



Vibrations Analysis of a Rotor Supported by Tilting-Pad Journal Bearings with Considering of Geometric Nonlinearity

S.A.A. Hosseini*, A. Tamadon, M. Zamaniani

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Kharazmi University, Tehran, Iran

ABSTRACT: Vibrations of a continuous rotor with uniform circular cross section supported by two tilting-pad journal bearings at both ends are analyzed. Since the shaft is slender, shear deformation is neglected, but, gyroscopic effect is considered (Rayleigh beam theory). In addition, geometric nonlinearity due to large deformation of the rotor is considered. Based on short bearing assumption, an analytical model of a tilting-pad journal bearing with laminar and turbulence flows has been derived. Galerkin method is applied to discretize differential equations of motion. By solving discrete rotor-bearing system equations, the response is obtained. For further investigation, responses of rotor-bearing system in different situations are presented. Comparing the responses of the linear and nonlinear rotor with two tilting-pad journal bearings at both ends shows that the nonlinear rotor has less amplitude than linear rotor and nonlinear rotor is closer to reality. In addition, nonlinear model has a larger natural frequency in comparison to the linear rotor. Using turbulence flow makes the bearing stiffer and have less amplitude than laminar flow. Reducing viscosity of lubricant leads to increase of amplitude of response and shows that higher viscosity make the bearing stiffer.

Review History:

Received: 1 Jun. 2018
Revised: 16 Aug. 2018
Accepted: 10 Nov. 2018
Available Online: 20 Nov. 2018

Keywords:

Nonlinear vibrations
Continuous rotor
Tilting-pad journal bearing
Rayleigh beam theory
Short bearing assumption

1- Introduction

Hydrodynamic lubrication is applied in most rotating machinery. Tilting-Pad Journal Bearing (TPJB) is used as a foundation and source of damping and stiffness in rotors. This type of bearings have usually four or five pads. Each pad can rotate freely around a pivot. As a result the forces that are causing instability greatly reduced or eliminated. This feature considers TPJB as a standard bearing fluid film bearings for high speed machines. Sometimes a continuous model whose mass is distributed along the rotor is used as an analytical model for a practical rotor. Usually slender beam theory and geometric type nonlinearity is used in modelling of the rotor. Analysis of these type of rotors is based on the theory of classic beam theory [1]. Ocvirk [2] provided an analytical method based on Reynolds equation which is known as short-bearing equation. Lund [3] obtained stiffness and damping coefficients of TPJB. Orcutt [4] followed the same basic approach as Lund by developing a partial arc bearing solution. He accounted turbulence effects in the lubricating film using the Ng and Pan [5] analysis. Ishida et al. [6] studied nonlinear vibrations of rotating continuous shaft systems. Hosseini and coworkers [7-9] studied different aspects of vibrations of a spinning beam in several articles.

The analysis of nonlinear flexible shaft with TPJB is the subject of this article. Feature of this study is that the two types of modeling has been used. In the first model, the equations of shaft and bearings were solved simultaneously. In fact, the

effects of nonlinearity of the shaft and bearings have been considered. In the second, the linear equivalent stiffness and damping of bearings intended, and the results were compared with previous solutions.

2- Methodology

In order to calculate the hydrodynamic forces of the lubricant fluid Reynolds equations is used. Then the forces exerted on the rotor due to bearings can be calculated.

To model the shaft, a slender spinning beam supported with TPJB is considered. Rayleigh beam theory is used in modelling the rotor. Therefore, shear deformation is neglected but rotary inertia and gyroscopic effect are considered. Nonlinearity due to large deformation of the shaft is considered. This model leads to stretching type nonlinearity. To model the exerted force from bearings, Dirac delta function is used. To solve the equations of motion, the partial differential equations must be discretized with a suitable method. Here, Galerkin method is applied with one-mode term. Then the discretized equations are solved with numerical method.

3- Results and Discussion

In order to verify the results obtained, the equivalent stiffness and damping coefficients of TPJB are extracted from reference [10]. The equivalent stiffness of TPJB versus rotational velocity can be calculated. Also the equivalent damping of TPJB versus rotational velocity is computed.

It is found from calculations that at a certain rotational speed, stiffness becomes minimize. Damping is reduced

*Corresponding author's email: ali.hosseini@khu.ac.ir



versus rotational speed and then in high speed, its value becomes constant.

In order to verify the results, the responses of linear rotor-TPJB with linear rotor-stiffness-damping of TPJB are compared. Response of nonlinear rotor-TPJB with nonlinear rotor-stiffness-damping of TPJB are also compared.

The analysis shows that the difference between responses of rotor-TPJB system and equivalent rotor-stiffness-damping system is negligible. This shows the validity of the results. It is found from the analysis that the nonlinear response in both models has smaller peak in comparison to linear one.

4- Conclusions

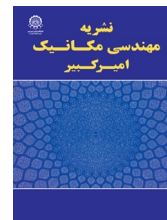
In this paper, first, the hydrodynamic forces and moments from TPJB acting on the rotor were calculated. Then the equations of motion of continuous rotor were derived. In order to solve the resulting equations, the equations of motion were discretized using the Galerkin method and then the obtained ordinary differential equations were solved by numerical methods.

The results can be presented as follows:

- The response of nonlinear model has a smaller amplitude in comparison to linear one. Also, the natural frequency in nonlinear model is larger.
- In the case of turbulent flow, the amplitude of response is smaller. But the natural frequencies for both laminar and turbulent flows are not so different; i.e. the type of flow is effective on peak of the domain, but does not create a significant difference in the natural frequency of the rotor.
- Change in dynamic viscosity causes variation in the natural frequency and the response amplitude. When the viscosity increases, the natural frequency becomes bigger and the amplitude reduces.

References

- [1] Y. Ishida, T. Yamamoto, *Linear and Nonlinear Rotordynamics, a Modern Treatment with Applications*, Wiley-VCH, 2012.
- [2] F. Ocvirk, Short-bearing approximation for full journal bearings, NACA Report 2808, 1952.
- [3] J.W. Lund, Spring and damping coefficients for the tilting pad journal bearing, *ASLE Transactions*, 7 (1964) 342–352.
- [4] F.K. Orcutt, The steady state and dynamic characteristics of the tilting pad journal bearing in laminar and turbulent flow regimes, *ASME Journal of Lubrication Technology*, 89 (1967) 392–404.
- [5] C.W. Ng and C.H.T. Pan, A linearized turbulent lubrication theory, *Journal of Basic Engineering*, 87 (1965) 675–682.
- [6] Y. Ishida, I. Nagasaka, T. Inoue, S. Lee, Forced Oscillations of a Vertical Continuous Rotor with Geometric Nonlinearity, *Nonlinear Dynamics*, 11 (1996) 107-120.
- [7] S.A.A. Hosseini, S.E. Khadem, Analytical solution for primary resonances of a rotating shaft with stretching nonlinearity. *International Journal of Mechanical Engineering Science*, 222 (2008) 1655-1664.
- [8] S.E. Khadem, M. Shahgholi, S.A.A. Hosseini, Two-mode combination resonances of an in-extensional rotating shaft with large amplitude. *Nonlinear Dynamics*, 65 (2011) 217-233.
- [9] S.A.A. Hosseini, S.E. Khadem, Free vibration analysis of a rotating shaft with nonlinearities in curvature and inertia, *Mechanism and Machine Theory*, 44 (2009) 272–288.
- [10] T. Someya, *Journal-Bearing Data Book*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg GmbH., 2013.



تحلیل ارتعاشات روتور دارای اثر غیرخطی هندسی با یاتاقان پد متحرک (تیلتنینگ پد)

سید علی اصغر حسینی^{*}، امین تمدن، مهدی زمانیان

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷/۰۳/۱۱
بازنگری: ۱۳۹۷/۰۵/۲۵
پذیرش: ۱۳۹۷/۰۸/۱۹
ارائه آنلاین: ۱۳۹۷/۰۸/۲۹

کلمات کلیدی:

ارتعاشات غیرخطی
روتور پیوسته
یاتاقان پد متحرک
تئوری تیر ریلی
فرض یاتاقان کوتاه

خلاصه: در این مقاله، ارتعاشات روتور پیوسته با مقطع دایروی یکنواخت که بر روی دو یاتاقان پد متحرک (تیلتنینگ پد) قرار دارد مطالعه می‌شود. روتور لاغر فرض می‌شود و در نتیجه، اثر تغییر شکل برشی نادیده گرفته شده است ولی اثر ژیروسکوپیک لحاظ می‌شود (تئوری تیر ریلی). به علاوه اثر غیرخطی هندسی ناشی از تغییر شکل بزرگ روتور در نظر گرفته می‌شود. بر اساس فرضیه یاتاقان کوتاه، یک مدل تحلیلی غیرخطی از یاتاقان پد متحرک که با سیال روانکاری شده و دارای جریان آرام و مغشوش می‌باشد مدل سازی شده است. معادلات حرکت روتور با دو یاتاقان پد متحرک که در ابتدا و انتهای آن قرار دارند استخراج می‌شود. به منظور گسسته سازی این معادله ها از روش گلرکین استفاده می‌شود. با حل عددی معادله‌های گسسته حاکم بر مسئله، منحنی پاسخ فرکانسی سیستم بدست می‌آید. با مقایسه پاسخ‌ها مشخص می‌شود که سیستم روتور غیرخطی-یاتاقان پد متحرک دارای دامنه کمتری نسبت به روتور خطی با یاتاقان پد متحرک می‌باشد. همچنین پاسخ سیستم روتور-یاتاقان پد متحرک با جریان مغشوش باعث سفت‌تر شدن یاتاقان و کاهش دامنه پاسخ سیستم می‌شود. با کاهش لزجت دینامیکی سیال، از سفتی یاتاقان کاسته می‌شود و سبب افزایش دامنه پاسخ می‌شود.

