Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 52(2) (2020) 117-120
DOI: 10.22060/mej.2018.13372.5615

Analytic Solution of Governing Equations of Heat and Moisture Transfer in a Capillary-Porous Body with Dirichlet Boundary Condition

H. Nazif*

Mechanical Engineering Department, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran

ABSTRACT: In this research, a new analytical solution of one dimensional coupled equations of moisture and heat transfer in a capillary-porous body is presented. These equations are known as the Luikov system of equations. These partial differential equations are coupled and non-homogenous, that could be considered linear with the assumption that the coefficients of the equations are independent of space, time, and (every) dependent variables. In the innovative method of this survey, at the first, it is assumed that the system of equations is independent of each other, it has been resulted in a general answer for equations by using the method of separation of variables. Next, the special answers will be obtained by considering coupled equations and using the Laplace transform method. In this survey, it has been studied the effect of dimensionless coefficients such as Luikov number, Fourier number, and phase change coefficient on the rate of heat and moisture transfer. The result shows the coupling important effect of Luikov number on the rate of heat and moisture transfer of capillary-porous body equations. It has also resulted that the phase change coefficient has a minor effect on moisture transfer which was also reported in the study of Luikov.

Review History:

Received: 04/09/2017
Revised: 30/05/2018
Accepted: 07/09/2018
Available Online: 12/09/2018

Keywords:

Porous media
Heat and mass transfer
Non-homogeneous equations
Boundary condition
Dirichlet

1. INTRODUCTION

Heat and moisture transfer have an important role in new knowledge and industries. The equations of heat and mass transfer in capillary porous materials are presented by Luikov [1]. These equations are non-homogeneous coupled partial differential equations that by considering some assumptions can be written in the linear form. A solution of these equations has presented by Luikov [2]. Mikhailov and Özisik [3] have solved the coupled equations using integral transform method. Lobo et al. [4], have shown the existence of complex eigenvalue for the system of equations.

In the present study, in order to solve the unsteady one dimensional coupled system of equations, first, the general answers of separate uncoupled equations are obtained. In the novel method of the present study, separate eigenvalue for equations of the mass and the heat transfer are obtained. Using obtained different eigenvalues and applying the method of the separation of variables that leads to the flexibility of solutions, the general solution for the equations is obtained. Finally, considering obtained eigenvalues and eigenfunctions, the special solutions of the equations are obtained using the Laplace transform method.

2. GOVERNING EQUATIONS

The equations of the heat and mass transfer in capillary porous bodies with ignoring the pressure difference effect of filtration motion can be written as [2]:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = Lu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Lu\ Pn\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - Ko\,\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} \tag{2}$$

In the dimensionless form of the Eqs. (1) and (2), Lu is Luikov number, Pn is Possenove, Ko is Kossowich number and ε is phase change coefficient. The normalized temperature and moisture are defined as: $T = \frac{\theta(x,t)-\theta_\infty}{\theta_i-\theta_\infty}$ and $u = \frac{\mu(x,t)-\mu_\infty}{\mu_i-\mu_\infty}$.

The boundary conditions of these equations are assumed in Dirichlet form as:

$$\begin{cases} u(0,t)=0 & at\ (x=0) \\ u(1,t)=0 & at\ (x=1) \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} T(0,t)=0 & at\ (x=0) \\ T(1,t)=0 & at\ (x=1) \end{cases} \tag{4}$$

With the initial conditions of:

$$\begin{aligned} u(x,0)&=1 \qquad 0<x<1 \\ T(x,0)&=1 \qquad 0<x<1 \end{aligned} \tag{5}$$

*Corresponding author's email: nazif@eng.ikiu.ac.ir

Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.

3. SOLUTION METHOD

The uncoupled equations are assumed as:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = Lu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6a}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{6b}$$

Applying the method of separation of variables with different eigenvalues the solution of the equation can be easily provided as:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x)\psi_n(t) \tag{7a}$$

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(n\pi x)\varphi_n(t) \tag{7b}$$

Now, by substituting these relations into Eqs. (1) and (2), two ordinary differential equations with respect to time are seen. Using the Laplace transform method for solving the obtained equations, and implementing boundary and initial conditions with considering orthogonality properties of equations, the solution of equations can be presented as:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left(1-\left(-1^n\right)\right)\sin(n\pi x)\frac{\left(Ae^{s_1 t}+Be^{s_2 t}\right)}{\varphi_n(0)} \tag{8a}$$

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left(1-\left(-1^n\right)\right)\sin(n\pi x)\frac{\left(Ce^{s_1 t}+De^{s_2 t}\right)}{\varphi_n(0)} \tag{8b}$$

Where $\Phi_n(s)$ is written as:

$$\Phi_n(s) = \frac{\begin{vmatrix} (s+Lu\,\omega) & \varphi_n(0) \\ (s+\omega) & (1+Ko\,\varepsilon)\varphi_n(0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s+Lu\,\omega) & -(Lu\,Pn\,\omega) \\ (s+\omega) & (Ko\,\varepsilon\,s) \end{vmatrix}} \tag{9}$$

The s_1 and s_2 are derived from the roots of the denominator of Eq. (9).

4. RESULTS AND DISCUSSIONS

To validate the result and in consequence, the method presented in this research, our results are compared with Kulasiri and Woodhead [5] analytical solution. In the research of reference [5], a long wall with the thickness of x=0.1m is assumed to be in expose of constant ambient temperature and moisture content. The thermo-physical properties of the wall are taken as: r=2400 kJ/kg, a_m=3.0×10^{-6} m^2/h, c=1284 kJ/kg°C, k=0.12 W/m°C, the boundary and initial temperature and moisture content are also assumed: T_i=10°C, $T_{ambient}$=80°C, u_i=0.5, $u_{ambient}$=0.12. Using 20 terms of the series of Eq. (8), the temperature of the porous media at x=0.05 with respect to time is shown in Fig. 1 and is compared with Kulasiri and Woodhead [5].

In the Fig. 2, it is shown that the phase change coefficient has lesser significance in the dynamics of heat and moisture profiles as also is mentioned in the reference [5]. The temperature profiles versus Fourier number (time) by considering the effect of Luikov number that represents the mass diffusion to heat transfer is depicted

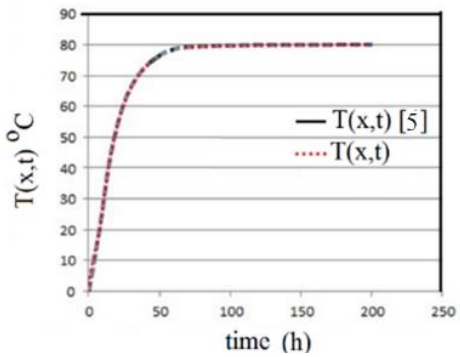


Fig. 1. Temperature verstime at x=0.05

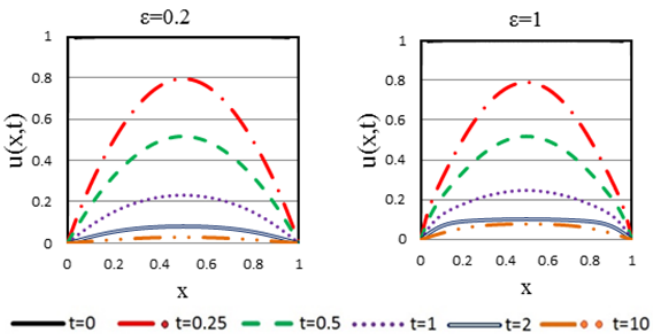


Fig. 2. The transient moisture content profile versus time for different phase change coefficient

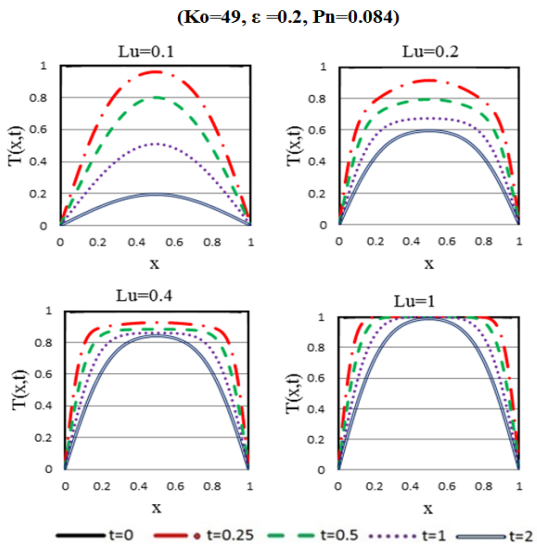


Fig. 3. Temperature distribution with respect to time for different Luikov number

in Fig. 3. In the high *Lu* number that the moisture diffusion is dominated, the temperature distribution variation seems to be more uniform due to the presence of the moisture. However, for the lower *Lu* number, i.e. $Lu<0.001$, the coupling between the equations of heat and mass can be neglected according to the study of Mendes and Philippi [6].

5. CONCLUSIONS

The governing equations of the drying the porous materials have been solved analytically. The solutions were explored to show that diffusion effects cannot be ignored. The phase change has less importance in the vapor diffusion relative to liquid transfer when filtration phenomena due to pressure difference are ignored.

