



Free and Forced Vibration Analysis of Kelvin-Voigt Viscoelastic Nanoplate by Using Modified Couple Stress Theory

S. Salehi¹, O. Rahmani^{1*}, A. Hoseini²

¹ Mechanical Engineering Department, University of Zanjan, Zanjan, Iran

² Department of Mechanical Engineering and Industrial Engineering, Buein Zahra Technical University, Qazvin, Iran

ABSTRACT: With the development of nanotechnology in the industrial applications and engineering sciences, analysis of the behavior of nanostructures has become important. In recent years, expansion and using of non-classical theories to predict the behavior of nanostructure materials has attracted the attention of researchers. In this paper, free and forced vibration of viscoelastic nanoplate on the Pasternak viscoelastic foundation will be studied. In this study, due to the inability of classical theories to describe the behavior of nano-dimensional structures, the non-classical modified couple stress theory has been used for express the size effect. By using the Galerkin semi-analytic method, free vibrations analysis for six different boundary conditions are discussed; also, forced vibration of rectangular viscoelastic nanoplate is studied by using the Navier method for simply supported boundary condition. Kelvin-Voigt model is used to simulate the behavior of viscoelastic nanoplate. In the results analysis section, the effect of small-scale factor, structural viscoelastic coefficient, linear elastic coefficient of foundation, external damping coefficient of foundation and shear coefficient of foundation on the natural frequency, maximum dynamic deflection and resonance phenomenon are presented.

Review History:

Received: 2 Feb. 2018

Revised: 30 Mar. 2018

Accepted: 29 Apr. 2018

Available Online: 28 May. 2018

Keywords:

Forced vibration

Resonance phenomenon

Modified couple stress theory

Semi analytical Galerkin method

1- Introduction

With the advancement of nanoscience, one of the main issues of researchers in recent years is the analysis and recognition of the behavior of small-scale structures. Due to the huge cost and the need for exact equipment for laboratory and experimental work on nano dimensions, using of non-classical theories has increased. Nanoplates are a subdivision of microstructures that improve their electrical properties, strength and flexibility by their atomic makeup. In this paper, by using modified stress coupling theory, free and forced vibration analysis of Kelvin-Voigt viscoelastic nanoplate on the Pasternak foundation has been studied and influence internal viscoelastic coefficient, elastic coefficient, shear foundation coefficient and small scale factor on natural frequency, maximum amplitude deflection and resonance phenomenon have been investigated.

Simsek [2] analytical and numerical solution procedures are proposed for vibration of an embedded microbeam under the action of a moving microparticle based on the Modified Couple Stress Theory (MCST) within the framework of Euler–Bernoulli beam theory. In this paper influences of the material length scale parameter, the Poisson's ratio, the velocity of the microparticle and the elastic medium constant as well as the solution procedures on the dynamic responses of the microbeam. In a study by Ma et al. [3] a non-classical Mindlin plate model is developed using a modified couple

stress theory. The equations of motion and boundary conditions are obtained simultaneously through a variational formulation based on Hamilton's principle. The new model contains a material length scale parameter and can capture the size effect, unlike the classical Mindlin plate theory.

2- Methodology

In Fig. 1, a schematic of the problem is shown.

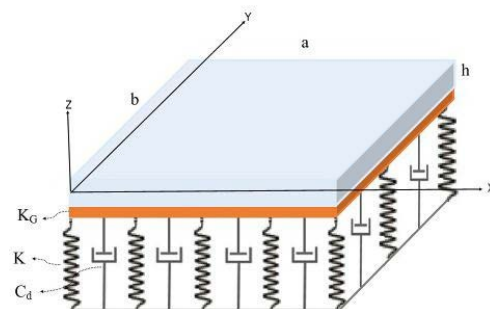


Fig. 1. General schematic of the problem

Using the energy method and Eqs. (1) to (4), equations of motion for different boundary conditions were derived. In this paper, free vibrations for the six different boundary condition and in the case of forced vibration simply support boundary condition have been studied.

*Corresponding author's email: omid.rahmani@znu.ac.ir



$$\sigma = (1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}) E \varepsilon \quad (1)$$

$$U = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) \quad (2)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{4} (e_{ipq} \varepsilon_{qp,j} + e_{j pq} \varepsilon_{qi,p}) \quad (3)$$

$$m_{ij} = 2\mu l^2 \chi_{ij} \quad (4)$$

For solving equations in free and forced vibration, semi-analytical method and Navier solution have been used, respectively.

3- Discussion and Results

In Fig. 2, the effect of small-scale factor on natural frequency is shown. The frequency ratio obtained from the modified couple stress theory to the Classical Theory (CT) frequency according to the small-scale factor is presented.

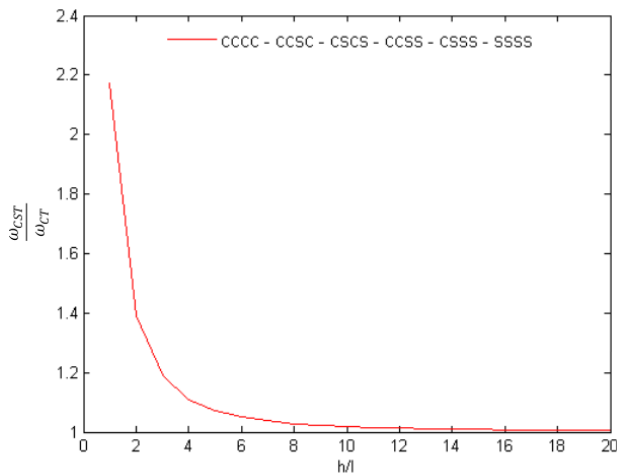


Fig. 2. Frequency ratio of MCST to CT frequency

According to Fig. 2 frequency derived from two classical and modified couple stress theory are near to each other for nanoplates that have a large thickness, while, for small thickness nanoplate, frequencies obtained from the two theories do not coincide and differ greatly. Considering external foundation damper and internal coefficient viscoelasticity for nanoplate leads to complex natural frequency, also, by increasing the values of these parameters, frequency ratio increases.

Considering length scale parameter leads to decrease the dynamic deflection and increase natural frequency, also creates resonant phenomenon at higher frequencies. Existence of linear elastic and shear coefficients of foundation increases the natural frequency and decrease maximum dynamic deflection.

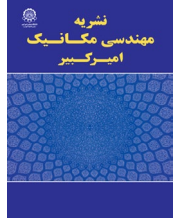
4- Conclusions

According to the results obtained in this paper, considering the small scale factor, elastic coefficient and shear coefficient of the foundation increase the natural frequency of nanoplate. Furthermore external damper coefficient of foundation and

internal viscoelasticity coefficient of the nanoplate creates complex natural frequency.

References

- [1] S. Pradhan, J. Phadikar, Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates, *Journal of Sound and Vibration*, 325(1-2) (2009) 206-223.
- [2] M. Şimşek, Dynamic analysis of an embedded microbeam carrying a moving microparticle based on the modified couple stress theory, *International Journal of Engineering Science*, 48(12) (2010) 1721-1732.
- [3] H. Ma, X.-L. Gao, J. Reddy, A non-classical Mindlin plate model based on a modified couple stress theory, *Acta mechanica*, 220(1-4) (2011) 217-235.
- [4] S. Poursmaeeli, S. Fazelzadeh, E. Ghavanloo, Exact solution for nonlocal vibration of double-orthotropic nanoplates embedded in elastic medium, *Composites Part B: Engineering*, 43(8) (2012) 3384-3390.
- [5] L.-L. Ke, Y.-S. Wang, J. Yang, S. Kitipornchai, Free vibration of size-dependent Mindlin microplates based on the modified couple stress theory, *Journal of Sound and Vibration*, 331(1) (2012) 94-106.
- [6] A.G. Arani, R. Kolahchi, H. Vossough, Buckling analysis and smart control of SLGS using elastically coupled PVDF nanoplate based on the nonlocal Mindlin plate theory, *Physica B: Condensed Matter*, 407(22) (2012) 4458-4465.
- [7] A. Bakhsheshy, K.Khorshidi, Free vibration of functionally graded rectangular nanoplates in thermal environment based on the modified couple stress theory, *Modares Mechanical Engineering*, 14(15)(2015),323-330. (In Persian)
- [8] S.OmidDezyani, R. A. Jafari-Talookolaei, M. Abedi, H. Afrasiab, Vibration analysis of a microplate in contact with a fluid based on the modified couple stress theory, *Modares Mechanical Engineering*, 17(2),(2017),47-57. (In Persian)
- [9] G. A.Varzandian, S. Ziaei. Analytical Solution of Non-Linear Free Vibration of Thin Rectangular Plates with Various Boundary Conditions Based on Non-Local Theory. *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 48(4),(2017), 331-346.(In Persian)
- [10] M. Ghadiri, H. Safarpour, Free Vibration Analysis of a Functionally Graded Cylindrical Nanoshell Surrounded by Elastic Foundation Based on the Modified Couple Stress Theory, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 49(4) (2018) 721-730.(In Persian)
- [11] R. Ansari Khalkhali, A. Norouzzadeh, R. Gholami, Forced vibration analysis of conveying fluid carbon nanotube resting on elastic foundation based on modified couple stress theory, *Modares Mechanical Engineering*, 15(3), (2015),27-34. (In Persian)
- [12] B. Akgöz, Ö. Civalek, Free vibration analysis for single-layered graphene sheets in an elastic matrix via modified couple stress theory, in: *Materials & Design*, 2012, pp. 164-171.
- [13] T. Aksencer, M. Aydogdu, Forced transverse vibration of nanoplates using nonlocal elasticity, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 44(7-8) (2012) 1752-1759.



تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری نانورق مستطیلی ویسکوالاستیک کلون-ویت با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده

صابر صالحی^۱، امید رحمانی^{۱*}، سیدامیرحسین حسینی^۲

^۱ آزمایشگاه سازه‌های هوشمند و مواد پیشرفته، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران.
^۲ دانشکده مهندسی مکانیک و صنایع، دانشگاه فنی و مهندسی بوئین زهرا، قزوین، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۶/۱۱/۱۳
بازنگری: ۱۳۹۷/۰۱/۱۰
پذیرش: ۱۳۹۷/۰۲/۰۹
ارائه آنلاین: ۱۳۹۷/۰۳/۰۷

کلمات کلیدی:

ارتعاشات اجباری
پدیده تشدید
تئوری کوپل تنش اصلاح شده
مدل کلون-ویت
روش نیمه تحلیلی گالرکین

خلاصه: در این مقاله ارتعاشات آزاد و اجباری نانورق ویسکوالاستیک واقع بر بستر ویسکوالاستیک پاسترناک، مورد بررسی قرار خواهد گرفت. با توجه به عدم توانایی تئوری‌های کلاسیک الاستیسته در توصیف سازه‌هایی با ابعاد نانو، در این پژوهش از تئوری غیرکلاسیک کوپل تنش اصلاح شده برای بیان اثر اندازه بهره گرفته شده است. در این پژوهش با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی گالرکین، ارتعاشات آزاد نانورق برای شش شرط تکیه‌گاهی متفاوت، بحث شده است؛ همچنین ارتعاشات اجباری نانورق مستطیلی ویسکوالاستیک با استفاده از روش ناویر برای شرط تکیه‌گاهی ساده مورد مطالعه واقع می‌شود. در بخش تحلیل نتایج تاثیر پارامترهایی مانند ضریب ویسکوالاستیک سازه‌ای نانورق، پارامتر مقیاس طول ماده و ضریب الاستیک خطی بستر بر روی فرکانس طبیعی، ماکزیمم خیز دینامیکی، اختلاف فاز و پدیده تشدید ارائه شده است. با توجه به نتایج حاصل شده مشخص شد که در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طول ماده منجر به افزایش سختی و فرکانس طبیعی نانورق می‌شود؛ همچنین در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طول ماده منجر به رخ دادن پدیده تشدید در فرکانس‌های تحریک بالاتر و کاهش اختلاف فاز خواهد شد. وجود ضرایب الاستیک خطی و برشی بستر، منجر به رخ دادن پدیده تشدید در فرکانس‌های تحریک پایین می‌شود.

