



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)

دوره چهارم و پنجم، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۲، صفحه ۲۷ تا ۴۲  
Vol. 45, No. 2, winter 2013, pp. 27-42



نشریه علمی - پژوهشی امیرکبیر (مهندسی مکانیک)  
Amirkabir Journal of Science & Research (Mechanical Engineering)  
(AJSR - ME)

## تحلیل پاسخ دینامیکی ورق ساندویچی با هسته انعطاف پذیر و بستر الاستیک تحت ضربه با سرعت پایین

کرامت ملک زاده<sup>۱\*</sup>، غلامحسن پایگانه<sup>۲</sup>، منصور کاردان<sup>۳</sup>

- ۱- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر تهران
- ۲- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران
- ۳- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران

(دریافت ۱۳۹۰/۸/۲۳، پذیرش ۱۳۹۲/۱۱/۶)

### چکیده

در این مقاله، برای اولین بار پاسخ دینامیکی ورق ساندویچی کامپوزیتی با هسته انعطاف پذیر و بستر الاستیک تحت ضربه با سرعت پایین بررسی شده است. معادلات حاکم ورق ساندویچی با استفاده از اصل همیلتون و روش انرژی بدست آمده اند. تحلیل ارتعاشات آزاد ورق بر پایه تئوری بهبود یافته مرتبه بالای ورق‌های ساندویچی با اعمال اثرات بستر الاستیک در معادلات است. روش حل از تئوری برشی مرتبه اول برای رویه‌ها و از طرح دوم فراستیک برای هسته استفاده می‌نماید. دستگاه معادلات برای ورق بر روی بستر الاستیک با استفاده از طرح دو عاملی پاسترناک حل شده است. برای تحلیل دینامیکی ورق ساندویچی کامپوزیتی تحت بار ضربه‌ای با سرعت پایین، ورق ساندویچی با یک سامانه دینامیکی دو درجه آزادی با جرم و فنرهای معادل و با خطی‌سازی قانون برخورد هرگز به روش چوی مطرح شده است. در این طرح از فرکانس طبیعی پایه ورق برای محاسبه سفتی معادل ورق به صورت مستقیم در حل ضربه استفاده شده است. تأثیر تغییرات مدول‌های مختلف فنری عمودی و برشی عرضی بستر الاستیک بر فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد، توابع زمانی نیروی برخورد و تغییر مکان عرضی ورق در حین ضربه بررسی شده و با نتایج موجود در مراجع مقایسه شده‌اند.

### کلمات کلیدی

ورق ساندویچی، هسته انعطاف پذیر، ضربه سرعت پایین، بستر الاستیک پاسترناک، ارتعاشات آزاد، تئوری مرتبه بالا.

\* نویسنده مسئول وعهده دار مکاتبات Email:k.malezadeh@gmail.com

## ۱- مقدمه

سازه ساندویچی شامل دو رویه نازک، سفت و محکم است که به هسته ای سبک و ضخیم با مدول الاستیسیته کوچک بوسیله اتصالات چسبی محکم شده اند تا سازه ای خیلی سبک و مستحکم بدست آید. در بیشتر موارد رویه ها بارهای صفحه ای و خمشی را تحمل می نمایند، در حالیکه هسته در برابر بارهای برشی مقاومت می نماید. مهم ترین مزیت یک سازه ساندویچی نسبت سفتی خمشی به وزن بالا در مقایسه با دیگر سازه ها است. مهم ترین جزء سازه ساندویچی، هسته آن است. ماده هسته باید خصوصیتی مانند چگالی کم برای هرچه کمتر نمودن وزن سازه و مدول یانگ عمودی بالا برای ممانعت از تغییر شکل بیش از اندازه در راستای ضخامت و کاهش سریع سفتی خمشی داشته باشد. اگرچه نیروی عرضی، تنش های نرمال عمود بر هسته که به طور معمول کوچک هستند را تولید می نماید، حتی کاهش کوچکی در ضخامت هسته می تواند کاهش زیادی در سفتی خمشی بوجود آورد. در مورد بارهای ضربه ای هنگامی که نیروی برخورد روی ناحیه کوچک عمل می نماید، این مورد می تواند تعیین کننده باشد. عملکردهای دیگر مانند عایق حرارتی و صوتی، بیشتر وابسته به ماده هسته و ضخامت آن است.