REFERENCES

[1] Luikov A. V., Mikhailov Y. A., *Theory of energy and mass Transfer*, Pergamon Press, 1966.

[2] Luikov A.V., "Heat and mass transfer in capillary-porous bodies", *Pergamon Press*, Oxford, 1966, 233–303.

[3] Mikhailov M.D., Özisik M.N., *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*, Wiley, 1984.

[4] Lobo P.D.C., Mikhailov M.D., M.N. Özisik, "On the complex eigenvalues of Luikov system of equations", *Drying Technology* 5 (2) (1987) 273–286.

[5] Kulasiri D., Woodhead I., "Analytical solutions to coupled partial differential equations governing heat and moisture transfer", *Mathematical problems in engineering*, 2005:3 (2005) 275–291.

[6] 17th congress of mechanical engineering, Mendes N. , César Philippi P., 2003, "Biot number effects on the numerical stability of heat and mass transfer problems", Sao Paolo, pp. 10-14.

This page intentionally left blank

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۲، شماره ۲، سال ۱۳۹۹، صفحات ۴۶۵ تا ۴۷۶
DOI: 10.22060/mej.2018.13372.5615

حل تحلیلی معادلات حاکم بر انتقال حرارت و رطوبت درمحیط متخلخل موئینه با شرط مرزی دیریشله

حمید رضا نظیف*

دانشکده مهندسی، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره)، قزوین، ایران

خلاصه: در این تحقیق معادلات کوپل یک بعدی انتقال رطوبت و حرارت در محیط متخلخل به روش تحلیلی، حل و بررسی شده است. این معادلات به دستگاه معادلات لوییکف معروف است. این دستگاه معادلات دارای مشتقات جزئی به صورت کوپل و ناهمگن بوده که با فرض عدم وابستگی ضرایب معادلات به مکان، زمان و متغیرهای وابسته، بصورت خطی در نظر گرفته می‌شوند. در روش ابتکاری ارائه شده در این مطالعه، با توجه به کوپلینگ معادلات حاکم، ابتدا با فرض دستگاه معادلات مستقل از هم، جواب عمومی معادلات با استفاده از روش جداسازی متغیرها بدست می‌آید. سپس با در نظر گرفتن معادلات کوپل با استفاده از تبدیل لاپلاس جواب‌های خصوصی معادلات به دست آمده است. در این پژوهش تاثیر ضرایب بی‌بعد همچون عدد لوییکف، عدد فوریه و ضریب تغییر فاز بر میزان انتقال حرارت و رطوبت مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج بدست آمده بیانگر تاثیر عدد لوییکف بر میزان کوپلینگ معادلات انتقال حرارت و رطوبت در جسم متخلخل موئینه می‌باشد. همچنین نتایج حاکی از وابستگی بسیار ناچیز ضریب تغییر فاز بر انتقال رطوبت است که این نتیجه در تحقیقات صورت گرفته توسط لوییکف نیز مطرح شده است.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۶/۰۶/۱۳
بازنگری: ۱۳۹۷/۰۳/۰۹
پذیرش: ۱۳۹۷/۰۶/۱۶
ارائه آنلاین: ۱۳۹۷/۰۶/۲۱

کلمات کلیدی:
محیط متخلخل
انتقال حرارت
انتقال جرم
معادلات ناهمگن
شرط مرزی دیریشله

۱- مقدمه

پدیده انتقال حرارت و رطوبت در مواد متخلخل، از اهمیت زیادی در علوم نوین برخوردار است. مواد متخلخل مویینه نیز از جمله مواد پرکاربردی هستند که در صنایع مختلف مانند صنایع غذایی، ساختمان و غیره مورد استفاده قرار می‌گیرند. جسم متخلخل دارای یک استخوان‌بندی است که اصطلاحا شبکه جامد نام دارد. ناحیه متخلخل مجراهای میکروسکوپی است که انتقال گازهای غیرقابل‌تراکم، مایع و بخار در آنجا صورت می‌گیرد. معادلات انتقال حرارت و رطوبت در مواد متخلخل موئینه توسط لوییکف [۱] مطرح شد. این معادلات، معادلاتی با مشتقات جزئی، ناهمگن، غیرخطی و جفت (کوپل) هستند. وابستگی ضرایب این معادلات به دما، رطوبت یا فشار و همچنین پارامترهای مستقل مانند مکان و زمان موجب غیرخطی شدن دستگاه معادلات مورد بررسی می‌شود. به منظور حل همزمان معادلات لوییکف روش‌های مختلف عددی و تحلیلی ارائه شده است که به طور مختصر به بررسی روش‌های حل ارائه شده پرداخته‌ایم. لوییکف [۲]، برای اولین بار یک روش برای حل همزمان معادلات انتقال جرم و حرارت حاکم برای مواد متخلخل ارائه کرد که میزان تاثیر تغییر دما را بر انتقال رطوبت نشان می‌داد. میخایلف و اوزشیک [۳]، با استفاده از تبدیلات کلاسیک انتگرالی به یک راه حل تحلیلی برای حل این معادلات دست یافتند. لوبو و همکاران [۴] یک روش برای اثبات وجود مقادیر ویژه مختلط در این سیستم معادلات ارائه کردند. آن‌ها اثر مقادیر ویژه مختلط بر نتایج توزیع دما و رطوبت را برای یک مثال خاص، خشک کردن ورقی از مواد متخلخل مرطوب در تماس با یک صفحه داغ بررسی نمودند. تأثیر ریشه‌های مختلط بر روی دمای بدون بعد، رطوبت و میزان خشک شدن محلی در کار پاندی و همکاران [۵]، برای مثال خاصی در مورد خشک شدن یک ورق متخلخل مرطوب در تماس با توزیع حرارت و رطوبت یکنواخت مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. ریبیرو و همکاران [۶]، با استفاده از روش ترکیبی تحلیلی-عددی به حل این معادلات پرداختند. در این روش از تبدیلات انتگرالی عمومی به همراه مقادیر ویژه و توابع ویژه تحلیلی برای حل استفاده شده است. این روش آن‌ها را از محاسبه

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: nazif@eng.ikiu.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode دیدن فرمائید.

