



دانشگاه صنعتی امیر کبیر  
(پلی تکنیک تهران)

دوره چهل و پنجم، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۲، صفحه ۱۱ تا ۲۵  
Vol. 45, No. 2, winter 2013, pp. 11-25



نشریه علمی - پژوهشی امیر کبیر (مهندسی مکانیک)  
Amirkabir Journal of Science & Research (Mechanical Engineering)  
(AJSR - ME)

## تحلیل استاتیکی خمش، پایداری، و تحلیل دینامیکی ورق‌های با عمل کرد درجه‌بندی شده به کمک یک تئوری چهارمتغیره

فرید کاویانی<sup>۱</sup>، حمیدرضا میردامادی<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

۲- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت ۱۳۹۰/۸/۲۹، پذیرش ۱۳۹۲/۹/۱۲)

### چکیده

در این مقاله تحلیل استاتیکی خمش و پایداری، و تحلیل دینامیکی ارتعاش آزاد ورق‌های با عمل کرد درجه‌بندی شده با استفاده از یک تئوری چهار متغیره بررسی شده است. در این تئوری چهار متغیره، برای برقراری شرط مرزی تنش‌های برشی برون صفحه‌ی صفر در پوسته‌های بالایی و زیرین ورق، از توزیع سینوس هذلولوی استفاده شده است. یکی از ویژگی‌های مکانیکی مواد مورد نظر، تغییرات پیوسته در ضخامت، با یک توزیع توانی است که تابع درصد‌های حجمی بخش‌های سازنده‌ی ورق است. هدف از ارائه‌ی این مقاله بدست آوردن نتایجی تحلیلی با دقت بالاتر از حالت ساده‌ی تئوری چهار متغیره‌ی ورق، است. همچنین برای انجام مطالعه‌ی عواملی، موارد اثرگذار در تحلیل ورق‌های با عمل کرد درجه‌بندی شده بررسی شده‌اند. معادله‌های حرکت ورق به کمک اصل تغییراتی همیلتون استخراج شده‌اند. نتایج تحلیلی با استفاده از روش کلاسیک ناویه و شرایط مرزی چهار طرف ساده، بدست آمده است. نتایج عددی، برای توان‌های گوناگون توزیع خواص مکانیکی در ضخامت و برای نسبت‌های متفاوت طول به ضخامت ورق حاصل شده‌اند. نتایج بدست آمده از این تئوری، با نتایج تئوری‌های گوناگون مقایسه شده است.

### کلمات کلیدی

ورق‌های با عمل کرد درجه‌بندی شده<sup>۲</sup>، تئوری ورق پالوده شده<sup>۳</sup>، تئوری چهارمتغیره، کرنش‌های برشی برون صفحه، حل ناویه.

\* نویسنده مسئول وعهده دار مکاتبات Email: hrmirdamadi@cc.iut.ac.ir

## ۱- مقدمه

در چند دهه‌ی اخیر، توجه ویژه‌ای در تحقیقات علمی و صنایع به مواد با ساختار و ویژگی‌های جدید از جمله مواد پیشرفته شده است. مواد با عمل‌کرد درجه‌بندی شده، دسته‌ای از مواد مرکب ناهمگن هستند که ویژگی‌های مکانیکی آنها در طول ضخامت به طور پیوسته تغییر می‌نماید. این مواد می‌توانند از دو یا چند ماده‌ی مجزا ساخته شوند به گونه‌ای که ویژگی‌های مکانیکی آنها در راستاهای گوناگون مختصات فضایی دارای تغییرات پیوسته باشد. مواد با عمل‌کرد درجه‌بندی شده نخستین بار توسط پژوهشگران علم مواد در ژاپن در سال ۱۹۸۴ ساخته شد. این مواد با ترکیب دو ماده‌ی متفاوت تولید شد، به گونه‌ای که ویژگی‌های مکانیکی بدست آمده به صورت پیوسته در ضخامت آنها تغییر نماید [۱]. از ویژگی‌های مواد با عمل‌کرد درجه‌بندی شده می‌توان به مقاومت بالا در شرایط محیطی با تغییرات شدید دما، کاهش تنش‌های پس‌ماند، مقاومت بالا در برابر سایش، کاهش وزن سازه و رفتار ارتعاشی قابل قبول نام برد. از این رو، استفاده از این مواد در صنایعی مانند هوافضا، الکترونیک، مهندسی پزشکی و کشتی‌سازی مورد توجه قرار گرفته است. بررسی و تحلیل ورق‌های سازه‌ای در صنایع نام برده، اهمیت زیادی دارد. بنابراین بررسی ورق‌های ساخته شده از مواد با عمل‌کرد درجه‌بندی شده نیز دارای اهمیت ویژه‌ای است. تئوری‌های گوناگونی برای بررسی رفتار ورق‌ها مورد استفاده قرار گرفته‌اند. نخست می‌توان به تئوری کلاسیک ورق‌ها اشاره کرد. بررسی مواد با عمل‌کرد درجه‌بندی شده با استفاده از این تئوری در مراجع گوناگونی انجام شده است که می‌توان به مراجع [۲] و [۳] اشاره نمود. اثر تغییرشکل‌های برشی در تحلیل ورق‌ها به خوبی آشکار است، بنابراین استفاده از تئوری‌های تغییرشکل برشی جانبی، با توجه به چشم‌پوشی تئوری کلاسیک ورق از این تغییرشکل‌ها، ضروری است. تئوری‌های تغییرشکل برشی مرتبه‌ی یکم و مرتبه‌های بالاتر برای بررسی ورق‌های ساخته شده از مواد با عمل‌کرد درجه‌بندی شده مورد استفاده قرار گرفته است. مثال‌هایی از استفاده از این تئوری‌ها در بررسی این مواد را می‌توان در مراجع [۴] تا [۱۰] دید. پس از آن، تئوری پالوده شده‌ی ورق توسط شیمپی [۱۱] برای رسیدن به نتایج با دقت بالاتر و هم‌زمان، بیان معادله‌ها به شکل ساده‌ی تئوری کلاسیک ورق، ارائه شد. شیمپی از دو دسته متغیر استفاده نمود که یک دسته از آنها از دیدگاه تحلیل مبتنی بر حسابان تغییرات، سازگار و دسته‌ی دیگر ناسازگارند. در متغیرهای سازگار، متغیرهای نامعین سامانه به صورت مستقل از یکدیگر، معادلات

حرکت ورق را ایجاد می‌نمایند، به گونه‌ای که معادله‌های حرکت ورق شبیه معادله‌های رزینر می‌شوند و یکی از معادله‌ها شباهت زیادی با معادله‌های تئوری کلاسیک ورق دارد. در متغیرهای از لحاظ تغییراتی ناسازگار، با استفاده از معادله‌های تعادل رابطه‌ای بین متغیرهای جابجایی جانبی برای مؤلفه‌ی خمشی و مؤلفه‌ی برشی ایجاد و این رابطه اضافی، خود باعث کاهش تعداد متغیرهای سیستم می‌شود. از پژوهش‌های انجام شده بر روی مواد با عمل‌کرد درجه‌بندی شده با استفاده از تئوری پالوده شده‌ی ورق می‌توان مراجع [۱۲] تا [۱۴] را نام برد. در تحلیل ورق‌ها به ویژه در زمینه‌ی صنایع هوافضا، دقت بالای مورد نیاز و پیچیدگی معادله‌ها می‌تواند قید محدودکننده‌ای برای انتخاب تئوری، برای تحلیل تنش باشد. از این رو استفاده از تئوری پالوده شده‌ی ورق می‌تواند گزینه‌ی مناسبی برای بررسی ورق‌های ساخته شده از مواد با عمل‌کرد درجه‌بندی شده باشد. در این مقاله از تئوری پالوده شده‌ی ورق با متغیرهای سازگار و با توزیع سینوس هذلولوی تنش و کرنش برون-صفحه در ضخامت، با نام پیشنهادی RPT3 استفاده شده است. استفاده از توزیع سینوس هذلولوی برای تنش‌ها و کرنش‌های برشی برون-صفحه برای تئوری پالوده شده‌ی ورق، علاوه بر داشتن شکل ساده‌ی تئوری پالوده شده‌ی ورق، دقت نتایج بدست آمده را نیز افزایش می‌دهد و نیازهای مهم در زمینه‌ی تحلیل ورق‌ها را برطرف می‌سازد.