۱- مقدمه

به منظور بالا بردن سرعت دورانی و بار از یاتاقان‌های روغنی استفاده می‌شود. در این یاتاقان‌ها، روانکاری هیدرودینامیکی به منظور نگهداری روتور با لایه نازکی از سیال انجام می‌شود. یاتاقان لغزشی پدمتحرک^۱ هم به عنوان نگهدارنده استاتیکی و هم به عنوان میرایی و سفتی دینامیکی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این نوع یاتاقان‌ها معمولاً دارای چهار یا پنج پد می‌باشند. هر پد می‌تواند آزادانه حول یک نقطه اتکاء بچرخد. در نتیجه نیروهایی که باعث ناپایداری شدن می‌شوند به شدت کاهش یا حذف می‌شوند. این ویژگی یاتاقان پدمتحرک را به عنوان یک یاتاقان استاندارد با لایه سیال جهت استفاده در سرعت‌های بالا مطرح می‌سازد. نحوه قرار گرفتن پد به دو صورت می‌تواند باشد، روی پد^۲ و بین پد^۳. منظور از روی پد یعنی پد بگونه‌ای است که محل اثر نیروی اعمالی از طرف یاتاقان به روتور از میان یک پد می‌گذرد ولی در

حالت بین پد، محل اعمال از بین دو پد می‌گذرد. این محل قرارگیری پدها، پارامتری است که بیشترین تاثیر را در رفتار روتور به وجود می‌آورد. حالت روی پد، باعث حرکت ناپایدار ژورنال می‌شود، در حالی که بین پد به حرکت پایدار منتهی می‌دهد.

گاهی اوقات برای روتورهای بلند از مدلی تحلیلی که جرم روتور در طول آن گسترده شده است استفاده می‌شود. به عنوان مثال یک روتور الاستیک که قطر آن زیاد تغییر نمی‌کند یا یک شفت الاستیک با تعدادی دیسک تقریباً همسان به وسیله مدل گسترده مدل می‌شود. در این روتورها، جرم، سفتی و میرایی گسترده است، به عبارت دیگر روتور پیوسته^۴ است. تحلیل روتورهای پیوسته براساس تئوری ارتعاشات عرضی تیر می‌باشد. پرکاربردترین نظریه در تئوری شفت‌ها، مدل تیر ریلی^۵ می‌باشد که بر اساس سه فرضیه است: اول آن که در حین ارتعاش، مقطع عرضی صفحه مسطح باقی می‌ماند. دوم تغییر شکل به دلیل نیروی برشی را می‌توان نادیده گرفت و سوم اینرسی دورانی^۶

- 1 Tilting-pad journal bearing (TPJB)
- 2 On pad
- 3 Between pads

^{*} نویسنده عهده‌دار مکاتبات: ali.hosseini@khu.ac.ir

- 4 Continuous rotor
- 5 Rayleigh beam theory
- 6 Rotary inertia

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode> دیدن فرمائید.



لحاظ می‌شود. به علت آن که شفت در راستای محوری هم دوران دارد تعامل چرخش محوری شفت، اینرسی دورانی و ارتعاش عرضی به اثر ژيروسکوپی ختم می‌شود. در تئوری ریلی، ممان خمشی در یک موقعیت دلخواه از شفت متناسب با معکوس شعاع انحنا خط مرکزی شفت می‌باشد. در این مدل تنها حرکت عرضی دیده می‌شود. در معادلات حرکت نوشته شده با این فرضیه، معادلات در جهات عرضی عمود بر خط محور یاتاقان کوپل نیستند. اگر روتور بلند و باریک باشد، این مدل به خوبی حرکت روتور را ارائه می‌کند. در مورد روتور پیوسته غیرخطی، چون که ارتعاشات روتور دارای دامنه بزرگ است اثرات غیرخطی هندسی نیز به مدل اضافه می‌گردد [۱].

تحلیل های زیادی در مورد یاتاقان‌ها در طی سالیان گذشته انجام گرفته است. اُگویرک [۲] روش تحلیلی براساس معادله رینولدز ارائه کرد که به نام معادله یاتاقان-کوتاه^۱ شناخته می‌شود. در حقیقت تغییرات فشار مربوط به جریان محیطی را در نظر نمی‌گیرد. براساس این ملاحظه، تغییرات در جریان محیطی باعث تغییر مستقیم در جریان و تغییرات فشار محوری می‌شود. او همچنین مقدار فشار منفی را نادیده گرفت. یکی از پیشرفت‌های عمده در درک دینامیک یاتاقان‌های پدمتحرک از مقاله برجسته لاند [۳] در سال ۱۹۶۴ حاصل شد. بر اساس تحلیل پدهای ثابت، که اساسا یاتاقان‌های منحنی جزئی هستند، ضرایب سفتی و میرایی محاسبه شدند. معادلات حرکت برای این پدها براساس مقادیر سفتی و میرایی پد ثابت محاسبه شده لحاظ شده است که سپس به طور برداری برای محاسبه ضرایب کامل یاتاقان جمع شدند. اورکات [۴] همان رهیافت پایه لاند [۳] را با توسعه پاسخ یاتاقان منحنی جزئی دنبال کرد. او اثرات آشفستگی را در فیلم روانکاری با استفاده از تحلیل ان جی و پان [۵] لحاظ کرد. همانند لاند، اورکات نیز مسئله روانکاری را برای هر پد به طور مجزا حل کرد و سپس یک روش مجموعه کاهش یافته همگام را همانند لاند اجرا نمود. نیکلاس و همکارانش [۶] ضرایب سفتی و میرایی برای یاتاقان ژورنال پدمتحرک پنج تایی را توسعه دادند. چند پیکربندی یاتاقان از جمله بار روی پد و بار بین پد، مکان‌های مختلف لولا از ۰/۵ تا ۰/۵۵ و بارهای متفاوت یاتاقان از ۰ تا ۰/۵ لحاظ شدند. ضرایب سفتی و میرایی مؤثر گزارش شده به طور همگام کاهش یافتند. جونز و مارتین [۷] مطالعه هندسی دیگری درباره مشخصات یاتاقان پدمتحرک را با در نظر گرفتن بارهای مختلف، نسبت‌های L/D یاتاقان، پدهای متحرک ۳، ۵ و ۷ تایی، و جهت‌گیری بار را انجام دادند. این تحلیل برای محاسبه کمترین ضخامت لایه روغن، دمای میانگین پد، افت توان مزاحم یاتاقان، و ضرایب سفتی و میرایی کاهش یافته همگام به کار

رفت. کاپن [۸] روشی را برای محاسبه نیروی اعمالی یاتاقان دایروی که بر روی روتور صلب، متقارن و افقی سوار شده است ارائه کرد. همچنین محاسبه نیروها را بهبود بخشید و روش عددی برای حل معادلات دینامیکی روتور ارائه نمود. اکابه و همکاران [۹] مدل تحلیلی از یاتاقان پدمتحرک ارائه کردند و آن را با مدل عددی معادل مقایسه کردند. به این نتیجه رسیدند که مدل تحلیلی صد مرتبه از مدل عددی سریع‌تر است و دقت بالاتری دارد. آن‌ها همچنین نشان دادند که سفتی با افزایش پیش‌بار پد افزایش می‌یابد. اکابه و همکاران [۱۰] بر اساس فرضیه یاتاقان کوتاه یک مدل تحلیلی از یاتاقان پدمتحرک که با سیال دارای جریان مغشوش روانکاری شده است مدل سازی کردند و نتایج را با سیال دارای جریان آرام مقایسه کردند. در مرجع [۱۱] با استفاده از روش تقریبی، حل تحلیلی برای نیروهای غیر خطی یاتاقان پدمتحرک بدست آورد. روتور توربو-اکسپندر^۲ که دارای یاتاقان‌های پدمتحرک است در حضور گرادیان دمایی توسط لی و همکاران [۱۲] با استفاده از روش عددی و آزمایشگاهی تحلیل شد. در مرجع [۱۳]، بعضی از نکات طراحی در مورد یاتاقان پدمتحرک غیرخطی در روتورهای افقی و عمودی بررسی گردید. اکابه [۱۴] در ادامه کار تحلیلی قبلی خود [۱۰]، اثر اینرسی سیال را در محاسبات خود وارد کرد و حل تحلیلی برای ضرایب جرم، میرایی و سفتی ارائه نمود. در مرجع [۱۵]، طراحی یک یاتاقان پدمتحرک با کنترل اکتیو روغن ورودی به یاتاقان بررسی گردید. این مفهوم با استفاده از آزمایش تایید شد. وو و همکاران [۱۶]، مدل یاتاقان پدمتحرک متخلخل را ارائه کردند. سن آندرس و همکاران [۱۷] و [۱۸] طی دو مقاله، به اثرات کمبود نرخ ورودی روغن به یاتاقان پدمتحرک را تحقیق کردند. با استفاده از روش‌های آزمایشگاهی، مدل تئوری صحت سنجی شد.

در مورد تحلیل غیرخطی شفت‌های چرخان، مطالعات زیادی انجام شده است که در ادامه به موارد اندکی اشاره می‌شود. ایشیدا و همکاران [۱۹]، ارتعاشات غیر خطی سیستم روتور چرخان با جرم گسترده را مورد بررسی قرار دادند. غیرخطی بودن ناشی از دامنه بزرگ ارتعاشات بود. جی و زو [۲۰] روش مقیاس چندگانه^۳ را به منظور تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری سیستم روتور-یاتاقان به کار بردند. در فرآیند مدل سازی شفت، اثرات اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی را نیز در نظر گرفتند. تحلیل دینامیکی سیستم روتور با یاتاقان الاستیک غیرخطی که بر روی تعلیق ویسکوالاستیک قرار دارد توسط شبانه و زو [۲۱] مورد بررسی قرار گرفت. یاتاقان غیرخطی را با فنر غیرخطی مرتبه سه و میرایی خطی مدل سازی کردند. نگهدارنده ویسکوالاستیک را نیز به وسیله مدل کلونین-وِیت مدل سازی نمودند. حسینی و خادم [۲۲] ارتعاشات آزاد روتور

2 Turbo-expander

3 Multiple scale method

1 Short bearing

پسابحرانی^۳ است. دومین مورد غیرخطی فرض کردن شفت است که مدلی از شفت‌های بلند است و سوم، غیرخطی فرض کردن یاتاقان است که تمامی این موارد در یک مدل واحد دیده شده است. واضح است که مدل حاضر کاملتر از مواردی است که قبلاً مطالعه شده است.