مقادیر ویژه مختلط بی‌نیاز می‌نمود. کین و همکاران [۷]، برای اولین بار برای حل این مسئله از تبدیل لاپلاس بهره بردند و در ادامه از روش انتقال توابع استفاده کردند. لیو و چنگ [۸]، معادلات خطی لوییکف را برای یک ورقه چوب در حال خشک شدن مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها با استفاده از توابع پتانسیل کوپلینگ معادلات را برطرف کرده‌اند. در نهایت، آن‌ها نتایج به دست آمده از حل معادلات غیر کوپل مرتبه چهارم را با داده‌های آزمایشگاهی مقایسه کردند. آن‌ها نتایج عددی به دست آمده با نتایج منتشر شده اجزای محدود و داده‌های تجربی برای نمونه‌هایی از چوب صنوبر مقایسه نمودند. لوئیس و فرگوسن [۹]، برای حل عددی معادلات انتقال حرارت و رطوبت مواد متخلخل موئینه تحت تاثیر گرادیان فشار از آنالیز المان محدود استفاده کردند. در تحقیق آنان مدل ریاضی ارائه شده، که تا حدی غیرخطی است، و در آن برخی از خصوصیات مواد در طول فرآیند حل ثابت باقی مانده است. آن‌ها جواب خود را با یک مدل کاملا غیرخطی مقایسه نموده‌اند که در آن همه خواص مواد مجاز به تغییر در طی فرآیند حل می‌باشند. کومینی و لوئیس [۱۰] یک روش عددی برای حل این معادلات در دو بعد ارائه کردند، که در این روش از توابع وزنی و همچنین تئوری گرین برای رسیدن به پاسخ استفاده شده است. این حل در قالب سه مثال، خشک کردن آجر، خشک کردن عایق الکتریکی سرامیکی و همچنین بررسی انتقال حرارت و رطوبت در مصالح ساختمانی بتن مورد بررسی قرار گرفته است. ژانگ و هو [۱۱]، یک روش تحلیلی برای حل معادلات حاکم بر انتقال حرارت و رطوبت درطی خشک کردن مواد غذایی ارائه کردند. آن‌ها در این پژوهش از تبدیلات محدود سینوسی و لاپلاس به منظور حل بهره برده‌اند. این روش معیاری مناسب برای بررسی دقت و صحت، همگرایی و اثربخشی روش‌های مختلف عددی می‌باشد. دانتاس و همکاران [۱۲] با روش تبدیل عمومی انتگرالی که روش تحلیلی-عددی است، معادلات یک‌بعدی لوییکف را به کمک مقدار ویژه کمکی حل کردند. در مرجع [۱۳] جدیدترین تحقیقات محاسباتی و تئوری حل عددی معادلات انتقال حرارت و رطوبت در اجسام متخلخل به نحوی پیوسته گردآوری شده است. مجموعه مذکور، تحقیقات مرتبط با علوم مختلف شامل مکانیک، شیمی، عمران و کشاورزی دررابطه با انتقال حرارت و رطوبت مواد متخلخل را جمع‌آوری و تبیین نموده است. وو و ایرودایاراج [۱۴]، انتقال حرارت، جرم و فشار در مواد غذایی پایه نشاسته را در قالب یک مدل دوبعدی و با فرض خواص غیرخطی، با استفاده از روش المان محدود مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها روش المان محدود را با جواب دقیق مورد ارزیابی قرار دادند. مدل ارزیابی شده المان محدود برای پیش‌بینی دما و رطوبت و فشار در سیستم‌های غذایی مبتنی بر نشاسته استفاده شده است. مقایسه پیش‌بینی‌های انتقال حرارت، رطوبت و فشار با نتایج آزمایشگاهی موجود نشان از نتایج قابل قبول این روش حل است. چانگ و ونگ [۱۵] برای حل معادلات انتقال حرارت و رطوبت در مواد متخلخل، روش تحلیلی پیشنهاد کردند که در آن معادلات دیفرانسیل جزئی و شرایط مرزی در ابتدا تحت تبدیل لاپلاس قرار می‌گیرند، و معادلات حاکم به معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه چهارم تبدیل می‌شوند. آن‌ها راه حل تحلیلی را برای یک مثال خاص (ورقه چوبی) با استفاده از تکنیک رفع کوپلینگ مورد بررسی قرار دادند . سیلوا و همکاران [۱۷] با خطی‌سازی معادلات لوییکف با استفاده از تعمیم قوانین فوریه و فیک البته برای فرآیندهای غیر مارکوویکی (انتشار غیر مستقیم) معادلاتی را استخراج کردند. آن‌ها به منظور حل این معادلات از تبدیل لاپلاس و سری فوریه استفاده کردند و در نهایت آن‌ها دستگاه معادلات یک بعدی را مورد آنالیز قرار دادند. در این پژوهش به حل تحلیلی معادلات انتقال حرارت و رطوبت در مواد متخلخل مویینه پرداخته شده است. فیزیک حاکم بر این مواد از دستگاه معادلات لوییکف پیروی می‌کند. به منظور حل تحلیلی، معادلات حاکم را اغلب با فرض ثابت بودن خواص ترموفیزیکی و نادیده گرفتن جملات غیر ضروری ساده‌سازی می‌کنند. انتقال جرم از طریق نفوذ و حرکت فیلتری (احتساب حضور فشار) و پدیده موئینگی صورت می‌گیرد. البته انتقال فیلتراسیون به دلیل وجود گرادیان فشار رخ می‌دهد. با توجه به رابطه انتقال جرم با فشار (انتقال فیلتراسیون) و همچنین وجود رابطه‌ای بین انتقال جرم و رطوبت ($\sum_{i=1}^{i=2}\mu_i = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i}{m_0}$) که در آن زیرنویس‌های i =۰ بیانگر بدنه خشک، i =۱ بخار آب و i =۲ آب مایع می‌باشد و کوپل بودن معادلات انتقال رطوبت و انتقال حرارت تاثیرات جمله فشار در معادلات حاکم [۹] مشهود خواهد بود. انتقال مایع در جسم متخلخل بوسیله انتشار نفوذی و به شکل جذب مویینگی تحت تاثیر پتانسیل موئینگی است. ما در این پژوهش با صرف‌نظر کردن از انتقال فیلتراسیون که به معنای ثابت بودن فشار کل هوای مرطوب در داخل جسم متخلخل می‌باشد معادلاتی مستقل از فشار

را مورد بررسی قرار دادیم [۲]. در مورد نحوه انتقال حرارت نیز با توجه به اینکه مقدار میانگین عدد رینولدز در مواد متخلخل موئینه کمتر از ۲۰ می‌باشد و زمانی‌که مقدار ضرب دو عدد بی‌بعد گراشف و رینولدز کمتر از هزار باشد، ($Gr.Re<۱۰۰۰$) می توان از اثر انتقال حرارت جابه‌جایی در مقایسه با اثر انتقال حرارت هدایت صرف نظر کرد[۲]. به منظور ساده‌سازی معادلات حاکم، فرضیات ذکر شده در معادلات مورد بررسی اعمال شده است. فرضیات در نظر گرفته شده در این پژوهش ضمن بی‌نیاز ساختن ما از توابع و مقادیر ویژه مختلط که موجب پیچیدگی روش حل می‌شود به استناد نتایج حاصل از مطالعات کولاسیری و وودهید [۱۶] و لوییکف [۲] تا حدود زیادی به نتایج واقعی نزدیک می‌باشد.

در تحقیق حاضر، به منظور حل معادلات کوپل، غیردائم و یک‌بعدی حاکم بر انتقال حرارت و رطوبت در مواد متخلخل موئینه، ابتدا پاسخ عمومی معادلات حاکم را از حل معادلات غیرکوپل به دست آورده‌ایم. در روش نوآورانه در این پژوهش ابتدا با فرض رفع کوپلینگ بین دستگاه معادلات، مقادیر و توابع ویژه جداگانه‌ای برای هریک از معادلات دما و رطوبت محاسبه شده است. سپس، جواب عمومی معادلات با توجه به شرایط اولیه و مرزی با استفاده از روش جداسازی متغیرها به دست می‌آیند. اهمیت این فرض در این است که رفتار معادله حرارت و رطوبت می‌توانند متفاوت باشند. این در حالی است که در تحقیق قبلی انجام شده توسط کولاسیری و وودهید [۱۶] مقادیر و توابع ویژه معین و مفروض در نظر گرفته شده است. این فرض از انعطاف‌پذیری جواب‌های بدست آمده می‌کاهد. برای بدست آوردن جواب خصوصی، در این قسمت معادلات به شکل کوپل در نظر گرفته می‌شوند. سپس به کمک مقادیر و توابع ویژه به دست آمده در مرحله قبل، از معادلات تبدیل لاپلاس گرفته و جواب خصوصی معادلات را می‌یابیم. در نهایت با استفاده از روش جمع آثار جواب عمومی و خصوصی معادلات، پاسخ نهایی معادلات حاصل می‌گردند. نتایج حاصل از حل دستگاه معادلات لوییکف نیز برای یک نمونه خاص (سرامیک متخلخل) به صورت نمودار مورد بررسی قرار داده شده است.

۲- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر انتقال حرارت و رطوبت در مواد متخلخل با نادیده گرفتن تاثیر فشار (فرض عدم انتقال جرم از طریق فیلتراسیون)، اولین بار توسط لوییکف به صورت زیر مطرح شد [۲].

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tau} = a_m \nabla^2 \mu + a_m^T \nabla^2 \theta \qquad \text{(۱ الف)}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \nabla^2 \theta + \frac{r\varepsilon}{c}\frac{\partial \mu}{\partial \tau} \qquad \text{(۱ ب)}$$

در این معادلات μ محتوای رطوبت (نسبت جرم رطوبت به جرم بدنه خشک)، θ درجه حرارت، τ متغیر معرف زمان، a ضریب نفوذ حرارت، a_m ضریب نفوذ رطوبت، a_m^T ضریب نفوذ رطوبت در دمای ثابت، c گرمای ویژه، r گرمای نهان تبخیر و ε ضریب تغییر فاز است. بدیهی است در جدارهای با طول بسیار بیشتر از ضخامت، در سیلندرهای با طول زیاد و کره می‌توان فرض انتقال حرارت و رطوبت تک بعدی را نمود .[۱] با فرض ثابت بودن ضرایب معادلات حاکم شامل ضرایب نفوذ انتقال حرارتa ، نفوذ انتقال جرم a_m و سایر ضرایب c و ε و همچنین با فرض انتقال جرم و حرارت در یک بعد، معادلات فوق به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \mu}{\partial X^2} + a_m^T \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \qquad \text{(۲ الف)}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{r\varepsilon}{c}\frac{\partial \mu}{\partial \tau} \qquad \text{(۲ ب)}$$

در این پژوهش به حل معادلات حاکم بر انتقال حرارت و رطوبت در مواد متخلخل موئینه با استفاده از شرایط مرزی دیریشله می‌پردازیم. به ترتیب شرایط مرزی برای معادلات انتقال رطوبت و حرارت (۲ الف) و (۲ ب) به صورت زیر است:

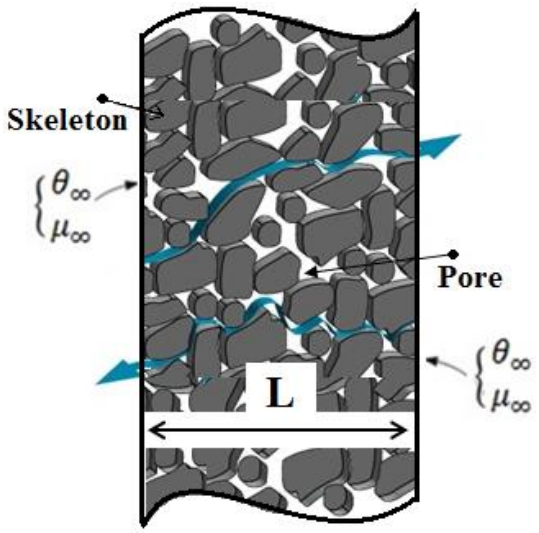
$$\begin{cases} \mu(0,\tau) = \mu_\infty & ,(X=0) \\ \mu(l,\tau) = \mu_\infty & ,(X=L) \end{cases} \qquad \text{(۳ الف)}$$

$$\begin{cases} \theta(0,\tau) = \theta_\infty & ,(X=0) \\ \theta(l,\tau) = \theta_\infty & ,(X=L) \end{cases} \qquad \text{(۳ ب)}$$

شرایط اولیه نیز برای معادلات انتقال رطوبت و حرارت به این ترتیب می‌باشند:

$$\begin{cases} \mu(X,0) = \mu_i & 0 < X < 1 \\ \theta(X,0) = \theta_i & 0 < X < 1 \end{cases} \qquad \text{(۳ ج)}$$

در شکل۱ هندسه‌ای فرضی از مساله مورد نظر آمده است. هنگامی‌که مقدار یک تابع مستقل در یک مکان خاص دارای مقدار مشخص باشد شرط مرزی از نوع دیریشله است. اصولا شرط مرزی دیریشله حالت خاصی از شرایط مرزی دقیق ترکیبی نیومن-دیریشله (شرط مرزی رابین) می‌باشد.