همان‌طور که بیان شد، هدف از گسترش تئوری پالوده شده‌ی ورق، برای ورق‌های با عمل‌کرد درجه‌بندی شده، افزایش دقت در محاسبات مربوط به این ورق‌ها و همچنین استفاده از شکل ساده‌ی ذاتی تئوری پالوده شده است. در این تحقیق، این مزیت‌ها با استفاده از یک تابع شکل با توزیع سینوس هذلولوی برای تغییرشکل برشی بدست آمده است. با انتخاب این تابع شکل، علاوه بر داشتن شکل ساده‌ی تئوری پالوده شده به هدف اصلی، افزایش دقت نتایج نیز دست خواهیم یافت.

بخش‌های بعدی مقاله به شکل زیر سازماندهی شده‌اند: در بخش دوم، فرض‌های مورد نیاز برای برقراری تئوری و رابطه‌های سینماتیکی ورق‌ها ارائه شده‌اند. این فرض‌ها در همه‌ی تئوری‌هایی که از نتایج آنها در این مقاله استفاده شده، نیز به کار برده شده است. در بخش سوم، ویژگی‌های مکانیکی مواد با عمل‌کرد درجه‌بندی شده مورد بررسی در این مقاله و روابط ساختاری خطی‌سازی شده‌ی تنش-کرنش آورده شده است. در بخش چهارم، معادله‌های حرکت ورق با استفاده از اصل همپلتون نتیجه شده و با استفاده از حل ناویه تحلیل استاتیکی و

$$u(x, y, z, t) = u_a(x, y, t) + u_b(x, y, z, t) + u_s(x, y, z, t) \quad (2)$$

$$v(x, y, z, t) = v_a(x, y, t) + v_b(x, y, z, t) + v_s(x, y, z, t)$$

مؤلفه‌های خمشی  $u_b$  و  $v_b$  مانند تئوری کلاسیک ورق‌ها فرض می‌شوند:

$$u_b(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, v_b(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (3)$$

مؤلفه‌های برشی  $u_s$  و  $v_s$  به صورت رابطه (۴) گسترش داده می‌شوند:

$$u_s(x, y, z, t) = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, v_s(x, y, z, t) = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (4)$$

بر اساس فرض‌های مطرح شده در رابطه‌های (۱) تا (۴)، جابجایی‌ها به صورت رابطه (۵) فرمول‌بندی می‌شوند:

$$u(x, y, z, t) = u_a(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}$$

$$v(x, y, z, t) = v_a(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (5)$$

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t)$$

در رابطه‌ی (۵)،  $u_a$ ،  $v_a$ ،  $w_b$  و  $w_s$  چهار تابع جابجایی نامعین در میان صفحه‌ی ورق و  $f(z)$  نیز تابع شکل توزیع تنش و کرنش برشی در ضخامت ورق است. در تئوری‌های گوناگون، برای نمایش توزیع تنش برشی جانبی، توابع متفاوتی به عنوان تابع برشی پیشنهاد شده‌است که متناسب با تئوری مورد نظر باید شرایط گوناگونی را برقرار نمایند. برای مثال چند نمونه از این توابع در جدول (۱) آورده شده‌اند.

کرنش‌های بدست آمده از تابع‌های جابجایی یاد شده، با استفاده از رابطه‌های کرنش-جابجایی فون کارمن [۲۷] و در محدوده‌ی رابطه‌ی خطی (چشم‌پوشی از جمله‌های مرتبه بالا) با جانشانی مؤلفه‌های جابجایی به صورت رابطه (۶) حاصل می‌شوند

دینامیکی می‌شوند. در بخش پنجم، به بررسی نتایج عددی پرداخته شده و در پایان، در بخش ششم به بحث پیرامون نتایج عددی و نتیجه‌گیری خواهیم پرداخت.

## ۲- فرض‌های اساسی و سینماتیک

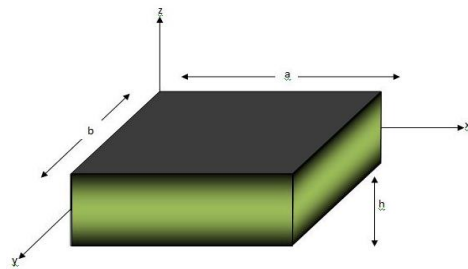
ورق مستطیلی با طول و عرض  $a$  و  $b$  در راستاهای  $x$  و  $y$  و ضخامت  $h$  در راستای  $z$ ، ساخته شده از مواد با عمل‌کرد درجه‌بندی شده با تغییرات در ویژگی‌های مکانیکی در راستای ضخامت را، مانند شکل (۱)، در نظر می‌گیریم. شرایط لازم برای برقراری تئوری با توجه به تئوری پالوده شده‌ی ورق به شرح زیر است:

جابجایی در مقایسه با ضخامت ورق کوچک است بنابراین اندازه‌ی کرنش‌ها بسیار کوچک خواهند بود.

جابجایی جانبی  $w$ ، دارای دو مؤلفه‌ی خمشی  $w_b$  و برشی  $w_s$  است.

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \quad (1)$$

این دو مؤلفه، تابعی از دو مختصه‌ی مکانی  $x$  و  $y$  و مختصه‌ی زمانی  $t$  هستند.



شکل(۱): ورق FGP با تغییر ویژگی‌های مکانیکی

تنش عمودی  $\sigma_z$  در مقایسه با دو تنش  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  قابل چشم‌پوشی است.

جابجایی‌های  $u$  در راستای محور  $x$  و  $v$  در راستای محور  $y$ ، شامل سه مؤلفه‌ی کششی، خمشی و برشی هستند

### ۳- ویژگی‌های مکانیکی و رابطه‌های ساختاری

#### ۳-۱- ویژگی‌های مکانیکی

همان‌طور که بیان شد، مواد با عمل‌کرد درجه‌بندی شده، مواد مرکب هستند که ویژگی‌های مکانیکی آن‌ها در ضخامت به طور پیوسته تغییر می‌نماید. این مواد به طور معمول از دو فاز، فلزی و سرامیکی تشکیل می‌شوند. ویژگی‌های مکانیکی در طول ضخامت، به شکل تابعی توانی از درصدها و ویژگی‌های مکانیکی هر فاز بدست می‌آید. با استفاده از یک شکل توزیع توانی، می‌توان مدول الاستیسیته و چگالی جرمی را با رابطه‌ی (۸) بیان نمود. نسبت پواسون ثابت و برابر  $0/3$  در نظر گرفته می‌شود:

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{4z^2}{h^2}\right)^P + E_m \quad (۸)$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{4z^2}{h^2}\right)^P + \rho_m$$

در رابطه‌ی (۸)، زیرنویس‌های  $m$  و  $c$  به ترتیب نمایانگر ویژگی‌های فاز فلزی و فاز سرامیکی هستند. نمای  $P$  عددی ثابت، مثبت و بیانگر توان توزیع مورد استفاده است. این توزیع به گونه‌ای در نظر گرفته شده است که ورق در پوسته‌های

بالایی و زیرین  $(z = \pm \frac{h}{2})$ ، سرامیک خالص و در میان‌صفحه  $(z=0)$  فلز خالص باشد. این شکل انتخاب شده برای تغییرات مدول الاستیسیته و جرم حجمی در ضخامت، باعث می‌شود میان‌صفحه و صفحه‌ی اصلی ماده (صفحه‌ی موازی صفحه‌ی  $XY$ ) بر روی هم منطبق شوند و بر هم‌کنش میان اثرات محوری و خمشی حذف شود. نتیجه‌ی نهایی آن است که برای حل یک مسأله‌ی ارتعاش آزاد فقط نیازمند حل یک مسأله‌ی مقدار ویژه هستیم که در آن شکل حالت‌های خمشی خالص می‌تواند رخ دهد بدون آنکه تغییر شکل‌های محوری دیده شود. هم‌چنین هنگام حل یک مسأله‌ی پایداری الاستیک، دوباره می‌توان با حل یک مسأله‌ی مقدار ویژه خطی بار بحرانی را بدست آورد. اگر این‌گونه عمل نمی‌شد درهم‌گیری رفتارهای محوری و خمشی باعث می‌شد، درست از لحظه‌ی شروع بارگذاری محوری فشاری، رفتار خمشی ظاهر شود و نتوان یک بار بحرانی ناشی از حل مسأله‌ی مقدار ویژه بدست آورد. در حقیقت در ظاهر به نظر می‌آید که ورق با عملکرد درجه‌بندی شده از ابتدا زیر بارگذاری هم‌زمان محوری-خمشی قرار دارد و فقط باید مسأله‌ی پس