۱- مقدمه

با پیشرفت فناوری نانو در سال‌های اخیر و استفاده گسترده از ساختارهایی با ابعاد ریز در کاربردهای مهندسی، به‌ویژه در حوزه‌ی رشته‌های مهندسی مکانیک و برق، تحلیل و شناخت رفتار ریزساختارها^۱ به یکی از موضوعات اصلی پژوهشگران این حوزه تبدیل شده است. با توجه به هزینه بسیار زیاد و نیاز به تجهیزات دقیق برای انجام کارهای آزمایشگاهی و تجربی در ابعاد نانو، گسترش و استفاده از تئوری‌های غیرکلاسیک برای پیش‌بینی رفتار ریزساختارها در سال‌های اخیر مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. نانورق‌ها زیر شاخه‌ای از ریزساختارها به شمار می‌روند که به علت آرایش اتمی مخصوص به خود باعث بهبود خواص الکتریکی، استحکام و افزایش انعطاف‌پذیری می‌شوند؛ از نانورق‌ها در خازن‌ها، سوئیچ‌های قطع و وصل جریان برق، سنسورهای الکتریکی و سیستم‌های الکترومکانیکی در ابعاد میکرو و نانو استفاده می‌شود [۱]؛ نانورق‌های ویسکوالاستیک در جهت کنترل رفتار

ارتعاشاتی سازه‌ها می‌توانند مورد استفاده قرار بگیرند. بستر ویسکوالاستیک پاسترناک در جهت کنترل رفتار سازه، یکی از کامل‌ترین و کاربردی‌ترین بسترها می‌باشد زیرا شامل بستر وینکلر در جهت کنترل نیروهای عمودی، بستر پاسترناک در جهت کنترل نیروهای برشی و ضریب ویسکوز خارجی در جهت جذب انرژی سیستم و کنترل آن را شامل می‌شود.

در این پژوهش، ارتعاشات آزاد و اجباری نانورق ویسکوالاستیک کلون-ویت واقع بر بسترویسکوالاستیک پاسترناک با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده مورد بررسی قرار گرفته است. با استفاده از حل معادلات حاصل شده، میزان تاثیرگذاری هر یک از پارامترهای ویسکوالاستیک سازه‌ای نانورق، ضرایب بستر (الاستیک خطی، دمپرویسکوز و ضریب برشی پاسترناک) و پارامتر مقیاس طول ماده بر روی فرکانس طبیعی، ماکزیمم خیز دینامیکی، اختلاف فاز و پدیده تشدید مشخص شده است.

شیمشک [۲] با استفاده از تئوری تیر اوپلر-برنولی و تئوری کوپل تنش اصلاح شده به تحلیل دینامیکی میکروتیر حمل‌کننده بار متحرک با سطح مقطع دایروی واقع بر بستر الاستیک اهتمام ورزید. با توجه به نتایج حاصل شده

1 MEMS (Micro Electro Mechanical Systems) / NEMS (Nano Electromechanical Systems)

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات:omid.rahmani@znu.ac.ir



در این پژوهش با افزایش نسبت قطر به پارامتر مقیاس طول ماده، خیز دینامیکی به صورت غیر خطی افزایش پیدا می‌کند؛ در حالی که تئوری کلاسیک، خیز دینامیکی را مستقل از نسبت قطر به پارامتر مقیاس طول ماده گزارش می‌کند. در این پژوهش مشخص شد که افزایش ضریب الاستیک بستر، منجر به کاهش خیز دینامیکی خواهد شد. با بررسی نتایج حاصل شده برای خیز دینامیکی تحت اثر سرعت‌های مختلف بار متحرک، مشخص شد که افزایش سرعت بار متحرک تا رسیدن به سرعت بحرانی منجر به افزایش خیز و با عبور از سرعت بحرانی، افزایش سرعت بار متحرک منجر به کاهش خیز می‌شود. ما و همکاران [۳] مدل ورق میندلین را با بهره‌گیری از تئوری کوپل تنش اصلاح شده ارائه دادند. در این پژوهش اثر ضخامت ورق بر روی فرکانس طبیعی بررسی شد و مشخص گردید که هرچه نسبت ضخامت ورق به پارامتر مقیاس طول ماده کوچکتر باشد، تفاوت فرکانس طبیعی حاصل شده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده و تئوری کلاسیک بیشتر و اگر نسبت ضخامت ورق به پارامتر مقیاس طول بزرگتر باشد، فرکانس حاصل شده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده با فرکانس بدست آمده از تئوری کلاسیک منطبق خواهد بود. در این پژوهش همچنین اثر پارامتر نسبت طول ورق به ضخامت بر روی خیز و چرخش نانورق بیان شده است. پوراسماعیلی و همکاران [۴] با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی به تحلیل ارتعاشات نانورق دولایه در یک محیط الاستیک پرداختند. در این پژوهش اثر پارامتر غیرموضعی، اثر محیط الاستیک و همچنین تاثیر ابعاد نانورق مورد نظر بر روی فرکانس طبیعی سازه بررسی گردیده است؛ به طوری که با افزایش پارامتر نسبت طول به عرض نانورق فرکانس طبیعی بی‌بعد افزایش می‌یابد. همچنین در این پژوهش مشخص شد که با افزایش ضریب الاستیک بستر، فرکانس طبیعی افزایش و با افزایش پارامتر غیرموضعی الاستیسیته، فرکانس طبیعی نانورق کاهش می‌یابد. لیانگ که و همکاران [۵] با استفاده از تئوری ورق میندلین و تئوری کوپل تنش اصلاح شده به بررسی ارتعاشات آزاد میکروورق پرداختند. در این پژوهش معادلات حاکم بر مسئله با استفاده از روش انرژی و اصل همپلتون ارائه و معادلات استخراج شده برای دو نوع شرط مرزی گیردار و ساده با استفاده از روش ریتز حل شده است. در این پژوهش مشخص شد که برای مقدار مشخص پارامتر مقیاس طول ماده، با افزایش ضخامت میکروورق نتایج حاصل از تئوری کلاسیک و تئوری کوپل تنش اصلاح شده تقریباً منطبق هستند؛ در حالیکه با کاهش ضخامت میکروورق تفاوت نتیجه دو تئوری بسیار مشهود است. قربان‌پورآرانی و همکاران [۶] کمانش و کنترل هوشمند ورق گرافنی تک‌لایه پوشیده شده با نانورق الاستیک پلی‌فلوراید را با استفاده از تئوری

غیرموضعی الاستیسیته مورد بررسی قرار دادند، در این پژوهش نانورق پوششی و گرافن تک‌لایه به کمک بستر پاسترناک به یکدیگر مرتبط شده‌اند. نتایج حاصل شده نشان می‌دهد که ولتاژ خروجی اعمال شده به عنوان یک پارامتر کنترلی مهم در رفتار کمانشی ورق گرافنی تک‌لایه دارد. بخششی و خورشیدی [۷] با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده، تاثیر دما بر روی فرکانس طبیعی نانورق‌های مدرج هدفمند را مورد مطالعه قرار دادند. در این پژوهش تاثیر پارامترهای مختلف از قبیل ضریب توانی نسبت حجمی، پارامتر مقیاس طول ماده و ابعاد نانورق بر روی فرکانس طبیعی مورد بررسی قرار گرفت. دزیانی و همکاران [۸] ارتعاشات میکروصفحه تحت اثر سیال را به کمک تئوری کوپل تنش اصلاح شده مورد بررسی قرار دادند. با توجه به نتایج حاصل شده مشخص گردید که برای صفحه با ضخامت پایین تفاوت بین فرکانس‌های پیش‌بینی شده با تئوری کلاسیک و تئوری کوپل تنش اصلاح شده زیاد می‌باشد در حالی که با افزایش ضخامت صفحه، این تفاوت کم شده و در نهایت دو تئوری نتایج یکسانی را ارائه می‌دهند. ورزندیان و ضیائی [۹] پژوهشی بر روی ارتعاشات غیرخطی نانورق مستطیلی با استفاده از تئوری غیرموضعی الاستیسیته انجام دادند. در این پژوهش تاثیر پارامترهای مختلف بر روی ارتعاشات غیرخطی نانو ورق استخراج و احتمال وقوع پدیده تشدید داخلی در نانورق مستطیلی مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به نتایج حاصل شده در این پژوهش، مشخص شد که اثر پارامتر غیرمحملی بر رفتار ارتعاشی تقریباً مستقل از نسبت طول به ضخامت ورق است؛ همچنین پارامتر غیرمحملی بر حالت‌های ارتعاشی بالاتر تاثیر بیشتری برجا می‌گذارد. قدیری و صفریور [۱۰] با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده، ارتعاشات نانوپوسته مدرج هدفمند احاطه شده توسط بستر الاستیک را بررسی کردند. در این پژوهش تاثیر پارامتر مقیاس طول ماده، ضرایب الاستیک و پاسترناک بستر بر روی فرکانس طبیعی نانو پوسته مشخص گردیده است. انصاری‌خلخالی و همکاران [۱۱] ارتعاشات اجباری نانولوله‌های کربنی حاوی سیال را با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده مورد مطالعه قرار دادند. در این مطالعه تاثیر پارامتر مقیاس طول ماده، ابعاد نانولوله، سرعت سیال، نیروی عرضی و پارامترهای بستر الاستیک بر روی فرکانس طبیعی نانولوله بررسی و مشخص شده است. آنگوز و سیوالک [۱۲] با بهره‌گیری از تئوری ورق کیرشرف و تئوری کوپل تنش اصلاح شده به تحلیل ارتعاشات آزاد ورق تک‌لایه‌ای گرافن بر روی بستر الاستیک پاسترناک پرداختند. در این پژوهش تاثیر پارامترهایی مانند ضریب الاستیک بستر، ضریب برشی بستر و پارامتر مقیاس طول ماده بر روی فرکانس طبیعی مشخص و بحث شده است. آکسنسر و آیدوگدو [۱۳] با بهره‌گیری از تئوری

