

4- Numerical Example

4- 1- Topology design of a 2 dimensional beam for frequency and stiffness

In this example, a simply supported 2 dimensional beam structure shown in Fig. 1 is considered for a prescribed volume fraction of $V_f = 50\%$. The rectangular design domain of $8\text{m} \times 1\text{m}$ is divided into 320×40 four-node plane stress elements. Young's modulus $E = 10 \text{ MPa}$, Poisson's ratio $\nu = 0.3$ and mass density $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$. A Newtonian force

is also applied at the middle of lower edge for stiffness optimization. BESO parameters are selected as: $ER = 2\%$, $AR_{\max} = 2\%$, $x_{\min} = 10^{-6}$, $r_{\min} = 0.075\text{m}$ and $p=3$.

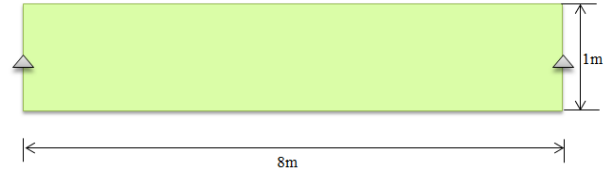


Fig. 1. Two dimensional design domain

4- 2- Geometrical symmetry constraint

Due to the fact that elemental sensitivity numbers in stiffness optimization are of energy dimension, geometrically symmetric elements will have an equal chance of elimination. In frequency problem sensitivity numbers of symmetric elements are not the same due to their angular dimension (Fig. 2).



Fig. 2. Non-symmetric first mode shape in 27th iteration

In this paper the geometric symmetry constraint has been applied at the stage of removal/addition of elements.

5- Results and Discussion

Fig. 3 illustrates the final topologies of the structure for single-objective stiffness and frequency optimization.



Fig. 3. Final topology of the 2 dimensional beam for maximum a) stiffness and b) fundamental frequency with 50% of volume fraction constraint.

The evolutionary history of the stiffness and frequency objective functions and their corresponding volume fraction is shown in Fig. 4.

6- Conclusions

In this paper, a modified BESO algorithm has been separately implemented for both stiffness and frequency objective function on a two-dimensional beam using a software package containing Matlab and Abacus linked to each other. As a result, while reducing the weight of the structure to half, the stiffness and natural frequency of the beam were maximized. It's seen that stiffness maximization leads to improvement of the frequency response which is a positive occurrence, but on the other hand, the natural frequency maximization weakens the structure stiffness. This point must be considered when both bending stiffness and

frequency are important.

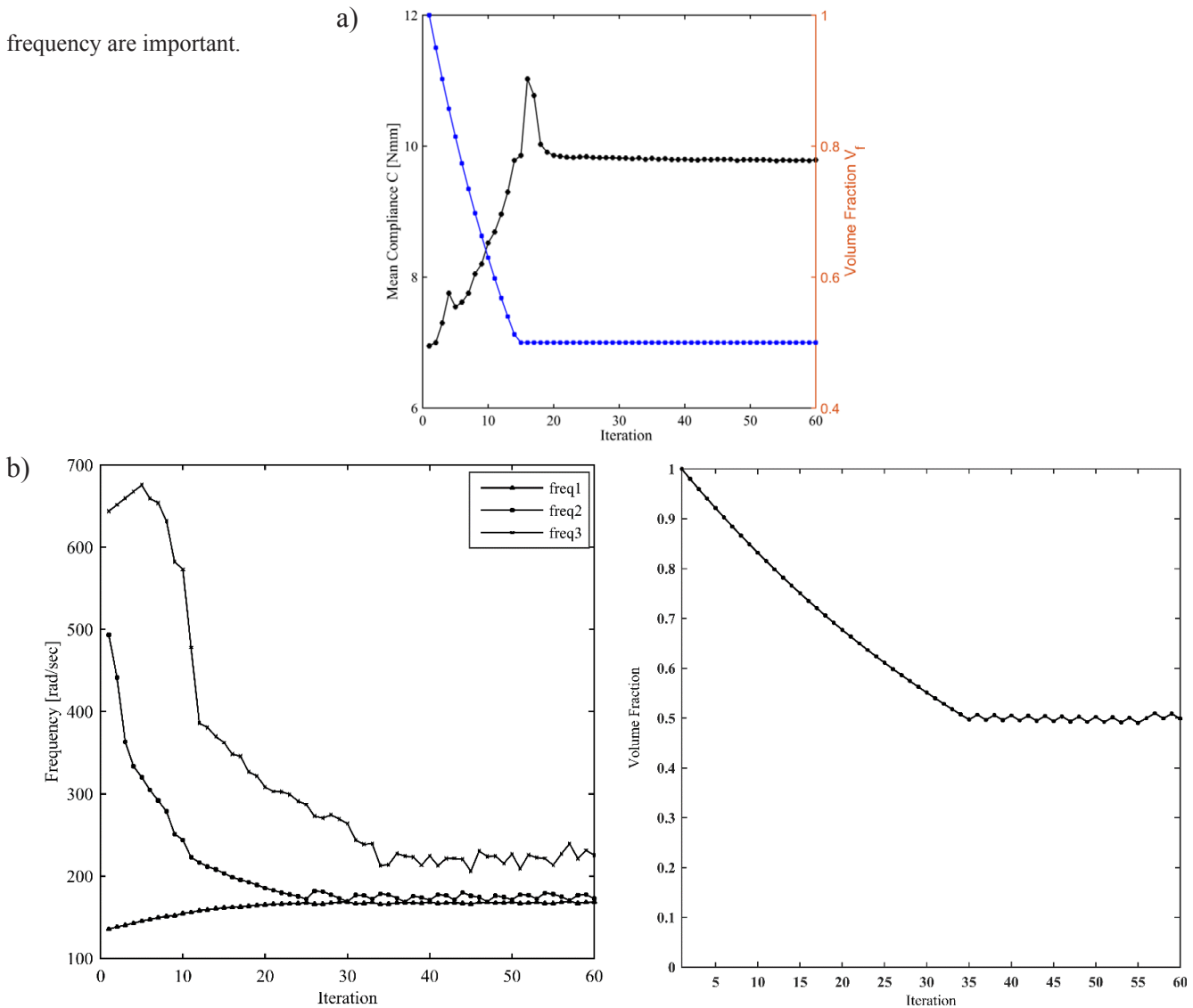


Fig. 4. Evolution history of the objective function and the volume fraction for: (a) the stiffness problem; (b) the frequency problem

References

[1] MP. Bendsoe, N. Kikuchi, Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Comput Methods Appl Mech Eng*, Vol. 71, No. 2, pp. 197–224, 1988.

[2] M. Zhou, GIN. Rozvany, The COC algorithm. Part II: Topological geometry and generalized shape optimization, *Comput Methods Appl Mech Eng*, Vol. 89, pp. 197–224, 1991.

[3] GIN. Rozvany, M. Zhou, T. Birker, Generalized shape optimization without homogenization, *Struct Optimiz*, Vol. 4, pp. 250–4, 1992.

[4] O. Sigmund, J. Petersson, Numerical instability in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima, *Struct Optimiz*, Vol. 16, pp. 68–75, 1998.

[5] A. Ritz, Sufficiency of a finite exponent in SIMP (power law) methods, *Struct Multidiscip Optimiz*, Vol. 21, pp. 159–63, 2001.

[6] MP. Bendsoe, O. Sigmund, *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2003.

[7] YM. Xie, GP. Steven, A simple evolutionary procedure for structural optimization, *Comput Struct*, Vol. 49, pp. 885–96, 1993.

[8] YM. Xie, GP. Steven, *Evolutionary Structural Optimization*, London: Springer, 1997.

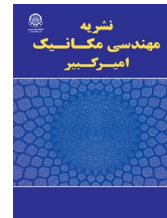
[9] JA. Sethian, A. Wiegmann, Structural boundary design via level set and immersed interface methods, *Journal of Computational Physics*, Vol. 163, pp. 489–528, 2000.

[10] MY. Wang, X. Wang, D. Guo, A level set method for structural topology optimization, *Comput Methods Appl Mech Eng*, Vol. 192, pp. 227–4, 2003.

[11] Yang, X., et al., Bidirectional evolutionary method for stiffness optimization. *AIAA journal*, 1999. 37(11).

[12] X. Huang, YM. Xie, Convergent and mesh-independent solutions for the bidirectional evolutionary structural optimization method. *Finite Elements in Analysis and*

Design, Vol.43, pp. 1039–49, 2007.



توسعه الگوریتم بهینه‌سازی توپولوژی تکاملی دوسویه برای سازه‌های پیوسته با تابع هدف سختی و فرکانس طبیعی پایه با اعمال قید تقارن هندسی

محسن تیموری، مسعود عسگری*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۶/۱۰/۰۹
بازنگری: ۱۳۹۶/۱۲/۱۲
پذیرش: ۱۳۹۷/۰۲/۰۹
ارائه آنلاین: ۱۳۹۷/۰۲/۱۱

کلمات کلیدی:

بهینه‌سازی توپولوژی
رویکرد تکاملی دوسویه
بهینه‌سازی فرکانس
بهینه‌سازی سختی

خلاصه: بهینه‌سازی توپولوژی، با هدف تعیین بهترین الگوی توزیع جرم از جامع‌ترین مسائل در زمینه بهینه‌سازی سازه‌ای است. در کنار سختی سازه‌ها به عنوان رایج‌ترین تابع هدف، بهینه‌سازی فرکانس از اهمیت بالایی در صنایع مختلف برخوردار است. که معمولاً با افزایش فرکانس طبیعی پایه یا بیشینه‌سازی اختلاف دو فرکانس طبیعی متوالی قابل دسترسی است. پدیده فرکانس‌های طبیعی چندگانه، وابستگی نتایج بهینه‌سازی توپولوژی به مش، شطرنجی شدن ناحیه طراحی، قید تقارن هندسی و رخ دادن مدهای ارتعاشی مصنوعی محلی در نواحی دارای تمرکز پایین ماده، مهم‌ترین چالش‌های پیش روی طراح در مسائل بهینه‌سازی سختی و فرکانسی هستند که قابلیت ساخت سازه را نیز تحت تأثیر قرار می‌دهند. در تحقیق حاضر، الگوریتم بهینه‌سازی تکاملی دوسویه که یکی از الگوریتم‌های نوظهور در عرصه بهینه‌سازی توپولوژی برای سختی سازه‌ها به شمار می‌رود، برای مساله سختی و فرکانسی به‌طور مجزا و با استفاده از طراحی یک بسته نرم‌افزاری شامل یک کد متلب و حل‌گر اجزاء محدود آباکوس پیاده‌سازی شده است. همچنین اثر قید تقارن هندسی روی توپولوژی سازه در مساله سختی و فرکانسی لحاظ گردیده است. در همین راستا بهینه‌سازی توپولوژی با توابع هدف سختی و فرکانسی روی یک تیر دوبعدی پیاده‌سازی شده است و در نهایت نتایج بهینه‌سازی برای هر دو تابع هدف با سازه اولیه مقایسه خواهند شد.