جدول (۱): تابع‌های تغییر شکل برشی جانبی استفاده شده توسط

محققان پیشین

مدل	تابع
Shimpi[11]	$f(z) = z\left(\frac{1}{4} - \frac{5z^2}{3h^2}\right)$
Ambartsumain[15]	$f(z) = \frac{z}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3}\right)$
Kaczkowski[160] Panc[17] Reissner[18]	$f(z) = \frac{5z}{4}\left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$
Levinson[19] Murthy[20] Reddy[21]	$f(z) = z\left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$
Touratier[22]	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Saldatos[23]	$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \sin(h)$
Karama et al[24]	$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$
Meiche [25]	$f(z) = \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right) - z}{[\cosh(\pi/2) - 1]}$
Manatri[26]	$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)} + \frac{\pi z}{2h}$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^a + z\kappa_x^b + f(z)\kappa_x^s \quad (۶)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^a + z\kappa_y^b + f(z)\kappa_y^s$$

$$\varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^a + z\kappa_{xy}^b + f(z)\kappa_{xy}^s$$

$$\gamma_{yz} = g(z)\gamma_{yz}^s$$

$$\gamma_{xz} = g(z)\gamma_{xz}^s$$

در رابطه‌ی (۶)، نمادها و متغیرهای زیر ظاهر شده‌اند

$$\varepsilon_x^a = \frac{\partial u_a}{\partial x}, \kappa_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \kappa_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \quad (۷)$$

$$\varepsilon_y^a = \frac{\partial v_a}{\partial y}, \kappa_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \kappa_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy}^a = \frac{\partial u_a}{\partial y} + \frac{\partial v_a}{\partial x}, \kappa_{xy}^b = -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \kappa_{xy}^s = -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}$$

$$\gamma_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y}, \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}$$

$$f(z) = \frac{h \sinh\left(40\frac{z}{h}\right)}{10 \cosh(5)} - \frac{h}{100}$$

$$g(z) = -\frac{df}{dz} + 1 = -\frac{\cosh\left(40\frac{z}{h}\right)}{\cosh(5)} + 1$$

$$(N_x, N_y, N_{xy}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz \quad (13)$$

$$(M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz$$

$$(M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) f(z) dz$$

$$(Q_{yz}^s, Q_{xz}^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{yz}, \sigma_{xz}) g(z) dz$$

با جایگذاری رابطه‌های (۶) و (۹) در رابطه‌ی (۱۳) و انتگرال‌گیری روی ضخامت ورق، رابطه‌های (۱۴) بدست می‌آیند:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \\ Q_{yz}^s \\ Q_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \\ D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \\ H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{12} & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^a \\ \varepsilon_y^a \\ \varepsilon_{xy}^a \\ \kappa_x^b \\ \kappa_y^b \\ \kappa_{xy}^b \\ \kappa_x^s \\ \kappa_y^s \\ \kappa_{xy}^s \\ \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (14a)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz}^s \\ Q_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (14b)$$

ماتریس‌های  $A, D, A^s, D^s, H^s$  سختی‌های ورق هستند و با رابطه‌ی (۱۵) تعریف می‌شوند

$$(A_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}(z)(1, z^2) dz, (i, j = 1, 2, 6) \quad (15)$$

$$(D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}(z)(zf(z), f(z)^2) dz, (i, j = 1, 2, 6)$$

$$(A_{ij}^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}(z)(g(z)^2) dz, (i, j = 4, 5,)$$

کار انجام شده توسط بارگذاری‌های برون صفحه و درون صفحه بر روی ورق نیز با رابطه‌ی (۱۶) تعریف می‌شود [۱۳]

$$V = - \iint q(w_b + w_s) dx dy + \frac{1}{2} \iint [N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} + N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y}] dx dy \quad (16)$$

کمانش ورق همراه با تئوری‌های شکست یا گسیختگی (مسأله‌ی غیرخطی) تحلیل شود.

### ۳-۲- رابطه‌های ساختاری

رابطه‌های ساختاری برای ورق را می‌توان به صورت رابطه (۹) نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & Q_{12}(z) & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12}(z) & Q_{22}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55}(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$Q_{ij}$  سختی کاهش یافته‌ی ورق هستند و با استفاده از ثابت‌های مهندسی به صورت رابطه (۱۰) تعریف می‌شود

$$Q_{11}(z) = Q_{22}(z) = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, Q_{12}(z) = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} \quad (10)$$

$$Q_{66} = Q_{44} = Q_{55} = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)},$$

### ۴- معادلات حرکت و حل

انرژی کرنشی ورق به شکل رابطه‌ی (۱۱) بر حسب تنش و کرنش تعریف می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} \int \sigma_i \varepsilon_i dvol = \frac{1}{2} \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \gamma_{xz}) dvol \quad (11)$$

با قرار دادن رابطه‌های (۶)، (۷) و (۹) در رابطه‌ی (۱۱) به رابطه‌ی (۱۲) برای انرژی کرنشی بر حسب برایندهای تنش دست خواهیم یافت:

$$U = \frac{1}{2} \int (N_x \varepsilon_x^a + N_y \varepsilon_y^a + N_{xy} \gamma_{xy}^a + M_x^b \kappa_x^b + M_y^b \kappa_y^b + M_{xy}^b \kappa_{xy}^b + M_x^s \kappa_x^s + M_y^s \kappa_y^s + M_{xy}^s \kappa_{xy}^s + Q_{yz}^s \gamma_{yz}^s + Q_{xz}^s \gamma_{xz}^s) dvol \quad (12)$$

در رابطه‌ی (۱۲)،  $N, M^b, M^s, Q^s$  به صورت رابطه (۱۳) تعریف می‌شوند:

$$\frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial Q_{yz}^s}{\partial y} + \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} + q + N(w) = \rho_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \rho_0^2 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right)$$

$$N(w) = N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} + N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y}$$

$$\rho_0^2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho f(z)^2 dz \quad (20)$$

$$\rho_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^i dz, (i = 0, 2)$$

معادله‌های (۱۹) را می‌توان برحسب مؤلفه‌های  $(u, v, w_b, w_s)$  با جایگذاری برآیندهای تنش از معادله‌های (۱۴a) بیان کرد. بنابراین معادله‌های حرکت ورق با معادله‌های (۲۱) نمایش داده می‌شوند:

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_a}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_a}{\partial x \partial y} = \rho_0 \ddot{u}_a \quad (21a)$$

$$A_{22} \frac{\partial^2 v_a}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_a}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_a}{\partial x \partial y} = \rho_0 \ddot{v}_a \quad (21b)$$

$$-[D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4}]$$

$$-[D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4}] + q + N(w) = \rho_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \rho_2 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right)$$

$$-[D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4}]$$

$$-[H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} + H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}] + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + q + N(w) = \rho_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \rho_0^2 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right)$$

برای ورق مستطیلی با شرط مرزی چهار طرف ساده، حل ناویه مانند رابطه‌ی (۲۲) مورد استفاده قرار می‌گیرد. شرایط مرزی (تکیه‌گاهی) نیز با رابطه‌ی (۲۳) مشخص می‌شوند:

$q$  بارگذاری برون‌صفحه بر واحد سطح و  $(N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0)$  بارگذاری‌های درون‌صفحه بر واحد عرض وارد بر ورق هستند. انرژی جنبشی ورق نیز با رابطه‌ی (۱۷) تعریف می‌شود:

$$T = \frac{1}{2} \int \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dvol \quad (17)$$

$$= \frac{1}{2} \int \rho (\dot{u}_a - z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x}) (\dot{u}_a - z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x}) dvol$$

$$+ \frac{1}{2} \int \rho (\dot{v}_a - z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y}) (\dot{v}_a - z \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y}) dvol$$

$$+ \frac{1}{2} \int \rho (\dot{w}_b + \dot{w}_s) (\dot{w}_b + \dot{w}_s) dvol$$

در رابطه‌ی (۱۷)، نماد نقطه در  $\dot{u}_i$  بیانگر مشتق نسبت به زمان و  $\rho$  چگالی جرمی ورق است. برای بدست آوردن معادله‌های حرکت ورق از اصل همپلتون با واریاسیون بر روی مؤلفه‌های جابجایی و رابطه‌های ساختاری استفاده می‌شود. صورت کلی با معادله‌ی (۱۸) مشخص شده است:

$$\int_0^{T_s} \delta(U + V - T) dt = 0 \quad (18)$$

$\delta$  نمایانگر عملگر تغییرات مجازی بر روی انرژی مورد نظر است. با جایگذاری رابطه‌های انرژی کرنشی، کار نیروهای خارجی پایستار و انرژی جنبشی ورق و انتگرال‌گیری و جداسازی متغیرهای مجازی  $\delta u, \delta v, \delta w_b$  و  $\delta w_s$  معادله‌های حرکت ورق به شکل رابطه‌ی (۱۹) بدست می‌آیند