سازه‌ای ویسکوالاستیک، ضریب الاستیک و ضریب برشی بستر بر روی فرکانس طبیعی، اهمیت زاویه چینش لایه‌های کامپوزیتی مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به نتایج حاصل شده در این پژوهش، فرکانس طبیعی ورق کامپوزیتی با چینش $[0/S_0]$ از فرکانس طبیعی ورق کامپوزیتی با چینش $[90/S_0]$ بیشتر است. نامی و جانقریان [۱۹] به بررسی پدیده تشدید در میکرو/نانورق تابعی مدرج هدفمند با استفاده از تئوری غیرموضعی الاستیسیته و تئوری گرادیان کرنشی پرداختند. در این پژوهش مشخص شد که با افزایش پارامتر غیرموضعی الاستیسیته، پدیده تشدید در فرکانس‌های پایین رخ می‌دهد؛ همچنین افزایش پارامتر مقیاس طول ماده منجر به رخ دادن پدیده تشدید در فرکانس‌های بالا می‌شود. محمدی‌مهر و همکاران [۲۰] با استفاده از تئوری گرادیان کرنشی اصلاح شده به بررسی ارتعاشات آزاد نانورق کامپوزیتی دولایه تقویت شده با نانولوله‌های کربنی ساخته شده از مواد تابعی مدرج هدفمند پرداختند. به کمک تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و اصل همپلتون، معادلات حرکت استخراج و با استفاده از روش ناویر و بدون المان حل شده است. در این پژوهش تاثیر پارامتر مقیاس طول، نسبت ابعاد ورق، دمپر سازه‌ای و ضرایب الاستیک و دمپر بستر بر روی فرکانس طبیعی بیان شده است. همچنین در نتایج مربوط به این پژوهش، تاثیر مدل‌های مختلف توزیع مواد تابعی مدرج هدفمند بر روی فرکانس طبیعی ارائه شده است. حسینی‌هاشمی و همکاران [۲۱] با ارائه حل تحلیلی به بررسی ارتعاشات اجباری نانورق ویسکوالاستیک پرداختند. آن‌ها با استفاده از تئوری غیرموضعی الاستیسیته و تئوری ورق کیرشهف معادلات را استخراج و برای شرط تکیه‌گاهی ساده حل ناویر را ارائه دادند. در این پژوهش اثر پارامترهایی مانند دمپر سازه‌ای، اثر بستر ویسکوالاستیک پاسترناک، پارامتر غیرموضعی الاستیسیته و شماره مود بر روی ارتعاشات نانورق مورد نظر گزارش شده است. با توجه به نتایج ارائه شده در این مقاله، افزایش پارامتر غیرموضعی الاستیسیته و ضریب الاستیک بستر منجر به پدیده‌ی تشدید در فرکانس‌های پایین می‌شود. عارفی و زنگور [۲۲] به بررسی و تحلیل ارتعاشی نانورق ویسکوالاستیک با دولایه پیزوالکتریک تحت بار حرارتی و مکانیکی پرداختند. در این مطالعه از تئوری غیرموضعی الاستیسیته جهت مشخص شدن اثر پارامترهایی مانند ولتاژ اعمال شده به لایه پیزوالکتریک، پارامتر غیرموضعی و ضرایب بستر ویسکوپاسترناک بر روی رفتار ارتعاشی نانورق استفاده شده است. در نتایج این پژوهش ذکر شده است که با افزایش ضریب فنر خطی و ضریب برشی بستر ویسکوپاسترناک فرکانس طبیعی نانورق ویسکوالاستیک افزایش می‌یابد در مقابل با افزایش ضریب دمپر بستر ویسکوپاسترناک، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. افزایش پارامتر غیر موضعی

ورق کیرشهف و تئوری غیرموضعی الاستیسیته ارتعاشات اجباری یک نانورق تحت نیروی هارمونیک را بررسی نمودند. در این پژوهش تکیه‌گاه نانورق، ساده فرض شده و برای حل معادلات از روش ناویر استفاده شده است. در این مقاله تاثیر پارامتر غیر محلی، نسبت ابعاد مختلف ورق و فرکانس‌های تحریک متفاوت بر روی تغییر شکل دینامیکی ورق مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت. با استفاده از تحلیل نتایج نشان داده شد که تغییر شکل دینامیکی بدست آمده از تئوری غیرموضعی بیشتر از تغییر شکل دینامیکی تئوری کلاسیک است، زیرا پارامتر غیرموضعی الاستیسیته باعث کاهش سفتی ورق در ابعاد نانو می‌شود. با افزایش ابعاد ورق تغییر شکل دینامیکی و تاثیر پارامتر غیرموضعی کاهش می‌یابد. لی و همکاران [۱۴] ارتعاشات نانوتیر ویسکوالاستیک را با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو و تئوری غیر موضعی الاستیسیته مورد بررسی قرار دادند. برای بیان رفتار ویسکوالاستیک سازه‌ای نانوتیر، از مدل دیفرانسیلی کلونین-ویت استفاده شده است. در این پژوهش تاثیر پارامتر ویسکوالاستیک سازه‌ای و همچنین پارامتر غیرموضعی الاستیسیته بر روی فرکانس بررسی شده است. سهامانی و انصاری [۱۵] با بهره‌گیری از تئوری گرادیان کرنشی به بررسی ارتعاشات آزاد میکروورق ساخته شده از مواد مدرج تابعی هدفمند اهتمام ورزیدند. آن‌ها با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و اصل همپلتون، معادله حرکت را استخراج و برای شرط مرزی ساده، حل ناویر را پیشنهاد دادند. با توجه به نتایج ارائه شده مشخص گردید که با افزایش ضخامت نسبت به پارامتر مقیاس طول، نتایج حاصل شده از تئوری گرادیان کرنشی به سمت نتایج ارائه شده تئوری کلاسیک میل می‌کند. همچنین افزایش ضریب توانی نسبت حجمی منجر به کاهش فرکانس طبیعی می‌شود. کیاست و همکاران [۱۶] ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی و تیر واقع بر بستر ویسکوالاستیک را به ترتیب با بهره گرفتن از تئوری ورق کیرشهف و تئوری تیر اویلر-برنولی، مورد بررسی قرار دادند. در این پژوهش برای شبیه‌سازی رفتار ویسکوالاستیک ورق و تیر مورد نظر از مدل بولتزمن استفاده شده است. در این پژوهش با استفاده از روش انرژی و اصل همپلتون معادله حرکت تیر و ورق مستطیلی استخراج و برای حل این معادلات از روش نیمه‌تحلیلی گالرکین استفاده شده است؛ به طوری که با افزایش ضریب الاستیک بستر فرکانس طبیعی ورق و تیر افزایش یافته است. در این مقاله وجود دمپر خارجی بستر و دمپر سازه‌ای ورق و تیر ویسکوالاستیک منجر به فرکانس‌های مختلط شده است. با افزایش دمپر ویسکوالاستیک بستر بخش حقیقی فرکانس، کاهش و بخش موهومی افزایش می‌یابد. زمانی و همکاران [۱۸] بر روی آنالیز تیر و ورق‌های کامپوزیتی واقع بر بستر ویسکوالاستیک کار کردند. در این پژوهش علاوه بر بررسی میزان تاثیر پارامتر

با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده بررسی شده است. از دیگر نقاط قوت این پژوهش در مقایسه با پژوهش‌های مشابه انجام شده در این زمینه، بررسی شرایط تکیه‌گاهی مختلف و همچنین استفاده از کامل‌ترین بستر (بستر ویسکوالاستیک پاسترناک) می‌باشد.

۲- استخراج روابط

در شکل ۱ نانورق ویسکوالاستیک با طول a ، عرض b و ضخامت h بر روی بستر ویسکوالاستیک پاسترناک نشان داده شده است. نانورق دارای خاصیت ویسکوالاستیک با ضریب دمپر سازه‌ای η و بستر ویسکوالاستیک شامل ضریب الاستیک خطی k ، ضریب دمپر خارجی C_d و ضریب برشی k_G می‌باشد. با استفاده از مدل دیفرانسیلی کلون-ویت رابطه تنش و کرنش برای نانورق ویسکوالاستیک در رابطه (۱) ارائه شده است [۲۲]. با صرف‌نظر از مدل کلون-ویت در رابطه (۱) روابط کلاسیک تنش-کرنش حاصل خواهد شد.

$$\sigma = (1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}) E \varepsilon \quad (1)$$

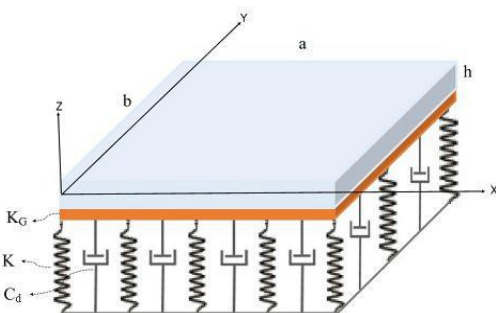
با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده، انرژی کرنشی نانورق ویسکوالاستیک از رابطه (۲) قابل محاسبه می‌باشد [۵].

$$U = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) \quad (2)$$

در رابطه (۲)، σ تانسور تنش نیرویی، m تانسور تنش کوپل، ε تانسور کرنش و χ تانسور انحنا می‌باشد، تانسورهای کوپل تنش و تانسور انحنا با استفاده از رابطه (۳) محاسبه می‌شوند.

$$\chi_{ij} = \frac{1}{4} (e_{ipq} \varepsilon_{qp,j} + e_{jqp} \varepsilon_{qi,p}) \quad (3)$$