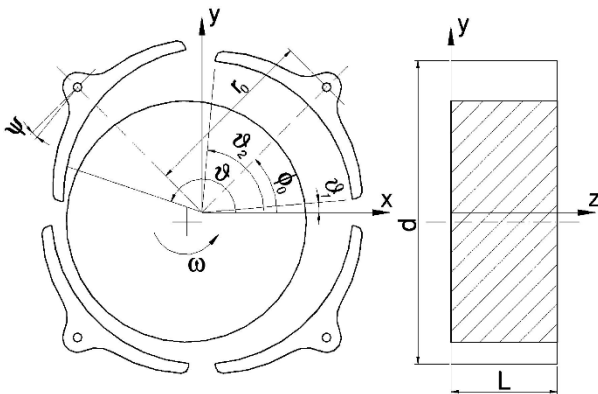
در این مقاله ابتدا نیرو و ممان اعمالی از طرف سیال محاسبه می‌شود. سپس، معادلات دینامیکی یک شفت ریلی با فرض دامنه بزرگ ارتعاشات استخراج می‌گردد. سپس نیروهای اعمالی از یاتاقان به شفت توسط تابع دلتای دیراک وارد معادلات شفت می‌شود. در ادامه با استفاده از روش گلرکین، معادلات حرکت گسسته می‌شوند و در نهایت، معادلات حاصل با استفاده از روش عددی حل می‌شوند.

۲- نیروهای هیدرودینامیکی ناشی از یاتاقان پد متحرک

به منظور محاسبه نیروهای هیدرودینامیکی ناشی از سیال روانکار، مؤلفه‌های هندسی در شکل ۱ در نظر گرفته می‌شود. ضخامت لایه سیال بین یاتاقان و روتور \bar{h} به صورت زیر محاسبه می‌گردد [۱۰]:

$$\bar{h} = c_p - \bar{u}(s, t) \cos \vartheta - \bar{v}(s, t) \sin \vartheta - \psi r_0 \sin(\vartheta - \phi_0) - m c_p \cos(\vartheta - \phi_0) \quad (1)$$

که c_p لقی شعاعی، \bar{u} و \bar{v} به ترتیب جابجایی افقی و عمودی روتور است، ϑ زاویه سیستم مختصات یاتاقان، ψ زاویه چرخش پد، r_0 فاصله محل لولا تا سطح پد، ϕ_0 زاویه قرارگیری لولا و m پیش‌بار پد می‌باشد. به منظور ساده شدن نوشتن معادله‌ها مؤلفه‌های زیر تعریف می‌شوند:



شکل ۱: مؤلفه‌های هندسی یاتاقان پد متحرک [۱۰]

Fig. 1. Geometric parameters of TPJB [10]

چرخان با اثرات غیرخطی در انحنا و اینرسی را تحلیل کردند. آن‌ها از روش مقیاس چندگانه به منظور حل تحلیلی مسئله استفاده نمودند. تشدید اولیه شفت چرخان با تکیه‌گاه‌های ساده و دامنه بزرگ توسط حسینی و همکاران [۲۳] بررسی شد. در این مقاله از روش مقیاس چندگانه به منظور گسسته سازی معادلات مشتق جزئی استفاده کردند. حسینی و همکاران [۲۴] ارتعاشات آزاد تیر چرخان با شش شرط مرزی کلی را مورد مطالعه قرار دادند. تیر چرخان دارای دامنه بزرگ است که منجر به اثرهای غیرخطی در اینرسی و انحنا می‌شود. در پژوهش صورت گرفته توسط مرادی و همکاران [۲۱] تشدید اولیه روتور

^۱ اوره‌نگ که در سر آزاد آن دیسک صلب قرار دارد تحلیل شد. اثر وزن دیسک و تغییر شکل اولیه نیز بررسی شد.

با بررسی پیشینه مطالعات صورت گرفته مشخص می‌شود که معمولاً ارتعاشات غیرخطی شفت‌ها بدون در نظر گرفتن یاتاقان بررسی می‌شود [۲۵-۱۹]. در معدود مطالعاتی که یاتاقان هم لحاظ شده است، یاتاقان با فنر و دمپر که معمولاً خطی است مدل می‌شود [۲۶]. تاکنون مقاله‌ای که اثرات غیرخطی را در روتور لحاظ کند و یاتاقان غیرخطی نیز داشته باشد منتشر نشده است. از طرف دیگر معمولاً یاتاقان‌های در نظر گرفته شده در روتورها از نوع ساده هستند و تحلیل تعاملی شفت و یاتاقان‌های پیشرفته‌ای مانند پد متحرک کمتر صورت گرفته است. در این مقاله به این مسئله مهم پرداخته می‌شود. به عبارتی دیگر، در این مقاله اثرات ترکیبی بین غیر خطی ناشی از خیز بزرگ روتور و غیر خطی ناشی از یاتاقان‌ها بررسی می‌شود. در مطالعات قبل، روتورهایی که یاتاقان پد متحرک داشتند عموماً صلب فرض شده بودند. حال اگر روتور انعطاف پذیر با ارتعاشات دامنه بزرگ با یاتاقان‌های پد متحرک باشد رفتار روتور و پاسخ آن با روتور صلب بسیار متفاوت است. از طرف دیگر ارتعاشات غیر خطی شفت‌های فرض یاتاقان پد متحرک، موضوع مورد نظر این مقاله می‌باشد. خصوصیت مطالعه حاضر آن است که دو نوع مدل‌سازی بکار برده شده است. در مدل‌سازی اول، معادلات مربوط به شفت و یاتاقان بصورت همزمان حل شده است. در واقع، اثرات غیر خطی بودن شفت و یاتاقان با هم در نظر گرفته شده است. در نوع دوم، معادل سفتی و میرایی خطی یاتاقان در نظر گرفته شده است و نتایج با حل قبلی مقایسه شده است. در این مقاله اثرات خطی و غیرخطی بودن شفت و همچنین خطی و غیرخطی بودن یاتاقان مورد بررسی قرار گرفته است. در واقع اولین نوآوری منعطف فرض کردن روتور است که مدلی از روتورهای

- 1 Overhung rotor
- 2 Sleeve

$$\begin{aligned} u_p &= \bar{u}(s, t) - \psi v_0 + mc_p \cos \phi_0 \\ v_p &= \bar{v}(s, t) + \psi u_0 + mc_p \sin \phi_0 \end{aligned} \quad (2)$$

همچنین مؤلفه‌های u_0 و v_0 به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{aligned} u_0 &= \bar{r}_0 \cos \phi_0 \\ v_0 &= \bar{r}_0 \sin \phi_0 \end{aligned} \quad (3)$$

با جایگذاری روابط (۲) و (۳) در رابطه (۱) بدست می‌آید:

$$\bar{h} = c_p - u_p \cos \mathcal{G} - v_p \sin \mathcal{G} \quad (4)$$

فرض می‌شود که دمای روانکار ثابت باشد. با در نظر گرفتن این فرضیه معادله رینولدز می‌شود [۱۰]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_b^2} \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} \left(\frac{\bar{h}^3}{G_g \mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{G}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left(\frac{\bar{h}^3}{G_z \mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{s}} \right) = \\ 6\omega \frac{\partial \bar{h}}{\partial \mathcal{G}} + 12 \frac{d\bar{h}}{dt} \end{aligned} \quad (5)$$

که \bar{s} مختصات طولی یاتاقان، μ لزجت دینامیکی، \bar{p} فشار هیدرودینامیکی، R_b شعاع یاتاقان، G_z ضریب اغتشاش محوری، G_g ضریب اغتشاش محیطی و ω سرعت دورانی روتور است.

اعمال فرض کوتاه بودن یاتاقان منجر به حذف عبارت تغییرهای محیطی فشار می‌شود، رابطه (۵) می‌دهد [۱۰]:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left(\frac{\bar{h}^3}{G_z \mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{s}} \right) = 6\omega \frac{\partial \bar{h}}{\partial \mathcal{G}} + 12 \frac{d\bar{h}}{dt} \quad (6)$$

متغیرهای جدید q_u و q_v به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} q_u &= \bar{u} - \psi v_0 + mc_p \cos \phi_0 - 2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial t} u_0 \right) \\ q_v &= \bar{v} + \psi u_0 + mc_p \sin \phi_0 + 2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial t} v_0 \right) \end{aligned} \quad (7)$$

اگر از رابطه (۱) نسبت به متغیرهای \mathcal{G} و t مشتق گرفته شود، بدست

می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \mathcal{G}} &= u \sin \mathcal{G} - v \cos \mathcal{G} - \dot{\psi} r_0 \cos(\mathcal{G} - \phi_0) \\ &\quad + mc_p \sin(\mathcal{G} - \phi_0) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = -\dot{u} \cos \mathcal{G} - \dot{v} \sin \mathcal{G} - \dot{\psi} r_0 \sin(\mathcal{G} - \phi_0)$$

با جایگذاری روابط (۸) در رابطه (۶) و استفاده از روابط (۷) و انتگرال‌گیری تحلیلی از آن نسبت به \bar{s} با توجه به این که فشار در ابتدا و انتهای یاتاقان برابر صفر می‌باشد، توزیع فشار روی سطح هر پد می‌شود [۱۰]:

$$\begin{aligned} \bar{p}(\mathcal{G}, \bar{s}) &= \frac{3}{4} G_z \mu \left[\frac{q_u \sin \mathcal{G} - q_v \cos \mathcal{G}}{(c_p - u_p \cos \mathcal{G} - v_p \sin \mathcal{G})^3} \right] \\ &\quad \times (4\bar{s}^2 - L^2) \end{aligned} \quad (9)$$

که L طول یاتاقان است. با بهره‌گیری از مدل مغشوش کاپن [۲۶]، ضریب جریان مغشوش محوری G_z محاسبه می‌شود:

$$G_z = 1 + \beta z \bar{h} Re^{0.96} \quad (10)$$

که:

$$z = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2 Re_t - Re_1}{\pi Re_t + Re_1} \frac{Re/Re^*}{1 - Re/Re^*} \right) \quad (11)$$

$$Re_t = 41.2 \left[\frac{R_b / c_p}{(1 - \varepsilon)^3 + 4/3 (L/D)^2 \dot{\varepsilon}^2 (1 - \varepsilon)} \right]^{1/2} \quad (12)$$

$$Re_1 = 41.2 \left[\frac{R_b / c_p}{(1 + \varepsilon)^3 + 4/3 (L/D)^2 \dot{\varepsilon}^2 (1 + \varepsilon)} \right]^{1/2} \quad (13)$$

$$Re^* = \frac{Re_t + Re_1}{2} \quad (14)$$

هر ذره از شفت دارای دو درجه آزادی عرضی می‌باشد. اینرسی دورانی و اثر ژيروسکوپیی در نظر گرفته می‌شود ولی از اثر تغییر شکل برشی به علت لاغر بودن شفت صرفنظر می‌شود. سیستم با یک مود، حول فرکانس طبیعی اول تقریب زده می‌شود. چون از مدل تیر استفاده شده است مودهای پوسته‌ای، قابل لحاظ کردن نیست.