در رابطه‌های (۱۹)،  $N(w)$  اثر نیروهای درون‌صفحه، برای بررسی بار بحرانی و  $\rho_i^j$  گشتاورهای اینرسی ورق از مرتبه‌های  $i$  و  $j$  هستند که با رابطه‌ی (۲۰) تعریف می‌شوند:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \rho_0 \ddot{u}_a \quad (19a)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = \rho_0 \ddot{v}_a \quad (19b)$$

$$\frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + q + N(w) =$$

$$\rho_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - \rho_2 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right)$$

$$(19d)$$

در رابطه‌های (۲۵) و (۲۶) پارامترهای رابطه‌ی (۲۷) ظاهر می‌شوند:

$$k_{11} = A_{11}\mu^2 + A_{66}\lambda^2$$

$$k_{12} = \mu\lambda(A_{12} + A_{66})$$

$$k_{22} = A_{66}\mu^2 + A_{22}\lambda^2$$

$$k_{33} = D_{11}\mu^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2\lambda^2 + D_{22}\lambda^4$$

$$k_{34} = D_{11}^s\mu^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\mu^2\lambda^2 + D_{22}^s\lambda^4$$

$$k_{44} = H_{11}^s\mu^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\mu^2\lambda^2 + H_{22}^s\lambda^4 + A_{44}\lambda^2 + A_{55}\mu^2$$

$$m_{11} = m_{22} = m_{34} = \rho_0$$

$$m_{33} = \rho_0 + \rho_2(\mu^2 + \lambda^2)$$

$$m_{44} = \rho_0 + \rho_0^2(\mu^2 + \lambda^2)$$

$$\eta = N_x^0\mu^2 + N_y^0\lambda^2$$

### ۵- نتایج عددی

در این بخش چند مثال عددی برای بحث پیرامون دقت تئوری ارائه شده، مطرح خواهد شد، که شامل خمش استاتیکی و محاسبه‌ی بار بحرانی و فرکانس مینا با شرایط تکیه‌گاهی رابطه‌ی (۲۲) می‌باشد. برای بررسی دقت نتایج بدست‌آمده، حل‌های این تئوری با نتایج تئوری‌های گوناگونی مقایسه شده است. برای نمایش بهتر نتایج در جداول، بی‌بعدسازی‌های رابطه‌ی (۲۸) انجام شده است [۲۸]

$$\bar{w} = 10w(a/2, b/2) \left( \frac{E_c h^3}{qa^4} \right)$$

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$$

$$\bar{N} = N_0 \frac{h^3}{E_c a^2}$$

### ۵-۱- تحلیل استاتیکی خمش و ارتعاش آزاد

مثال ۱: ورق با عمل کرد درجه‌بندی شده مربعی به طول  $a$  و ضخامت یکنواخت  $h$  دارای فاز فلزی  $Al$  با مدول الاستیسیته‌ی  $E_m = 70 \times 10^9 \text{ N/m}^2$  و چگالی جرمی  $\rho_m = 2702 \text{ kg/m}^3$  و فاز سرامیکی  $Al_2O_3$  با مدول الاستیسیته‌ی  $E_c = 380 \times 10^9 \text{ N/m}^2$  و چگالی جرمی  $\rho_c = 3800 \text{ kg/m}^3$  نسبت پواسون ثابت  $0.3$  در نظر می‌گیریم. در تحلیل استاتیکی خمش و تحلیل فرکانسی، به ترتیب جابجایی بی‌بعد نقطه‌ی میانی ورق  $(\bar{w}(a/2, b/2))$  و فرکانس مینا، برای توان‌های

$$x = 0, x = a \quad (22)$$

$$v_a = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0$$

$$N_x = M_x^b = M_x^s = 0$$

$$y = 0, y = b$$

$$u_a = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = 0$$

$$N_y = M_y^b = M_y^s = 0$$

حل ناویه با معادله‌ی (۲۲) ارائه می‌شود:

$$u_a(t, x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos(\mu x) \sin(\lambda y) e^{-\omega t} \quad (23)$$

$$v_a(t, x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin(\mu x) \cos(\lambda y) e^{-\omega t} \quad (27)$$

$$w_b(t, x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} \sin(\mu x) \sin(\lambda y) e^{-\omega t}$$

$$w_s(t, x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} \sin(\mu x) \sin(\lambda y) e^{-\omega t}$$

به ضرایب مثلثاتی رشته‌های فوریه و  $\lambda = \frac{\pi n}{b}$ ,  $\mu = \frac{\pi m}{a}$  ترتیب طول و عرض ورق در راستاهای  $x$  و  $y$  می‌باشند.  $q$  بارگذاری برون صفحه بر واحد سطح وارد بر ورق را نیز به صورت رشته‌ی فوریه‌ی دومتغیره در رابطه‌ی (۲۴) تبدیل می‌کنیم:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin(\mu x) \sin(\lambda y) \quad (24)$$

با جایگذاری رشته‌های فوریه در رابطه‌های حرکت ورق، حل ناویه‌ی برای مسئله‌ی استاتیکی و مقدار ویژه به ترتیب به شکل رابطه‌های (۲۵) و (۲۶) تبدیل خواهند شد. هم‌چنین می‌توان با مساوی صفر قرار دادن پارامتر نمایانگر بار بحرانی  $\eta$ ، حل استاتیکی خمش را بدست آورد.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} + \eta & k_{34} + \eta \\ 0 & 0 & k_{34} + \eta & k_{44} + \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ Q_{mn} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} & k_{34} \\ 0 & 0 & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} - N_0(\mu^2 + \lambda^2) & k_{34} - N_0(\mu^2 + \lambda^2) \\ 0 & 0 & k_{34} - N_0(\mu^2 + \lambda^2) & k_{44} - N_0(\mu^2 + \lambda^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{snn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

حل نابدییهی دستگاه رابطه‌ی (۳۰)، از حل مسأله‌ی مقدار ویژه به صورت رابطه (۳۰) بدست می‌آید:

$$N_0 = \frac{1}{\mu^2 + \gamma\lambda^2} \times \frac{k_{33}k_{44} - k_{34}k_{43}}{k_{33} + k_{44} - (k_{34} + k_{43})} \quad (31)$$

مثال ۲: ورق با عمل‌کرد درجه‌بندی شده مربعی به طول  $a$  و ضخامت یکنواخت  $h=a/10$  دارای فاز فلزی Al با مدول الاستیسیته‌ی  $E=70 \cdot 10^9$  نیوتن بر متر مربع و فاز سرامیکی SiC با مدول الاستیسیته‌ی  $E=420 \cdot 10^9$  نیوتن بر متر مربع و نسبت پواسون ثابت  $\nu=0.3$  را با شرایط مرزی رابطه‌ی (۲۲) در نظر می‌گیریم. بار بحرانی ورق، برای توان‌های متفاوت در توزیع توانی خواص مواد ورق و بارگذاری‌های درون‌صفحه‌ی گوناگون در مقایسه با سایر تئوری‌ها در جدول (۴) نشان داده شده است. نتایج بدست آمده از تئوری پیشنهادی با سایر تئوری‌های پالوده شده مقایسه شده است. می‌توان اثر خواص مواد با عمل‌کرد درجه‌بندی شده بر بار بحرانی را در شکل ۶ دید. هم‌چنین اثر هم‌زمان نسبت مدول‌های الاستیسیته‌ی بخش‌های سازنده‌ی ورق (نسبت مدول الاستیسیته‌ی بخش سرامیکی به بخش فلزی) و توان در توزیع توانی خواص مواد،  $P$ ، بر بار بحرانی ورق را می‌توان در شکل ۷ دید. بار بحرانی ورق، به اثرات درهم‌گیر نسبت مدول‌ها و توان در توزیع توانی خواص وابسته است. این درهم‌گیری به‌گونه‌ای است که با افزایش نسبت مدول‌ها، اثر  $P$  بر بار بحرانی ورق افزایش می‌یابد و هم‌چنین با افزایش  $P$ ، اثر نسبت مدول‌ها بر بار بحرانی ورق نیز افزایش می‌یابد.