شکل۱: هندسه مساله با شرایط مرزی نوع اول دیریشله

Fig. 1: Problem geometry with deirshele first type boundry condition

به منظور کاهش تعداد متغیرهای موثر بر مساله مورد نظر، بهبود مطالعه پارامتری و بررسی تاثیر ضرایب معادلات لوییکف بر انتقال حرارت و رطوبت، معادلات حاکم را به صورت بی‌بعد بازنویسی می‌کنیم. در نهایت معادلات بدون بعد حاکم بر انتقال حرارت و رطوبت اجسام متخلخل موئینه به صورت زیر به دست می‌آیند [۱۲].

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = Lu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Lu\,Pn\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \text{(۴ الف)}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - Ko\,\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{(۴ ب)}$$

در این معادلات بی‌بعد، Lu عدد لوییکف، Pn عدد پوسنف، Ko عدد کسویچ می‌باشند. بی‌بعدسازی شرایط مرزی و شرایط اولیه معادلات انتقال حرارت و رطوبت مواد متخلخل موئینه نیز به صورت زیر انجام شده است:

شرایط اولیه دما و رطوبت:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 1 \qquad 0 < x < 1 \\ T(x,0) &= 1 \qquad 0 < x < 1 \end{aligned} \qquad \text{(۵ الف)}$$

شرایط مرزی حاکم بر معادله بی بعد انتقال رطوبت و انتقال حرارت به ترتیب به این صورت می‌باشند:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 & at\ (x=0) \\ u(1,t) = 0 & at\ (x=1) \end{cases} \qquad \text{(۵ ب)}$$

$$\begin{cases} T(0,t) = 0 & at\ (x=0) \\ T(1,t) = 0 & at\ (x=1) \end{cases} \qquad \text{(۵ ج)}$$

۳- روش حل معادلات

در این تحقیق به منظور حل معادلات انتقال حرارت و رطوبت در محیط متخلخل موئینه، مقدار و تابع ویژه هر معادله به طور جداگانه استخراج می‌شود. اهمیت این فرض در این است که رفتار معادله حرارت و رطوبت می‌تواند متفاوت باشد. این در حالی است که در تحقیق قبلی انجام شده توسط کولاسیری و وودهید [۱۶] مقادیر و توابع ویژه معین و مفروض در نظر گرفته شده است. این فرض از انعطاف‌پذیری جواب‌های بدست آمده می‌کاهد. اما در روش ارائه شده در این پژوهش مقادیر و توابع ویژه پس از رفع کوپلینگ، محاسبه شده و بدست آمده است. رفع کوپلینگ معادلات با حذف جملات وابسته به انتقال حرارت از معادلات انتقال رطوبت و جملات وابسته به انتقال رطوبت از معادلات انتقال حرارت صورت می‌پذیرد. در نهایت معادلات غیرکوپل انتقال رطوبت و حرارت به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = Lu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{(۶ الف)}$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \text{(۶ ب)}$$

برای حل معادلاتی که رفع کوپلینگ شده‌اند و در روابط (۶ الف) و (۶ ب) نشان داده شده‌اند، از روش جداسازی متغیرها به ترتیب زیر استفاده می‌کنیم:

روش جداسازی متغیرها در معادله غیر وابسته رطوبت (رابطه (۶ الف)) به صورت زیر است:

$$u(x,t) = \xi(x)\psi(t) \qquad \text{(۷ الف)}$$

$$\frac{\xi''(x)}{\xi(x)} = \frac{\lambda}{Lu} = \lambda' \qquad \text{(۷ ب)}$$

نتیجه حاصل از روش جداسازی متغیرها در روابط (۷ ج) و (۷ د) آورده شده است:

$$\psi(t) = c_3 e^{-\lambda t} \qquad \text{(۷ ج)}$$

$$\xi(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda'}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda'}x \qquad \text{(۷ د)}$$

همچنین با جایگذاری روابط (۷ ج) و (۷ د) در رابطه (۷ الف) معادله زیر به دست می‌آید:

$$u(x,t) = c_3 e^{-\lambda t}(c_1 \cos\sqrt{\lambda'}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda'}x) \qquad \text{(۸ الف)}$$

مقدار و تابع ویژه معادله انتقال رطوبت با حل رابطه (۸ الف) با

استفاده از شرایط مرزی که در رابطه (۵ الف) به آن اشاره شد به ترتیب زیر حاصل می‌شود.

$$\lambda'_n = n^2\pi^2 \quad \text{(۸ ب)}$$

$$\xi_n(x) = sin\sqrt{\lambda'}x = sin(n\pi x) \quad \text{(۸ ج)}$$

به منظور دستیابی به پاسخ عمومی معادله انتقال حرارت، بار دیگر از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌گردد:

روش جداسازی متغیرها در معادله غیر وابسته دما (رابطه (۶ ب)) به صورت زیر می‌باشد:

$$T(x,t) = \eta(x)\varphi(t) \quad \text{(۹ الف)}$$

$$\frac{\eta''(x)}{\eta(x)} = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = -\omega \quad \text{(۹ ب)}$$

نتیجه حاصل از روش جداسازی متغیرها، در روابط (۹ ج) و (۹ د) آورده شده است:

$$\varphi(t) = d_3 e^{-\omega t} \quad \text{(۹ ج)}$$

$$\eta(x) = d_1 cos\sqrt{\omega}x + d_2 sin\sqrt{\omega}x \quad \text{(۹ د)}$$

با جایگذاری معادلات (۹ ب) و (۹ ج) در معادله (۹ الف) رابطه زیر به دست می‌آید:

$$T(x,t) = d_3 e^{-\omega t}\left(d_1 cos\sqrt{\omega}x + d_2 sin\sqrt{\omega}x\right) \quad (۱۰)$$

مقدار و تابع ویژه حاصل از بررسی شرایط مرزی در پاسخ عمومی معادله انتقال حرارت:

$$\omega_n = \lambda'_n = n^2\pi^2 \quad (۱۱)$$

$$\eta_n(x) = \xi_n(x) = sin\sqrt{\omega}x = sin(n\pi x) \quad (۱۲)$$

با توجه به رابطه (۹ ب) و (۷ ب) و تساوی مقادیر ویژه و توابع ویژه در معادلات غیر وابسته انتقال رطوبت و حرارت داریم:

$$\eta''_n(x) = -\omega_n\eta_n(x) = \xi''_n(x) = -\omega_n\xi_n(x) \quad (۱۳)$$

با جایگذاری روابط (۱۱) و (۱۲) در معادلات (۷ الف) و (۹ الف) به نتایج زیر دست می‌یابیم:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\xi_n(x)\psi_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, sin(n\pi x)\,\psi_n(t) \quad \text{(۱۴ الف)}$$

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\eta_n(x)\varphi_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n\, sin(n\pi x)\,\varphi_n(t) \quad \text{(۱۴ ب)}$$

حال روابط (۱۴ الف) و (۱۴ ب) را با توجه به تساوی‌هایی که در معادلات (۱۱) تا (۱۳) ذکر شده است، در معادلات اساسی (معادلات (۴ الف) و (۴ ب)) قرار داده و بازنویسی می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\psi'_n(t) + Lu\,\omega_n\,\psi_n(t) - Lu\,Pn\,\omega_n\varphi_n(t))\,c_n sin(n\pi x) = 0 \quad \text{(۱۵ الف)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi'_n(t) + \omega_n\varphi_n(t) + Ko\varepsilon\psi'_n(t))d_n\, sin(n\pi x) = 0 \quad \text{(۱۵ ب)}$$

با توجه به اینکه معادلات بالا یک مجموعه متعامد هستند به ازای تمام مقادیر n ضرایب $sin(n\pi x)$ برابر با صفر خواهند بود.

$$\psi'_n(t) + Lu\,\omega_n\,\psi_n(t) - Lu\,Pn\,\omega_n\varphi_n(t) = 0 \quad \text{(۱۶ الف)}$$

$$\varphi'_n(t) + \omega_n\varphi_n(t) + Ko\varepsilon\psi'_n(t) = 0 \quad \text{(۱۶ ب)}$$