در شکل ۲ شماتیک شفت-یاتاقان نشان داده شده است. دستگاه مختصات مستطیلی در فضا ثابت است. محور در راستای خط مرکزی شفت با Z نشان داده می‌شود. خیز در جهات x و y به ترتیب با $\bar{u}(s, t)$ و $\bar{v}(s, t)$ بیان می‌شوند. در این مدل روتور، به علت دامنه بزرگ ارتعاشات، ترم‌های غیرخطی در معادلات ظاهر می‌شوند و به همین دلیل معادله‌ها غیرخطی هستند [۱۱]. با نوشتن رابطه‌های انرژی جنبشی و پتانسیل برای روتور و استفاده از اصل همیلتون معادله‌های حرکت روتور به دست می‌آیند [۲۲]:

$$EI \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial s^4} + \rho A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \frac{\rho A d^2}{16} \left(\frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial s^2 \partial t^2} + 2\omega \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial s^2 \partial t} \right) + \bar{c} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \frac{EA}{2l} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial s^2} \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial s} \right)^2 \right\} d\bar{s} = \rho A \omega^2 (\bar{e}_x \cos \omega t - \bar{e}_y \sin \omega t) \quad (18)$$

$$EI \frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial s^4} + \rho A \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} - \frac{\rho A d^2}{16} \left(\frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial s^2 \partial t^2} + 2\omega \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial s^2 \partial t} \right) + \bar{c} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - \frac{EA}{2l} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial s^2} \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial s} \right)^2 \right\} d\bar{s} = \rho A \omega^2 (\bar{e}_x \sin \omega t - \bar{e}_y \cos \omega t) \quad (19)$$

که EI سفتی خمشی، ρ چگالی شفت، A سطح مقطع، d قطر شفت، \bar{c} ضریب میرائی، l طول شفت و \bar{e}_j ($j = x, y$) نابالانسی در دو راستای عرضی می‌باشد.

برای مدل‌سازی اثر یاتاقان، نیروهای اعمالی از طرف یاتاقان به شفت از تابع دلتای دیراک استفاده می‌شود که در نقاط $0 + \varepsilon$ و $l - \varepsilon$ وارد می‌گردد که ε بی نهایت کوچک است. توجه شود در این حالت شرایط مرزی شفت بصورت آزاد است و اثرات یاتاقان در معادله وارد می‌شود. پس، با استفاده از تابع دلتای دیراک $\delta(\cdot)$ برای نیروهای هیدرودینامیکی یاتاقان پدمتحرک، معادله‌های حرکت سیستم روتور-یاتاقان پد متحرک به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\varepsilon = (u_p^2 + v_p^2)^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{u_p \dot{u}_p + v_p \dot{v}_p}{\varepsilon} \quad (16)$$

در معادلات بالا، R_b شعاع یاتاقان، β ثابت اغتشاش، ε خروج از مرکزی یاتاقان، Re عدد رینولدز، Re_1 عدد رینولدز برای جریان کاملاً آرام و Re_2 عدد رینولدز برای جریان کاملاً مغشوش است.

با استفاده از رابطه توزیع فشار، نیروهای هیدرودینامیکی و ممان ناشی از روانکار که به سطح هر پد وارد می‌شود از طریق انتگرال گیری روی سطح هر پد محاسبه می‌شوند [۱۰]:

$$F_u = \sum_{k=1}^{Npads} \int_{\vartheta_k^0}^{\vartheta_k^L} \int_{\vartheta_k^0}^{\vartheta_k^L} \bar{p}_k \cos \vartheta R_j d\bar{s} d\vartheta$$

$$F_v = \sum_{k=1}^{Npads} \int_{\vartheta_k^0}^{\vartheta_k^L} \int_{\vartheta_k^0}^{\vartheta_k^L} \bar{p}_k \sin \vartheta R_j d\bar{s} d\vartheta \quad (17)$$

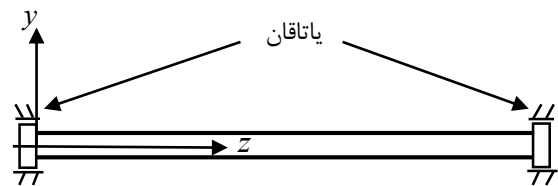
$$k = 1 \dots Npads$$

$$M_k = - \int_{\vartheta_k^0}^{\vartheta_k^L} \int_{\vartheta_k^0}^{\vartheta_k^L} (R_j + \bar{r}_0) (\vartheta - \vartheta_p) \bar{p}_k \times \cos(\vartheta - \vartheta_p) R_j d\bar{s} d\vartheta$$

که $Npads$ تعداد پدها، اندیس k نشان دهنده ی شماره پد، R_j شعاع پد، ϑ_1 زاویه ابتدای پد، ϑ_2 زاویه انتهایی پد و ϑ_p محل قرارگیری لولای پد است. همچنین، F_j ($j = u, v$) نیروهای هیدرودینامیکی و M_i ممان هیدرودینامیکی اعمالی از طرف یاتاقان می‌باشد.

۳- معادلات روتور با اثرات غیرخطی هندسی

برای مدل‌سازی روتور از سیستم پیوسته و از مدل تیر ریلی استفاده می‌شود.



شکل ۲: شماتیک از شفت-یاتاقان

Fig. 2. A schematic of shaft-bearing

می‌شود و شکل مود برای هر دو جهت یکسان فرض می‌شود پس

$$\begin{aligned} u(s,t) &= \eta_1(t)\phi_1(s) \\ v(s,t) &= \eta_2(t)\phi_1(s) \end{aligned} \quad (24)$$

باید توجه داشت که برای جایگذاری رابطه‌های (۲۳) و (۲۴) در نیروهای هیدرودینامیکی یاتاقان پدمتحرک باید از شکل مود در محل یاتاقان‌ها استفاده شود:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \phi_1(0)\eta_1(t) \\ v(0,t) &= \phi_1(0)\eta_2(t) \\ u(l,t) &= \phi_1(l)\eta_1(t) \\ v(l,t) &= \phi_1(l)\eta_2(t) \end{aligned} \quad (25)$$

جایگذاری رابطه‌های (۲۳) و (۲۴) در رابطه‌های (۲۰) تا (۲۲) و ضرب کردن طرفین در شکل مود اول و سپس انتگرال‌گیری از آن، رابطه‌های زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} &487.68E\eta_1 + 300.16EA\eta_1^3 \\ &+ 0.766\rho Ad^2 \frac{d^2\eta_1}{dt^2} + 1.53\rho Ad^2\omega \frac{d\eta_1}{dt} \\ &+ 0.988c \frac{d\eta_1}{dt} + 0.988\rho A \frac{d^2\eta_1}{dt^2} \\ &+ 300.160EA\eta_1\eta_2^2 + 2F_u(0) + 1.965F_u(l) \\ &= 0.988\rho A\omega^2 e_1 \cos \omega t - 0.988\rho A\omega^2 e_2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} &487.68E\eta_2 + 300.16EA\eta_2^3 \\ &+ 0.766\rho Ad^2 \frac{d^2\eta_2}{dt^2} + 1.53\rho Ad^2\omega \frac{d\eta_2}{dt} \\ &+ 0.988c \frac{d\eta_2}{dt} + 0.988\rho A \frac{d^2\eta_2}{dt^2} \\ &+ 300.160EA\eta_2\eta_1^2 + 2F_v(0) + 1.965F_v(l) \\ &= 0.988\rho A\omega^2 e_2 \cos \omega t + 0.988\rho A\omega^2 e_1 \sin \omega t \end{aligned} \quad (27)$$

$$J_p \ddot{\psi}_i = M_i \quad (i = 1 \dots Npads) \quad (28)$$

که در آن F_u ، F_v و M_i نیروی هیدرودینامیکی و ممان اعمالی از طرف

$$\begin{aligned} &EI \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial \bar{s}^4} + \rho A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \\ &- \frac{\rho A d^2}{16} \left(\frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial \bar{s}^2 \partial t^2} + 2\omega \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial \bar{s}^2 \partial t} \right) + \bar{c} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \\ &- \frac{EA}{2l} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{s}^2} \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{s}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{s}} \right)^2 \right\} d\bar{s} \\ &+ F_u \delta(\bar{s}) + F_u \delta(\bar{s} - l) \\ &= \rho A \omega^2 (\bar{e}_x \cos \omega t - \bar{e}_y \sin \omega t) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} &EI \frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial \bar{s}^4} + \rho A \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} \\ &- \frac{\rho A d^2}{16} \left(\frac{\partial^4 \bar{v}}{\partial \bar{s}^2 \partial t^2} + 2\omega \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{s}^2 \partial t} \right) \\ &+ \bar{c} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - \frac{EA}{2l} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{s}^2} \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{s}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{s}} \right)^2 \right\} d\bar{s} \\ &+ F_v \delta(\bar{s}) + F_v \delta(\bar{s} - l) \\ &= \rho A \omega^2 (\bar{e}_x \sin \omega t - \bar{e}_y \cos \omega t) \end{aligned} \quad (21)$$

$$J_p \ddot{\psi}_i = M_i \quad k = i \dots Npads \quad (22)$$

که J_p ممان اینرسی پد می‌باشد.