۱- مقدمه

هدف اصلی بهینه‌سازی سازه‌های کاهش هزینه و طراحی یک سازه مقرون به صرفه که اغلب با کاهش جرم سازه میسر می‌شود. لذا سازه‌ای که با کمترین وزن اهداف و انتظارات مهندسی را برآورد می‌کند، سازه ایده آلی به شمار می‌رود. در زمینه بهینه‌سازی سازه‌ها بسته به نوع متغیر طراحی انتخابی، بهینه‌سازی در سه شاخه بهینه‌سازی اندازه، شکل و توپولوژی صورت می‌پذیرد. در مسائل مرسوم بهینه‌سازی اندازه، هدف یافتن توزیع بهترین ضخامت یک ورق یا دستیابی به سطح مقطع بهینه اعضای یک خرپا و یا قاب‌های سازه‌ای هست. ویژگی اصلی در این نوع مسائل ثابت بودن هندسه و شکل سازه در طی روند بهینه‌سازی است. این در حالی است که در بهینه‌سازی شکل، هندسه سازه در حال تغییر است و مرزهای آن به‌عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته می‌شوند اما در فرم کلی سازه و توپولوژی آن تغییری ایجاد نمی‌شود.

در روش بهینه‌سازی توپولوژی که جامع‌ترین نوع بهینه‌سازی است، هدف تعیین توزیع جرم مشخصی از مصالح سازه‌ای در فضای طراحی است،

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: asgari@kntu.ac.ir



- الگوریتم قابل فهم و ساده برای اجرا

در کنار سختی سازه‌ها به عنوان تابع هدف، بهینه‌سازی فرکانسی از اهمیت بالایی در بسیاری از زمینه‌های مهندسی مانند صنایع هوایی و خودروسازی برخوردار است. در مقایسه با مقالات گسترده‌ای که برای بهینه‌سازی توپولوژی با تابع هدف سختی منتشر یافته است، تحقیقات کمتری روی مسائل بهینه‌سازی فرکانسی انجام گرفته است. از جمله روش‌های اتخاذ شده در تحقیقات انجام گرفته روی مسائل بهینه‌سازی فرکانسی می‌توان به رویکرد همگن‌سازی [۱۳ و ۱۴] و ماده ایزوتروپ جامد با پارامتر جریمه [۱۷-۱۵] اشاره کرد. با این حال رویکرد ماده ایزوتروپ جامد با پارامتر جریمه به دلیل رخ دادن مدهای ارتعاشی محلی تصنعی در نواحی کم چگالی، عملکرد مناسبی از خود نشان نداده است [۱۶]. الگوریتم بهینه‌سازی سازه‌ای تکاملی دوسویه که پیش‌تر در مسائل سختی با موفقیت عمل کرده بود، در سال ۱۹۹۹ توسط یانگ و همکاران [۱۸] و در ادامه نسخه بهبودیافته آن توسط ژو و ژو [۱۹] در حل مساله فرکانسی به کار گرفته شد.

به‌طور کلی توانایی بالای الگوریتم تکاملی دوسویه در حل مسائل سختی در کنار مزیت‌های نام برده در بالا، منجر به استقبال پژوهشگران عرصه بهینه‌سازی توپولوژی از آن در سال‌های اخیر شده است که در مسائل متنوع سازه‌ای با توابع هدف مختلف از آن بهره جسته‌اند و این تحقیقات منجر به بلوغ روش به عنوان یکی از رویکردهای قابل اطمینان و مقرون به صرفه در عرصه بهینه‌سازی توپولوژی گشته‌اند. به‌طور مثال بهینه‌سازی سختی سازه‌های الاستوپلاستیک [۲۰] و مواد کامپوزیتی [۲۱]، بهینه‌سازی توپولوژی مبتنی بر تنش [۲۲]، بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌های پیوسته با مرزهای یکنواخت [۲۳]، بهینه‌سازی توپولوژی هم‌زمان سازه‌های بزرگ و ریزساختارهای مواد برای فرکانس طبیعی [۲۴] و بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ای تحت قیود فرکانسی و جابه‌جایی [۲۵] از جدیدترین تحقیقات در این عرصه هستند که از رویکرد بهینه‌سازی سازه‌ای تکاملی دوسویه استفاده کرده‌اند.

در تحقیق حاضر با توجه به موفقیت الگوریتم تکاملی دوسویه در بهینه‌سازی سختی سازه‌ها، رویکرد مذکور به طور هم‌زمان برای بهینه‌سازی سختی خمشی و فرکانس طبیعی پایه پیاده‌سازی شده است و چالش‌های مرتبط با هریک از توابع هدف معرفی شده است. از بین چالش‌های مطرح شده، لزوم بررسی تقارن هندسی توپولوژی‌های حاصل شده، به‌عنوان یک عامل مؤثر در همگرایی تابع هدف و تکامل توپولوژی سازه، برای اولین بار در این تحقیق مطرح شده است. عامل نامتقارنی در مساله فرکانسی بیان شده و برای رفع آن تکنیکی کارآمد مبتنی بر برنامه‌نویسی ارائه شده است. جهت پیاده‌سازی الگوریتم از نرم‌افزار

محققین بیشتر جذب روش‌های محاسباتی سریع به واسطه کامپیوترها شده است. در همین راستا روش‌های بهینه‌سازی متعددی مانند روش همگن‌سازی [۱]، روش ماده ایزوتروپ جامد با پارامتر جریمه [۶-۲]، روش بهینه‌سازی تکاملی سازه‌ای [۷ و ۸] و تکنیک تنظیم سطوح [۹ و ۱۰] برای دستیابی به اهداف بهینه‌سازی در سازه‌های مهندسی مورداستفاده قرار گرفته‌اند. در اکثر مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای که در دهه‌های گذشته مورد بررسی قرار گرفته‌اند، افزایش سختی سازه در برابر قید حجمی، به‌طور قابل ملاحظه‌ای مورد توجه قرار گرفته است. در این تحقیقات نرمی متوسط سازه به عنوان تابع هدف و حجم یا وزن سازه به عنوان قید بهینه‌سازی در نظر گرفته شده است.

در الگوریتم‌های بهینه‌سازی سازه‌ای تکاملی، بهینه‌سازی سازه به ازای مقادیر گسسته متغیر طراحی انجام می‌پذیرد به عبارتی تنها دو حالت ماده در نظر گرفته می‌شود.

در رویکرد بهینه‌سازی سازه‌ای تکاملی دوسویه که اولین بار توسط یانگ و همکاران [۱۱] در سال ۱۹۹۹ معرفی گردید و در ادامه نسخه اصلاح شده آن توسط هانگ و ژو [۱۲] ارائه شد، برخلاف روش‌های اولیه که به‌صورت تدریجی المان‌های غیرضروری را از مدل اجزاء محدود سازه حذف می‌کردند، امکان اضافه شدن المان‌ها، هم‌زمان با حذفشان از سازه فراهم می‌شود. معیار حذف و اضافه کردن المان نیز بر اساس تأثیر المان روی تغییرات تابع هدف تعیین می‌شود. این معیار عدد حساسیت المانی نام دارد. برای المان‌های توپر (جامد) عدد حساسیت بر اساس نتایج تحلیل سازه‌ای مشخص می‌گردد. در المان‌های حفره (خالی) نیز میزان جابه‌جایی گره‌ها، با برون‌یابی جابه‌جایی گره‌های المان‌های توپر اطراف، به دست می‌آید. سپس عدد حساسیت المان‌های خالی با استفاده از مقادیر تقریبی جابه‌جایی به دست می‌آیند. در ادامه، اعداد حساسیت به‌دست‌آمده برای المان‌های پر و خالی، بر اساس مقدار عددی‌شان مرتب می‌شوند و المان‌های دارای عدد حساسیت بالا به‌صورت توپر و المان‌های دارای عدد حساسیت پایین به‌صورت حفره در نظر گرفته می‌شوند. الگوریتم تکاملی دوسویه دارای توانایی بالایی نسبت به روش‌های دیگر برای تولید توپولوژی‌هایی با کیفیت بالاست و در عین داشتن تعداد تکرارهای کمتر، پاسخ‌های حاصل از آن بسیار نزدیک به توپولوژی‌های حاصل از رویکردهای ماده ایزوتروپ جامد با پارامتر جریمه و همگن‌سازی هست. به‌طور کلی تعداد تکرارها در این رویکرد کمتر از ۱۰۰ هست. این رویکرد برای مسائل سختی دارای مزایای زیر می‌باشد:

- توپولوژی‌های کیفیت بالا

- راندمان محاسباتی بالا

کیفیت حضور آن ($0 < x_i < 1$) در صورت اتخاذ مقادیر میانی است که آن را می‌توان غلظت ماده تخصیص یافته به المان نیز تفسیر کرد. مقدار کوچک x_i (مثلاً ۰/۰۰۱) در رابطه اخیر برای المان حفره اختصاص یافته است. این نوع تعریف مساله اجازه حذف کامل از ناحیه طراحی را به هیچ المانی نمی‌دهد. چنین رویکردی در طبقه بندی روش‌های نرم‌کش یا حذف نرم قرار می‌گیرد. بایستی توجه کرد که در رابطه (۱-الف) از تعریف نرمی به جای سختی سازه استفاده شده است. در واقع با کمینه کردن نرمی سازه، سخت‌ترین سازه که هدف بهینه‌سازی توپولوژی است، به دست می‌آید.