$$m_{ij} = 2\mu l^2 \chi_{ij}$$



شکل ۱: هندسه مسئله

Fig. 1. General schematic of the problem

منجر به کاهش فرکانس طبیعی می‌شود. همچنین در این پژوهش اثر ولتاژ اعمالی بر روی لایه‌های پیزوالکتریک متصل به نانورق ویسکوالاستیک نیز بررسی گردید به طوری که با افزایش ولتاژ ورودی مولفه‌های خیز خمشی افزایش و مولفه‌های خیز برشی کاهش می‌یابد. قربان‌پورآرانی و همکاران [۲۳] ارتعاشات ورق گرافنی متحرک تک‌لایه‌ای تحت اثر میدان مغناطیسی را با استفاده از تئوری غیرموضعی الاستیسیته مورد بررسی قرار دادند. در این پژوهش تاثیر پارامترهای مختلف از جمله سرعت محوری، میدان مغناطیسی، بستر ویسکوالاستیک، ضخامت ورق و پارامتر غیر موضعی الاستیسیته مشخص شد. پوراسماعیلی و همکاران [۲۴] ارتعاشات نانورق ویسکوالاستیک بر روی بستر ویسکوالاستیک را با بهره‌گیری از تئوری غیرموضعی الاستیسیته مورد بررسی قرار دادند. در این پژوهش تاثیر پارامترهایی از قبیل دمپر ویسکوالاستیک سازه‌ای نانورق، ضرایب الاستیک بستر و پارامتر غیرموضعی الاستیسیته بر روی فرکانس طبیعی نانورق مورد مطالعه قرار گرفت. لیو و همکاران [۲۵] با استفاده از تئوری غیرموضعی الاستیسیته، ارتعاشات و کماتش نانورق مدرج هدفمند دو لایه را که توسط بستر ویسکوالاستیک به یکدیگر متصل شده‌اند را مورد مطالعه قرار دادند، در این پژوهش تاثیر پارامتر مقیاس اندازه، ضرایب بستر و همچنین تاثیر نانورق تابعی مدرج بر روی فرکانس طبیعی و بار بحرانی کماتش بررسی شده است. قربان‌پورآرانی و جلائی [۲۶] با استفاده از تئوری غیرموضعی الاستیسیته رفتار ارتعاشاتی لایه گرافنی واقع بر بستر ویسکوپاسترناک مورد مطالعه قرار دادند. در این مطالعه تاثیر پارامتر غیرموضعی، نسبت ابعاد ورق گرافنی، تاثیر ضرایب بستر و نسبت مدول بر روی رفتار دینامیکی ورق گرافنی مشخص گردید. جمالپور و همکاران [۲۷] ارتعاشات آزاد و کماتش نانورق دولایه که توسط بستر ویسکوپاسترناک به یکدیگر متصل شده‌اند را به کمک تئوری غیرموضعی الاستیسیته مورد بررسی قرار دادند. در این پژوهش نانورق‌ها تحت بار الکتریکی و مغناطیسی اولیه قرار دارند. با توجه به نتایج حاصل شده مشخص گردید که در نظر گرفتن پارامتر غیر موضعی منجر به کاهش فرکانس طبیعی نانورق می‌گردد به طوری که برای ورق‌های با ضخامت کم میزان کاهش فرکانس زیاد بوده و با افزایش ضخامت نانورق میزان کاهش فرکانس کمتر می‌شود.

پژوهش‌های صورت گرفته در سازه‌هایی با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده در ابعاد نانو و میکرو عمده‌تاً شامل مسائل یک‌بعدی مانند تیر و میله می‌باشند و برای مسائل دو بعدی، مانند ورق و پوسته پژوهش‌های بسیار کمتری در مقایسه با مسائل یک بعدی گزارش شده است. در این پژوهش برای اولین بار، ارتعاشات آزاد و اجباری نانورق ویسکوالاستیک کلون-ویت

خارجی می‌باشد.

$$\begin{aligned} & (D(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}) + \mu l^2 h) \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k w \\ & - k_G (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) + C_d \frac{\partial w}{\partial t} = q(x, y, t) \end{aligned} \quad (9)$$

در رابطه (۹) پارامتر سفتی خمشی ورق می‌باشد و با استفاده از رابطه (۱۰) محاسبه خواهد شد.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (10)$$

۳- تحلیل ارتعاشات اجباری

در این بخش ارتعاشات اجباری نانورق ویسکوالاستیک تحت نیروی هارمونیک کسینوسی با استفاده از حل ناویر برای تکیه‌گاه ساده ارائه شده است.

$$q(x, y, t) = q_0 \cos(\omega_{ext} t) \quad (11)$$

با نوشتن سری فوریه سینوسی دوگانه برای بار خارجی هارمونیک و استفاده از تعامد مودها رابطه (۱۲) حاصل خواهد شد

$$\begin{aligned} q(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ q_{mn}(t) &= \frac{16q_0}{mn\pi^2} \cos(\omega_{ext} t) \end{aligned} \quad (12)$$

با بهره گرفتن از حل ناویر، خیز نانورق با رابطه (۱۳) بیان شده است.

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (13)$$

با جایگذاری روابط (۱۲) و (۱۳) در معادله حرکت (۹)، معادله دیفرانسیلی خطی غیرهمگن مرتبه دوم مطابق با رابطه (۱۴) حاصل خواهد شد.

$$M_{eq} \ddot{\eta}(t) + C_{eq} \dot{\eta}(t) + K_{eq} \eta(t) = \frac{16q_0}{mn\pi^2} \cos(\omega_{ext} t) \quad (14)$$

هر یک از پارامترهای M_{eq} ، C_{eq} و K_{eq} جرم معادل، دمپر معادل و سختی معادل نانورق ویسکوالاستیک واقع بر بستر ویسکوالاستیک پاسترناک می‌باشد، این مقادیر با استفاده از رابطه (۱۵) قابل محاسبه می‌باشد. حل پایدار معادله دیفرانسیل مرتبه دوم (رابطه (۱۴)) به صورت رابطه (۱۶) ارائه شده است، در این رابطه X دامنه و Φ اختلاف فاز نیروی خارجی

در رابطه (۳) عبارت های e ، μ و l به ترتیب پارامترهای نماد جایگشت، مدول برشی و پارامتر مقیاس اندازه در تئوری کوپل تنش اصلاح شده است. پارامتر مقیاس اندازه به صورت آزمایشگاهی تعیین می‌شود و دارای واحد طول می‌باشد. در این پژوهش مطابق با رابطه (۴) از میدان جابجایی تئوری ورق کلاسیک استفاده شده است.

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (4)$$

در رابطه (۴) $u_0(x, y, t) = 0$ ، $v_0(x, y, t) = 0$ می‌باشد. با توجه به استفاده از تئوری ورق‌های نازک و صرف نظر از اینرسی دورانی، انرژی جنبشی نانورق با استفاده از رابطه (۵) محاسبه شده است. در این رابطه، ρ چگالی حجمی نانورق می‌باشد [۱۵].

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dV \quad (5)$$

با جایگذاری رابطه (۴) در رابطه (۵) انرژی جنبشی نانورق با استفاده از رابطه (۶) قابل محاسبه خواهد بود.

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (6)$$

با در نظر گرفتن $q(x, y, t)$ به عنوان بار خارجی وارد بر نانورق، نیروی خالص وارد بر نانورق (مجموع بار خارجی و نیروی عکس‌العمل بستر) از رابطه (۷) محاسبه خواهد شد [۲۲].

$$V = q(x, y, t) - k w + k_G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - C_d \frac{\partial w}{\partial t} \quad (7)$$

با استفاده از اصل همپلتون (رابطه (۸)) و اعمال حساب تغییرات بر روی روابط (۲) و (۷)-(۶)، معادله حرکت ارتعاشات نانورق ویسکوالاستیک بر روی بستر ویسکوالاستیک پاسترناک با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده در رابطه (۹) ارائه شده است [۱۷].

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta U - \delta T - \delta \Sigma) dt = 0 \quad (8)$$

در رابطه (۸) T انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و Σ کار نیروهای

$$\bar{x} = \frac{x}{a}, \bar{y} = \frac{y}{b}, \bar{l} = \frac{l}{h}$$

$$r = \frac{a}{b}, \bar{w} = w \frac{D}{q_0 a^4}, \bar{\eta}_d = \frac{\eta_d}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (19)$$

$$\bar{C}_d = \frac{C_d a^2}{\sqrt{\rho h D}}, \bar{K} = K \frac{a^4}{D}, \bar{K}_G = K_G \frac{a^2}{D} \quad (20)$$

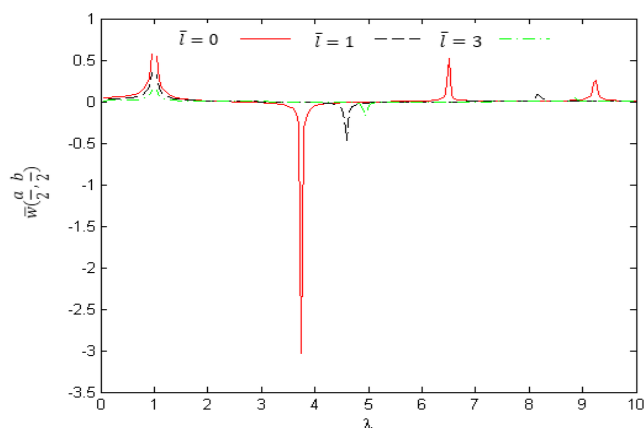
$$w(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16q_0 / mn\pi^2}{\bar{\omega}_{11}^2 \sqrt{(\frac{\bar{\omega}_{mn}^2}{\bar{\omega}_{11}^2} - \lambda^2)^2 + (2\bar{\zeta} \frac{\bar{\omega}_{mn}}{\bar{\omega}_{11}} \lambda)^2}} \times$$

$$\sin m\pi\bar{x} \sin n\pi\bar{y}$$

$$\lambda = \frac{\bar{\omega}_{ext}}{\bar{\omega}_{11}}$$

همچنین با افزایش پارامتر مقیاس طول ماده، پدیده تشدید در فرکانس‌های بالاتر رخ می‌دهد، زیرا در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طول ماده منجر به افزایش فرکانس طبیعی می‌شود و پدیده تشدید با برابر شدن فرکانس طبیعی و فرکانس تحریک ایجاد خواهد شد.

با توجه به شکل‌های ۲ و ۳ در نظر گرفتن ضرایب ویسکوالاستیک سازه‌ای و ضریب دمپر ویسکوز بستر منجر به ایجاد فرکانس‌های مختلط می‌شود (شکل‌های ۲ و ۳) به طوری که با در نظر گرفتن مقادیری برای این پارامترها، بخش حقیقی فرکانس کاهش و بخش موهومی افزایش می‌یابد. در شکل ۳ تاثیر وجود ضرایب ویسکوالاستیک سازه‌ای و دمپر ویسکوز بستر



شکل ۲: تاثیر پارامتر مقیاس طول ماده بر روی ماکزیمم خیز دینامیکی

Fig. 2. Effect of small scale parameter on maximum dynamic deflection

$$M_{eq} = \rho h$$

$$C_{eq} = D\eta((\frac{m\pi}{a})^4 + 2(\frac{m\pi}{a})^2(\frac{n\pi}{b})^2 + (\frac{n\pi}{b})^4) + C_d \quad (15)$$

$$K_{eq} = (D + \mu l^2 h)((\frac{m\pi}{a})^4 + 2(\frac{m\pi}{a})^2(\frac{n\pi}{b})^2 + (\frac{n\pi}{b})^4) + k_G((\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2) + k$$

تحریک کننده و پاسخ پایدار می‌باشد.

$$\eta_{mn}(t) = X \cos(\omega_{ext}t - \Phi) \quad (16)$$

با جایگذاری رابطه (۱۶) در رابطه (۹) مقادیر مجهول دامنه و فاز حاصل خواهد شد.

$$X = \frac{16q_0 / mn\pi^2}{\sqrt{(K_{eq} - M_{eq}\omega_{ext}^2)^2 + (C_{eq}\omega_{ext})^2}} \quad (17)$$

$$\Phi = \tan^{-1}\left(\frac{C_{eq}\omega_{ext}}{K_{eq} - M_{eq}\omega_{ext}^2}\right) \quad (18)$$

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16q_0 / mn\pi^2}{M_{eq} \sqrt{(\omega_{mn}^2 - \omega_{ext}^2)^2 + (2\zeta\omega_{mn}\omega_{ext})^2}} \times$$

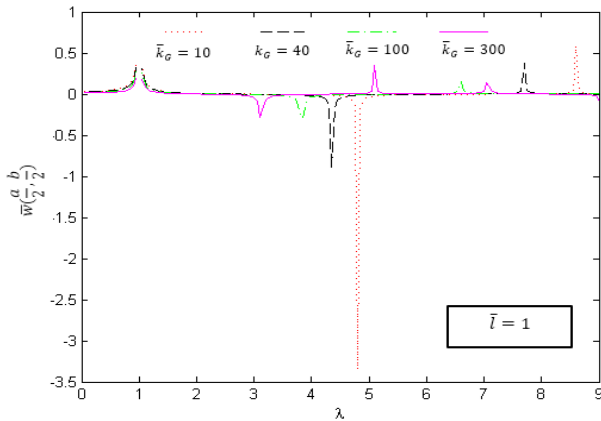
$$\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\zeta = \frac{C_{eq}}{2M_{eq}\omega_{mn}}$$

با جایگذاری مقادیر حاصل شده در روابط (۱۶) و (۱۷) در رابطه (۱۳) خیز نانوورق مطابق با رابطه (۱۸) حاصل می‌شود.