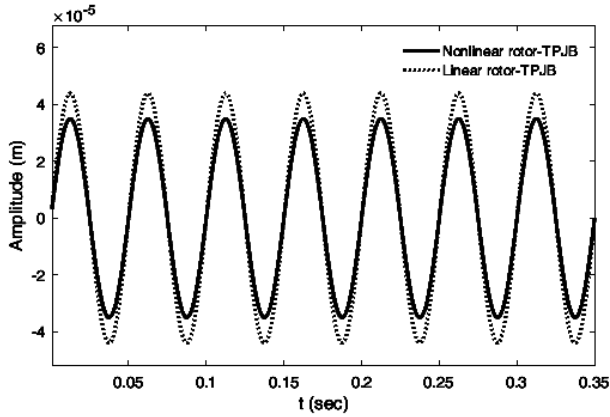
۴- گسسته سازی معادلات

در این بخش معادلات حرکت سیستم روتور-یاتاقان به روش گلرکین با اولین شکل مود تیر دو سر آزاد گسسته سازی می‌شوند. توجه شود از روش اجزای محدود استفاده نمی‌شود و برای گسسته سازی تنها از یک شکل مود استفاده می‌شود. این شکل مود بی بُعد شده متناظر با تیر دو سر آزاد است که بصورت زیر می‌باشد [۲۷]:

$$\begin{aligned} \phi_n(s) &= [\cos \beta_n s + \cosh \beta_n s] \\ &- \frac{\cos \beta_n - \cosh \beta_n}{\sin \beta_n - \sinh \beta_n} [\sin \beta_n s + \sinh \beta_n s] \end{aligned} \quad (23)$$

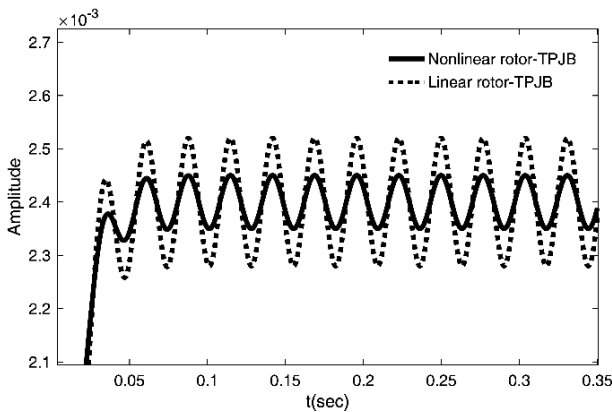
که $\beta_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}$

برای اعمال روش گلرکین، جابجایی‌های دینامیکی به صورت عبارت‌هایی از شکل مود نوشته می‌شوند. چون از یک مود برای گسسته‌سازی استفاده



شکل ۳: مقایسه پاسخ زمانی سیستم خطی و غیرخطی در نزدیکی فرکانس طبیعی

Fig. 3. Comparison between linear and nonlinear responses in the neighborhood of natural frequency



شکل ۴: پاسخ زمانی پد اول با زاویه لولای ۳۱۵ درجه

Fig. 4. Time history response of the first pad with 315-degree pivot

نمایش داده شده است. منظور از خطی یعنی صرفنظر کردن از تمام ترم‌های غیرخطی در معادلات حاکم می‌باشد. محاسبات در نزدیکی فرکانس طبیعی اول که بحرانی‌ترین حالت است انجام شده است. شرایط اولیه صفر فرض شده است. مشاهده می‌شود که پاسخ زمانی سیستم هارمونیک می‌باشد. این به آن معناست که حرکت روتور سنکرون^۱ می‌باشد. در این شکل، تفاوت بین نتایج خطی و غیر خطی حدود ۲۰ درصد می‌باشد.

پاسخ زمانی پد اول که زاویه قرارگیری لولای آن برابر ۳۱۵ درجه می‌باشد، در نزدیکی فرکانس طبیعی در شکل ۴ رسم می‌شود. باز هم تفاوت بین مدل خطی و غیرخطی مشاهده می‌شود. از طرفی دیگر مقدار استاتیکی در پاسخ مشاهده می‌شود که نشان می‌دهد پس از اینکه ارتعاش به حالت پایدار می‌رسد پد حول نقطه تعادل جدید شروع به ارتعاش می‌کند. همین حرکت پد حول نقطه

Table 1. Parameters of the shaft [22]

جدول ۱: مشخصات شفت [۲۲]

مؤلفه	مقدار
d (قطر)	۰/۰۲ متر
l (طول شفت)	۱ متر
ρ (چگالی شفت)	۷۶۰۰ کیلوگرم بر متر مربع
E (مدول الاستیسیته)	۱۹۰ گیگا پاسکال
c (ضریب میرایی خارجی بر واحد طول)	۶ نیوتون ثانیه بر متر

Table 2. Parameters of the TPJB [10]

جدول ۲: مشخصات یاتاقان پد متحرک [۱۰]

مؤلفه	مقدار
C_p (لقی شعاعی)	۱۰۰ میکرو متر
L (طول یاتاقان)	۰/۰۱ متر
μ (لزجت سیال)	۰/۰۳۹۶ پاسکال ثانیه
N_{pads} (تعداد پد)	۴
آرایش پد ها	بین پد
m (پیش بار)	۰/۵
t_p (ضخامت پد)	۵ میلی متر
J_p (ممان اینرسی پد)	$۲/۶۱۱ \times 10^{-7}$ کیلوگرم متر مربع
محل قرارگیری لولای پد	وسط پد
β (ثابت اغتشاش)	$۳/۶۷ \times 10^{-4}$

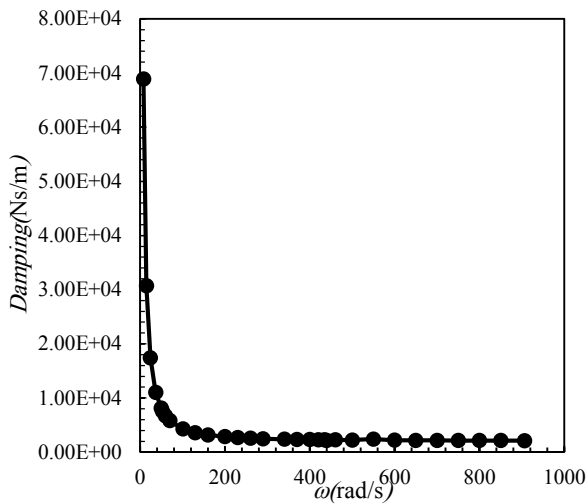
یاتاقان‌ها می‌باشند.

مشخصات شفت و یاتاقان پدمتحرک که برای شبیه سازی استفاده شده است در جدول‌های ۱ و ۲ آورده شده‌اند.

۵- مقایسه و رسم نتایج

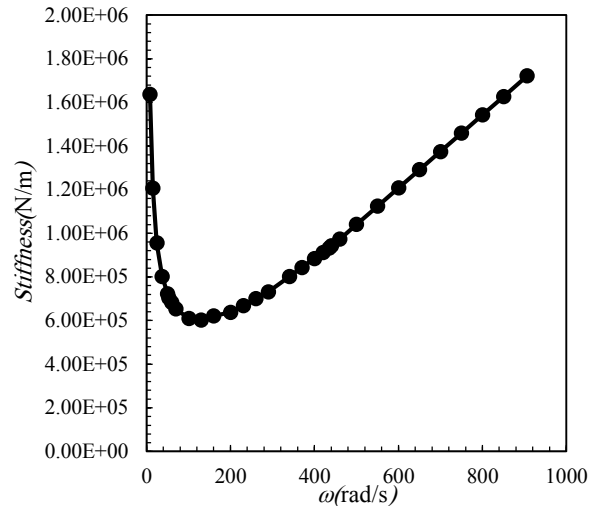
در این بخش با استفاده از معادلات بدست آمده در قبل، چندین مثال بررسی می‌شود. با حل روابط (۲۶) تا (۲۸) با توجه به جدول‌های ۱ و ۲ پاسخ سیستم روتور-یاتاقان پدمتحرک محاسبه می‌شود. برای حل از روش عددی رانگ-کوتا مرتبه چهار استفاده می‌شود. برای این کار معادلات ابتدا به فضای حالت منتقل می‌شوند تا معادلات مرتبه اول حاصل شود و سپس روش عددی مورد نظر اعمال می‌گردد. در اینجا، اثر پارامترهای متفاوت روی پاسخ سیستم بررسی می‌شود.