زمانی که یک المان جامد (توپر) از سازه حذف می‌گردد (حذف سخت)، تغییر در نرمی میانگین سازه یا انرژی کرنشی کل سازه با انرژی کرنشی المانی برابر است. این تغییر در الگوریتم‌های بهینه‌سازی سازه‌ای تکاملی عدد حساسیت المانی نامیده می‌شود:

$$\alpha_i^e = \Delta C_i = \frac{1}{2} u_i^T K_i u_i \quad (2)$$

که در آن u_i بردار جابه‌جایی گره‌ای المان i ام و K_i ماتریس سختی المانی می‌باشد. چنانچه مش ریزی سازه غیریکنواخت باشد، در رابطه (۲) بایستی حجم المان‌ها نیز در نظر گرفته شوند. در چنین حالتی چگالی انرژی کرنشی المانی به صورت زیر با عدد حساسیت جایگزین می‌شود.

$$\alpha_i^e = e_i = \left(\frac{1}{2} u_i^T K_i u_i \right) / V_i \quad (3)$$

بایستی توجه داشت که در عمل با کاهش وزن سازه (حذف ماده از قسمت‌های مختلف ناحیه طراحی) به طور مسلم نرمی سازه نسبت به سازه اولیه افزایش می‌یابد و به عبارتی سختی سازه کاهش می‌یابد و در نگاه اول تناقضی بین بیان مساله و آنچه در عمل رخ می‌دهد، وجود دارد. جهت رفع این ابهام لازم به توضیح است که هدف بهینه‌سازی توپولوژی با تابع هدف سختی بیشینه (نرمی کمینه) با علم بر آنچه رخ خواهد داد، معرفی سازه‌ای است که کمترین افزایش نرمی (کاهش سختی) را با کاهش حجم سازه در هر تکرار داشته باشد که این مهم با معرفی اعداد حساسیت المانی (بر اساس مقدار نرمی هر المان) میسر می‌شود. لذا با علم بر این مورد می‌توان گفت سازه‌ای که در هر تکرار به دست می‌آید یکی از سخت‌ترین سازه‌هایی است که به ازای حجم هدف آن تکرار (حجم سازه در هر تکرار به صورت تدریجی کاهش می‌یابد) می‌توان داشت (نقطه بهینه محلی یا کلی). محاسبه میزان تغییرات تابع هدف نسبت به حذف یا حضور المان (یا کیفیت حضور المان) آنالیز حساسیت نام دارد. در رویکرد حذف نرم برخلاف حذف سخت، متغیر

متلب برای حل مساله بهینه‌سازی و از حل گر اجزاء محدود آباکوس برای آنالیز استاتیکی و مودال روی سازه استفاده شده است. با برقراری ارتباط بین این دو ابزار قدرتمند کامپیوتری، مراحل الگوریتم به طور کامل پیاده‌سازی شده و در هر تکرار بهینه‌سازی با فراخوانی اطلاعات خروجی حل گر اجزاء محدود توسط متلب و انجام آنالیز حساسیت روی المان‌ها، نسبت به حذف و اضافه نمودن آن‌ها به صورت هوشمند تصمیم‌گیری شده است.

در ادامه ابتدا جهت آشنایی با نحوه بیان مساله در الگوریتم بهینه‌سازی تکاملی سازه‌ای، مساله بهینه‌سازی توپولوژی با تابع هدف سختی که اساس توسعه روش‌های بهینه‌سازی توپولوژی است، ارائه خواهد شد. سپس الگوریتم بهینه‌سازی سازه‌ای تکاملی دوسویه اصلاح شده برای مساله فرکانسی، تفصیلاً بیان خواهد شد و در ادامه مساله تیر الاستیک دوبعدی با دو تابع هدف سختی و فرکانس طبیعی اول و قید حجمی (وزنی)، بهینه‌سازی خواهد شد و بهترین توزیع جرمی در ناحیه طراحی ارائه خواهد شد. همچنین در قالب مساله مذکور، تأثیر اعمال قید تقارن هندسی در مساله فرکانسی که به خودی خود از ویژگی تقارن در مرحله آنالیز حساسیت المانی برخوردار نیست بررسی خواهد شد و با بهره‌گیری از مزیت مرتبط ساختن نرم‌افزارهای متلب و آباکوس راهکاری برای اعمال قید تقارن هندسی در قالب مثال حل شده ارائه خواهد شد. در نهایت عملکرد فرکانسی سازه در بهینه‌سازی سختی و عملکرد سختی سازه در بهینه‌سازی فرکانسی مورد بررسی و مقایسه قرار خواهد گرفت.

۲- مسائل بهینه‌سازی توپولوژی

۲-۱- بیان مساله سختی

با در نظر گرفتن اینکه بهینه‌سازی توپولوژی به دنبال سخت‌ترین سازه به ازای حجم مشخصی از ماده است، بیان مساله سختی با قید حجمی از به صورت زیر انجام می‌گیرد:

$$C = \frac{1}{2} f^T u \quad \text{کمینه کن:} \quad (1\text{-الف})$$

$$V^* - \sum_{i=1}^N V_i x_i = 0 \quad \text{با قید حجمی:} \quad (1\text{-ب})$$

$$x_i = \{0 \text{ or } x_{\min}, 1\} \quad \text{متغیر طراحی:} \quad (1\text{-ج})$$

که در آن f و u بردار نیروی خارجی و جابه‌جایی هستند و C میانگین نرمی سازه است. V_i حجم المان i ام و V^* حجم تعریف شده نهایی سازه است. N نیز تعداد کل المان‌ها در ناحیه طراحی گسسته سازی شده است. متغیر طراحی عددی x_i بیان گر حضور (۱) یا عدم حضور المان (۰) یا

تا حد زیادی رفع می‌کند.

۲-۲- بیان مساله فرکانسی

تحلیل رفتار دینامیکی یک سازه پیوسته به روش اجزاء محدود با رابطه زیر نمایش داده می‌شود:

$$(K - \omega_j^2 M)u_j = 0 \quad (۶)$$

که در این رابطه K ماتریس سختی کلی و M ماتریس جرم کلی است. ω_j فرکانس طبیعی j ام و u_j بردار ویژه مرتبط با آن می‌باشد. فرکانس طبیعی و بردار ویژه مربوط به آن، بر اساس رابطه ریلی به هم مربوطاند:

$$\omega_j^2 = \frac{u_j^T K u_j}{u_j^T M u_j} \quad (۷)$$

در این مقاله، روش بهینه‌سازی سازه‌ای تکاملی دوسویه باهدف بیشینه کردن فرکانس طبیعی پایه در یک سازه‌ی پیوسته مدنظر است. با توجه به بیان مساله سختی ارائه‌شده در رابطه (۱)، مساله فرکانسی به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} \omega_j & \quad \text{بیشینه کن:} & \quad (۸-الف) \\ V^* - \sum_{i=1}^N V_i x_i = 0 & \quad \text{با قید حجمی:} & \quad (۸-ب) \\ x_i = \{x_{\min}, 1\} & \quad \text{متغیر طراحی:} & \quad (۸-ج) \end{aligned} \quad (۸)$$

با توجه به اینکه حذف کامل المان از روند حل منجر به ناپایداری‌های عددی شده و از طرفی مقدار بردار جابه‌جایی برای المان‌های حذف‌شده قابل دسترسی نخواهد بود استفاده از رویکرد حذف نرم در مسائل فرکانسی منطقی‌تر به نظر می‌رسد. شایان ذکر است محاسبه ماتریس‌های سختی و جرمی و مساله مقادیر ویژه مربوطه برای فرکانس‌های طبیعی در حل‌گر المان محدود انجام می‌گیرد.

۲-۳- منحنی توزیع ماده

در رویکرد حذف نرم لازم است رابطه بین متغیر طراحی المانی و خواص ماده (مدول یانگ و چگالی در اینجا) مشخص گردد. برای دستیابی به یک رابطه منطقی که توزیع ماده را مشخص کند، لازم است که متغیر طراحی یک مقدار پیوسته بین x_i و ۱ در نظر گرفته شود. یک مدل پرکاربرد برای این امر مدل توانی است که در رویکرد ماده ایزوتروپ جامد با پارامتر جریمه

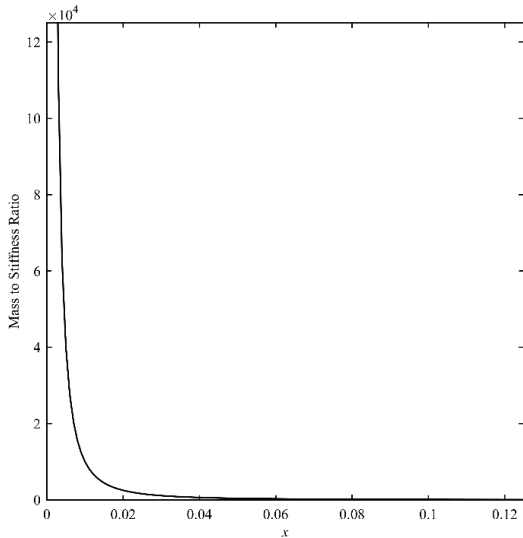
طراحی x_i به‌صورت پیوسته در نظر گرفته می‌شود و مشتق تابع هدف نسبت بدان محاسبه می‌گردد. لذا لازم است رابطه بین متغیر طراحی المانی x_i و خواص ماده (مدول یانگ و چگالی در اینجا) مشخص گردد. یک مدل پرکاربرد برای این امر مدل توانی است که در رویکرد ماده ایزوتروپ جامد با پارامتر جریمه کاربرد دارد و در آن خواص بیان‌شده برای ماده به‌صورت تابعی توانی از متغیر طراحی x_i بیان می‌شود. اعداد حساسیت المانی به‌دست‌آمده از آنالیز حساسیت در الگوریتم تکاملی دوسویه با رویکرد حذف نرم، برای تابع هدف سختی به‌صورت زیر می‌باشد [۲۶]:

$$\begin{cases} \alpha_i^e = \left(\frac{1}{2} u_i^T K_i^0 u_i\right) & \text{when } x_i = 1 \\ 0 & \text{when } x_i = x_{\min} \end{cases} \quad (۴)$$

تخصیص مقدار عددی به‌صورت گسسته (۰ و ۱) برای متغیر طراحی x_i پس از انجام آنالیز حساسیت، وجه تمایز الگوریتم‌های بهینه‌سازی سازه‌ای تکاملی با سایر رویکردها مانند رویکرد ماده ایزوتروپ جامد با پارامتر جریمه است. اعداد حساسیت به‌دست‌آمده از رابطه (۲) یا رابطه (۳) معیار حذف و اضافه نمودن المان‌ها هستند. برای کمینه کردن نرمی میانگین سازه، مؤثرترین روش، حذف المان‌هایی است که کمترین عدد حساسیت را دارند. لذا با حذف این المان‌ها افزایش نرمی در سازه کمینه خواهد شد. پیش از حذف یا اضافه نمودن المان‌ها به ناحیه طراحی، حجم هدف برای مرحله بعدی V_{k+1} بایستی مشخص شود. حجم هدف در هر تکرار تا رسیدن به قید حجمی می‌تواند افزایش یا کاهش یابد. روند تکاملی حجم طبق رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$V_{k+1} = V_k (1 \pm ER) \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (۵)$$

که در این رابطه ER نرخ تکامل حجم سازه است. با برآورده شدن قید حجمی، حجم سازه مقدار ثابت V^* خواهد بود. حجم هدف در هر تکرار تعداد المان‌هایی را که باید از سازه در آن تکرار حذف گردند مشخص می‌کند. در الگوریتم تکاملی دوسویه، برخلاف رویکردهای اولیه که تنها امکان حذف المان‌ها از سازه وجود داشت و امکان بازگشت مجددشان به ناحیه طراحی نبود، با اعمال طرح فیلتر که در مساله فرکانسی تفصیلاً بیان خواهد شد، در هر تکرار به المان‌هایی که در گام قبلی از سازه حذف شده‌اند مجدداً عدد حساسیت المانی تعلق می‌گیرد تا از شانس اضافه شدن به سازه برخوردار گردند. اعمال طرح فیلتر همچنین دو مورد از ناپایداری‌های عددی پیش‌آمده در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی یعنی وابستگی به مش و شطرنجی شدن را