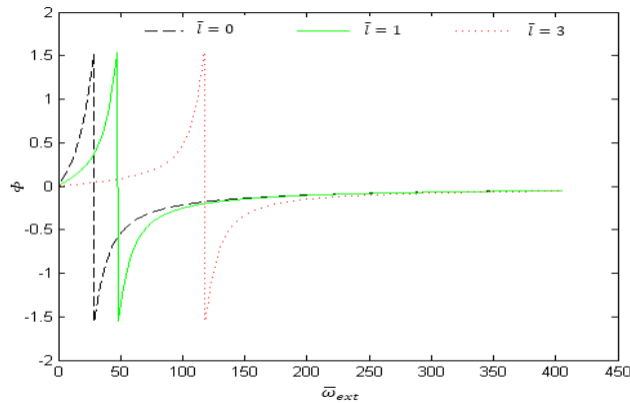
با استفاده از مقادیر پارامترهای بی‌بعد معرفی شده در معادله (۱۹)، ماکزیمم دامنه خیز بی‌بعد در رابطه (۲۰) ارائه شده است.

در شکل ۲، ماکزیمم خیز دینامیکی در مرکز نانوورق بر اساس فرکانس تحریک برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس اندازه ارائه شده است، با افزایش رانتر مقیاس اندازه ماکزیمم خیز دینامیکی کاهش یافته است، زیرا با در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طول ماده، سفتی نانوورق افزایش می‌یابد.



شکل ۵: ماکزیمم خیز دینامیکی مرکز نانوروق بر حسب فرکانس تحریک با در نظر گرفتن ضریب برشی بستر

Fig. 5. Effect of shear coefficient on maximum dynamic deflection according to natural frequency



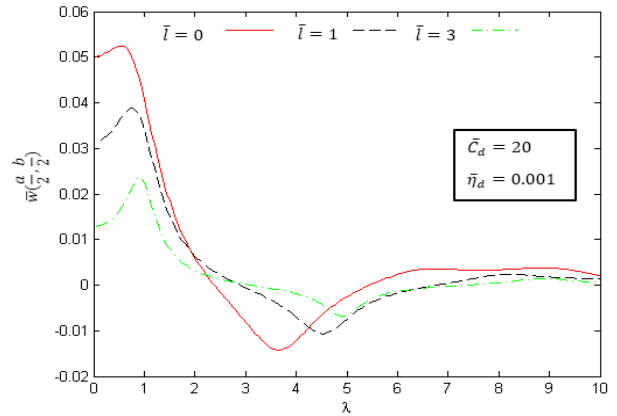
شکل ۶: اختلاف فاز نیروی تحریک کننده با خیز دینامیکی بر حسب فرکانس تحریک با در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طول ماده

Fig. 6. Phase difference of excitation force with dynamic deflection

برای به حداقل رساندن ماکزیمم خیز دینامیکی، مقدار بهینه‌ای برای ضریب الاستیک خطی بستر وجود خواهد داشت.

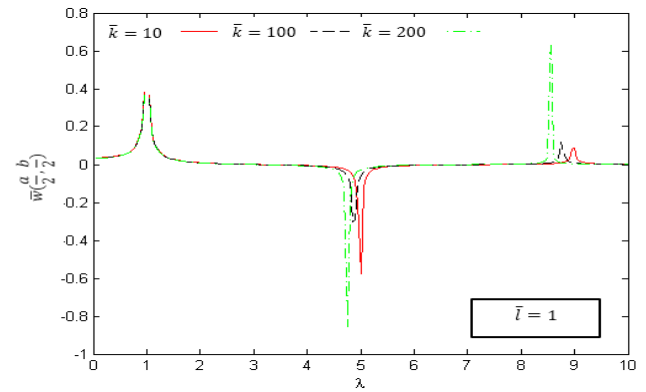
با افزایش ضریب برشی بستر، ماکزیمم خیز دینامیکی، ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد؛ به طوری که برای رسیدن به مقدار حداقل برای ماکزیمم خیز دینامیکی، مقدار خاصی از ضریب برشی بستر باید لحاظ گردد. با افزایش ضریب برشی بستر، پدیده تشدید به سمت فرکانس‌های پایین‌تر منتقل می‌شود.

در شکل ۶ اختلاف فاز نیروی خارجی تحریک کننده با خیز بر حسب فرکانس تحریک برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس طول ماده ارائه شده است. با توجه به شکل ۶ با افزایش پارامتر مقیاس طول ماده، اختلاف فاز نیروی تحریک کننده و پاسخ پایدار، کاهش پیدا کرده و به ازاء مقادیر خاصی از فرکانس تحریک، به مقدار ماکزیمم $\pm \frac{\pi}{2}$ خود می‌رسد و پس از آن سیر نزولی داشته و به صفر میل می‌کند. با توجه به شکل ۶ با افزایش پارامتر



شکل ۳: ماکزیمم خیز دینامیکی مرکز نانوروق بر حسب فرکانس تحریک با در نظر گرفتن ضرایب ویسکوز

Fig. 3. Effect of viscous coefficients on maximum dynamic deflection according to natural frequency



شکل ۴: ماکزیمم خیز دینامیکی مرکز نانوروق بر حسب فرکانس تحریک با در نظر گرفتن ضریب الاستیک خطی بستر

Fig. 4. Effect of elastic coefficient on maximum dynamic deflection according to natural frequency

بر روی ماکزیمم خیز دینامیکی و پدیده تشدید نشان داده شده است. با توجه به شکل ۳ مشخص می‌شود که در نظر گرفتن ضرایب ویسکواالاستیک سازه‌ای نانوروق و دمپر ویسکوز بستر منجر به کاهش ماکزیمم خیز دامنه می‌گردد؛ همچنین به دلیل کاهش بخش حقیقی فرکانس، پدیده تشدید در فرکانس‌های تحریک پایین‌تر (نسبت به حالتی که از این ضرایب صرف‌نظر شده است (شکل ۲)) رخ می‌دهد.

در شکل‌های ۴ و ۵ با در نظر گرفتن مقدار ثابت برای پارامتر مقیاس طول ماده، ماکزیمم خیز دینامیکی بدون بعد بر حسب فرکانس تحریک بی‌بعد برای مقادیر مختلف ضرایب الاستیک و برشی بی‌بعد ارائه شده است. با افزایش پارامتر ضریب الاستیک خطی و برشی بی‌بعد بستر، پدیده تشدید در فرکانس‌های تحریک پایین‌تر رخ می‌دهد (نسبت به حالتی که از این ضرایب صرف‌نظر شده است). با افزایش پارامتر ضریب الاستیک، ماکزیمم خیز دینامیکی، ابتدا کاهش و پس از آن افزایش می‌یابد، بنابراین

$$\int_0^a \int_0^b [(D(1+i\eta\omega) + \mu l^2 h)\nabla^4 W(x,y) - \rho h \omega^2 W(x,y) + kW(x,y) - k_G(\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial y^2}) + i\omega C_d W(x,y)]W(x,y) dx dy = 0 \quad (22)$$

$$\int_0^a \int_0^b [(D(1+i\eta\omega) + \mu l^2 h)\nabla^4 W(x,y) - \rho h \omega^2 W(x,y) + kW(x,y) - k_G(\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial y^2}) + i\omega C_d W(x,y)]W(x,y) dx dy = 0 \quad (23)$$

ابتدا با استفاده از داده‌های موجود در جدول ۲ نتایج حاصل شده در این پژوهش با مراجع [۵ و ۱۶] مقایسه شده است. در جدول ۳ فرکانس طبیعی ورق کلاسیک با مراجع [۱۶ و ۱۷] مقایسه شده است. با توجه به نتایج گزارش شده در جدول ۳ مشخص می‌شود که فرکانس طبیعی بدست آمده در این پژوهش، منطبق با نتایج مرجع [۱۷] (به غیر از شرط تکیه‌گاهی 'CCSC') می‌باشد و تطابق خوبی با مرجع [۱۷] دارد. به دلیل استفاده از روش حل یکسان در پژوهش حاضر و مرجع [۱۶]، منطبق بودن نتایج دور از ذهن نیست. عدم تطابق نتایج حاصل شده در این پژوهش و مرجع [۱۶] برای شرط تکیه‌گاهی CCSC می‌تواند ناشی از خطای محاسباتی، خطای کدنویسی و یا اشتباهات سهوی در تهیه جداول باشد. در مرجع [۱۷] برای حل معادلات از روش ریتز استفاده شده است.

مقیاس طول ماده، ماکزیمم اختلاف فاز در فرکانس‌های تحریک بالاتر رخ می‌دهد؛ زیرا در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طول ماده منجر به افزایش سفتی سازه می‌گردد.

۴- ارتعاشات آزاد

در این بخش به تحلیل ارتعاشات آزاد نانورق ویسکوالاستیک پرداخته شده است. به دلیل حل معادله حرکت برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف و متفاوت با شرایط تکیه‌گاهی حل لوی و ناویر از روش نیمه‌تحلیلی گالرکین استفاده شده است و برای اعتبارسنجی روش حل پیشنهادی، بخشی از نتایج تحلیل ارتعاشات آزاد، با پژوهش‌های مختلف مقایسه شده است. در روش گالرکین توابع شکل پیشنهادی، شرایط مرزی را به صورت دقیق و معادله حرکت را به صورت تقریبی ارضا می‌کنند، برای حداقل کردن خطای ناشی از ارضا تقریبی، توابع شکل در توابع وزنی مناسب ضرب می‌شوند. توابع وزنی در روش گالرکین همان توابع شکل پیشنهادی (فرض یک مود) می‌باشد. در جدول ۱ توابع شکل ارائه شده برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف نشان داده شده است.