فراستیک و همکارانش تئوری مرتبه بالایی را برای تیر ساندویچی با هسته انعطاف پذیر عرضی بر پایه اصول تغییرات ارائه دادند. تغییر شکل های طولی و جانبی هسته به کمک معادلات بنیادین ماده ایزوتروپ و شرایط سازگاری در وجه مشترک ها شامل عبارات غیرخطی در مختصات ضخامت بدست آمدند. فرمولاسیون آنها بر مبنای تئوری کلاسیک ورق کیرشرف برای رویه ها و تئوری الاستیسیته برای هسته انعطاف پذیر است. فراستیک تحلیل ارتعاشات سازه های ساندویچی با رویه های ناهمسان هم-چنین رفتار کمانش پنل های ساندویچی با هسته انعطاف پذیر عرضی را با تئوری مرتبه بالای خود مورد بررسی قرار داد. سپس فراستیک و تامسون [۱] در مقاله ای جامع، به تحلیل ارتعاشات پنل های ساندویچی با هسته انعطاف پذیر عرضی با تئوری مرتبه بالا پرداختند. آنها دو طرح را برای این تحلیل ارائه نمودند؛ در طرح اول فرض می شود که هسته به جای تحمل بارهای اینرسی، آنها را به رویه ها منتقل می نماید و فرض می شود که توزیع شتابها در راستای ضخامت هسته، شکل میدان های جابجایی استاتیک تحت بارهای کاملاً گسترده را دارد. جابجایی های استاتیک در راستای ضخامت هسته وقتی که تحت بارگذاری کلی قرار دارد، به طور معمول غیرخطی اند و به طور جدی با تغییرات تنش های برشی عمودی در ارتباط هستند.

هنگامی که بارهای کاملاً گسترده روی رویه ها اعمال می شود، این غیر خطی بودن کوچک خواهد شد و می توان توزیع خطی را به جای آن بکار برد.

در طرح دوم جابجایی ها در جهت های مختلف در هسته میانی، به صورت چندجمله ای با ضرایب نامعلوم فرض می شوند. مزیت این روش آن است که بارهای دینامیکی به طور مستقیم در معادلات حرکت هسته وارد شده و نیازی به فعل و انفعالی با رویه های بالا و پایین نیست. مسیر حل این روش نیز مشابه روش قبلی است، ولی این بار مجهولات، جابجایی های هسته و رویه ها هستند.

ملک زاده و همکاران تئوری تصحیح شده و بهبود یافته مرتبه بالای صفحات ساندویچی را با اصلاح تئوری مرتبه بالای صفحات ساندویچی فراستیک پیشنهاد نمودند. در این تئوری سهم نیروهای صفحه ای رویه های بالایی و پایینی ورق ساندویچی و عامل استهلاک معادل ورق ساندویچی محاسبه شد و هم چنین میرایی سامانه نیز برای تحلیل ارتعاشات مورد بررسی قرار گرفت [۲].

برخورد اجسام خارجی مانند افتادن ابزار، برخورد پرندگان، تگرگ و سنگریزه های باند فرودگاه می توانند باعث به وجود آمدن خسارت شوند و به طور قابل ملاحظه ای استحکام سازه ساندویچی را کاهش دهند. ضربه باعث تغییر شکل کلی و نیز تغییر شکل موضعی در ورق می شود. به طور معمول اگر بار، روی رویه بالا وارد شود، رویه زیرین تغییر شکل کلی را تحمل می نماید. برای رویه های انعطاف پذیر تغییر شکل موضعی در زیر ناحیه ضربه زنده یا بار وجود دارد، در حالی که رویه های خیلی سخت و محکم بار را پخش می نمایند. به طور معمول واماندگی موضعی در هسته شروع می شود و باعث خردشدن هسته، جدایش و در نتیجه کاهش قابل توجه استحکام سازه ساندویچی می شود.

قوانین تماس یا رابطه بین نیروی تماس و نفوذ سازه ساندویچی به طور قابل توجهی از قوانین موجود برای لمینیت های یکپارچه متفاوت و به طور معمول غیرخطی هستند. اولین تحلیل تماس توسط هرتز انجام شده است. نیروی برابری ضربه در برخورد به کمک رابطه  $(P = K\alpha^{3/2})$  بیان شد که در این رابطه  $\alpha$  همان تقرب یا نزدیک شدگی نسبی بین ضربه زنده و هدف در مدت برخورد و ثابت  $K$  نیز به صورت تابعی از هندسه ضربه زنده و خواص الاستیک ضربه زنده و هدف است.

اولسون با بررسی تئوری و تجربی ورق‌های کامپوزیتی ساندویچی، نشان داد که قانون برخورد هرگز برای پانل‌های ساندویچی درست نبوده و باید اصلاح شود. او نتیجه گرفت که رفتار نیرو- تغییر شکل در پانل‌های ساندویچی تحت بار ضربه‌ای تقریباً خطی است و بهتر است بعلت تغییر شکل زیاد رویه بالایی، از کرنش‌های محدود و غیرخطی استفاده نمود و مسئله غیرخطی بودن هندسی لحاظ شود [۹].

ابریت انواع طرح‌های ارائه شده روی تحلیل ضربه در صفحات چندلایه را طبقه‌بندی نموده و به روشنی دامنه و محدوده کاربرد هر طرح را بیان نمود [۱۰]. او همچنین تحلیل دینامیکی صفحات چندلایه کامپوزیتی ساندویچی را بررسی نمود. در این بررسی او با مرور کارهای انجام شده در زمینه پاسخ دینامیکی ورق ساندویچی کامپوزیتی تحت بار ضربه‌ای با سرعت پایین، طرح‌های مختلف ارائه شده برای پاسخ موضعی صفحات ساندویچی که تحت بار ضربه‌ای قرار داشتند را طبقه‌بندی نمود [۱۱].