شکل ۲: نسبت جرم (با پارامتر جریمه ۱) به سختی (با پارامتر جریمه ۳) در رابطه توزیع ماده (۹) به ازای $x_{\min} = 0.001$

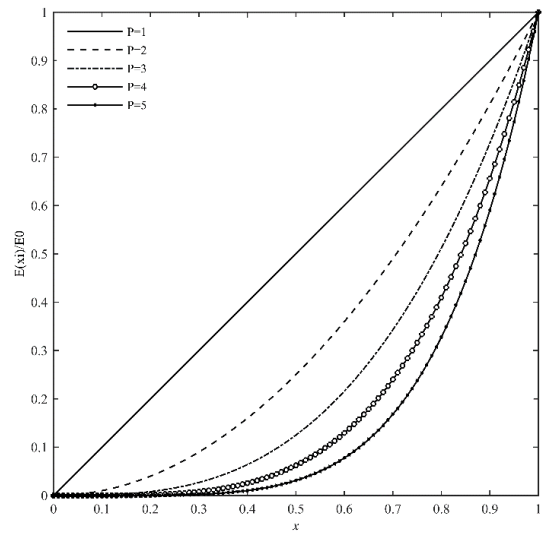
Fig. 2. Mass (p=1) to stiffness (p=3) ratio in material interpolation scheme (9), for $x_{\min}=0.001$

رابطه درون‌یابی توانی اگرچه در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی باهدف سختی عملکرد موفق خود را تضمین کرده است، با این حال امکان استفاده از رابطه توزیع ماده فوق در مسائل فرکانسی به دلیل رخ دادن مدهای ارتعاشی مصنوعی محلی در نواحی کم غلظت وجود ندارد. علت این امر در نسبت بسیار بالای جرم (با پارامتر جریمه $q=1$) به سختی (با پارامتر جریمه $p=3$) در نواحی کم غلظت (x_i های کوچک) می‌باشد و لذا این رابطه از کارایی لازم برای استفاده در مسائل بهینه‌سازی فرکانسی برخوردار نیست. در نمودار شکل ۲ این نسبت به ازای مقادیر مختلف متغیر طراحی نشان داده شده است.

در الگوریتم تکاملی دوسویه از آنجایی که متغیر طراحی به صورت گسسته به کار می‌رود و تنها دو مقدار کمینه و بیشینه در آن کاربرد دارد، رابطه (۹) بایستی به گونه‌ای اصلاح گردد که نسبت جرم به سختی به ازای مقدار کمینه متغیر طراحی ($x_i = x_{\min}$) با مقدار آن به ازای بیشینه متغیر طراحی ($X_i=1$) برابر باشد تا در نواحی کم غلظت از رخ دادن مدهای ارتعاشی مصنوعی جلوگیری به عمل آید. با در نظر گرفتن فرم توانی برای رابطه توزیع ماده و اینکه بایستی شرط فوق برای نسبت بین جرم و سختی ارضا شود، رابطه اصلاح‌شده (۱۲) به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\rho(x_i) = x_i \rho_e^1$$

$$E(x_i) = \left[\frac{1-x_{\min}}{1-x_{\min}^p} x_i^p - \frac{x_{\min}^p - x_{\min}}{1-x_{\min}^p} \right] E^1 \quad (12)$$



شکل ۱: منحنی درون‌یابی ماده به ازای مقادیر مختلف پارامتر جریمه

Fig. 1. Material interpolation curve for different values of the penalty parameter

کاربرد دارد و در آن خواص بیان‌شده برای ماده به صورت تابعی از متغیر طراحی x_i بیان می‌شود:

$$\rho(x_i) = x_i^q \rho_e^1 \quad (q \geq 1) \quad (9) \text{ (الف)}$$

$$E(x_i) = x_i^p E_e^1 \quad (p \geq 1) \quad (0 \leq x_{\min} \leq x_i \leq 1) \quad (9) \text{ (ب)}$$

که در آن ρ_e^1 و E_e^1 به ترتیب چگالی و مدول یانگ ماده به کاررفته در سازه هستند. مقادیر جریمه q و p در تحقیقات گذشته با رویکرد مذکور برای مسائل سختی، به ترتیب ۱ و ۳ در نظر گرفته شده‌اند. با استفاده از این مدل، ماتریس سختی و جرم المان را به شکل زیر می‌توان بیان کرد:

$$M_e(x_i) = x_i^q M_e^1 \quad (q \geq 1) \quad (10) \text{ (الف)}$$

$$K_e(x_i) = x_i^p K_e^1 \quad (p \geq 1) \quad (0 \leq x_{\min} \leq x_i \leq 1) \quad (10) \text{ (ب)}$$

که M_e^1 و K_e^1 به ترتیب ماتریس جرم و سختی المانی برای المان کاملاً پر با ماده به کاررفته در سازه هستند. به همین ترتیب ماتریس سختی و جرم کلی برای تحلیل مبتنی بر روش اجزاء محدود به صورت زیر محاسبه می‌گردند:

$$M = \sum_{e=1}^N x_i^q M_e^1$$

$$K = \sum_{e=1}^N x_i^p K_e^1 \quad (11)$$

شکل ۱ منحنی توزیع ماده ارائه‌شده در رابطه (۹-الف) را به ازای تغییرات متغیر طراحی نشان می‌دهد.

با آنالیز حساسیت انجام گرفته در بالا، مسأله بهینه‌سازی فرکانسی با رویکردهای متنوعی قابل حل است. با در نظر گرفتن رویکرد تکاملی دوسویه برای حل مسأله، تنها از دو مقدار گسسته x_{\min} و ۱ برای المان‌های خالی و پر می‌توان استفاده کرد. عدد حساسیت در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی در واقع اهمیت حضور یا عدم حضور المان‌ها را در رابطه با تابع هدف نشان می‌دهد. لذا عدد حساسیت مرتبط با المان‌های خالی و پر را می‌توان به‌طور صریح به صورت زیر نمایش داد:

$$\alpha_i = \frac{1}{p} \frac{d\omega_j}{dx_i} = \begin{cases} \frac{1}{2\omega_j} u_j^T \left(\frac{1-x_{\min}}{1-x_{\min}^p} K_i^1 - \frac{\omega_j^2}{p} M_i^1 \right) u_j & x_i = 1 \\ \frac{1}{2\omega_j} u_j^T \left(\frac{x_{\min}^{p-1} - x_{\min}^p}{1-x_{\min}^p} K_i^1 - \frac{\omega_j^2}{p} M_i^1 \right) u_j & x_i = x_{\min} \end{cases} \quad (15)$$

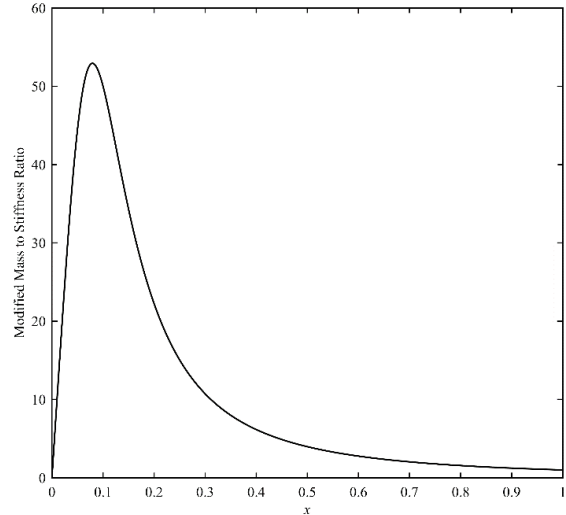
در صورتی که x_{\min} به صفر میل کند (عددی مانند 10^{-6}) عدد حساسیت المانی به صورت ساده زیر درمی‌آید:

$$\alpha_i = \frac{1}{p} \frac{d\omega_j}{dx_i} = \begin{cases} \frac{1}{2\omega_j} u_j^T \left(K_i^1 - \frac{\omega_j^2}{p} M_i^1 \right) u_j & x_i = 1 \\ -\frac{\omega_j^2}{p} u_j^T M_i^1 u_j & x_i = x_{\min} \end{cases} \quad (16)$$

بایستی توجه کرد که از مقدار صفر برای x_{\min} استفاده نمی‌شود و همچنان مقدار آن x_{\min} در نظر گرفته می‌شود. چراکه حذف کامل المان از روند حل منجر به ناپایداری‌های عددی شده و از طرفی هم مقدار بردار جابه‌جایی برای المان‌های حذف شده قابل دسترسی نخواهد بود. مقدار پارامتر جریمه $p \geq 3$ با توجه به نمودار شکل ۱ به ازای مقادیر کوچک متغیر طراحی عملکرد خوبی در مدل‌سازی نواحی کم غلظت دارد. در این تحقیق جهت فراهم آوردن امکان مقایسه نتایج با نتایج رویکرد ماده ایزوتروپ جامد [۱۷] از مقدار $p=3$ و $q=1$ استفاده شده است.

۲-۵- بهبود اعداد حساسیت

در رویکرد تکاملی دوسویه برای رفع مسأله شطرنجی شدن و وابستگی نتایج به مش که مهم‌ترین مشکلات عددی بهینه‌سازی توپولوژی هستند، از روشی برای بهبود اعداد حساسیت المانی استفاده می‌شود که طی این روش حساسیت‌های المانی به اعداد حساسیت گره‌ها α_i^n تبدیل می‌شوند و سپس مجدداً عدد حساسیت هر المان از روی اعداد اختصاص یافته به گره‌های حاضر در یک شعاع مشخص از آن المان که شعاع فیلتر نامیده می‌شود به



شکل ۳: نسبت جرم (با پارامتر جریمه ۱) به سختی (با پارامتر جریمه ۳) اصلاح شده در رابطه توزیع ماده (رابطه ۱۲) به ازای $x_{\min} = 0.001$

Fig. 3. Modified mass ($p=1$) to stiffness ($p=3$) ratio in material interpolation scheme (12), for $x_{\min}=0.001$

به سختی اصلاح شده را به ازای مقادیر مختلف متغیر طراحی ($0 < x_{\min} \leq x_i \leq 1$) نشان می‌دهد. همان‌طور که از نمودار شکل ۳ پیداست، نسبت جرم به سختی به ازای مقادیر کمینه و بیشینه متغیر طراحی یکسان است اما به ازای مقادیر میانی متغیر طراحی رابطه اصلاح شده (۱۲) توانایی رفع مشکل مدهای ارتعاشی تصنعی را ندارد. هرچند این امر در رویکرد تکاملی دوسویه مشکلی ایجاد نمی‌کند اما در صورت استفاده از رویکردهای بهینه‌سازی‌ای که متغیر طراحی به صورت پیوسته به کار می‌رود، این رابطه کارایی خود را از دست خواهد داد.