با استفاده از جداسازی متغیرها و روش گالرکین، رابطه (۲۲) حاصل خواهد شد.

$$w(x,y,t) = W(x,y)e^{i\omega t} \quad (21)$$

با جایگذاری هریک از توابع شکل پیشنهادی در جدول ۱ برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف در رابطه (۲۲) فرکانس طبیعی نانورق حاصل می‌شود. برای نمونه، فرکانس طبیعی نانورق با تکیه‌گاه گیردار در رابطه (۲۳) ارائه شده است.

Table 1. Shape function for different boundary condition

جدول ۱: توابع شکل برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف

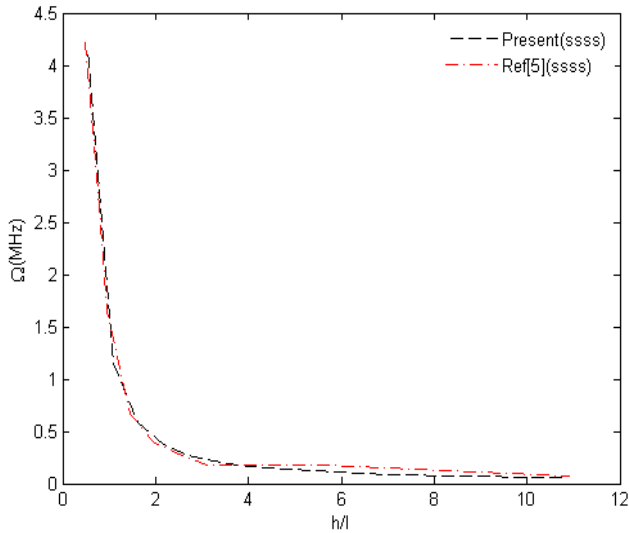
$W(x,y)$	شرایط مرزی	$W(x,y)$	شرایط مرزی
$(\cos \frac{3m\pi x}{2a} - \cos \frac{m\pi x}{2a})(\cos \frac{3n\pi y}{2b} - \cos \frac{n\pi y}{2b})$	CCSS	$(1 - \cos \frac{3m\pi x}{a})(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b})$	CCCC
$(\cos \frac{3m\pi x}{2a} - \cos \frac{m\pi x}{2a}) \sin \frac{n\pi y}{b}$	CSSS	$(\cos \frac{3m\pi x}{2a} - \cos \frac{m\pi x}{2a})(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b})$	CCSC
$\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$	SSSS	$(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a}) \sin \frac{n\pi y}{b}$	CSCS

Table 2. Parameter values

جدول ۲: مقادیر پارامترها

مدول یانگ $[N/m^2]$	چگالی $[kg/m^3]$	$a[m]$	$h[m]$	ضریب پواسون
۱۰۸	۷۱۴۰	۵	۰/۲۵	۰/۲۵

1 C : Clamped boundary condition, S : Simply supported boundary condition



شکل ۷: فرکانس طبیعی نانورق با تکیه‌گاه ساده $17l = 0.1, a/h = 1(\mu m), r = 6$

Fig. 7. Nanoplate natural frequency for ssss boundary condition

در جدول ۴ با در نظر گرفتن ضریب الاستیک خطی بستر، فرکانس طبیعی ورق استخراج و با مراجع [۱۶ و ۱۷] مقایسه شده است. نتایج حاصل شده در جدول ۴ منطبق با مرجع [۱۶] بوده و تطابق خوبی با مرجع [۱۷] دارد.

در شکل‌های ۷ و ۸ با در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طول ماده فرکانس نانورق برای تکیه‌گاه‌های گیردار و ساده استخراج و با مرجع [۵] مقایسه شده است. با مقایسه نتایج مشاهده می‌شود که نتایج حاصل شده در این پژوهش تطابق بسیار خوبی با مرجع [۵] دارد.

در شکل ۸ نسبت فرکانس حاصل از تئوری کوپل تنش اصلاح شده به فرکانس کلاسیک برای تمام تکیه‌گاه‌ها ارائه شده است. با افزایش ضخامت ورق نسبت به پارامتر مقیاس اندازه نتایج حاصل از دو تئوری تقریباً یکسان می‌باشند؛ به طوری که برای ورق‌های با ضخامت $10 > h$ استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده ضرورت ندارد، در حالیکه برای ورق‌های

Table 3. Natural frequency for classic plate

جدول ۳: فرکانس طبیعی ورق کلاسیک

$\omega_{11} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$			$\frac{a}{b}$	نوع تکیه‌گاه
لیسا [۱۷]	کیاست [۱۶]	مطالعه حاضر		
۱۱۷۲/۰۹۲	۱۱۷۲/۰۶۳	۱۱۷۲/۰۶۳	۰/۵	CCCC
۴۳۱/۵۹۰	۴۳۱/۵۸۹	۴۳۱/۵۸۹	۱	
۲۹۳/۰۱۷	۲۹۳/۰۱۶	۲۹۳/۰۱۶	۲	
۲۷۰/۲۵۰	۲۷۰/۲۴۸	۲۷۰/۲۴۸	۴	
۸۷۶/۵۶۷	۸۸۳/۹۹۹	۸۸۰/۲۸۸	۰/۵	CCSC
۳۸۲/۴۲۶	۳۸۳/۴۹۵	۳۸۲/۹۶۱	۱	
۲۸۷/۷۷۱	۲۸۷/۸۵۸	۲۸۷/۸۱۴	۲	
۲۴۴,۲۴۶	۲۴۶/۲۴۹	۲۴۹/۶۴۶	۴	
۱۱۲۷/۱۲۰	۱۱۲۷/۱۲۵	۱۱۲۷/۱۲۵	۰/۵	CSCS
۳۴۳/۳۳۶	۳۴۳/۳۲۷	۳۴۳/۳۲۷	۱	
۱۶۱/۸۴۹	۱۶۱/۸۴۶	۱۶۱/۸۴۶	۲	
۱۲۴/۷۰۷	۱۲۴/۷۱۰	۱۲۴/۷۱۱	۴	
۸۵۶/۴۱۱	۸۵۶/۸۵۵	۸۵۶/۸۸۵	۰/۵	CCSS
۳۲۸/۵۱۲	۳۲۸/۷۱۰	۳۲۸/۷۱۰	۱	
۲۱۴/۱۰۳	۲۱۴/۲۲۱	۲۱۴/۲۲۱	۲	
۱۹۰/۳۹۷	۱۹۰/۳۹۵	۱۹۰/۳۹۵	۴	
۸۲۴/۹۴۲	۸۲۵/۲۵۴	۸۲۵/۲۵۴	۰/۵	CSSS
۲۸۱/۷۲۵	۲۸۱/۷۸۱	۲۸۱/۷۸۱	۱	
۱۵۲/۸۹۸	۱۵۲/۹۰۶	۱۵۲/۹۰۶	۲	
۱۲۳/۵۹۲	۱۲۳/۵۹۰	۱۲۳/۵۹۰	۴	
۵۷۲/۲۰۶	۵۷۲/۲۱۱	۵۷۲/۲۱۱	۰/۵	SSSS
۲۲۸/۸۸۶	۲۲۸/۸۸۴	۲۲۸/۸۸۴	۱	
۱۴۳/۰۵۲	۱۴۳/۰۵۳	۱۴۳/۰۵۳	۲	
۱۲۱/۵۹۸	۱۲۱/۵۹۵	۱۲۱/۵۹۵	۴	

Table 4. Natural frequency for classic plate on elastic foundation

جدول ۴: فرکانس طبیعی ورق کلاسیک واقع بر بستر الاستیک

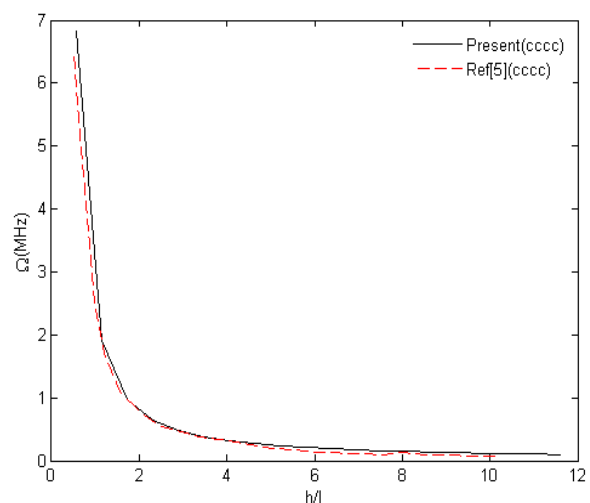
$k = 25 \frac{\text{MPa}}{\text{m}}$			$k = 25 \frac{\text{MPa}}{\text{m}}$			$\frac{a}{b}$	نوع تکیه‌گاه
[۱۷] لیسا	[۱۶] کیاست	تحقیق حاضر	[۱۷] لیسا	[۱۶] کیاست	تحقیق حاضر		
۱۲۳۰/۴۰۶	۱۲۳۰/۳۶۰	۱۲۳۰/۳۶۱	۱۱۷۸/۰۴۹	۱۱۷۸/۰۲۲	۱۱۷۸/۰۲۳	۰/۵	CCCC
۵۷۱/۲۵۳	۵۷۱/۲۴۳	۵۷۱/۲۴۸	۴۴۷/۵۲۶	۴۴۷/۵۲۰	۴۴۷/۵۲۰	۱	
۴۷۵/۳۱۰	۴۷۵/۳۰۴	۴۷۵/۳۰۴	۳۱۶/۰۱۴	۳۱۶/۰۱۲	۳۱۶/۰۱۲	۲	
۴۶۱/۶۲۷	۴۶۱/۶۱۶	۴۶۱/۶۱۷	۲۹۵/۰۲۷	۲۹۵/۰۲۴	۲۹۵/۰۲۵	۴	
۹۶۰/۴۱۶	۹۵۹/۹۵۳	۹۵۶/۵۳۷	۸۹۲/۳۸۴	۸۹۱/۸۸۶	۸۸۸/۲۰۸	۰/۵	CCSC
۵۳۵/۹۰۱	۵۳۵/۸۴۰	۵۳۵/۴۵۸	۴۰۱/۴۲۲	۴۰۱/۳۴۰	۴۰۰/۸۳۰	۱	
۴۷۲/۱۵۴	۴۷۲/۱۴۲	۴۷۲/۱۱۵	۳۱۱/۲۴۴	۳۱۱/۲۳۶	۳۱۱/۱۹۵	۲	
۴۶۱/۲۷۰	۴۶۱/۲۶۶	۴۶۱/۲۶۴	۲۹۴/۴۷۹	۲۹۴/۴۷۶	۲۹۴/۴۷۳	۴	
۱۱۸۷/۶۴۵	۱۱۸۷/۶۳۱	۱۱۸۷/۶۳۱	۱۱۳۳/۳۱۳	۱۱۳۳/۳۲۱	۱۱۳۳/۳۲۱	۰/۵	CSCS
۵۰۷/۸۷۸	۵۰۷/۸۶۷	۵۰۷/۸۶۷	۳۶۳/۱۶۷	۳۶۳/۱۵۱	۳۶۳/۱۵۱	۱	
۴۰۷/۷۴۹	۴۰۷/۷۳۷	۴۰۷/۷۳۸	۲۰۰/۵۰۲	۲۰۰/۴۹۸	۲۰۰/۴۹۸	۲	
۳۹۴/۴۷۳	۳۹۴/۴۷۲	۳۹۴/۴۷۳	۱۷۱/۹۲۴	۱۷۱/۹۲۵	۱۷۱/۹۲۵	۴	
۹۳۴/۶۱۲	۹۳۵/۰۴۴	۹۳۵/۰۴۴	۸۶۴/۵۵۲	۸۶۵/۰۱۹	۸۶۵/۰۱۹	۰/۵	CCSS
۴۹۷/۹۷۶	۴۹۸/۱۰۳	۴۹۸/۱۰۳	۳۴۹/۱۸۵	۳۴۹/۳۶۵	۳۴۹/۳۶۵	۱	
۴۳۱/۱۶۱	۴۳۱/۲۱۵	۴۳۱/۲۱۵	۲۴۴/۶۳۴	۲۴۴/۷۳۷	۲۴۴/۷۳۷	۲	
۴۱۹/۸۴۵	۴۱۹/۸۸۸	۴۱۹/۸۸۸	۲۲۴/۰۹۶	۲۲۴/۱۷۸	۲۲۴/۱۷۸	۴	
۹۰۶/۸۶۴	۹۰۶/۱۴۶	۹۰۶/۱۴۶	۸۳۳/۳۹۱	۸۳۳/۶۹۷	۸۳۳/۶۹۷	۰/۵	CSSS
۴۶۸/۴۳۳	۴۶۸/۴۶۲	۴۶۸/۴۶۲	۳۰۵/۵۷۳	۳۰۵/۶۲۴	۳۰۵/۶۲۴	۱	
۴۰۴/۲۷۷	۴۰۴/۲۷۲	۴۰۴/۲۷۲	۱۹۳/۳۹۴	۱۹۳/۳۵۴	۱۹۳/۳۵۴	۲	
۳۹۴/۱۳۲	۳۹۴/۱۲۰	۳۹۴/۱۲۰	۱۷۱/۱۱۷	۱۷۱/۱۱۴	۱۷۱/۱۱۴	۴	
۶۸۳/۷۲۵	۶۸۳/۷۲۶	۶۸۳/۷۲۶	۵۸۴/۳۲۰	۵۸۴/۳۲۱	۵۸۴/۳۲۱	۰/۵	SSSS
۴۳۵/۶۹۱	۴۳۸/۶۸۴	۴۳۸/۶۸۵	۲۵۷/۶۷۲	۲۵۷/۶۶۹	۲۵۷/۶۷۰	۱	
۴۰۰/۶۴۹	۴۰۰/۶۵۰	۴۰۰/۶۵۰	۱۸۵/۶۶۱	۱۸۵/۶۶۰	۱۸۵/۶۶۰	۲	
۳۹۳/۵۱۰	۳۹۳/۴۹۹	۳۹۳/۴۹۸	۱۶۹/۶۸۲	۱۶۹/۶۷۹	۱۶۹/۶۷۹	۴	