تاریخچه زمانی پاسخ سیستم در حالت خطی و غیرخطی در شکل ۳



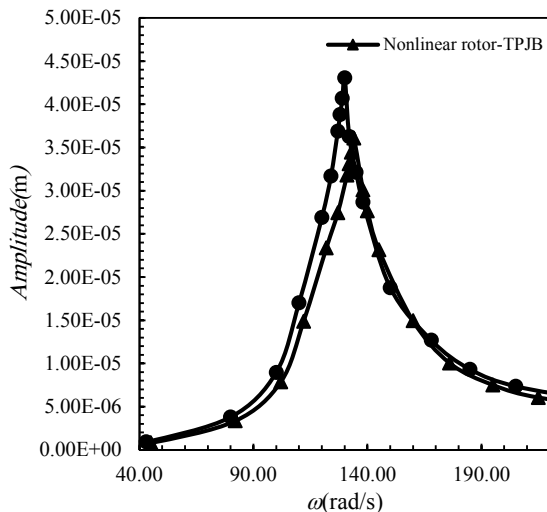
شکل ۶: میرایی بر حسب سرعت دورانی معادل یاتاقان پدمتحرک

Fig. 6. Damping of TPJB versus spinning speed



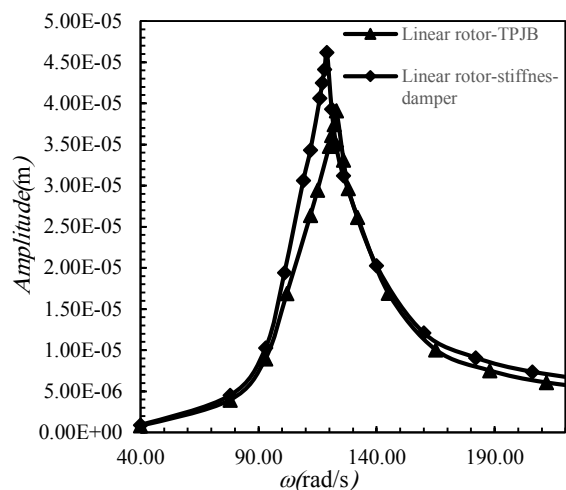
شکل ۵: سفتی بر حسب سرعت دورانی معادل یاتاقان پدمتحرک

Fig. 5. Stiffness of TPJB versus spinning speed



شکل ۸: مقایسه پاسخ سیستم روتور غیرخطی-یاتاقان پدمتحرک با سیستم روتور غیرخطی-سفتی-میرایی معادل یاتاقان

Fig. 8. Comparison between linear rotor-TPJB and linear rotor-equivalent TPJB



شکل ۷: مقایسه پاسخ سیستم روتور خطی-یاتاقان پدمتحرک با سیستم روتور خطی-سفتی-میرایی معادل یاتاقان

Fig. 7. Time history response of the first pad with 315-degree pivot

پاسخ فرکانسی سیستم‌های غیرخطی هم به وضوح دیده می‌شود [۲۲]. به عبارت دیگر هنگامی که از اثرات غیرخطی سفت شوندگی^۱ در سیستم موجود باشد با صرفنظر کردن از آن سیستم نرم‌تر می‌شود. این نرمی، باعث بیشتر شدن دامنه می‌شود. مشخص است که هر چقدر سیستم سفت‌تر شود پاسخ آن کوچک‌تر است. به همین خاطر، دامنه سیستم غیرخطی از خطی کوچک‌تر است. به منظور بررسی بیشتر، چگونگی تغییر پارامترهای دینامیکی یاتاقان بر

تعادل است که باعث می‌شود اثرات ناپایدار کننده، حداقل از جنبه تئوری صفر شود [۳-۵] و این نوع یاتاقان نسبت به یاتاقان‌های ساده برتری داشته باشند. از هر دو شکل‌های ۳ و ۴ نتیجه می‌شود در حالتی که معادلات به صورت غیرخطی در نظر گرفته شود، پد و روتور با دامنه کمتری نسبت به حالت خطی پاسخ می‌دهند. علت این می‌باشد که وقتی اثرات غیرخطی در نظر گرفته شود سیستم ناشی از غیرخطی بودن سفت‌تر شده است و این سفت‌تر شدن باعث کاهش دامنه در یک فرکانس مورد نظر می‌شود. این خصوصیت در منحنی

Table 3. Comparison between displacements of figures 7 and 8 in the resonance range

جدول ۳: مقایسه بین جابجایی در نقطه تشدید برای حالات شکل‌های ۷ و ۸

مشخصات شفت-یاتاقان	دامنه جابجایی در نقطه تشدید (میکرومتر)
سیستم روتور خطی-یاتاقان پدمتحرک	۴۰
سیستم روتور خطی-سفتی-میرایی معادل یاتاقان	۴۷
سیستم روتور غیرخطی-یاتاقان پدمتحرک	۳۷
سیستم روتور غیرخطی-سفتی-میرایی معادل یاتاقان	۴۴

Table 4. Comparison between laminar and turbulence flows in resonance region

جدول ۴: مقایسه بین جابجایی در نقطه تشدید برای حالات جریان آرام و مغشوش^۸

مشخصات شفت-یاتاقان	دامنه جابجایی در نقطه تشدید (میکرومتر)
سیستم روتور خطی-یاتاقان پدمتحرک با جریان آرام	۴۰
سیستم روتور غیرخطی-یاتاقان پدمتحرک با جریان آرام	۳۷
سیستم روتور خطی-یاتاقان پدمتحرک با جریان مغشوش	۳۶
سیستم روتور غیرخطی-یاتاقان پدمتحرک با جریان مغشوش	۳۱

شکل‌ها دامنه بر حسب دور روتور رسم می‌گردد. این منحنی‌ها به منحنی پاسخ فرکانسی^۲ معروف هستند.

به منظور بررسی صحت پاسخ، ابتدا مقادیر سفتی و میرایی معادل یاتاقان پدمتحرک استفاده شده (جدول ۲) از کتاب [۲۸] استخراج می‌گردد و سپس نتایج سیستم روتور خطی-یاتاقان پدمتحرک با سیستم روتور خطی-سفتی-میرایی مقایسه می‌شود که نتایج در شکل ۷ مشاهده می‌شود. همچنین پاسخ سیستم روتور غیرخطی-یاتاقان پدمتحرک با سیستم روتور غیرخطی-سفتی-میرایی در شکل ۸ مقایسه شده است. توجه شود منظور از سیستم روتور-سفتی-میرایی، یعنی این که اثرات یاتاقان بصورت فنر و میراگر مدل شود و از سفتی و میرایی معادل آن که در مرجع [۲۸] موجود است استفاده شود.

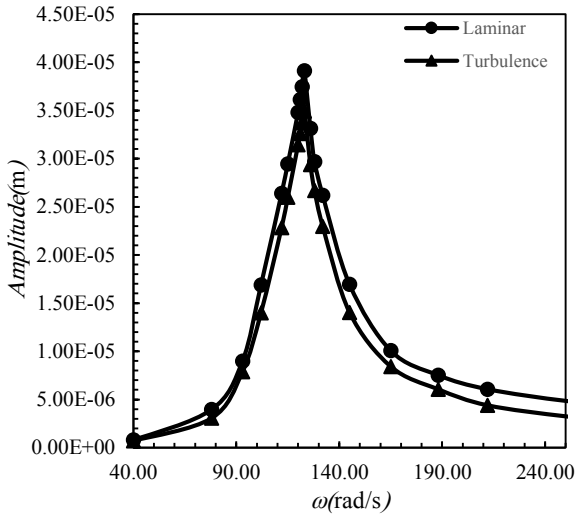
شکل‌های ۷ و ۸ تفاوت پاسخ سیستم روتور-یاتاقان پدمتحرک با سیستم روتور-سفتی-میرایی معادل را نشان می‌دهد و صحت نتایج بدست آمده از این نمودارها قابل استنتاج است. از این شکل‌ها مشخص است که پاسخ غیرخطی نسبت به پاسخ خطی در هر دو مدل دارای دامنه‌ی کوچکتری می‌باشد که قبلاً نیز با رسم تاریخچه زمانی چنین رفتاری مشاهده شد. در حالت روتور-یاتاقان پدمتحرک، حدود ۲۵ درصد اختلاف بین مدل خطی و غیر خطی وجود دارد.

حسب سرعت دورانی رسم می‌گردد. نمودار سفتی بر حسب سرعت دورانی به صورت شکل ۵ محاسبه می‌گردد. همچنین نمودار میرایی معادل یاتاقان پدمتحرک بر حسب سرعت دورانی به صورت شکل ۶ می‌باشد. مشاهده می‌شود که پارامترهای دینامیکی یاتاقان وابسته به سرعت روتور هستند و ثابت فرض کردن آن‌ها باعث ایجاد خطا می‌شود. در بعضی از مقالات قبلی مانند مرجع [۲۱] این ضرایب مستقل از سرعت روتور فرض شدند که این منجر به عدم دقت در نتایج می‌شود. از این شکل‌ها مشخص است که سفتی بر حسب سرعت دورانی ابتدا کم و سپس زیاد می‌شود. یعنی در سرعت دورانی خاصی، سفتی کمینه می‌باشد. میرایی بر حسب سرعت دورانی ابتدا بر حسب سرعت افت می‌کند و سپس در سرعت‌های بالا، حدوداً ثابت می‌شود و می‌توان آن را تقریباً ثابت فرض کرد. با رسم این نوع نمودارها، می‌توان سفتی و میرایی مناسب یاتاقان را در سرعت مورد نظر محاسبه کرد و در طراحی ماشین‌های دوار استفاده کرد.

در ادامه، با رسم پاسخ زمانی سیستم در سرعت‌های دورانی مختلف و خواندن دامنه صفر تا حداکثر^۱ هنگامی که پاسخ به حالت پایدار رسیده باشد، نمودار تغییر دامنه پاسخ سیستم بر حسب سرعت دورانی رسم می‌شود. در این

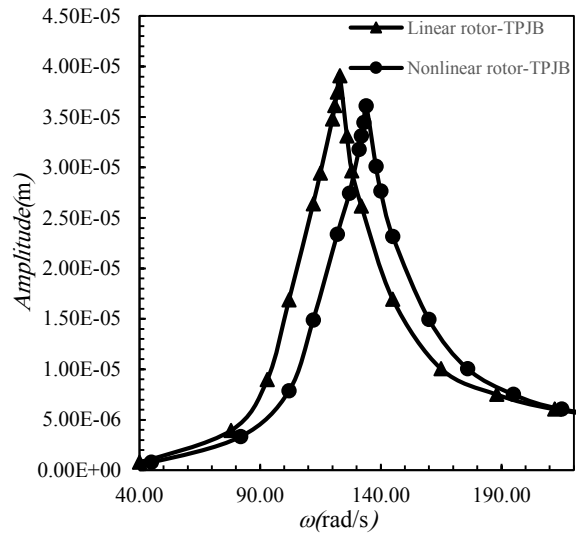
2 Frequency response function

1 Zero to pick



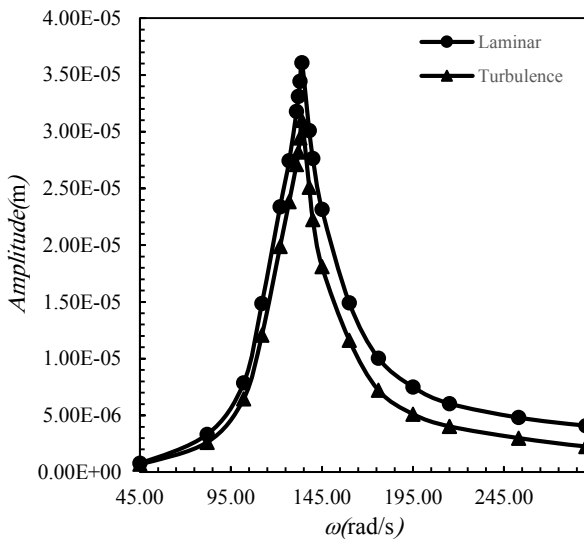
شکل ۱۰: مقایسه پاسخ سیستم روتور خطی و غیر خطی با یاتاقان پدمتحرک و جریان مغشوش