در مرحله بعد، از تبدیل لاپلاس ($f(t) \to F(s)$) برای به دست آوردن $\varphi_n(t)$ و $\psi_n(t)$ استفاده می‌کنیم:

$$(s + Lu\,\omega_n)\Psi_n - Lu * Pn * \omega_n\Phi_n = \psi_n(0) \quad \text{(۱۷ الف)}$$

$$s\Phi_n + \omega_n\Phi_n + Ko * \varepsilon * (s\Psi_n) = \varphi_n(0) + Ko * \varepsilon\,\psi_n(0) \quad \text{(۱۷ ب)}$$

از دستگاه معادلات (۱۷ الف) و (۱۷ ب) نتایج زیر بدست می‌آید:

$$\Psi_n(s) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_n(0) & -(Lu\,Pn\,\omega) \\ (1+Ko\,\varepsilon)\varphi_n(0) & (Ko\,\varepsilon\,s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s+Lu*\omega) & -(lu*Pn*\omega) \\ (s+\omega) & (Ko*\varepsilon*s) \end{vmatrix}} \quad \text{(۱۸ الف)}$$

$$\Phi_n(s) = \frac{\begin{vmatrix} (s+Lu\,\omega) & \varphi_n(0) \\ (s+\omega) & (1+Ko\,\varepsilon)\varphi_n(0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s+Lu\,\omega) & -(Lu\,Pn\,\omega) \\ (s+\omega) & (Ko\,\varepsilon\,s) \end{vmatrix}} \quad \text{(۱۸ ب)}$$

با استفاده از روابط بالا و روش تبدیل لاپلاس معکوس نتایج زیر به دست می‌آید:

$$\psi_n(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \quad \text{(۱۹ الف)}$$

$$\varphi_n(t) = Ce^{s_1 t} + De^{s_2 t} \quad \text{(۱۹ ب)}$$

که در آن A، B، C، D و همچنین s_1،s_2 معین می‌باشند. با جایگذاری معادلات (۱۹ الف) و (۱۹ ب) در معادلات (۱۴ الف) و (۱۴ ب) شکل کلی معادلات به صورت زیر در می‌آیند:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x)\,(Ae^{s_1 t}+Be^{s_2 t}) \qquad (۲۰ \text{ الف})$$

$$T(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(n\pi x)\,(Ce^{s_1 t}+De^{s_2 t}) \qquad (۲۰ \text{ ب})$$

حال در گام پایانی حل معادلات، به بررسی شرایط اولیه حاکم بر معادلات به منظور دستیابی به مقادیر c_n و d_n می‌پردازیم.

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x)\,\varphi_n(0)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x)=1 \qquad (۲۱ \text{ الف})$$

$$T(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(n\pi x)\,\varphi_n(0)=\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(n\pi x)=1 \qquad (۲۱ \text{ ب})$$

با توجه به معادلات در می‌یابیم که مقادیر C_n و D_n برابر می‌باشند. مطابق تعریف سری فوریه می‌توان نوشت:

$$C_n=D_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1^n)\right) \qquad (۲۲)$$

پاسخ نهایی معادلات حاکم بر انتقال رطوبت و حرارت در جسم متخلخل موئینه به ترتیب به صورت زیر بدست می‌آید:

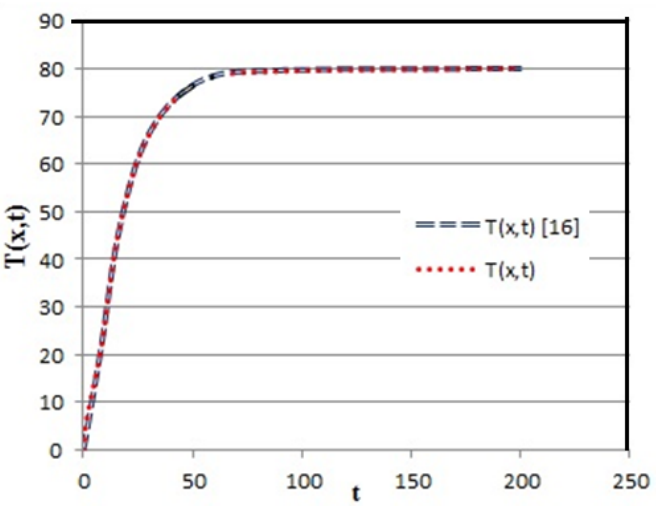
$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1^n)\right)\sin(n\pi x)\frac{(Ae^{s_1 t}+Be^{s_2 t})}{\varphi_n(0)} \qquad (۲۳ \text{ الف})$$

$$T(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1^n)\right)\sin(n\pi x)\frac{(Ce^{s_1 t}+De^{s_2 t})}{\varphi_n(0)} \qquad (۲۳ \text{ ب})$$

معادلات اخیر جواب معادلات به صورت صریح توزیع رطوبت و حرارت با ضرایبی معین می باشند.

۴- نتایج

به منظور صحت سنجی روش ارائه شده در این پژوهش، نتیجه‌ای حاصل از تحقیق حاضر با نتیجه به دست آمده از پژوهش کولاسیری و وودهید [۱۶] مقایسه شده است. در فرضیات مرجع [۱۶] جداری با طول بلند به ضخامت x=۰/۱m تحت دما و رطوبت محیطی ثابت قرار گرفته است. ضرایب ترموفیزیکی جدار و محیط به صورت: r=۲۴۰۰ kJ/kg، k=۰/۱۲ W/m °C، c=۱.۲۸۴ kJ/kg°C، a_m=۳/۰×۱۰$^{-۶}$ m^2/h، T_i=۱۰°C، $T_{ambient}$=۸۰°C، u_i=۰/۵ و $u_{ambient}$=۰/۱۲ می‌باشند. با فرض ۲۰ جمله از سری جواب، توزیع رطوبت و دما با زمان محاسبه شده است. در شکل ۲ توزیع دمای جسم متخلخل بر حسب زمان، حاصل از مطالعه کولاسیری و وودهید [۱۶] و مطالعه انجام شده در



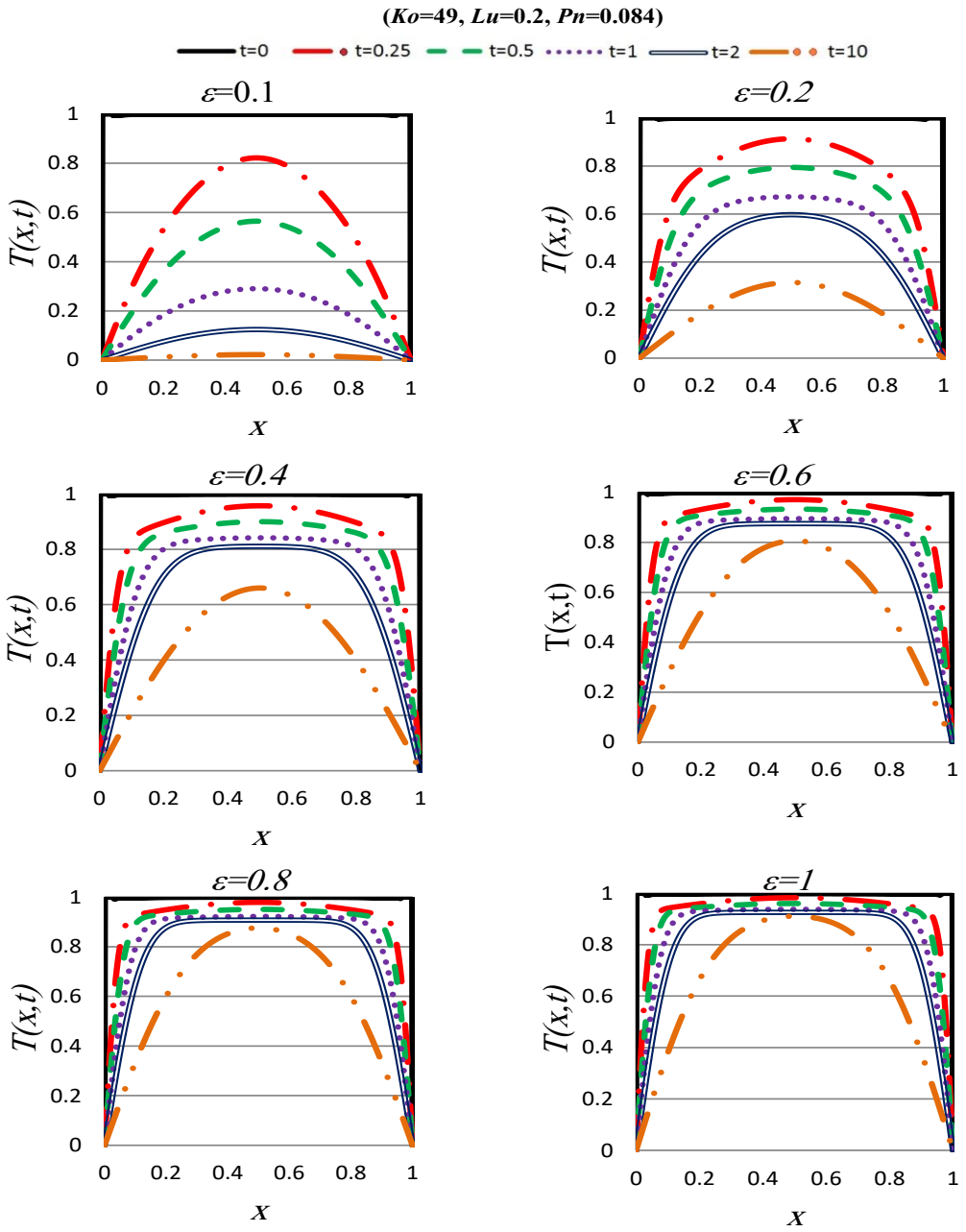
شکل۲: تغییر دما به ازای زمان در مکان x=۰/۰۵(مرکز جسم متخلخل) کولاسیری و وودهید ((T(x,t == =) مطالعه انجام شده در این تحقیق(T(x,t...))