مختلف در توزیع توانی خواص مواد و نسبت‌های گوناگون طول به ضخامت ورق، در مقایسه با سایر تئوری‌ها، به ترتیب در جدول‌های (۲) و (۳) نشان داده شده است. هم‌چنین تأثیر خواص مواد با عمل‌کرد درجه‌بندی شده بر جابجایی نقطه‌ی میانی ورق و فرکانس، به ترتیب در شکل‌های ۲ و ۳ نشان داده شده است. هم‌چنین تأثیر هم‌زمان نسبت مدول‌های الاستیسیته‌ی بخش‌های سازنده‌ی ورق (نسبت مدول الاستیسیته‌ی بخش سرامیکی به بخش فلزی) و توان در توزیع توانی خواص مواد،  $P$ ، بر جابجایی جانبی را می‌توان در شکل ۴ مشاهده کرد. جابجایی جانبی ورق، به اثرات درهم‌گیر نسبت مدول‌ها و توان در توزیع توانی خواص وابسته است. این درهم‌گیری به‌گونه‌ایست که با افزایش نسبت مدول‌ها، تأثیر  $P$  بر جابجایی جانبی افزایش می‌یابد و هم‌چنین با افزایش  $P$  نیز، تأثیر نسبت مدول‌ها بر جابجایی جانبی ورق افزایش می‌یابد. نکته‌ی قابل توجه این است که با افزایش توان در توزیع توانی خواص، تغییرات در جابجایی جانبی نسبت به تغییر نسبت مدول‌ها دارای شیب ثابت می‌شود و این در صورتی است که برای مقادیر کم توان در توزیع توانی این شیب به طور مداوم با تغییر در نسبت مدول‌ها کاهش می‌یابد. با تغییر هم‌زمان نسبت مدول‌ها و توان در توزیع توانی، تغییرات متفاوتی در فرکانس مبنای ورق رخ می‌دهد که می‌توان در شکل ۵ آن را مشاهده کرد. به طوری که برای نسبت خاصی از مدول‌ها، افزایش  $P$  باعث افزایش فرکانس مبنا شده و برای نسبت‌های دیگر باعث کاهش آن می‌شود. بقیه‌ی پدیده‌های مشاهده شده در رابطه با فرکانس مبنا، همانند پدیده‌های مشاهده شده در زمینه‌ی جابجایی می‌باشد.

## ۵-۲- ناپایداری

برای تحلیل ناپایداری، بارگذاری درون‌صفحه‌ی وارد بر ورق را به صورت رابطه (۱۹) در نظر می‌گیریم:

$$N_x^0 = -N_0, N_y^0 = -\gamma N_0, N_{xy}^0 = 0 \quad (29)$$

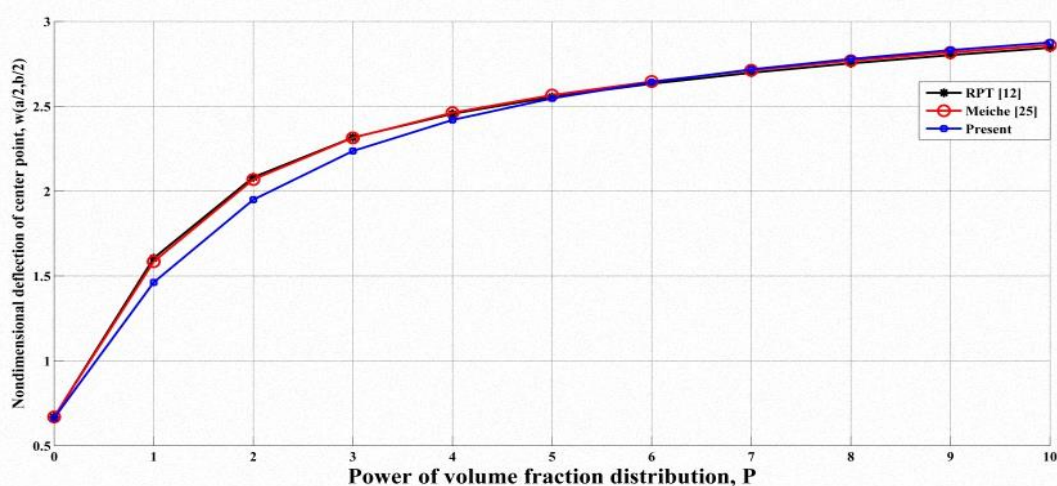
تحلیل ناپایداری را می‌توان از معادله‌ی (۲۵) و با مساوی صفر قرار دادن مشتق‌های زمانی و بارگذاری برون‌صفحه بدست آورد:



جدول (۲): جابجایی بی‌بعد نقطه‌ی میانی ورق با عمل کرد درجه‌بندی شده (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) مربعی با شرایط مرزی ساده و زیر بارگذاری

سینوسی

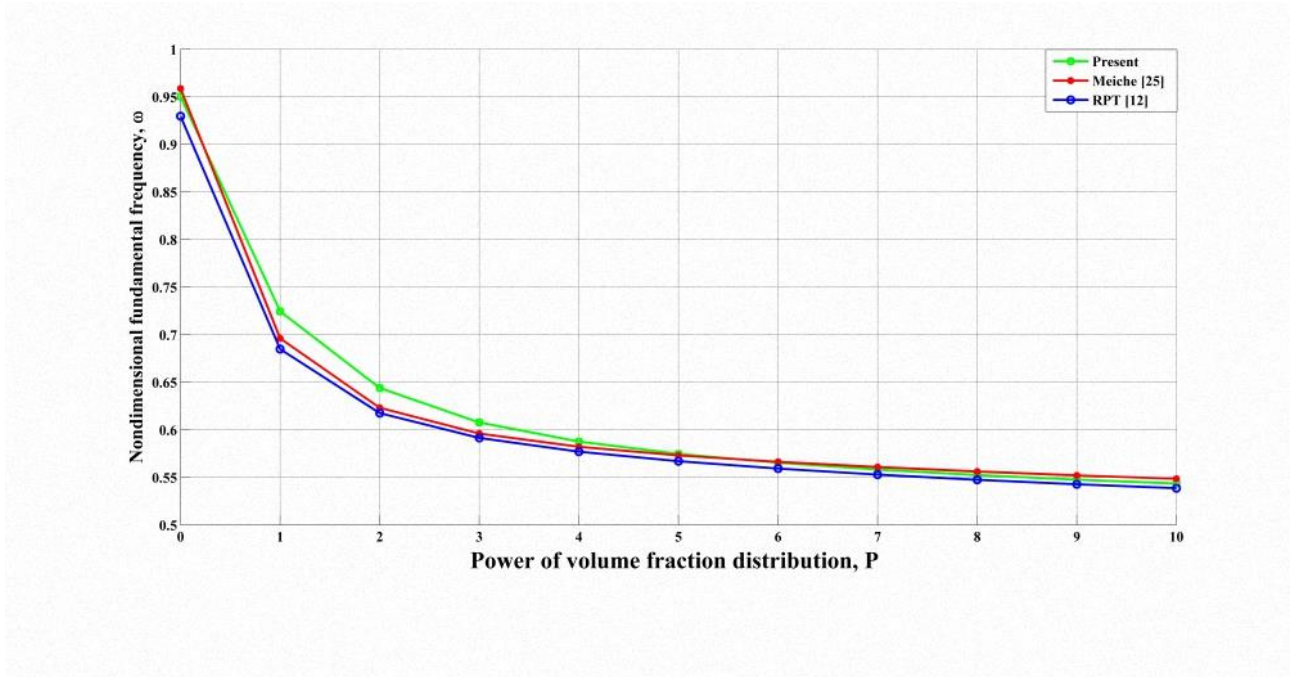
a/h	P	Non-dimensional deflection of central point of plate		
		RPT[۱۲]	Meiche[۲۵]	RPT3 (تئوری حاضر)
۲	۰	۰/۶۶۸۹	۰/۶۶۹۶	۰/۶۶۲۸
	۱	۱/۶۰۵۲	۱/۵۸۴۸	۱/۴۶۲۴
	۴	۲/۴۵۶۰	۲/۴۶۲۱	۲/۴۱۹۴
	۱۰	۲/۸۴۴۵	۲/۸۶۰۲	۲/۸۷۵۶
	∞	۳/۶۳۱۱	۳/۶۳۵۰	۳/۵۹۸۳
۱۰	۰	۰/۲۹۶۱	۰/۲۹۶۰	۰/۲۹۵۶
	۱	۰/۴۶۴۹	۰/۴۶۳۹	۰/۴۵۸۲
	۴	۰/۷۶۱۷	۰/۷۶۱۷	۰/۷۵۸۹
	۱۰	۱/۰۴۱۵	۱/۰۴۱۸	۱/۰۴۱۴
	∞	۱/۶۰۷۲	۱/۶۰۷۱	۱/۶۰۴۹