با ضخامت $l < 10h$ تفاوت دو تئوری مشهود و استفاده از تئوری کوپل

تنش اصلاح شده ضروری می‌باشد.

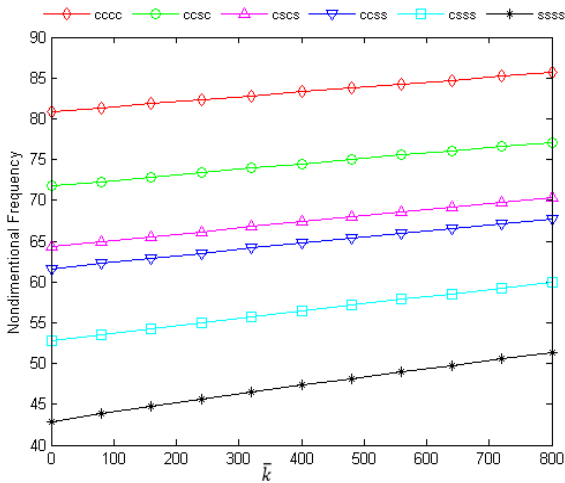
در شکل ۹ نسبت فرکانس حاصل شده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده به فرکانس تئوری کلاسیک برای ضخامت‌های مختلف نشان داده شده است. با توجه به شکل ۹ مشخص می‌شود که برای ورق‌هایی با ضخامت نازک، فرکانس حاصل شده از دو تئوری، تفاوت زیادی با یکدیگر دارند؛ در حالی که با افزایش ضخامت نانورق، نتایج حاصل از دو تئوری تقریباً با یکدیگر منطبق می‌باشد.

در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ تاثیر ضریب الاستیک خطی و ضریب برشی بستر بر روی فرکانس طبیعی برای تمام شرایط تکیه‌گاهی نشان داده شده است. با افزایش این ضرایب، فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. به توجه به شکل‌های ۹ و ۱۰ مشخص می‌شود که بیشترین فرکانس طبیعی بی‌بعد مربوط به



شکل ۸: فرکانس طبیعی نانورق با تکیه‌گاه گیردار $17l = 0.6 \mu\text{m}, a/h = 1, r = 1$

Fig. 8. Nanoplate natural frequency for cccc boundary condition

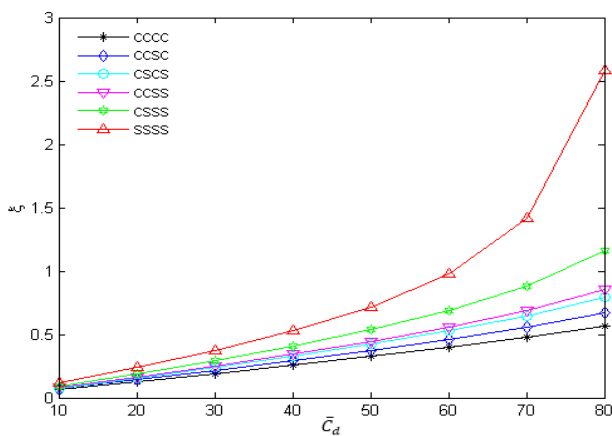


شکل ۱۰: فرکانس طبیعی بر حسب ضریب الاستیک خطی بستر
 $17l = 0.6\mu m, a/h = 1, \nu = 0.38$

Fig. 10. Natural frequency according to linear elastic coefficient of foundation

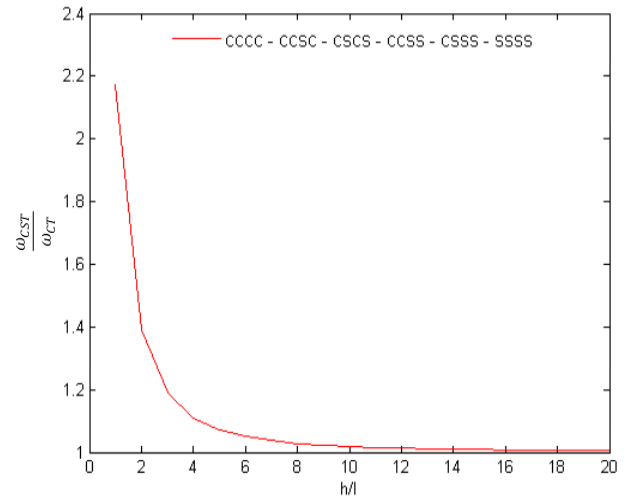
با توجه به شکل‌های ۱۳ و ۱۳ مشخص می‌شود که افزایش ضریب ویسکوالاستیک سازه‌ای و ضریب دمپر خارجی منجر به افزایش نسبت فرکانس خواهد شد؛ به طوری که بخش حقیقی فرکانس، کاهش و بخش موهومی فرکانس، افزایش می‌یابد.

با افزایش ضریب دمپر خارجی، بیشترین نرخ افزایش نسبت فرکانس طبیعی مربوط به تکیه‌گاه ساده می‌باشد؛ درحالی‌که با افزایش ضریب ویسکوالاستیک سازه‌ای نانورق بیشترین نرخ افزایش نسبت فرکانس مربوط به تکیه‌گاه گیردار می‌باشد؛ بنابراین مشخص می‌شود که انتخاب شرط تکیه‌گاهی مناسب برای طراحی ایده‌آل بسیار حائز اهمیت می‌باشد.



شکل ۱۲: نسبت فرکانس بر اساس ضریب بی‌بعد دمپر ویسکوز بستر
 $\bar{l} = 1, r = 1, \nu = 0.38$

Fig. 12. Frequency ratio based on dimensionless viscose damper coefficient



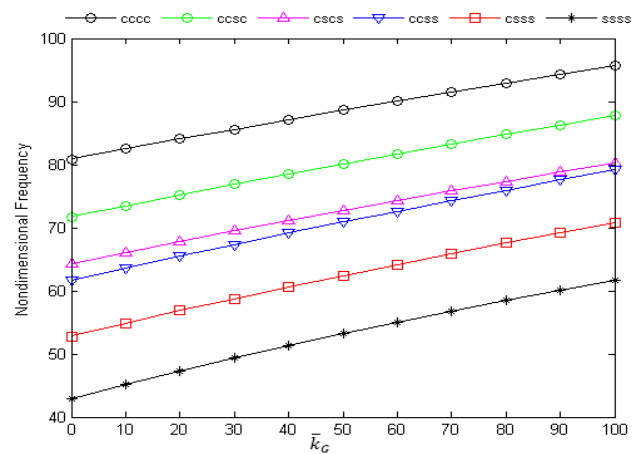
شکل ۹: نسبت فرکانس تئوری کوپل تنش به تئوری کلاسیک بر حسب ضخامت نانورق
 $17l = 0.6\mu m, a/h = 1, \nu = 0.38$

Fig. 9. Frequency ratio of couple stress theory to classic theory in nanoplate thickness

تکیه‌گاه گیردار و کمترین مقدار فرکانس طبیعی بی‌بعد برای نانورق با تکیه‌گاه ساده است. با مقایسه شکل‌های ۱۰ و ۱۱ افزایش ضریب برشی بستر، تاثیر بیشتری بر روی افزایش فرکانس طبیعی نانورق دارد.