۲-۴- آنالیز حساسیت

با استفاده از رابطه (۷)، حساسیت تابع هدف ω_j نسبت به متغیر طراحی x_i به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d\omega_j}{dx_i} = \frac{1}{2\omega_j u_j^T M u_j} \left[2 \frac{\partial u_j^T}{\partial x_i} (K - \omega_j^2 M) u_j + u_j^T \left(\frac{\partial K}{\partial x_i} - \omega_j^2 \frac{\partial M}{\partial x_i} \right) u_j \right] \quad (13)$$

با استفاده از رابطه (۶) و محاسبه مشتقات ماتریس جرم و سختی نسبت به متغیر طراحی از رابطه (۱۲)، رابطه بالا به شکل زیر درمی‌آید:

$$\frac{d\omega_j}{dx_i} = \frac{1}{2\omega_j} u_j^T \left(\frac{1-x_{\min}}{1-x_{\min}^p} p x_i^{p-1} K_i^1 - \omega_j^2 M_i^1 \right) u_j \quad (14)$$

دست می‌آیند [۱۲]:

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\sum_{j=1}^M w(r_{ij}) \alpha_j^n}{\sum_{j=1}^M w(r_{ij})} \quad (17)$$

که در این رابطه r_{ij} فاصله بین مرکز المان i ام و گره j ام می‌باشد. M تعداد کل گره‌ها در سازه است و $w(r_{ij})$ وزن اختصاص یافته به گره مربوطه است که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$w(r_{ij}) = \begin{cases} r_{\min} - r_{ij} & \text{for } r_{ij} < r_{\min} \\ 0 & \text{for } r_{ij} \geq r_{\min} \end{cases} \quad (18)$$

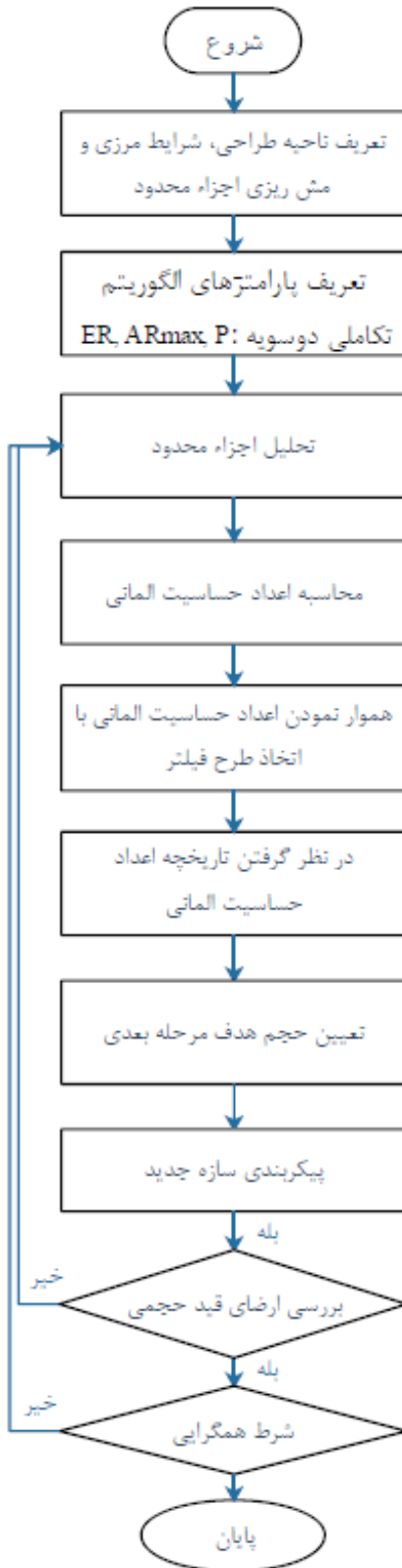
بر اساس تجربیات کامپیوتری به دست آمده، متوسط گیری از عدد حساسیت المانی در دو گام متوالی بهینه‌سازی منجر به لحاظ شدن تاریخچه عدد حساسیت المان‌ها در فرایند بهینه‌سازی شده و ناپایداری‌های عددی را بهبود می‌بخشد. در تحقیق حاضر این کار برای مسأله سختی در یک مرحله و برای مسأله فرکانسی در دو مرحله به صورت زیر انجام گرفته است که منجر به از بین رفتن بخش زیادی از ناپایداری‌های عددی شده است:

$$\alpha_i = \frac{\alpha_i^k + \alpha_i^{k-1}}{2} \quad \text{مرحله اول} \quad (19)$$

$$\bar{\alpha}_i = \frac{\hat{\alpha}_i + \bar{\alpha}_i^{k-1}}{2} \quad \text{مرحله دوم}$$

که در این رابطه k شماره تکرار بهینه‌سازی است. در مرحله نخست رابطه (۱۹) و در هر تکرار بهینه‌سازی $\alpha_i^k = \alpha_i$ برای تکرار بعدی به کار خواهد رفت. همان‌طور که از رابطه (۱۹) مشخص است، مرحله اول پیش از بهبود اعداد حساسیت المانی انجام می‌گیرد و اعداد حساسیت المانی به دست آمده از مرحله نخست با قرارگیری در رابطه (۱۷) بهبود می‌یابند و سپس در مرحله دوم رابطه (۱۹) به کار می‌رود.

شرایط بهینگی ایده آل در رویکرد تکاملی سازه‌ای دوسویه بدین صورت است که عدد حساسیت تمامی المان‌ها در صورت عدم تغییر متغیرهای طراحی یکسان باشند. بنابراین المان‌های دارای عدد حساسیت بالا بایستی x_i شان افزایش یابد و المان‌های دارای عدد حساسیت پایین x_i شان کاهش یابد. با توجه به اینکه در رویکرد تکاملی دوسویه متغیر طراحی یک کمیت گسسته است و تنها تخصیص دو مقدار ۱ و x_{\min} به آن مجاز است، شرایط بهینگی این‌گونه توصیف می‌شود که عدد حساسیت المان‌های جامد (پر) همیشه بیشتر از المان‌های نرم است. لذا طرح بروز رسانی متغیرهای طراحی در فرایند بهینه‌سازی بدین صورت پیاده می‌شود که مقدار متغیر طراحی برای



شکل ۴: فلوچارت الگوریتم تکاملی دوسویه

Fig. 4. Flowchart of the BESO method

برای سازه دوبعدی شکل ۵ مقصود بهینه‌سازی توپولوژی است. حجم هدف ۵۰ درصد حجم اولیه سازه و ابعاد تیر ۸ متر در ۱ متر در نظر گرفته شده است. برای گسسته سازی سازه نیز از المان‌های تنش صفحه‌ای چهار گره استفاده شده است. مدول یانگ سازه $E = 10 \text{ MPa}$ ، نسبت پواسون $\nu = 0.3$ و چگالی سازه $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ می‌باشد. تعداد المان‌ها نیز متناسب با نسبت ابعاد تیر 40×23 در نظر گرفته شده است. نیروی یک نیوتونی نیز به‌منظور بهینه‌سازی سختی سازه در وسط طول پایینی تیر در نظر گرفته شده است. پارامترهای مورد نیاز رویکرد تکاملی دوسویه هم بدین صورت انتخاب شده‌اند: $ER = 0.02$ ، $AR_{\max} = 0.02$ ، $x_{\min} = 10^{-6}$ ، $0.075 [m]$ ، $r_{\min} = 3$ و پارامتر جریمه $p = 3$. در رابطه با پارامترهای مذکور شایان توجه است که انتخاب مقدار مناسب برای x_{\min} و r_{\min} از اهمیت بالایی برخوردار است. مقدار x_{\min} ارتباط مستقیمی با پدیده مدهای تصنعی محلی دارد و مقدار r_{\min} تأثیر به‌سزایی در رفع مشکلات عددی مسائل بهینه‌سازی توپولوژی، یعنی وابستگی به مش و شطرنجی شدن دارد.

۳-۲- بررسی اثر قید تقارن هندسی برای طراحی توپولوژی تیر دوبعدی با دو تکیه‌گاه ساده در تابع هدف فرکانسی

با توجه به این نکته که در مساله بهینه‌سازی توپولوژی با تابع هدف سختی اعداد حساسیت المانی از جنس انرژی (همواره مقداری مثبت) هستند، المان‌های متقارن (از نظر هندسی) از عدد حساسیت یکسان برخوردار خواهند بود و شانس حذف برابر از ناحیه طراحی خواهند داشت. این امر در آنالیز حساسیت مساله فرکانسی صادق نبوده و اعداد حساسیت المانی دارای بعد زاویه‌ای و در یک بازه عددی شامل اعداد منفی و مثبت خواهند بود. متعاقباً المان‌های متقارن دارای عدد حساسیت یکسان نخواهند بود. در ادامه علت این امر بیان خواهد شد.

بردار جابه‌جایی المانی به‌عنوان پارامتر متغیر در هر تکرار بهینه‌سازی، مهم‌ترین فاکتور در محاسبه عدد حساسیت المانی در مساله فرکانسی به شمار می‌رود. در این قسمت این مهم را برای دو المان که از تقارن هندسی نسبت به هم برخوردارند بررسی خواهد شد و علت نابرابری اعداد حساسیت آن‌ها بیان خواهد شد و سپس روشی ابتکاری و مبتنی بر تکنیک برنامه‌نویسی برای اعمال تقارن هندسی که از اهمیت بالایی در دستیابی به یک توپولوژی معقول و همگرایی تابع هدف برخوردار است ارائه خواهد شد.

جهت بررسی این موضوع، دو المان متقارن نسبت به محور تقارن افقی (المان‌های شماره ۱ و ۳۲۰) و دو المان متقارن نسبت به محور تقارن

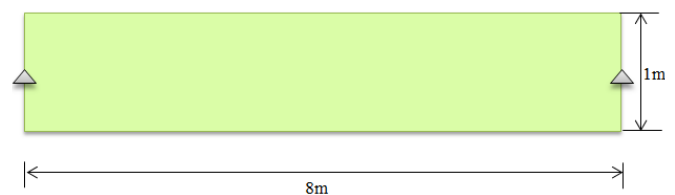
المان‌های دارای عدد حساسیت پایین از ۱ به x_{\min} و برای المان‌های دارای عدد حساسیت بالا از x_{\min} به ۱ تغییر کند. کاهش و افزایش حجم نسبی سازه (تعداد المان‌های حذف/اضافه‌شده به سازه به تعداد کل المان‌ها در هر تکرار) توسط دو پارامتر ER و AR_{\max} مشخص می‌گردد. حجم سازه در هر گام مطابق با رابطه (۵) محاسبه می‌گردد و به‌محض اینکه حجم سازه به حجم هدف طراحی برسد (ارضا شده قید طراحی)، مقدار آن ثابت نگه‌داشته می‌شود. سپس همگرایی تابع هدف بررسی می‌گردد. فرایند تکرارپذیر برای الگوریتم تکاملی دوسویه در شکل ۴ نشان داده شده است که گام‌های لازم تا رسیدن به یک توپولوژی معقول با برآورده شدن تابع هدف و ارضای قید طراحی در آن توضیح داده شده است.