شکل (۲): تغییرات جابجایی بی‌بعد نقطه‌ی میانی ورق نسبت به تغییرات توان تغییر خواص مواد با عمل کرد درجه‌بندی شده (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>)

جدول (۳): فرکانس مبنای بی‌بعد ورق با عمل کرد درجه‌بندی شده (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) مربعی با شرایط مرزی ساده

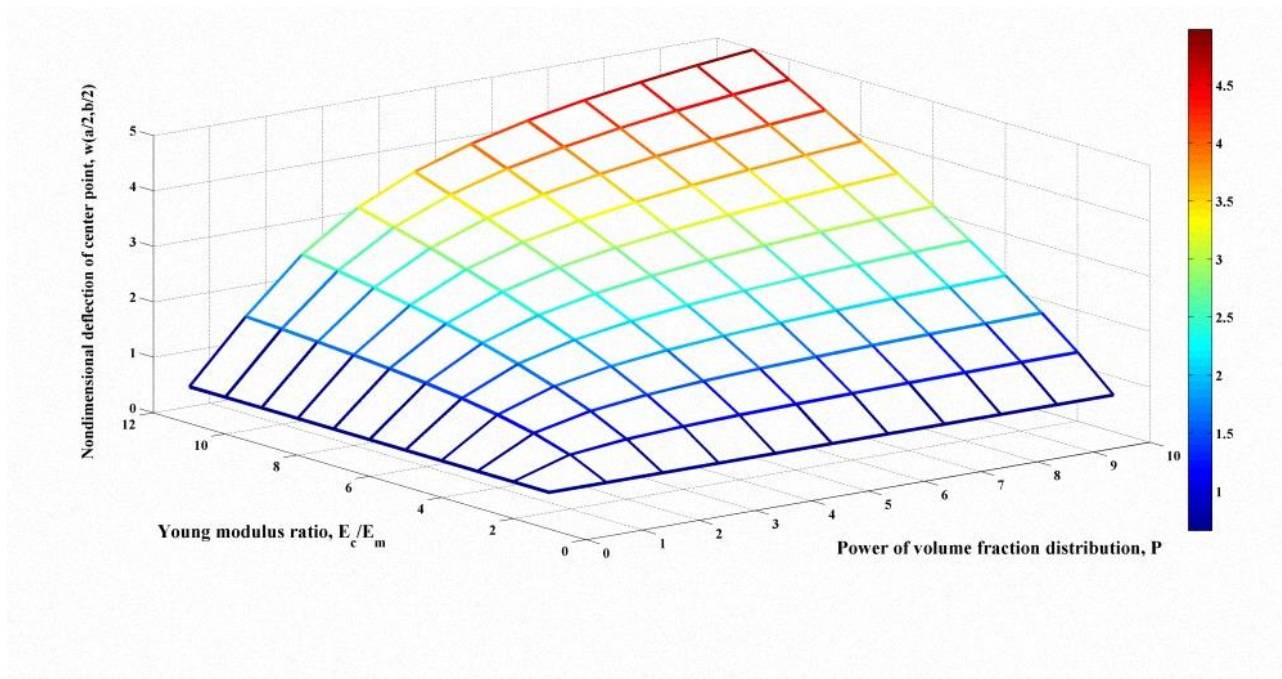
a/h	Theory	P				
		۰	۱	۴	۱۰	∞
۲	Meiche [۲۵]	۰/۹۵۸۸	۰/۶۹۶۱	۰/۵۸۲۲	۰/۵۴۸۵	۰/۴۸۸۰
	RPT[۱۲]	۰/۹۲۹۷	۰/۶۸۴۹	۰/۵۹۲۹	۰/۵۴۱۷	۰/۴۷۳۲
	این مقاله	۰/۹۵۰۴	۰/۷۲۴۶	۰/۵۸۷۷	۰/۵۴۳۵	۰/۴۸۳۷
۱۰	Meiche [۲۵]	۰/۰۵۷۷	۰/۰۵۱۳	۰/۰۴۱۸	۰/۰۳۶۲	۰/۰۲۹۴
	RPT[۱۲]	۰/۰۵۷۷	۰/۰۵۱۳	۰/۰۴۱۷	۰/۰۳۶۱	۰/۰۲۹۴
	این مقاله	۰/۰۵۷۷	۰/۰۵۱۶	۰/۰۴۱۸	۰/۰۳۶۲	۰/۰۲۹۴



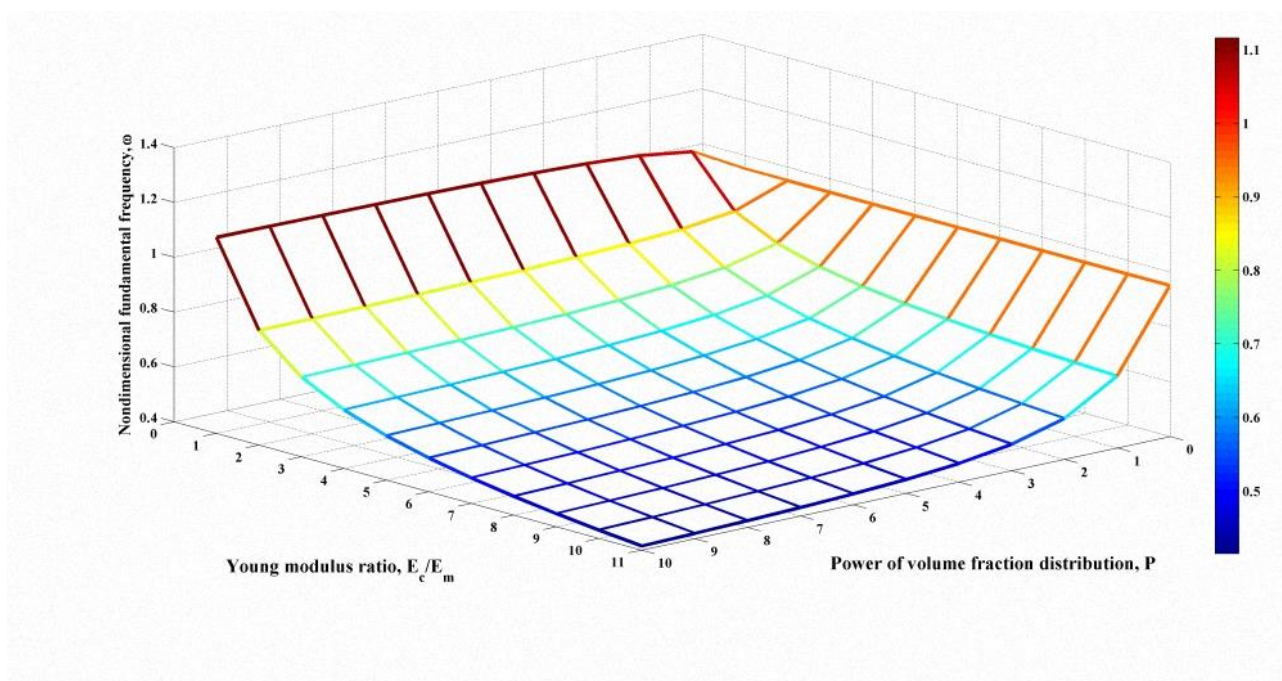
شکل (۳): تغییرات فرکانس مبنای بی بعد ورق نسبت به تغییرات توان تغییر خواص مواد با عمل کرد درجه بندی شده (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>)

جدول (۴): بار بحرانی بی بعد ورق با عمل کرد درجه بندی شده (Al/SiC) مربعی با شرایط مرزی ساده (a/h=10)

a/h	Theory	P		
		0	1	10
2	RPT[۱۲]	۱/۵۱۴۸	۰/۶۰۷۴	۰/۳۲۹۴
	Meiche [۲۵]	۱/۵۲۸۶	۰/۶۷۱۶	۰/۳۲۵۳
	این مقاله	۱/۵۱۳۱	۰/۶۱۶۰	۰/۳۲۷۴
10	RPT[۱۲]	۳/۴۲۲۴	۲/۱۴۷۷	۰/۹۱۹۲
	Meiche [۲۵]	۳/۴۲۲۵	۲/۱۵۳۲	۰/۹۱۸۸
	این مقاله	۳/۴۲۷۳	۲/۱۸۲۴	۰/۹۱۹۱