Fig. 10. Comparison between linear and nonlinear rotor (turbulence flow)



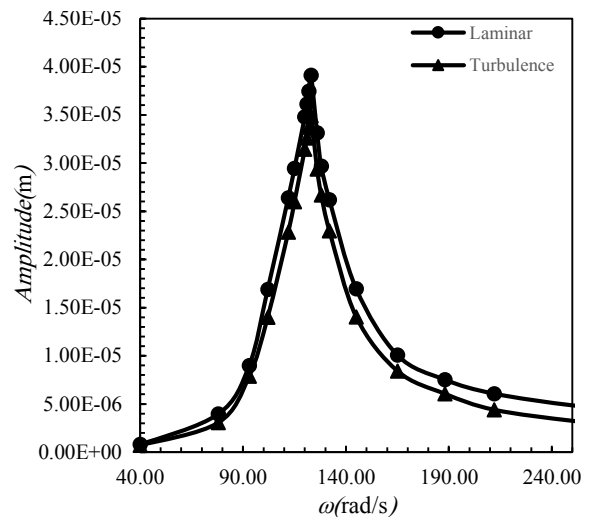
شکل ۹: مقایسه پاسخ سیستم روتور خطی و غیر خطی با یاتاقان پدمتحرک و جریان آرام

Fig. 9. Comparison between linear and nonlinear rotor (laminar flow)



شکل ۱۲: پاسخ سیستم روتور غیرخطی-یاتاقان پدمتحرک با جریان‌های آرام و مغشوش

Fig. 12. Response of nonlinear rotor-TPJB with laminar and turbulence flows



شکل ۱۱: پاسخ سیستم روتور خطی-یاتاقان پدمتحرک با جریان‌های آرام و مغشوش

Fig. 11. Response of linear rotor-TPJB with laminar and turbulence flows

بررسی شده است. اگر سرعت‌های بحرانی بالاتر دیده می‌شدند به علت آن که نیروی نابالانسی با توان دوم سرعت تغییر می‌کرد پاسخ خیلی بزرگ‌تر می‌شد. به همین خاطر پاسخ‌های بزرگ‌تر نیز دور از واقعیت نیست. به عبارت دیگر، در اینجا به علت دامنه کوچک پاسخ، اختلاف خطی و غیر خطی کمی است؛ اگر نابالانسی بزرگ‌تر فرض می‌شد اختلاف کمی خیلی بیشتر می‌شد

این نشان می‌دهد که مدلسازی غیرخطی برای روتور لازم است. توجه شود در مواردی که هم اثرات غیرخطی بودن معادلات لحاظ شده است، رفتار پرش^۱ در نمودارها مشاهده نمی‌شود. علت آن است که در این مثال، نابالانسی در حد کم در نظر گرفته شده‌اند. در نتیجه، دامنه‌ی خیلی بزرگ نیست و ترم‌های غیرخطی آنقدر بزرگ نیست که باعث پرش شود. توجه شود تشدید حول فرکانس اول

1 Jump

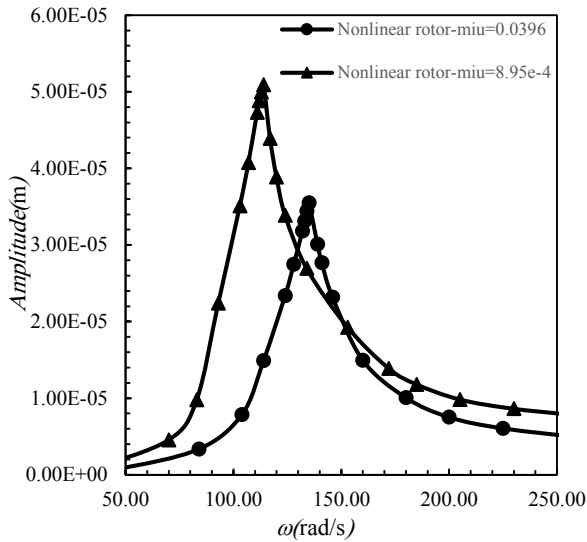


Fig. 14. Response of nonlinear rotor-TPJB with different dynamic viscosity

شکل ۱۴: پاسخ سیستم روتور غیرخطی-یاتاقان پدمتحرک با لزجت‌های دینامیکی متفاوت

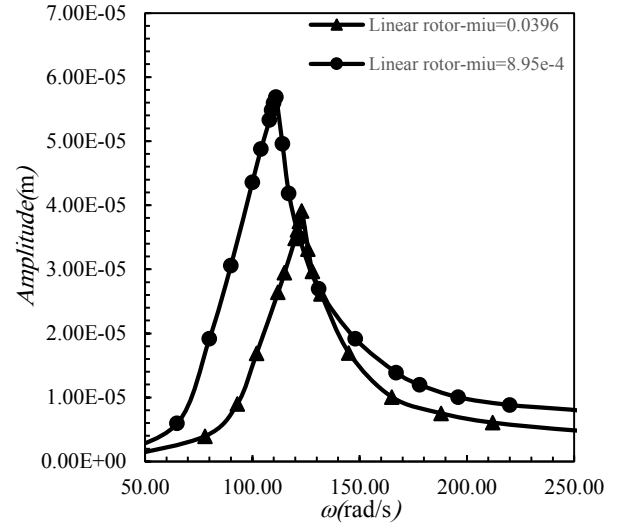


Fig. 13. Response of linear rotor-TPJB with different dynamic viscosity

شکل ۱۳: پاسخ سیستم روتور خطی-یاتاقان پدمتحرک با لزجت‌های دینامیکی متفاوت

که نشان می‌دهد مدلسازی غیرخطی به درستی سفتی واقعی روتور را نشان می‌دهد. می‌توان نتیجه گرفت که غیرخطی از نوع سفت شوندگی است چرا که با در نظر گرفتن آن مقدار فرکانس طبیعی سیستم بیشتر شده است. در حالتی که یاتاقان با فنر و میراگر مدل شود خطایی حدود ۳ درصد در پیش بینی فرکانس طبیعی وجود دارد. بصورت خلاصه می‌توان نتیجه گرفت که مدلسازی کامل یاتاقان و استفاده از مدل غیرخطی در محاسبه دامنه حداکثر و فرکانس تشدید باعث حصول دقت می‌شود که هر دو مورد در این مقاله انجام شده است. در جدول ۳ دامنه جابجایی در نقطه تشدید برای ۴ مورد ذکر شده مقایسه می‌شود:

پاسخ سیستم روتور-یاتاقان پدمتحرک با جریان آرام و مغشوش در دو حالت روتور خطی و غیرخطی محاسبه و در شکل‌های ۹ و ۱۰ رسم شده‌اند. این شکل‌ها دقیقاً همان نتایج قبل را به دست می‌دهد فارغ از این که جریان آرام

و بعلاوه اختلاف کیفی نیز در پاسخ‌ها ظاهر می‌شود. پس در اینجا حتی با فرض نابالانسی کوچک نیز، اختلاف بین خطی و غیرخطی قابل ملاحظه است و اهمیت تحلیل حاضر را نشان می‌دهد. همچنین بین حالتی که یاتاقان‌ها بصورت کامل مدل شوند و بصورت کوپل شده با روتور حل شود و حالتی که یاتاقان فقط به صورت فنر و میراگر مدل شود حدود ۲۰ درصد اختلاف وجود دارد که نشان می‌دهد عدم حل کامل معادلات رینولدز برای یاتاقان و به صرف معادلسازی فنر و میراگر خطای نسبتاً زیادی وارد سیستم می‌کند. البته اگر نابالانسی بزرگتر و سرعت‌های بحرانی بالاتر مد نظر بود این اختلاف باز هم بزرگتر می‌شد.

از نمودارها می‌توان فرکانس طبیعی روتور به ازای مدلسازی‌های متفاوت را با هم مقایسه کرد. در حالتی که یاتاقان به صورت کامل مدل و حل شود فرکانس طبیعی در حالت خطی و غیرخطی به ترتیب ۱۱۹ و ۱۳۲ می‌باشد

Table 5. Comparison between displacement of shaft for different viscosity

جدول ۵: مقایسه بین جابجایی در نقطه تشدید برای لزجت‌های متفاوت

دامنه جابجایی در نقطه تشدید (میکرومتر)	مشخصات شفت-یاتاقان
۴۰	سیستم روتور خطی-یاتاقان پدمتحرک $\mu = 0.0396$
۳۶	سیستم روتور غیرخطی-یاتاقان پدمتحرک $\mu = 0.0396$
۵۸	سیستم روتور خطی-یاتاقان پدمتحرک $\mu = 0.00895$
۵۲	سیستم روتور غیرخطی-یاتاقان پدمتحرک $\mu = 0.00895$

خطی دامنه کوچکتری نشان می‌دهد. همچنین فرکانس طبیعی در مدل غیرخطی بیشتر است و مدل خطی به اشتباه فرکانس طبیعی را کمتر بدست می‌دهد. این نشان می‌دهد که مدلسازی غیرخطی برای روتور لازم است. این تفاوت بسته به مقدار نابالاسی و سرعت شفت ممکن است بزرگ باشد. بین حالتی که یاتاقان‌ها به صورت کامل مدل شوند و به صورت کوپل شده با روتور حل شود و حالتی که یاتاقان فقط به صورت فنر و میراگر مدل شود نیز اختلاف قابل ملاحظه‌ای وجود دارد که نشان می‌دهد عدم حل کامل معادلات رینولدز برای یاتاقان و به صرف معادلسازی فنر و میراگر خطای نسبتاً زیادی وارد محاسبات می‌کند. به عبارت دیگر در این مقاله هم یاتاقان و هم روتور بصورت خطی و غیرخطی مدل شدند و پاسخ آن‌ها مقایسه شد. بیشتر دامنه و کمترین دقت مربوط به یاتاقان و شفت خطی است و کمترین دامنه و بیشترین دقت مربوط به یاتاقان و شفت غیرخطی است. اثر آرام و مغشوش بودن جریان سیال در یاتاقان نیز بررسی شد. در حالت جریان مغشوش، دامنه پاسخ کوچک‌تر است. ولی فرکانس‌های طبیعی برای دو حالت جریان آرام و مغشوش خیلی متفاوت نیست. به عبارت دیگر، نوع جریان در پیک دامنه مؤثر است ولی در فرکانس طبیعی روتور تفاوت معناداری ایجاد نمی‌کند. اثر لزجت دینامیکی در پاسخ سیستم شفت-یاتاقان نیز بررسی شد. با تغییر این پارامتر، هم در مقدار فرکانس طبیعی و هم در دامنه پاسخ تغییر ایجاد می‌کند. با زیاد شدن لزجت، فرکانس طبیعی زیاد و دامنه کم می‌شود که نشان می‌دهد سیستم سفت‌تر شده است.