۲-۶- تقارن هندسی

در اغلب مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای تقارن هندسی توپولوژی حاصله برای مسائلی که دارای تقارن در بارگذاری و هندسه اولیه هستند جزو ملزومات منطقی فرایند بهینه‌سازی است. آنچه در وهله اول برای دسترسی به یک توپولوژی متقارن از نظر هندسی لازم است وجود تقارن در اعداد حساسیت المانی به ازای المان‌های متقارن است تا در روند حذف/اضافه از شانس یکسان برخوردار باشند. در گام بعدی برای تأمین تقارن هندسی طراح بایستی نحوه حذف/اضافه شدن المان‌ها را تحت نظر بگیرد تا در هر تکرار به ازای هر المان، جفت متقارن آن المان در اولویت حذف/اضافه قرار بگیرد. در تحقیق حاضر با در نظر گرفتن قید تقارن و عدم در نظر گرفتن آن دو توپولوژی متفاوت با مشخصات متفاوت ارائه خواهد شد. در رویکرد تکاملی سازه‌ای دوسویه اصلاح‌شده برای مسائل فرکانسی قید تقارن هندسی در مرحله حذف/اضافه کردن المان‌ها اعمال شده است.

۳-۳- مثال عددی

۳-۱- طراحی توپولوژی تیر دوبعدی با دو تکیه‌گاه ساده برای تابع هدف سختی و فرکانسی
در مثال عددی این تحقیق پیشینه کردن فرکانس طبیعی پایه و سختی



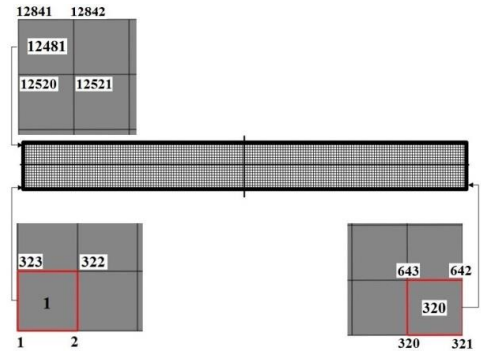
شکل ۵: ناحیه طراحی تیر دوبعدی دوسر تکیه‌گاه ساده

Fig. 5. Design domain of a 2D simply supported beam

Table 2. Displacement vector of element 2

جدول ۲: بردار جابه‌جایی المان ۲

U1	U2	شماره گره	شماره المان
-۲/۷۵۹	-۰/۳۲۴۹	۱۲۵۲۰	۱۲۴۸۱
۲/۷۵	-۰/۴۶۵۳	۱۲۵۲۱	
۲/۹۰۴	-۰/۴۷۰۲	۱۲۸۴۲	
۲/۸۶۹	-۰/۳۲	۱۲۸۴۱	



شکل ۶: سه المان انتخاب شده از گوشه‌های انتهایی هندسه که نسبت به محورهای افقی و قائم مرکزی متقارن هستند

Fig. 6. 3 selected elements from the design domain corners which are symmetric with respect to central horizontal and vertical axis

Table 3. Displacement vector of element 3

جدول ۳: بردار جابه‌جایی المان ۳

U1	U2	شماره گره	شماره المان
۲/۹۰۴	-۰/۴۷۰۲	۳۲۰	۳۲۰
۲/۸۹۶	-۰/۳۲	۳۲۱	
۲/۷۵۹	-۰/۳۲۴۹	۶۴۲	
۲/۷۵	-۰/۴۶۵۳	۶۴۱	

Table 1. Displacement vector of element 1

جدول ۱: بردار جابه‌جایی المان ۱

U1	U2	شماره گره	شماره المان
-۲/۸۹۶	-۰/۳۲	۱	۱
-۲/۹۰۴	-۰/۴۷۰۲	۲	
-۲/۷۵	-۰/۴۶۵۳	۳۲۳	
-۲/۷۵۹	-۰/۳۲۴۹	۳۲۲	

قرارگیری گره‌هایشان به صورت پادساعت گرد در محاسبات اجزاء محدود، از عدد حساسیت یکسانی برخوردار نیستند که منجر به برخورداری از شانس نابرابر در فرایند حذف و اضافه در تکرارهای بهینه‌سازی می‌شود. نکته حائز اهمیتی که در طول بهینه‌سازی و اجرای الگوریتم در متلب و آباکوس حاصل شد، مسأله تقارن هندسی و نحوه اعمال آن بود. چنانچه در شکل ۷ هم برای نمونه نشان داده شده است بدون در نظر گرفتن آن روند حذف و اضافه المان‌ها به صورت نامتقارن پیش می‌رود و در نتیجه شکل مدهای نامتقارن حاصل می‌گردد و همین امر منجر به تشدید نامتقارنی در توپولوژی‌های به دست آمده و ناپایداری‌های عددی می‌گردد. همان‌طور که قبلاً نیز گفته شد این امر ریشه در اعداد حساسیت المانی دارد که خود متأثر از بردار جابه‌جایی

عمودی (المان‌های شماره ۱ و ۱۲۴۸۱) را با شماره گره‌هایی که در شکل ۶ مشخص شده‌اند از هندسه انتخاب می‌شود.

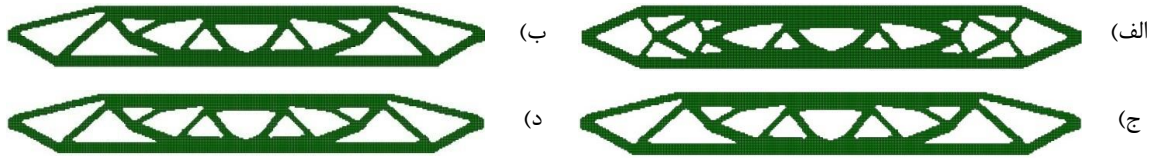
بردار جابه‌جایی مرتبط با المان‌های مذکور برای شکل مد اول به ترتیب در جداول ۱ تا ۳ با ترتیب چینش گره‌ها به صورت پادساعت گرد آورده شده است که از خروجی تکرار صفرام فرایند بهینه‌سازی توسط حل گر آباکوس استخراج شده‌اند (قبل از شروع فرایند حذف/اضافه المان‌ها).

با بررسی داده‌های جداول ۱ تا ۳ و در نظر گرفتن موقعیت هندسی گره‌ها از شکل ۶ مشخص می‌گردد که المان‌های شماره ۱ و ۳۲۰ نسبت به محور قائم و المان‌های شماره ۱ و ۱۲۴۸۱ نسبت به محور افقی در وضعیت متقارن از نظر جابه‌جایی قرار دارند. اما این المان‌ها به دلیل ترتیب



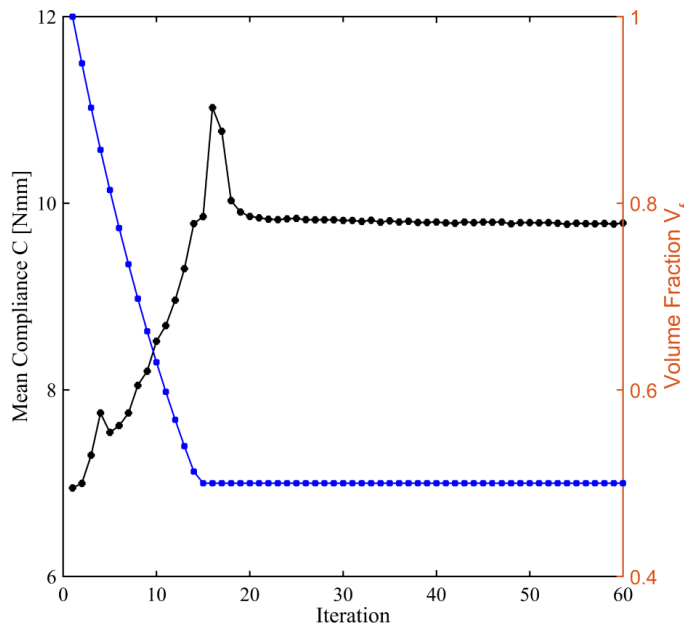
شکل ۷: شکل مد اول نامتقارن در تکرار ۲۷ ام ناشی از حذف نامتقارن المان‌ها

Fig. 7. Non-symmetric first mode shape in 27th iteration



شکل ۸: تکامل توپولوژی سازه با تابع هدف سختی و قید حجمی (۵۰ درصد در تکرار الف) (ب ۱۰ ج ۲۵ د و ۵۰) نهایی

Fig. 8. 3 selected elements from the design domain corners which are symmetric with respect to central horizontal and vertical axis



شکل ۹: تاریخچه تکامل نرمی میانگین و نسبت حجمی برای تابع هدف سختی و قید حجمی ۵۰ درصد

Fig. 9. 3 selected elements from the design domain corners which are symmetric with respect to central horizontal and vertical axis

می‌شود، شروع به کاهش حجم سازه می‌کند. با تخصیص مقادیر عددی برای پارامترهای مذکور در کد نوشته‌شده در متلب و استفاده از حل‌گر آباکوس برای آنالیز مودال و استاتیکی در هر تکرار بهینه‌سازی، المان‌هایی که بایستی از سازه حذف گردند و یا به آن اضافه گردند توسط متلب مشخص شده و به حل‌گر آباکوس معرفی می‌گردند تا در سازه اولیه اعمال شوند. در ادامه نتایج بهینه‌سازی برای هر دو تابع هدف ارائه خواهد شد.

۳-۳-۱- بهینه‌سازی سختی سازه

شکل ۸ و ۹ به ترتیب تکامل توپولوژی سازه در چهار تکرار ۱۰، ۲۵، ۵۰ و ۶۰ و تاریخچه تکاملی تابع هدف نرمی و نسبت حجمی را برای الگوریتم بهینه‌سازی سازه‌ای تکاملی دوسویه با پارامترهای معرفی شده در بالا نمایش می‌دهند. تابع هدف نرمی با ارضای قید حجمی پس از ۱۵ تکرار، به مقدار $73/9$ [N.mm] همگرا می‌شود. مقدار همگرایی نیز با استفاده از

المانی هستند. ادامه چنین روندی حتی در صورت غلبه بر ناپایداری‌های عددی تابع هدف در طول فرایند بهینه‌سازی، منجر به سازه‌ای نامتقارن در پایان خواهد شد.

راه‌حل پیشنهادی در این مقاله برای رفع مشکل تقارن پیش‌آمده در مسأله فرکانسی، محاسبه اعداد حساسیت المانی برای یک‌چهارم شکل و تخصیص نظیر به نظیر آن‌ها به المان‌های متقارن است که در پکیج نرم‌افزاری ارائه‌شده برای الگوریتم تکاملی دوسویه پیاده‌سازی شده است و توپولوژی‌ای که در ادامه ارائه خواهد شد حاصل اتخاذ این تکنیک ساده و کارگشا می‌باشد.