Fig. 2: Temperutre change per direction in x=0.05(center of porous media) kolasiry and vorhid t,x)T))---) study in this reserch T(x,t,...)))

این تحقیق مقایسه شده است. نتیجه مقایسه به طور تقریبی نشان دهنده انحرافی کمتر از ۱٪ بوده که بیانگر یکسان بودن جواب حاصل از هر دو روش می‌باشد. مقایسه صورت گرفته روش حل مورد بررسی در تحقیق حاضر را تایید می‌کند.

نتایج حاصل از حل تحلیلی معادلات حاکم بر انتقال حرارت و رطوبت مواد متخلخل موئینه که به صورت معادلات (۲۳ الف) و (۲۳ ب) برای مثال خاص (سرامیک متخلخل) در اینجا آمده است. این نمودارها بر اساس تغییر ضرایب بی‌بعد در معادلات حاکم از جمله عدد لوییکف (Lu)، عدد فوریه (Fo) و ضریب تغییر فاز , (ε) به منظور بررسی رفتار جسم متخلخل ترسیم شده است.

در شکل۳ توزیع دما به ازای ضرایب تغییر فاز (ε) مختلف نمایش داده شده است. در واقع ε=۰ به معنای عدم تغییر فاز در جسم متخلخل می‌باشد. در اینصورت رطوبت در محیط متخلخل به شکل فاز مایع منتقل می‌شود، اما وقتی که ε=۱ ، به این معناست که کل مایع داخل جسم متخلخل امکان تغییر فاز تا ۱۰۰٪ را خواهد داشت. با مقایسه شکل۳، (ε=۰/۱) و شکل۳، (ε=۱) که توزیع دما به ترتیب به ازای بیشترین و کمترین ضرایب تغییر فاز ε=۰/۱ و ε=۱ رسم شده است، شاهد این هستیم که گرادیان دما در طول جسم متخلخل به ازای ε=۰/۱ در زمان های مختلف بسیار بیشتر از گرادیان دما به ازای ε=۱ است. زمانی که ε=۱ است، به این معناست که جسم متخلخل



شکل ۳: تغییر دمای بی بعد ($T=\frac{\theta(x,t)-\theta_\infty}{\theta_i-\theta_\infty}$) بر حسب مکان بی بعد (x) به ازای ضریب تغییر فاز(ε) مختلف

Fig. 3: Non dimantion temperture per non demation location (x) for deffernt phase change cofficient(ε)

به‌گونه‌ای رفتار می‌کند که امکان تغییر فاز صددرصدی وجود دارد. لذا، به این منظور لازم است تا توزیع دمای یکنواختی در طول جسم متخلخل وجود داشته باشد. پس عمده انرژی حرارتی ابتدا صرف تغییر فاز سیال می‌شود و تغییر دمای بدنه جسم متخلخل یکنواخت تغییر می‌کند. لذا شایان ذکر است که، قابلیت انتقال حرارت به مایع با افزایش ضریب تغییر فاز افزایش می‌یابد، در نتیجه به ازای ضریب تغییر فاز ۱ نسبت به سایر مقادیر ε شاهد انتقال حرارت بیشتری به مایع هستیم.

برای بررسی تاثیر و مقایسه اهمیت و بزرگی نفوذ حرارت و نفوذ رطوبت، در انتقال حرارت، معادلات انتقال حرارت و رطوبت اجسام متخلخل در رابطه‌های (۴ الف) و (۴ ب) به سادگی به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=Lu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-Lu\,Pn\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \text{(۲۴ الف)}$$

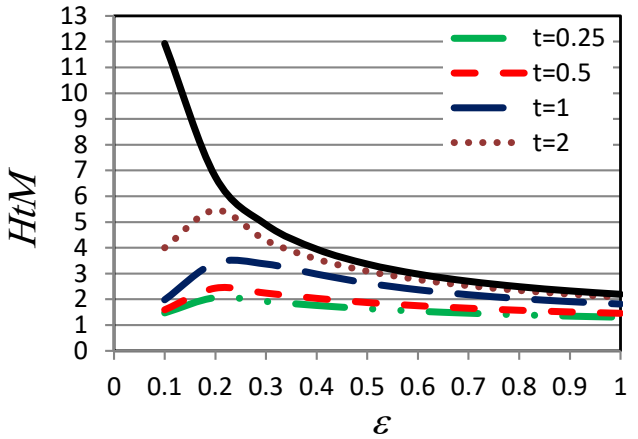
$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = (1 + Ko\,\varepsilon\,Lu\,Pn)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - Ko\,\varepsilon\,Lu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (۲۴ ب)$$

نسبت قدر مطلق نفوذ حرارتی به نفوذ جرمی در معادله انتقال حرارت (۲۴ ب)، را با عدد بی بعد (HtM) به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$HtM = \frac{(1 + Ko\,\varepsilon\,Lu\,Pn)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}{Ko\,\varepsilon\,Lu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \quad (۲۵)$$

کمیت HtM در شکل ۴ ترسیم شده است. با توجه به شکل۴ در می‌یابیم که با حضور فاز بخار در داخل جسم متخلخل یعنی با افزایش ε تا مقادیر کوچکتر از۰/۲ = ε، که فقط اندکی حرارت صرف تغییر فاز می‌شود، انتقال نفوذ حرارتی نسبت به نفوذ جرمی از دو تا شش برابر می‌شود. به ویژه به ازای ضریب نفوذ حرارتی بیشتر یا (فوریه‌های بیشتر) که نشان‌دهنده انتشار سریع‌تر گرما از داخل جسم است این عدد خیلی بیشتر می‌شود. با افزایش عدد ε، حرارت، صرف تغییر فاز شده، سهم انتقال حرارت به صورت رطوبت قوت بیشتری پیدا می‌کند و رفتار مجانب‌وار منحنی را توضیح می‌دهد.

با توجه به اینکه در ماده مورد بررسی این پژوهش عدد پوسنف (نشان‌دهنده تغییرات در رطوبت ناشی از گرادیان درجه حرارت نسبت به کل تغییر رطوبت است) دارای مقادیر کوچکی است امکان تغییرات محسوس رطوبت وجود ندارد. نکته قابل تامل دیگر در شکل ۵ این است که ضریب تغییر فاز تاثیر ملموسی بر انتقال رطوبت ندارد. طبق پژوهش صورت گرفته توسط لوییکف بر روی معادلات بدون بعد

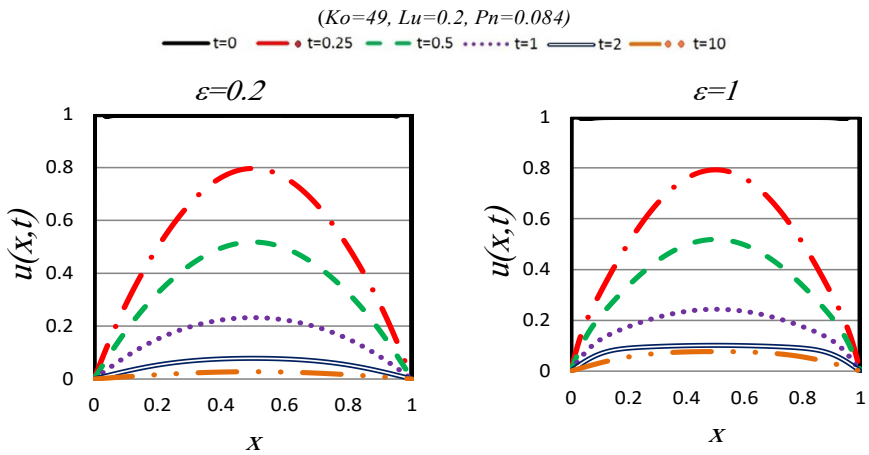


شکل۴: تغییر HtM نسبت به ضریب تغییر فاز(ε) به ازای فوریه های مختلف

Fig. 4: HtM change relative to phase change coefficient (ε) for different Fourier