منابع

- [1] Y. Ishida, T. Yamamoto, Linear and Nonlinear Rotordynamics, a Modern Treatment with Applications, Wiley-VCH, 2012.
- [2] F. Ocvirk, Short-bearing approximation for full journal bearings, NACA Report 2808, 1952.
- [3] J.W. Lund, Spring and damping coefficients for the tilting pad journal bearing, ASLE Transactions, 7 (1964) 342–352.
- [4] F.K. Orcutt, The steady state and dynamic characteristics of the tilting pad journal bearing in laminar and turbulent flow regimes, ASME Journal of Lubrication Technology, 89 (1967) 392–404.
- [5] C.W. Ng and C.H.T. Pan, A linearized turbulent

یا مغشوش باشد. یعنی این که اولاً مقدار پیک مدل غیرخطی کوچک‌تر ولی روتور غیرخطی سفت‌تر می‌باشد. مثلاً تفاوت فرکانس طبیعی خطی و غیرخطی حدود ۱۱ رادیان بر ثانیه می‌باشد.

در شکل ۱۱، پاسخ سیستم روتور خطی-یاتاقان پدمتحرک با جریان‌های آرام و مغشوش با یکدیگر مقایسه شده‌اند. در شکل ۱۲، پاسخ سیستم روتور غیرخطی-یاتاقان پدمتحرک با جریان‌های آرام و مغشوش مقایسه می‌شود. شکل‌های ۱۱ و ۱۲ بیان می‌کنند که جریان مغشوش باعث سفت شدن یاتاقان می‌شود که با نتایج پژوهش [۲۴] مطابقت دارد. این سفتی، سبب کاهش دامنه پاسخ شده است. فرکانس‌های طبیعی برای دو حالت جریان آرام و مغشوش خیلی متفاوت نیست. یعنی نوع جریان در پیک دامنه مؤثر است ولی در فرکانس طبیعی روتور تفاوتی ایجاد نمی‌کند. در جدول ۴ دامنه جابجایی در نقطه تشدید برای موارد قبل مقایسه می‌شود.

به منظور بررسی تاثیر لزجت دینامیکی بر پاسخ سیستم، در حالت روتور خطی از لزجت $\mu = 8/95 \times 10^{-4}$ که مربوط به آب می‌باشد [۱۰] استفاده و پاسخ آن با سیال دارای لزجت بیشتر در شکل ۱۳ مقایسه می‌گردد. این شکل با فرض خطی بودن معادلات رسم شده است. همچنین به منظور بررسی تاثیر لزجت دینامیکی بر پاسخ در حالت روتور غیرخطی از لزجت $\mu = 8/95 \times 10^{-4}$ استفاده و پاسخ آن با سیال دارای لزجت بیشتر در شکل ۱۴ مقایسه می‌شود. از هر دو شکل مشخص است که لزجت دینامیکی کمتر، هم باعث افزایش دامنه و هم باعث کاهش فرکانس طبیعی روتور خطی می‌شود. علت هم کاهش سفتی یاتاقان است. این رفتار هم در مدل خطی و هم در مدل غیرخطی مشاهده می‌شود.

جمع بندی تفاوت شکل‌های ۱۳ و ۱۴ در جدول ۵ ارائه می‌گردد.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا نیروهای هیدرودینامیکی و ممان اعمالی از طرف یاتاقان پدمتحرک به روتور محاسبه گردید. سپس معادله‌های روتور دارای اثر غیرخطی هندسی استخراج شد. در مرحله بعد معادله‌های حرکت روتور با دو یاتاقان پدمتحرک که در ابتدا و انتهای آن قرار داده شدند استخراج گردید. به منظور حل معادله‌های حاصل، با استفاده از روش گلرکین معادلات حرکت گسسته و سپس معادلات دیفرانسیل معمولی بدست آمده با استفاده از روش عددی حل شد. نتایج زیر از مقاله قابل بیان است:

غیرخطی سیستم از نوع سفت‌شونده است که در نتیجه سیستم خطی متناظر، نرمی بزرگتری بدست می‌دهد. پس، پاسخ غیرخطی نسبت به پاسخ

- [14] E.P. Okabe, Analytical model of a tilting pad bearing including turbulence and fluid inertia effects, *Tribology International*, 114 (2017) 245-256.
- [15] A. CerdaVarelaa, I. FerreiraSantos, Component level study of an actively lubricated LEG Tilting Pad Bearing: Theory and experiment, *Tribology International*, 120 (2018) 115-126.
- [16] Y. Wu, K. Feng, Y. Zhang, W. Liu, W. Li, Nonlinear dynamic analysis of a rotor-bearing system with porous tilting pad bearing support, *Nonlinear Dynamics* 94 (2018) 1391–1408.
- [17] B.R. Nichols, R.L. Fittro and C.P. Goyne, Steady-State Tilting-Pad Bearing Performance Under Reduced Oil Supply Flow Rates, *Journal of Tribology*, 140(5) (2018) 1-8.
- [18] L. San Andrés, B. Koo and M. Hemmi, A Flow Starvation Model for Tilting Pad Journal Bearings and Evaluation of Frequency Response Functions: A Contribution Toward Understanding the Onset of Low Frequency Shaft Motions, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 140(5) (2018) 1-14.
- [19] Y. Ishida, I. Nagasaka, T. Inoue, S. Lee, Forced Oscillations of a Vertical Continuous Rotor with Geometric Nonlinearity, *Nonlinear Dynamics*, 11 (1996) 107-120.
- [20] Z. Ji, J.W. Zu, Method of multiple scales for vibration analysis of rotor-shaft systems with non-linear bearing pedestal model, *Journal of Sound and Vibration*, 218 (1998) 293–305.
- [21] N. Shabaneh, J.W. Zu, Nonlinear dynamic analysis of a rotor shaft system with viscoelastically supported bearings, *Journal of Vibration and Acoustics*, 125 (2003) lubrication theory, *Journal of Basic Engineering*, 87 (1965) 675–682.
- [6] J.C. Nicholas, E. J. Gunter, P.E. Allaire, Stiffness and damping coefficients for the five-pad tilting-pad bearing, *ASLE Transactions*, 22 (1979) 113–124.
- [7] G.J. Jones and F.A. Martin, Geometry effects in tilting-pad journal bearings, *ASLE Transactions*, 22 (1979) 227–244.
- [8] G. Capone, Orbital motions of rigid symmetric rotor supported on journal bearings, *Mecc. Ital.*, 199 (1986) 37–46 (in Italian).
- [9] E.P. Okabe, K.L. Cavalca, Rotordynamic analysis of systems with a non-linear model of tilting pad bearings, in: *Seventh International Conference on Rotor Dynamics (IFTToMM)*, Austria, Vienna, 2006.
- [10] E.P. Okabe, K.L. Cavalca, Rotordynamic analysis of systems with a non-linear model of tilting pad bearings including turbulence effects, *Nonlinear Dynamics* 57 (2009) 481–495.
- [11] Y. Wang, Y. Gao, Y. Cui and Z. Liu, Establishment of Approximate Analytical Model of Oil Film Force for Finite Length Tilting Pad Journal Bearings, *International Journal of Rotating Machinery*, Article ID 531209 (2015) 1-11.
- [12] M. Li et al, Rotor Dynamics Behavior of Tilting Pad Bearing Supported Turbo-Expander Considering Temperature Gradient, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 11(2) (2015) 1-16.
- [13] M. Chaab, S. Glavatskihac, Nonlinear dynamic behaviour of vertical and horizontal rotors in compliant liner tilting pad journal bearings: Some design considerations, *Tribology International*, 82 (2015) 142-152.

- 288.
- [25] M. Moradi Tiaki, S.A.A. Hosseini, M. Zamanian, Nonlinear forced vibrations analysis of overhung rotors with unbalanced disk, *Archive of Applied Mechanics*, 86 (2015) 797–817.
- [26] G. Capone, M. Russo, R. Russo, Dynamic characteristics and stability of a journal in a non-laminar lubrication regime, *Tribology International*, 20 (987) 255–260.
- [27] S. S. Rao, *Vibration of continuous systems*, John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- [28] T. Someya, *Journal-Bearing Data Book*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg GmbH., 2013.
- 290–298.
- [22] S.A.A. Hosseini, S.E. Khadem, Analytical solution for primary resonances of a rotating shaft with stretching nonlinearity, *International Journal of Mechanical Engineering Science*, 222 (2008) 1655-1664.
- [23] S.E. Khadem, M. Shahgholi, S.A.A. Hosseini, Two-mode combination resonances of an in-extensional rotating shaft with large amplitude, *Nonlinear Dynamics*, 65 (2011) 217-233.
- [24] S.A.A. Hosseini, S.E. Khadem, Free vibration analysis of a rotating shaft with nonlinearities in curvature and inertia, *Mechanism and Machine Theory*, 44 (2009) 272–