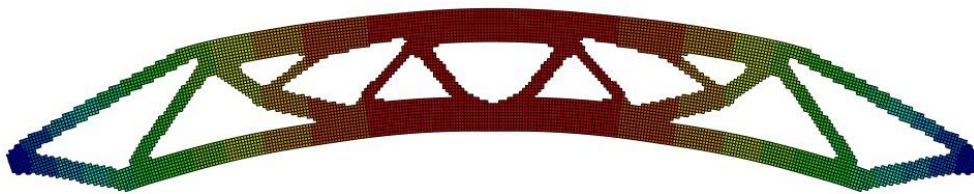
۳-۳-۲- نتایج عددی

رویکرد تکاملی سازه‌ای دوسویه با حذف/اضافه کردن المان‌ها از سازه کامل، با روندی تدریجی که توسط دو پارامتر ER و AR_{max} تعیین

Table 4. Comparison of results for the optimal and initial structure for the maximum stiffness objective function

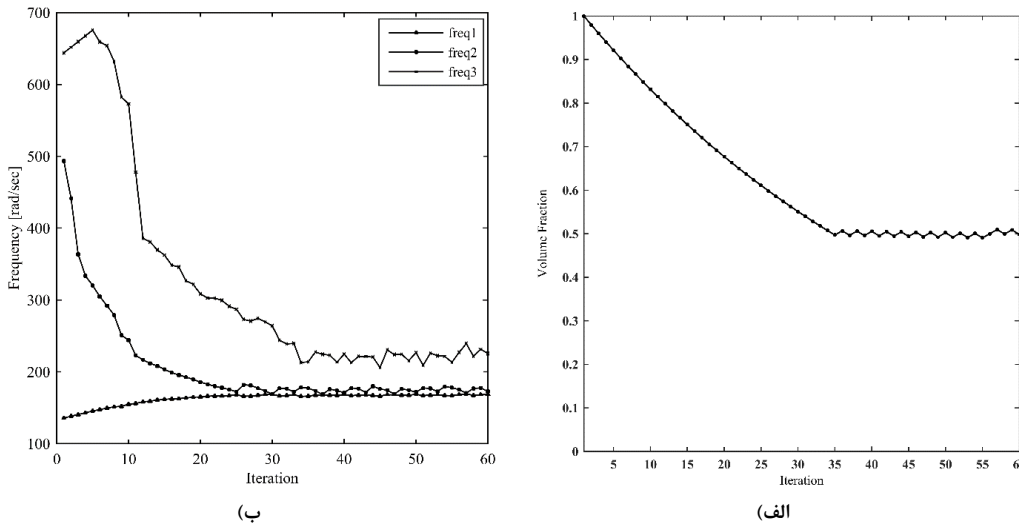
جدول ۴: مقایسه نتایج سازه بهینه شده برای تابع هدف سختی بیشینه با سازه اولیه

وزن نسبی سازه	فرکانس طبیعی اول [rad/sec]	نرمی میانگین سازه [N.mm]
۱	۱۳۵/۶۷	۶/۹۴۹
۰/۵	۱۴۷	۹/۸



شکل ۱۰: شکل مد اول سازه نهایی با فرکانس طبیعی پایه ۱۴۷ رادیان بر ثانیه

Fig. 10. First mode shape of the final structure with natural frequency of 147 rad/sec



شکل ۱۱: الف) تاریخچه تکامل نسبت حجمی ب) تاریخچه تکاملی سه فرکانس طبیعی اول

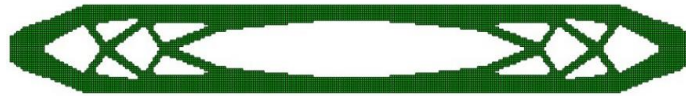
Fig. 11. a) The evolution history of the volume fraction b) Evolution histories of the first three natural frequencies

که در آن τ مقدار همگرایی (خطا)، k شماره تکرار فعلی و N یک عدد صحیح مثبت است. معمولاً $N = 5$ انتخاب می شود.

در جدول ۴ نتایج حاصل از بهینه سازی توپولوژی باهدف بیشینه کردن سختی سازه تیر دوبعدی و قید حجمی ۵۰ درصد، با سازه پیش از انجام بهینه سازی توپولوژی مقایسه شده اند. به منظور بررسی عملکرد فرکانسی سازه، پاسخ فرکانسی سازه نهایی نیز با تابع هدف سختی در شکل ۱۰ نشان

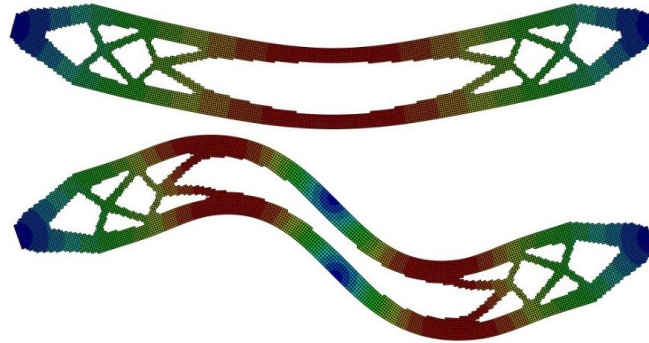
رابطه (۲۰) محاسبه گشته است. این مقدار برای تابع هدف مذکور در این تحقیق ۰/۱ درصد لحاظ شده است.

$$\tau = \frac{\sum_{i=1}^N C_{k-i+1} - \sum_{i=1}^N C_{k-N+i+1}}{\sum_{i=1}^N C_{k-i+1}} \quad (20)$$



شکل ۱۲: توپولوژی بهینه با تابع هدف فرکانس طبیعی اول بیشینه با قید حجمی ۵۰ درصد

Fig. 12. The optimal topology for first frequency objective function subjected to a volume constraint of 50%



(الف)

(ب)

شکل ۱۳: دو شکل مد اول طرح بهینه: (الف) شکل مد اول با مقدار ویژه تقریبی ۱۷۰ رادیان بر ثانیه و (ب) شکل مد دوم با مقدار ویژه تقریبی ۱۷۳ رادیان بر ثانیه

Fig. 13. Eigenmodes of the optimal design: (a) the first eigenmode with $\omega_1 = 170$ rad/s; (b) the second eigenmode with $\omega_2 = 173$ rad/s [17].



(الف)

(ب)

شکل ۱۴: نتایج حاصل از دو روش بهینه‌سازی (الف) بهینه‌سازی سازه‌ای تکاملی دوسویه با فرکانس طبیعی اول ۱۷۰ رادیان بر ثانیه و (ب) ماده ایزوتروپ جامد با پارامتر جرمه با فرکانس طبیعی اول ۱۷۴ رادیان بر ثانیه [۱۷]

Fig. 14. The results of two optimization methods: (a) $\omega_1 = 170$ rad/s with the BESO method; (b) $\omega_1 = 174$ rad/s with SIMP method [17]

احتمال جابه‌جایی شکل مدهای ارتعاشی دو فرکانس طبیعی یادشده بالاست. با بهره‌گیری از مزیت مرتبط ساختن متلب و آباکوس امکان دنبال کردن شکل مد مرتبط با هر فرکانس وجود دارد. در تحقیق حاضر یک راه‌حل ساده و کارآمد که برای رفع مشکل پیش‌آمده اتخاذ شده است متوسط گیری از اعداد حساسیت المانی مرتبط با دو فرکانس طبیعی اول و دوم در صورت رخ دادن یکی از دو حالت زیر است:

$$\alpha_i = \frac{\alpha_i^1 + \alpha_i^2}{2} \quad \text{if: } |\omega_1 - \omega_2| \leq 5 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right] \quad (21)$$

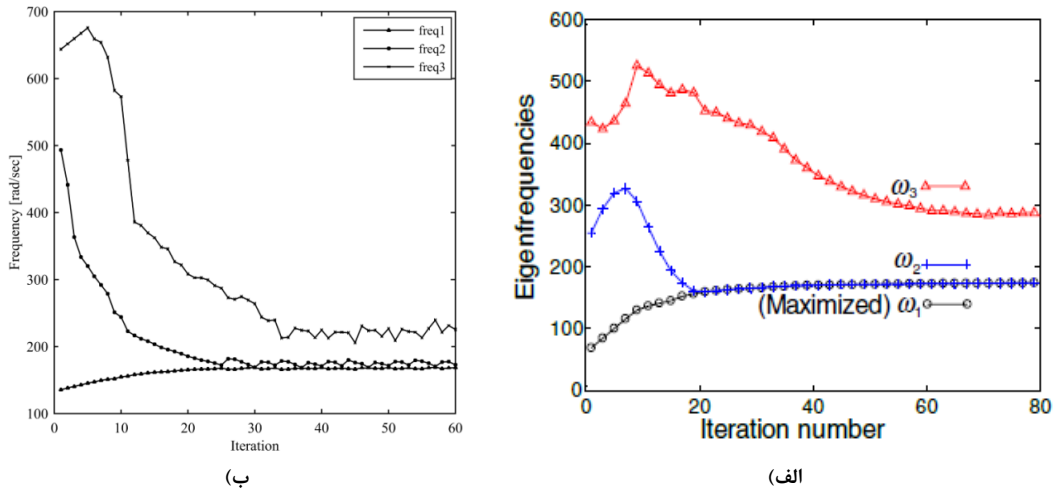
در شکل ۱۲ طرح بهینه با اعمال قید تقارن هندسی نسبت به دو محور افقی و عمودی گذرنده از مرکز شکل ۵، با فرکانس طبیعی پایه 170 [rad/sec] نشان داده شده است. دو شکل مد اول و فرکانس طبیعی شان

داده شده است.

۳-۲- بیشینه‌سازی فرکانس طبیعی اول سازه

شکل ۱۱ تاریخچه تکاملی نسبت حجمی سازه و سه فرکانس طبیعی اول را نمایش می‌دهد. حجم سازه و سه فرکانس طبیعی اول سازه به ترتیب پس از ۳۵ و ۴۰ تکرار همگرا شده‌اند.

به‌طور کلی می‌توان گفت که با کاهش حجم سازه، فرکانس طبیعی اول افزایش می‌یابد و دو فرکانس طبیعی بعدی کاهش می‌یابند. مشاهده می‌شود که پس از چندین تکرار دو فرکانس طبیعی اول و دوم به هم نزدیک می‌شوند که از آن به‌عنوان حالت دو مده یاد می‌شود. در چنین شرایطی دیگر بردارهای ویژه مرتبط با مقادیر ویژه یکسان، منحصر به فرد نیستند [۲۷] و



شکل ۱۵: تاریخچه تکامل سه فرکانس طبیعی اول برای مساله فرکانس طبیعی پایه بیشینه به روش: الف) بهینه‌سازی سازه‌ای تکاملی دوسویه ب) ماده ایزوتروپ جامد با پارامتر جریمه [۱۷]

Fig. 15. Evolution histories of the first three natural frequencies for a frequency problem with: (a) BESO method; (b) SIMP method [17]

انرژی پتانسیل و فنریت مؤثر است و در نتیجه منجر به کاهش فرکانس‌های طبیعی بالاتر می‌شود.