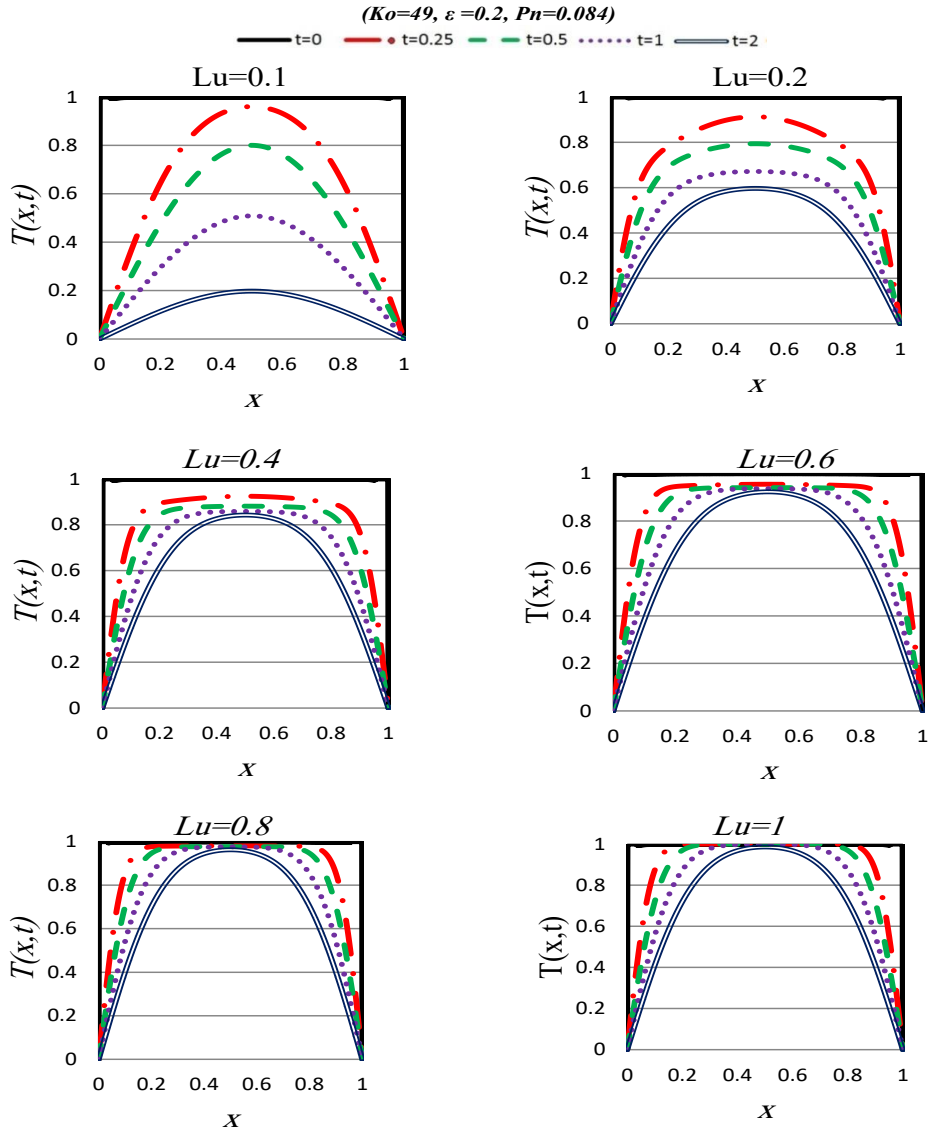
انتقال حرارت و انتقال رطوبت مواد متخلخل موئینه، اعداد بدون بعد موثر برانتقال حرارت (Ko, ε) و عدد بدون بعد موثر بر انتقال رطوبت (Pn) می باشد [۲]. در شکل ۵ ملاحظه می‌شود که با تغییر ضریب تغییر فاز از ۰/۲ تا ۱ رطوبت تغییر زیادی نمی‌کند، که این موضوع موید پژوهش لوییکف است. همچنین، با توجه به شکل ۵ با افزایش ضریب تغییر فاز در اعداد فوریه بیش از ۲ توزیع یکنواختی از رطوبت را در جسم شاهد هستیم. در واقع زمان رسیدن به توزیع رطوبت یکنواخت در عدد فوریه ۲ محقق می‌شود.

عدد لوییکف ($Lu = \frac{a_m}{a}$) بیانگر نسبت ضریب نفوذ رطوبت به دما است. بدین ترتیب، این عدد نحوه ارتباط فرآیندهای انتقال رطوبت و انتقال حرارت را مشخص می‌کند. عدد لوییکف مهمترین پارامتر برای



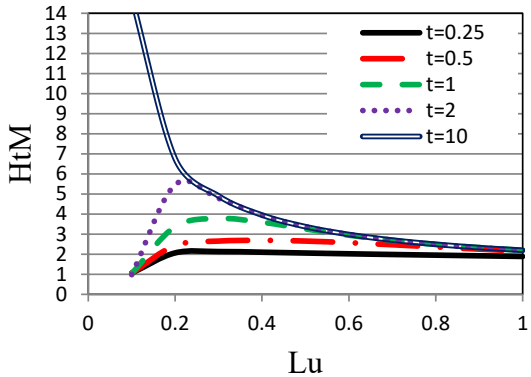
شکل ۵:تغییرات رطوبت بی‌بعد ($u = \frac{\mu(x,t)-\mu_\infty}{\mu_i-\mu_\infty}$) را بر حسب مکان بی‌بعد (x) به ازای ضرایب تغییر فاز (ε) مختلف

Fig. 5: Dimensional moisture changes $u = \frac{\mu(x,t)-\mu_\infty}{\mu_i-\mu_\infty}$ in terms of dimensionless location (x) for different phase change coefficients (ε)



شکل ۶-تغییر دمای بی بعد ($T=\frac{\theta(x,t)-\theta_\infty}{\theta_i-\theta_\infty}$) بر حسب مکان بی بعد ($x$) به ازای اعداد لوییکف($Lu$) مختلف

Fig. 6: Dimensional temperature change $T=\frac{\theta(x,t)-\theta_\infty}{\theta_i-\theta_\infty}$ in terms of dimensionless location (x) for different phase change coefficients (Lu)



شکل۷: تغییر (HtM) نسبت به عدد لوییکف (Lu) به ازای فوریه‌های مختلف

Fig. 7: Change (HtM) to the number of Luikov (Lu) for different Februarys

تحلیل میزان کوپلینگ معادلات انتقال رطوبت و حرارت در محیط متخلخل می‌باشد. با توجه به تحقیقات صورت گرفته توسط مندز و فیلیپی [۱۵] نتیجه‌ای حاصل شد که طبق آن برای مقادیر کوچک لوییکف (Lu<۰/۰۰۱) می‌توانیم از کوپلینگ معادلات صرف نظر کنیم.

مطابق شکل۶ با افزایش ضریب نفوذ رطوبت دیده می‌شود که با گذشت زمان، دمای یکنواخت‌تری درجسم بوجود آید. علت این است که رطوبت دارای نفوذ بیشتری در طول جسم است، لذا انتظار می‌رود که این اتفاق موجب توزیع دما یکنواختی درطول جسم شود.

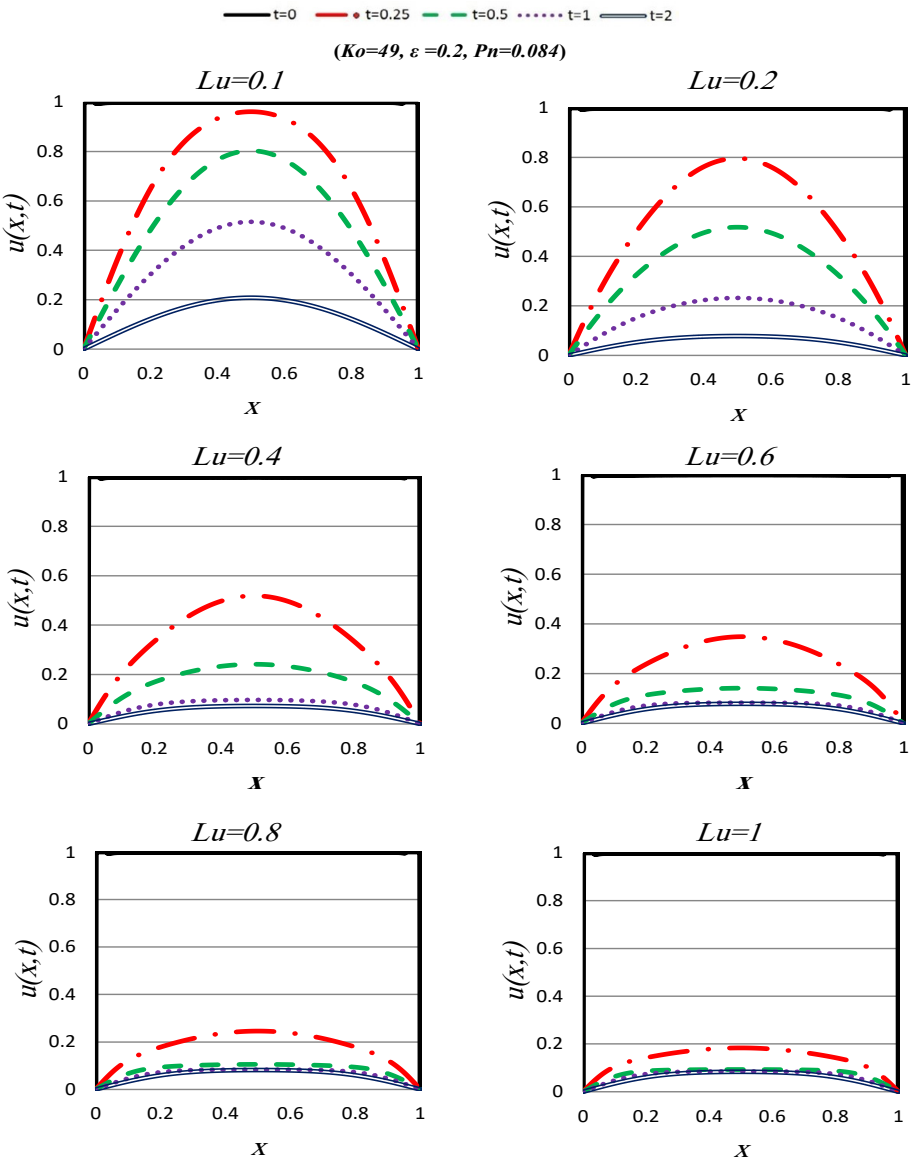
کمیت HtM به ازای تغییرات عدد لوییکف در شکل ۷ ترسیم شده است. با توجه به شکل ۷ در می‌یابیم که با افزایش نسبت ضریب