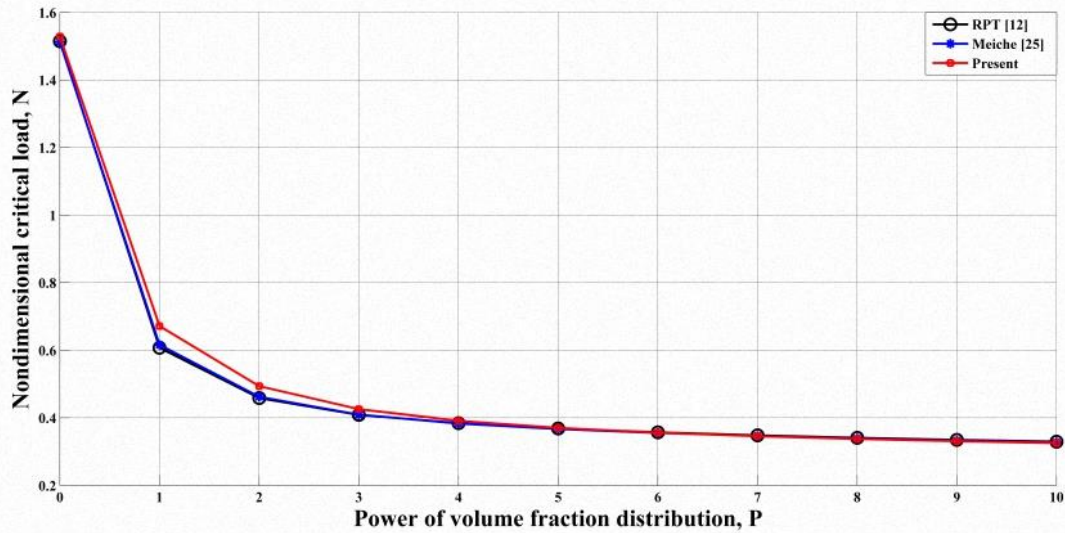


شکل (۴): اثرات هم‌زمان نسبت مدول‌های بخش‌های سازنده و توان در توزیع توانی خواص بر جابجایی جانبی

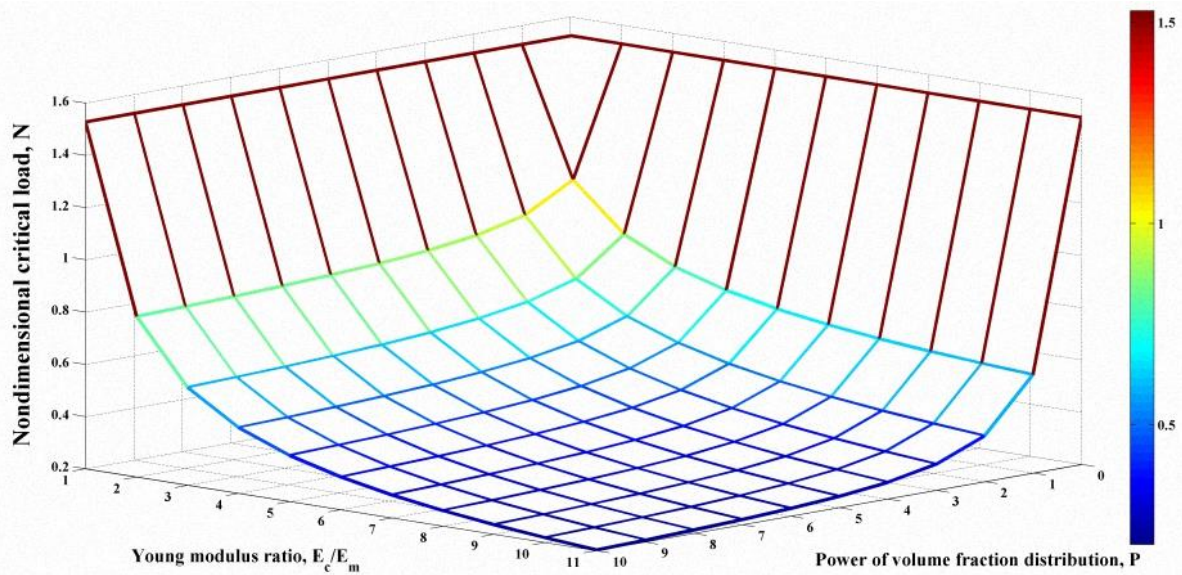


شکل (۵): اثرات هم‌زمان نسبت مدول‌های بخش‌های سازنده و توان در توزیع توانی خواص بر فرکانس مینا (زاویه‌ی دید شکل ۵ نسبت به شکل ۴ به اندازه‌ی  $180^\circ$  چرخیده است).





شکل (۶): تغییرات بار بحرانی بی‌بعد ورق نسبت به تغییرات توان تغییر خواص مواد با عمل کرد درجه‌بندی شده (Al/SiC)



شکل ۷: اثرات هم‌زمان نسبت مدول‌های بخش‌های سازنده و توان در توزیع توانی خواص بر بار بحرانی ورق

## ۶- نتیجه‌گیری

تئوری را به خوبی نمایان می‌سازد. از ویژگی‌های بررسی انجام شده، مطالعه‌ی اثر عوامل مربوط به ورق‌های ساخته شده از مواد با عمل‌کرد درجه‌بندی شده، بر رفتار ورق در شرایط استاتیکی و دینامیکی است. این اثرات به گونه‌ای است که با افزایش توان توزیع توانی خواص ورق، به ازای نسبت مدول الاستیسیته‌ی ثابت یعنی  $(E_c/E_m)$  ثابت، جابجایی جانبی ورق افزایش ولی بار بحرانی و فرکانس مبنای ورق کاهش می‌یابند. با بررسی هم‌زمان اثر توان توزیع توانی خواص و نسبت مدول‌ها مشخص می‌شود که با افزایش نسبت مدول‌ها، تغییرات ناشی از تغییر توان توزیع توانی در رفتار ورق، دارای شدت بیشتری شده و اثرات آن افزایش می‌یابد. انتخاب فازهای سازنده‌ی ورق با عمل‌کرد درجه‌بندی شده و هم‌چنین نسبت حجمی این فازها لزوم بررسی این اثرات درهم‌گیر را ایجاب می‌نماید، به گونه‌ای که با انتخاب مناسب در توزیع توانی خواص ورق و در پی آن انتخاب نسبت حجمی مواد سازنده‌ی مناسب، به همراه نسبت مدول مورد نیاز، می‌توان رفتار مورد نیاز را از ورق دید.

1276-1291, 2010.

Pradyumna, S. and Bandyopadhyay, J. N. [۶]  
“Free vibration analysis of functionally graded curved panels using a higher-order finite element formulation”, Journal of Sound and Vibration, 318: pp. 176-192, 2008.

Reddy, J. N. [۷]  
“Analysis of functionally graded plates”, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 47: pp. 663-684, 2000.

Roque, C. M. C., Ferreira, A. J. M. and Jorge, R. M. N. [۸]  
“A radial basis function approach for the free vibration analysis of functionally graded plates using a refined theory”, Journal of Sound and Vibration, 200: pp. 1048-1070, 2007.

Talha, M. and Singh, B. N. [۹]  
“Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory”, Applied Mathematical Modeling, 34: pp. 3991-4011, 2010.

تئوری چهار متغیره‌ی پالوده شده‌ی جدید برای ورق‌های مواد با عمل‌کرد درجه‌بندی شده گسترش یافت. این تئوری کرنش جانبی برشی را به کمک توزیع سینوس هذلولوی نمایش می‌دهد. تئوری حاضر شرط مرزی صفر برای تنش‌های برشی لایه‌های بالایی و زیرین ورق را برقرار می‌نماید. نتایج با دقت بالای این تئوری در خمش و ارتعاش آزاد ورق‌های با عمل‌کرد درجه‌بندی شده، موضوع اصلی این مقاله بوده است. از ویژگی‌های این تئوری، استفاده از شکل تئوری RPT و به همراه آن سادگی معادلات، افزون بر دقت بالای تئوری است. از این رو، شکل ساده‌ی نمایش این تئوری اضافه بر سادگی در فهم فیزیکی معادلات، باعث کاهش پیچیدگی فرایند انجام محاسبات نیز می‌شود. افزون بر موارد یاد شده، بررسی ورق‌های با نسبت طول به ضخامت کم (ورق‌های ضخیم) نیز از موضوعات مهم در تحلیل ورق‌ها است و یکی از دلایل گسترش تئوری‌های ورق‌ها همین موضوع است. تئوری حاضر نتایج متفاوتی، برای ورق‌های ضخیم ارائه داده است و این مسئله اهمیت گسترش این

## ۷- مراجع

Koizumi, M. [۱]  
“FGM activities in Japan”, Composite part B, 28: pp. 1-4, 1997.