وجود ضریب ویسکوالاستیک سازه‌ای نانورق و ضریب دمپر ویسکوز خارجی منجر به فرکانس‌های مختلط خواهد شد. با تعریف پارامتر ξ ، تاثیر افزایش ضریب ویسکوالاستیک سازه‌ای نانورق و ضریب دمپر خارجی در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ ارائه شده است.

$$\xi = \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)} \quad (24)$$



شکل ۱۱: فرکانس طبیعی بر حسب ضریب برشی بستر
 $17l = 0.6\mu m, a/h = 1, \nu = 0.38$

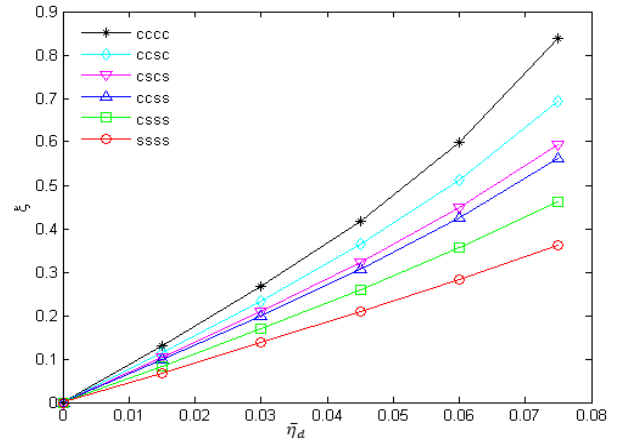
Fig. 11. Natural frequency according to linear shear coefficient of foundation

با توجه به کاربرد بسیار زیاد نانورق‌ها در صنایع مختلف، تحلیل رفتار ارتعاشاتی این نوع از سازه‌ها از اهمیت بالایی برخوردار است، در این پژوهش علاوه بر بررسی تاثیر پارامترهای مختلف معرفی شده بر روی رفتار ارتعاشات نانورق ویسکوالاستیک، تاثیر و انتخاب شرایط تکیه‌گاهی مناسب برای رسیدن به طراحی ایده‌آل مطرح و بررسی گردید.

۶- فهرست علائم

علائم انگلیسی

a	طول نانورق، [m]
b	عرض نانورق، [m]
C_d	ضریب دمپر ویسکوز بستر، $[N.s/m^3]$
D	سفتی خمشی، [N.m]
ℓ	مدول الاستیک یانگ، $[N/m^2]$
G	مدول برشی، $[N/m^2]$
h	ضخامت نانورق، [m]
k	ضریب الاستیک خطی بستر، $[N/m^3]$
K	انرژی جنبشی، [N.m]
k_G	ضریب برشی بستر، $[N/m]$
l	پارامتر مقیاس طول ماده، [m]
m_{ij}	مولفه‌های تانسور انحنای، $[N/m]$
U	انرژی کرنشی، [N.m]
V	کار نیروهای خارجی، [N.m]
w	خیز نانورق، [m]
علائم یونانی	
η	ضریب ویسکوالاستیک سازه‌ای، [s]
ν	ضریب پواسون،
σ_{ij}	مولفه‌های تانسور تنش، $[N/m^2]$
ε_{ij}	مولفه‌های تانسور کرنش،
χ_{ij}	مولفه‌های تانسور انحنای، $[1/m]$
μ	مدول برشی، $[N/m^2]$
ρ	چگالی، $[kg/m^3]$
ω	فرکانس طبیعی، $[rad/s]$
ω_{ext}	فرکانس تحریک، $[rad/s]$
ξ	نسبت بخش موهومی به بخش حقیقی فرکانس



شکل ۱۳: نسبت فرکانس بر اساس ضریب بی‌بعد ویسکوالاستیک سازه‌ای نانورق $\bar{l} = 1, r = 1, \nu = 0.38, \bar{C}_d = 40$

Fig. 13. Frequency ratio based on viscoelastic dimensionless coefficient

۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش ارتعاشات آزاد و اجباری نانورق ویسکوالاستیک کلون-ویت واقع بر بستر ویسکوالاستیک پاسترناک با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده مورد بررسی قرار گرفت. با استفاده از حل ناویر ارتعاشات اجباری برای نانورق ویسکوالاستیک برای تکیه‌گاه ساده تحلیل و تاثیر پارامترهای سه‌گانه‌ی بستر ویسکوالاستیک پاسترناک، پارامتر مقیاس طول ماده و ضریب ویسکوالاستیک سازه‌ای نانورق بر روی ماکزیمم خیز دینامیکی در مرکز نانورق، اختلاف فاز و پدیده تشدید مشخص گردید. با توجه به نتایج ارائه شده، در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طول ماده منجر به کاهش اختلاف فاز و رخ دادن پدیده تشدید در فرکانس‌های تحریک بالاتر می‌شود. تحلیل ارتعاشات آزاد با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی گالرکین برای شش شرط تکیه‌گاهی مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت و تاثیر ضرایب سه‌گانه بستر ویسکوالاستیک پاسترناک، ضریب ویسکوالاستیک سازه‌ای نانورق و پارامتر مقیاس طول ماده بر روی فرکانس طبیعی بررسی گردید. وجود ضریب ویسکوالاستیک سازه‌ای نانورق و دمپر ویسکوز خارجی بستر، منجر به ایجاد فرکانس طبیعی مختلط می‌شود؛ به طوری که افزایش هر یک از این پارامترها منجر به افزایش نسبت فرکانس خواهد شد. در بخش تحلیل نتایج مشخص گردید که افزایش پارامتر ویسکوالاستیک سازه‌ای نانورق، بیشترین تاثیر بر روی تکیه‌گاه گیردار و افزایش دمپر ویسکوز خارجی بستر بیشترین تاثیر بر روی تکیه‌گاه ساده را دارد. در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طول ماده و ضرایب الاستیک خطی و برشی بستر باعث افزایش فرکانس طبیعی نانورق می‌شود.

- [9] G. Varzandian, S. Ziaei, Analytical Solution of Non-Linear Free Vibration of Thin Rectangular Plates with Various Boundary Conditions Based on Non-Local Theory, *Mechanical Engineering*, 48(4) (2017).
- [10] M. Ghadiri, H. Safarpour, Free Vibration Analysis of a Functionally Graded Cylindrical Nanoshell Surrounded by Elastic Foundation Based on the Modified Couple Stress Theory.
- [11] R.A. Khalkhali, A. Norouzzadeh, R. Gholami, Forced vibration analysis of conveying fluid carbon nanotube resting on elastic foundation based on modified couple stress theory, *Modares Mechanical Engineering*, 15(3) (2015).
- [12] B. Akgöz, Ö. Civalek, Free vibration analysis for single-layered graphene sheets in an elastic matrix via modified couple stress theory, *Materials & Design*, 42 (2012) 164-171.
- [13] T. Aksencer, M. Aydogdu, Forced transverse vibration of nanoplates using nonlocal elasticity, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 44(7-8) (2012) 1752-1759.
- [14] Y. Lei, S. Adhikari, M. Friswell, Vibration of nonlocal Kelvin–Voigt viscoelastic damped Timoshenko beams, *International Journal of Engineering Science*, 66 (2013) 1-13.
- [15] S. Sahmani, R. Ansari, On the free vibration response of functionally graded higher-order shear deformable microplates based on the strain gradient elasticity theory, *Composite Structures*, 95 (2013) 430-442.
- [16] M. Kiasat, H. Zamani, M. Aghdam, On the transient response of viscoelastic beams and plates on viscoelastic medium, *International Journal of Mechanical Sciences*, 83 (2014) 133-145.
- [1] S. Pradhan, J. Phadikar, Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates, *Journal of Sound and Vibration*, 325(1-2) (2009) 206-223.
- [2] M. Şimşek, Dynamic analysis of an embedded microbeam carrying a moving microparticle based on the modified couple stress theory, *International Journal of Engineering Science*, 48(12) (2010) 1721-1732.
- [3] H. Ma, X.-L. Gao, J. Reddy, A non-classical Mindlin plate model based on a modified couple stress theory, *Acta mechanica*, 220(1-4)(2011)217-235
- [4] S. Poursmaeeli, S. Fazlzadeh, E. Ghavanloo, Exact solution for nonlocal vibration of double-orthotropic nanoplates embedded in elastic medium, *Composites Part B: Engineering*, 43(8)(2012) 3384-3390
- [5] L.-L. Ke, Y.-S. Wang, J. Yang, S. Kitipornchai, Free vibration of size-dependent Mindlin microplates based on the modified couple stress theory, *Journal of Sound and Vibration*, 331(1) (2012) 94-106.
- [6] A.G. Arani, R. Kolahchi, H. Vossough, Buckling analysis and smart control of SLGS using elastically coupled PVDF nanoplate based on the nonlocal Mindlin plate theory, *Physica B: Condensed Matter*, 407(22) (2012)44584465
- [7] A. Bakhsheshy, K. Khorshidi, Free vibration of functionally graded rectangular nanoplates in thermal environment based on the modified couple stress theory, *Modares Mechanical Engineering*, 14(15) (2015)323-330
- [8] S. OmidDezyani, R.-A. Jafari-Talookolaei, M. Abedi, H. Afrasiab, Vibration analysis of a microplate in contact with a fluid based on the modified couple stress theory, *Modares Mechanical Engineering*, 17(2) (2017) 47-57.

- 493.
- [23] A.G. Arani, E. Haghparast, H.B. Zarei, Nonlocal vibration of axially moving graphene sheet resting on orthotropic visco-Pasternak foundation under longitudinal magnetic field, *Physica B: Condensed Matter*, 495 (2016) 35-49.
- [24] S. Poursmaeeli, E. Ghavanloo, S. Fazelzadeh, Vibration analysis of viscoelastic orthotropic nanoplates resting on viscoelastic medium, *Composite structures*, 96 (2013) 405-410.
- [25] J. Liu, Y. Zhang, L. Fan, Nonlocal vibration and biaxial buckling of double-viscoelastic-FGM-nanoplate system with viscoelastic Pasternak medium in between, *Physics letters A*, 381(14) (2017) 1228-1235.
- [26] A.G. Arani, M. Jalaei, Transient behavior of an orthotropic graphene sheet resting on orthotropic visco-Pasternak foundation, *International Journal of Engineering Science*, 103 (2016) 97-113.
- [27] A. Jamalpoor, A. Ahmadi-Savadkoohi, M. Hosseini, S. Hosseini-Hashemi, Free vibration and biaxial buckling analysis of double magneto-electro-elastic nanoplate-systems coupled by a visco-Pasternak medium via nonlocal elasticity theory, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 63 (2017) 84-98.
- [17] A.W. Leissa, *Vibration of plates*, Ohio State Univ Columbus, 1969.
- [18] H. Zamani, M. Bodaghi, M. Aghdam, M. Salehi, Accurate damping analysis of viscoelastic composite beams and plates on suppressive foundation, *Journal of Composite Materials*, 49(18) (2015) 2187-2202.
- [19] M.R. Nami, M. Janghorban, Resonance behavior of FG rectangular micro/nano plate based on nonlocal elasticity theory and strain gradient theory with one gradient constant, *Composite Structures*, 111(2014)349-353
- [20] M. Mohammadimehr, B.R. Navi, A.G. Arani, Free vibration of viscoelastic double-bonded polymeric nanocomposite plates reinforced by FG-SWCNTs using MSGT, sinusoidal shear deformation theory and meshless method, *Composite Structures*, 131 (2015) 654-671.
- [21] S.H. Hashemi, H. Mehrabani, A. Ahmadi-Savadkoohi, Forced vibration of nanoplate on viscoelastic substrate with consideration of structural damping: An analytical solution, *Composite Structures*, 133 (2015) 8-15.
- [22] M. Arefi, A.M. Zenkour, Nonlocal electro-thermo-mechanical analysis of a sandwich nanoplate containing a Kelvin–Voigt viscoelastic nanoplate and two piezoelectric layers, *Acta Mechanica*, 228(2) (2017) 475-