نفوذ رطوبت به ضریب نفوذ حرارت که بیانگر افزایش عدد لوییکف و افزایش حضور رطوبت می‌باشد، به ویژه به ازای $Lu>۰/۹$، شاهد همگرایی مقادیر HtM به عددی نزدیک به ۲ هستیم. لذا برای مقادیر فوریه کمتراز ۰/۲ شاهد افزایش نسبت انتقال حرارت بر انتقال رطوبت هستیم. همچنین شکل ۷ مقادیر لوییکف بحرانی و تغییرات صورت گرفته در انتقال حرارت جسم متخلخل موئینه را در معادلات انتقال حرارت در اختیار ما قرار می دهد. بیشترین تغییر مشاهده شده در معادلات انتقال حرارت به ازای فوریه ۱۰ می باشد که در شکل ۷ نیز قابل مشاهده می‌باشد.

مطابق شکل ۸ با افزایش ضریب نفوذ رطوبت a_m ، شاهد کاهش میزان رطوبت در جسم هستیم. افزایش ضریب نفوذ حرارتی و انتقال راحت‌تر رطوبت، سبب یکنواخت شدن توزیع رطوبت به ویژه برای مقادیر بزرگ تر لوییکف می‌گردد. به عبارت دیگر انتقال رطوبت بهتر سبب افزایش انتقال حرارت است.

۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق معادلات حاکم بر انتقال حرارت و رطوبت برای ماده خاص (سرامیک متخلخل) مورد بررسی قرار گرفت. برای حل این



شکل ۸: تغییر محتوای رطوبت بی‌بعد $u=\frac{\mu(x,t)-\mu_\infty}{\mu_i-\mu_\infty}$ بر حسب مکان بی‌بعد (x) به ازای اعداد لوییکف (Lu) مختلف

Fig. 8: Change the dimensionless moisture content $u=\frac{\mu(x,t)-\mu_\infty}{\mu_i-\mu_\infty}$ according to the dimensionless location (x) for different Luikov numbers

معادلات به طور همزمان، از روش رفع کوپلینگ و روش‌های جداسازی متغیرها و تبدیل لاپلاس استفاده گردید. می‌دانیم که انتقال رطوبت متاثر از عدد پوسنف جسم است. از آنجا که عدد پوسنف در مثال مورد بررسی در این تحقیق، کوچک فرض شده است، انتقال حرارت صرفا تابعی از ضریب تغییر فاز محاسبه گردید [۲]. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که ضریب تغییر فاز تاثیر چندانی بر انتقال رطوبت ندارد. تغییرات عدد لوییکف که بیانگر نسبت نفوذ رطوبت به انتقال حرارت است نشان‌دهنده این موضوع است که در مقادیر کوچک‌تر لوییکف تاثیر رطوبت ناچیز است و با افزایش مقادیر لوییکف شاهد تاثیر رطوبت بر میزان انتقال حرارت هستیم. این موضوع نشان‌دهنده اهمیت عدد لوییکف در کوپلینگ معادلات می‌باشد. در روابط (۴ الف) و (۴ ب) نیز مشاهده می‌شود، هنگامی که عدد لوییکف به سمت صفر میل می‌کند معادله انتقال حرارت صرفا تابعی از تغییر دما می‌شود. با افزایش بیشتر عدد لوییکف و نزدیک شدن این عدد به ۱ که به مفهوم افزایش ضریب نفوذ رطوبت می‌باشد، مشاهده می‌شود که ضریب نفوذ رطوبت با انتقال حرارت مقابله کرده و مانع از افزایش محسوس دما می‌شود.

فهرست علائم

a	ضریب نفوذ حرارتی	m^2/s
a_m	ضریب نفوذ جرمی	m^2/s
c	حرارت مخصوص جسم مرطوب	J/(kg K)
k	حرارت مخصوص جسم مرطوب	W/m
r	انتالپی تغییر فاز	kJ/kg
T	دمای بدون بعد	
u	محتوای رطوبت بی بعد	

علائم یونانی

θ	دما	K
μ	محتوای رطوبت	kg (water)/kg (dry body)
τ	زمان	s
δ	ضریب گرادیان حرارتی	
ε	ضریب تغییر فاز	

اعداد بی‌بعد

HtM	نسبت ضریب کل انتقال حرارت به رطوبت
Lu	عدد لوییکف
Pn	عدد پوسنف
Ko	عدد کسویچ
Fo	عدد فوریه

منابع

[1] A. V. Luikov, Y. A. Mikhailov, *Theory of energy and mass Transfer*, Pergamon Press, 1966.

[2] A.V. Luikov, Heat and mass transfer in capillary-porous bodies, Pergamon Press,Oxford, 233–303,1966

[3] M.D. Mikhailov, M.N. Özisik, Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion, *Wiley*, 1984.

[4] P.D.C. Lobo, M.D. Mikhailov, M.N. Özisik, On the complex eigenvalues of Luikov system of equations, Drying Technology 5 (2) 273–286,1984

[5] R.N. Pandey, S.K. Srivastava, M.D. Mikhailov, Solutions of Luikov equations of heat and mass transfer in capillary porous bodies through matrix calculus: a new approach, International journal of heat and mass transfer 42 (14) 2649–2660, 1999.

[6] Ribeiro, J. W., R. M. Cotta, and M. D. Mikhailov. "Integral transform solution of Luikov's equations for heat and mass transfer in capillary porous media." International journal of heat and mass transfer 36, no. 18 4467-4475,1993

[7] M. Qin, R. Belarbi, A. Aït-Mokhtar, A. Seigneurin, An analytical method to calculate the coupled heat and moisture transfer in building materials, International Communications in Heat and Mass Transfer, 33 (3) 39–48,2006.

[8] Liu, Jen Y., and Cheng Shun. "Solutions of Luikov equations of heat and mass transfer in capillary-porous bodies." International Journal of Heat and Mass Transfer 34, no. 7: 1747-1754,1991

[9] R.W Lewis, W. J. Ferguson, A partially nonlinear finite element analysis of heat and mass transfer in a capillary-porous body under the influence of a pressure gradient, Applied mathematical modelling, 17, 15-24,1993

[10] Comini, G., and R. W. Lewis. "A numerical solution of two-dimensional problems involving heat and mass transfer." International journal of heat and mass transfer 19, no. 12 : 1387-1392, 1976

[11] Zhang, Hongwei, and Qingying Hu. "Analytical Solutions to Coupled Partial Differential Equations Governing Heat and Mass Transfer During Food Drying." Advances in Information Sciences and Service Sciences 5, no. 5 : 387,2013

[12] Dantas, L. B., H. R. B. Orlande, and R. M. Cotta. "Estimation of dimensionless parameters of Luikov's system for heat and mass transfer in capillary porous media." International Journal of Thermal Sciences 41, no. 3: 217-227,2012.

[13] Santos, MJ Nascimento, João MPQ Delgado, Antonio Gilson Barbosa de Lima, and I. R. Oliveira. "Liquid injection molding process in the manufacturing of fibrous composite materials: Theory, advanced modeling and engineering applications." In Transport Phenomena in Multiphase Systems, pp. 251-272. Springer, Cham, 2018.

[14] Yu, Chenxu, and Joseph Irudayaraj. "Multiplex biosensor using gold nanorods." Analytical chemistry 79, no. 2: 572-579, 2007.

[15] Yang, Yanmei, Qing Shao, Renren Deng, Chao Wang, Xue Teng, Kai Cheng, Zhen Cheng et al. "In vitro and in vivo uncaging and bioluminescence imaging by using photocaged upconversion nanoparticles." Angewandte Chemie International Edition 51, no. 13: 3125-3129, 2012.

[16] D. Kulasiri, I. Woodhead, Analytical solutions to coupled partial differential equations governing heat and moisture transfer, *Hindawi publishing corporation, Mathematical problems in engineering*, 2005:3 (2005) 275–291.

[17] Volpicelli, Giovanni, Mahmoud Elbarbary, Michael Blaivas, Daniel A. Lichtenstein, Gebhard Mathis, Andrew W. Kirkpatrick, Lawrence Melniker et al. "International evidence-based recommendations for point-of-care lung ultrasound." Intensive care medicine 38, no. 4 577-591,2012