Abrate, S. [۲]  
“Functionally graded plates behave like homogeneous plates”, Composite Part B-Eng, 39: pp. 151-158, 2008.

Woo, J., Meguid, S. A. and Ong, L. S. [۳]  
“Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates”, Journal of Sound and Vibration, 289: pp. 595-611, 2006.

Cheng, Z. Q. and Batra, R. C. [۴]  
“Deflection relationships between the homogeneous Kirchhoff plate theory and different functionally graded plate theories”, Arch Mech, 52: pp. 143-158, 2000.

Hosseini-Hashemi, Sh., Rokni [۵]  
Damavandi Taher, H., Akhavan, H. and Omidi, M. “Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory”, Applied Mathematical Modeling, 34: pp.

- Murthy, M. V. V. ,“An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates”, NASA Technical Paper, 1981. [۲۰]
- Reddy, J. N. ,“A simple higher-order theory for laminated composite plates”, Journal of Applied Mechanics, Trans ASME. 51: pp. 745-52, 1984 [۲۱]
- Soldatos, K. P. ,“A transverse shear deformation theory for homogeneous 94: monoclinic plates”, Acta Mechanica, pp. 195-200, 1992. [۲۲]
- Karma, M., Afaq, K.S. and Mitsou, S., “Mechanical behavior of laminated composite beam by new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity”, International Journal of Solids and Structures. 40: pp. 1525-46, 2003. [۲۳]
- El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. and Adda.Bedia, E. A. ,“A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, International Journal of Mechanical Sciences, 53: pp. 237-247, 2011. [۲۴]
- Mantri, J. L., Oktem, A. S. and Guedes Soares, C. ,“A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates”, International Journal of Mechanical Sciences, 49: pp. 43-53, 2012. [۲۵]
- Matsunaga, H. ,“Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings”, Composite Structures, 87: pp. 344-357, 2009. [۲۶]
- Hosseini-Hashemi, Sh., Rokni Damavandi Taher, H., Akhavan, H. and Omidi, M. ,“Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory”, Applied Mathematical Modeling, 35: pp. 1276-1291, 2010. [۲۷]
- Sun, D. and Song-Nan, L. ,“Wave propagation and transient response of a FGM plate under a point impact load based on higher-order shear deformation theory”, Composite Structures, 93: pp. 1474-1484, 2011. [۱۰]
- Shimpi, R.. P. ,“Refined plate theory and its variants”, AIAA J,40:pp. 137-46,2002. [۱۱]
- Mechab, I., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Belhadj, H. and Adda bedia, E. A. ,“A two variable refined plate theory for bending of functionally graded plates”, Acta Mechanica, 6: pp. 941, 2010. [۱۲]
- Benachour, A., Tahar, H. D., Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Ahmed, M. S. ,“A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates whit arbitrary gradient”, Composite: Part B, 42: pp. 1386-1394, 2011. [۱۳]
- Thai, H. T. and Choi, D. H. ,“A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation”, Composite Science and Technology, 71: pp. 1850-1858, 2011. [۱۴]
- Ambartsumian, S. A., “On the theory of bending plates”, Izgiba anizotropnykh plastinok pologikh obolochek AN SSSR, 5: pp. 69-77, 1958. [۱۵]
- Kaczkowski.Z. ,“Plates-statistical calculations”, Warsaw: Arkady, 1968. [۱۶]
- Panc, V., “Theories of elastic plates”, Springer, Prague Academia, 1975. [۱۷]
- Reissner, E. ,“On transverse bending of plates including the effects of transverse shear deformation”, International Journal 25: pp. 495- of Solids and Structures, 502,1975. [۱۸]
- Levinson, M. ,“An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates”, Mechanics Research Communications. 7: pp. 343-350, 1980. [۱۹]

- [۲۸] Lurie, A. I., "Theory of elasticity", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [۲۹] Reddy, J. N., "Mechanics of laminated composite plates and shells, theory and analysis", CRC Press, 2004.
- [۳۰] Zhao, H., Lee, Y. Y. and Liew, K. M "Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method", Journal of Sound and Vibration, 319: pp. 918-939., 2009.
- [۲۱] Thai, H. T. and Choi, C. H., "An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates", Applied Mathematical Modeling, 36: pp. 1008-22, 2012.
- [۲۲] Touratier, M., "An efficient standard plate theory", International Journal of Engineering and Science, 29: pp. 901-16, 1991.

## ۸- فهرست علائم لاتین

q	بارگذاری برون صفحه بر واحد سطح	h	ضخامت ورق
$N_{cr}$	نیروی بحرانی	w	تغییر شکل جانبی
$\bar{N}$	نیروی بحرانی بی‌بعد	$\bar{w}$	تغییر شکل جانبی بی‌بعد
$U_{mn}$	ضرایب بسط رشته فوریه تغییر شکل محوری در راستای x	$w_b$	تغییر شکل جانبی، مؤلفه‌ی خمشی
$V_{mn}$	ضرایب بسط رشته فوریه تغییر شکل محوری در راستای y	$w_s$	تغییر شکل جانبی، مؤلفه‌ی برشی
$W_{bmn}$	ضرایب بسط رشته فوریه تغییر شکل جانبی خمشی	u	تغییر شکل محوری در راستای x
$W_{smn}$	ضرایب بسط رشته فوریه تغییر شکل جانبی برشی	$u_b$	مؤلفه‌ی خمشی تغییر شکل محوری در راستای x
$Q_{mn}$	ضرایب بسط رشته فوریه بارگذاری جانبی	$u_s$	مؤلفه‌ی برشی تغییر شکل محوری در راستای x
$m_{ij}$	ضرایب ماتریس جرم بدست آمده از گسسته‌سازی ناشی از بسط رشته فوریه	v	تغییر شکل محوری در راستای y
$k_{ij}$	ضرایب ماتریس سختی بدست آمده از گسسته‌سازی ناشی از بسط رشته فوریه	$v_b$	مؤلفه‌ی خمشی تغییر شکل محوری در راستای y
	فهرست علائم یونانی:	$v_s$	مؤلفه‌ی برشی تغییر شکل محوری در راستای y
$\epsilon_{ij}$	مؤلفه‌های کرنش محوری	f(z)	تابع شکل توزیع تنش و کرنش برشی
$\gamma_{ij}$	مؤلفه‌های کرنش برشی	$Q_{ij}(z)$	مؤلفه‌های تانسور سختی تنش کاهش یافته در راستاهای اصلی
$\sigma_{ij}$	مؤلفه‌های تنش	$E_i(z)$	مدول‌های الاستیسیته
$\nu_{ij}$	نسبت‌های پواسون	$G_{ij}(z)$	مدول‌های برشی
$\delta$	عملگر تغییرات مجازی	$\bar{Q}_{ij}(z)$	مؤلفه‌های تانسور سختی کاهش یافته در راستای جهانی
$\rho$	چگالی جرمی ورق	U	انرژی پتانسیل کرنشی ورق مرکب
$\rho_i^j$	گشتاورهای اینرسی ورق از مرتبه‌ی i و j	T	انرژی جنبشی ورق مرکب
$\mu, \lambda$	ضرایب بسط رشته فوریه برای حل ناویه	V	کار انجام شده توسط نیروهای خارجی (پایستار)
$\gamma$	نسبت نیروی بحرانی راستای طولی به راستای عرضی ورق	$Q_{yz}, Q_{xz}$	برآیند تنش نیروهای برشی برون صفحه‌ی ورق
$\omega$	فرکانس مبنای ارتعاش ورق	$M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$	برآیند تنش گشتاور پیچشی ورق
		a	طول ورق
		b	عرض ورق
		$D_{ij}, B_{ij}, A_{ij}$	ضرایب سختی محوری، درهم‌گیر محوری-خمشی و خمشی ناشی از تئوری CLPT
		$A_{ij}^b, B_{ij}^b, D_{ij}^b$	ضرایب سختی محوری-برشی، درهم‌گیر محوری-برشی ناشی از تئوری RPT
		$N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0$	بارگذاری درون صفحه بر واحد سطح