در جدول ۵ نتایج حاصل از بهینه‌سازی توپولوژی باهدف بیشینه کردن فرکانس طبیعی اول سازه تیر دوعدی و قید حجمی ۵۰ درصد و تقارن هندسی، با رفتار فرکانسی سازه پیش از انجام بهینه‌سازی توپولوژی مقایسه شده‌اند. با ارائه رویکرد بهینه‌سازی دوسویه اصلاح‌شده، فرکانس طبیعی اول سازه ۲۵ درصد افزایش یافته و در عین حال جرم آن نصف شده است. شایان توجه است که برخلاف تابع هدف سختی که منجر به بهبود عملکرد فرکانسی سازه شد، در تابع هدف فرکانسی، نرمی سازه به میزان قابل ملاحظه‌ای افزایش یافته است که نقطه ضعف بزرگی در بهینه‌سازی توپولوژی با تابع تک هدفه فرکانسی به‌خصوص در سازه‌های پل مانند به شمار می‌رود.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌های پیوسته به‌عنوان رویکردی مهم در عرصه بهینه‌سازی سازه‌ای جهت دسترسی به سازه‌ای با وزن کمتر و عملکرد مکانیکی بهتر معرفی گردید. مسأله سختی به‌عنوان رایج‌ترین مسأله بهینه‌سازی توپولوژی بیان شد. در ادامه الگوریتم تکاملی دوسویه به‌عنوان رویکردی جدید و موفق در عرصه بهینه‌سازی توپولوژی، برای مسأله فرکانسی بیان گردید. چالش‌های مختلف و رایج مسائل بهینه‌سازی توپولوژی معرفی گردید. همچنین اهمیت تقارن هندسی و لزوم پیاده‌سازی

در شکل ۱۳ نشان داده شده است.

رفتار فرکانسی سازه و توپولوژی نهایی آن با نتایج دو و الهف [۱۷] که از روش ماده ایزوتروپ جامد با پارامتر جریمه در یک سازه با شرایط هندسی و مرزی مشابه بهره‌جسته‌اند مطابقت دارد که صحت و اعتبار رویکرد اتخاذشده و عملکرد درست بسته نرم‌افزاری طراحی‌شده را نشان می‌دهد (شکل ۱۴ و ۱۵).

با توجه به این نکته که در مد اول قسمت مرکزی سازه در جرم آن نقش بیشتری نسبت به فنریت دارد، با کاهش آن جرم معادل سازه کاهش پیدا کرده و منجر به افزایش فرکانس طبیعی اول شده است. ولی در مدهای بالاتر قسمت مرکزی بیشتر از اینکه در انرژی جنبشی و جرم معادل مؤثر باشد، در

Table 5. Comparison of results for the optimal and initial structure for the maximum natural frequency objective function

جدول ۵: مقایسه نتایج سازه بهینه‌شده برای تابع هدف فرکانس پایه بیشینه با سازه اولیه

وزن نسبی سازه	فرکانس طبیعی دوم [rad/sec]	فرکانس طبیعی اول [rad/sec]	نرمی میانگین سازه [N.mm]	سازه اولیه
۱	۴۹۳/۳۶	۱۳۵/۶۷	۶/۹۴۹	سازه بهینه‌شده با روش
۰/۵	۱۷۲/۷۳	۱۶۸/۴	۳۰	بهینه‌سازی سازه‌ای تکاملی دوسویه

منابع

- آن برای مسائلی که از تقارن در هندسه و شرایط مرزی برخوردارند، برای اولین بار مطرح شد و با جزئیات کاملی علت رخداد و تاثیرشان روی توپولوژی در مسائل فرکانسی و علت عدم رخدادشان در مساله سختی بحث شد و راه حلی مبتنی بر تکنیک برنامه‌نویسی برای رفع این مشکل ارائه گردید. نهایتاً الگوریتم تکاملی دوسویه اصلاح‌شده روی مساله تیر دوبعدی دو سر تکیه‌گاه ساده، برای هر دو تابع هدف سختی و فرکانسی به صورت مجزا و با استفاده از بسته نرم‌افزاری متلب و آباکوس پیاده‌سازی گردید و مساله به صورت کاملاً پایدار به سمت تابع هدف بهینه همگرا گردید. نتایج به دست آمده برای مساله فرکانسی در این مقاله با نتایج دو و الهف [۱۷] که از رویکرد ماده ایزوتروپ جامد با پارامتر جریمه برای بهینه‌سازی فرکانسی مساله با هندسه مشابه استفاده کرده‌اند مطابقت دارد که حاکی از دقت خوب الگوریتم اصلاح‌شده می‌باشد. با پیاده‌سازی رویکرد بهینه‌سازی سازه‌ای تکاملی دوسویه، ضمن کاهش وزن سازه اولیه به نصف، سختی و فرکانس طبیعی پایه آن بیشینه گردید. نتیجه مهمی که از این مقایسه حاصل گشته به این شرح می‌باشد که به کارگیری تابع هدف سختی منجر به بهبود عملکرد فرکانسی شده است که یک اتفاق مثبت است، اما بهینه‌سازی فرکانس طبیعی پایه منجر به تضعیف سختی سازه به مقدار قابل توجهی شده است. این رخداد در طراحی سازه‌هایی که در آن‌ها توامان دو پارامتر سختی خمشی و فرکانسی مهم است، بایستی حتماً لحاظ شود و صرف یک بهینه‌سازی تک هدفه چندان منطقی به نظر نمی‌رسد. با این تفاسیر لزوم پیاده‌سازی بهینه‌سازی چند هدفه در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی امری ضروری به نظر می‌رسد که در تحقیقات پیشین بسیار کم بدان پرداخته شده است.
- ۵- فهرست علائم**
- علائم انگلیسی**
- | | |
|----------|--|
| ER, AR | نسبت تکاملی، نسبت افزایشی |
| E | مدول الاستیسیته، N/m^2 |
| KE, ME | ماتریس سختی المانی (N/m)، ماتریس جرم المانی (kg) |
| u_i | بردار جابه‌جایی المانی |
| x | متغیر طراحی المانی |
- علائم یونانی**
- | | |
|----------------|-----------------------------------|
| ρ | چگالی، kg/m^3 |
| ω_j | فرکانس طبیعی j ام (rad/sec) |
| α | عدد حساسیت المانی |
| $\bar{\alpha}$ | عدد حساسیت المانی اصلاح‌شده |
- [1] Bendsøe, M.P. and N. Kikuchi, Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1988. 71(2): p. 197-224.
- [2] Zhou, M. and G. Rozvany, The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1991. 89(1-3): p. 309-336.
- [3] Rozvany, G.I., M. Zhou, and T. Birker, Generalized shape optimization without homogenization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1992. 4(3): p. 250-252.
- [4] Sigmund, O. and J. Petersson, Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1998. 16(1): p. 68-75.
- [5] Rietz, A., Sufficiency of a finite exponent in SIMP (power law) methods. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001. 21(2): p. 159-163.
- [6] Bendsoe, M.P. and O. Sigmund, *Topology optimization : theory, methods, and applications*. 2nd ed. 2003, Berlin ; New York: Springer. xiv, 370 p.
- [7] Xie, Y.M. and G.P. Steven, A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers & structures*, 1993. 49(5): p. 885-896.
- [8] Xie, Y.M. and G.P. Steven, Basic evolutionary structural optimization, in *Evolutionary structural optimization*. 1997, Springer. p. 12-29.
- [9] Sethian, J.A. and A. Wiegmann, Structural boundary design via level set and immersed interface methods. *Journal of computational physics*, 2000. 163(2): p. 489-528.
- [10] Wang, M.Y., X. Wang, and D. Guo, A level set method

- evolutionary topology optimization method for frequencies. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2010. 10(01): p. 55-75.
- [20] Xia, L., F. Fritzen, and P. Breitkopf, Evolutionary topology optimization of elastoplastic structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2017. 55(2): p. 569-581.
- [21] Sun, X.F., et al., Topology Optimization of Composite Structure Using Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization Method. *Procedia Engineering*, 2011. 14: p. 2980-2985.
- [22] Xia, L., et al., Stress-based topology optimization using bi-directional evolutionary structural optimization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018. 333: p. 356-370.
- [23] Huang, X. and Y. Xie, Evolutionary topology optimization of continuum structures with an additional displacement constraint. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010. 40(1-6): p. 409.
- [24] Liu, Q., R. Chan, and X. Huang, Concurrent topology optimization of macrostructures and material microstructures for natural frequency. *Materials & Design*, 2016. 106: p. 380-390.
- [25] Zuo, Z.H., Y.M. Xie, and X. Huang, Evolutionary topology optimization of structures with multiple displacement and frequency constraints. *Advances in Structural Engineering*, 2012. 15(2): p. 359-372.
- [26] Huang, X. and M. Xie, Evolutionary topology optimization of continuum structures: methods and applications. 2010: John Wiley & Sons.
- [27] Seyranian, A.P., E. Lund, and N. Olhoff, Multiple eigenvalues in structural optimization problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1994. 8(4): p. 207-227.
- for structural topology optimization. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2003. 192(1): p. 227-246.
- [11] Yang, X., et al., Bidirectional evolutionary method for stiffness optimization. *AIAA journal*, 1999. 37(11).
- [12] Huang, X. and Y. Xie, Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2007. 43(14): p. 1039-1049.
- [13] Hagiwara, I., Eigenfrequency maximization of plates by optimization of topology using homogenization and mathematical programming. *JSME international journal. Ser. C, Dynamics, control, robotics, design and manufacturing*, 1994. 37(4): p. 667-677.
- [14] Ma, Z.-D., N. Kikuchi, and H.-C. Cheng, Topological design for vibrating structures. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1995. 121(1-4): p. 259-280.
- [15] Kosaka, I. and C.C. Swan, A symmetry reduction method for continuum structural topology optimization. *Computers & Structures*, 1999. 70(1): p. 47-61.
- [16] Pedersen, N.L., Maximization of eigenvalues using topology optimization. *Structural and multidisciplinary optimization*, 2000. 20(1): p. 2-11.
- [17] Du, J. and N. Olhoff, Topological design of freely vibrating continuum structures for maximum values of simple and multiple eigenfrequencies and frequency gaps. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007. 34(2): p. 91-110.
- [18] Yang, X., et al., Topology optimization for frequencies using an evolutionary method. *Journal of Structural Engineering*, 1999. 125(12): p. 1432-1438.
- [19] Zuo, Z., Y. Xie, and X. Huang, An improved bi-directional