هوفات و پارک یک طرح جرم و فنر یک درجه آزادی و دو درجه آزادی را برای پیش‌بینی آسیب حاصل از ضربه با سرعت پایین ارائه نمودند. آنها چندین حالت تکیه‌گاهی مختلف ورق مانند چهار طرف گیردار، چهار طرف لولا، دو طرف گیردار و دو طرف آزاد و ورق روی پایه صلب را بررسی نمودند و با طرح جرم و فنر نیروی برخورد را نیز بصورت ساده و تحلیلی برای شرایط مرزی یاد شده بدست آوردند [۱۲].

چوی و لیم توانستند طرح خطی قانون برخورد هرگز را بدست آورند. آنها برای این منظور، از مقادیر ماکزیمم نیروی برخورد و بیشترین تغییر شکل ایجاد شده در ورق استفاده شد [۱۳].

ملک‌زاده و خلیلی طرح‌های جدید ارتعاشی جرم- فنر-دمپر- داشپات با سه درجه آزادی را برای محاسبه و بدست آوردن پاسخ دینامیکی ورق ساندویچی با در نظر گرفتن انعطاف‌پذیری عرضی و میرایی سازه‌ای بکار بردند [۱۴، ۱۵].

تحلیل بسترالاستیک در کاربردهایی مانند جاده‌ها، باند پرواز فرودگاه‌ها، فونداسیون ساختمان‌ها، اسکله‌ها، مخازن و بسیاری از ساختارها مورد نیاز است. اولین بار وینکلر یک طرح خطی یک‌عاملی برای نیرو و انرژی بسترالاستیک پیشنهاد نمود. در این طرح، نیروی عکس‌العمل بستر بصورت یک رابطه متناسب بین فشار و خیز در فونداسیون فرض شده است. این فونداسیون که معروف به فونداسیون وینکلر است با فنرهای عمودی شبیه‌سازی

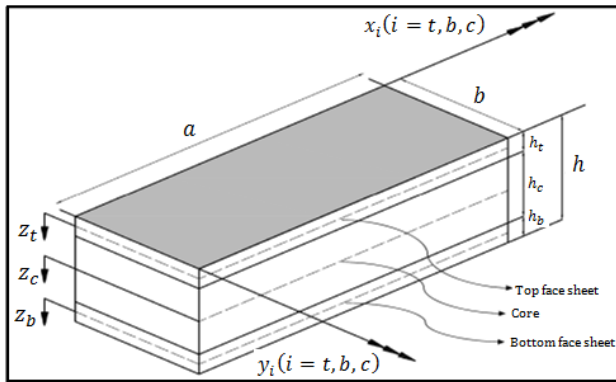
قانون برخورد برای جسم ارتوتروپیک نیمه بینهایت الاستیک، توسط اسوکلو ارائه شد و روی ضریب  $K$  در قانون هرگز تصحیح انجام شد [۳]. ثابت  $K$  را می‌توان به صورت تجربی یا به صورت تقریبی عددی بدست آورد. فرض اساسی قانون هرگز یا اسوکلو این است که تغییر شکل‌ها در محل ضربه، موضعی باشد و تغییر شکل‌ها دور از نقطه برخورد بسیار کوچک باشد.

اولسون رفتار دوگانه در ضربه را به دو حالت مرز و موج کنترل‌شده طبقه‌بندی نمود و نشان داد که ضربه با سرعت پایین با جرم کوچک می‌تواند پاسخ و آسیبی مانند ضربه با سرعت بالا را ایجاد نماید. در حالتی که جرم ضربه‌زننده در ضربه با سرعت پایین نسبت به جرم ورق کوچک نباشد و کل ورق تغییر شکل یابد، حالت مرز کنترل‌شده خواهد بود و برعکس در حالت جرم کوچک در ضربه با سرعت پایین، رفتار سازه موضعی شده و حالت موج کنترل‌شده خواهد بود [۴].

بالانس انرژی و جرم و فنر از طرح‌های معادل مهمی هستند که در حالات خاصی، روش‌های خوبی برای ارزیابی دینامیک ضربه خواهند بود. طرح جرم و فنر وقتی مفید است که جرم ضربه‌زننده نسبت به جرم هدف بزرگ باشد و زمان برخورد نیز بزرگ باشد. کاپرینو طرح یک درجه آزادی را برای افتادن یک وزنه روی پانل‌های شیشه پلی استر استفاده نمود و ثابت فنر در طرح ایشان، سفتی پانل در محل ضربه است [۵]. لال یک طرح جرم و فنر دو درجه آزادی را ارائه نمود که در این طرح، دومین درجه آزادی اضافه شده به طرح پیشین، همان سفتی مربوط به ضربه‌زننده است [۶].

برای ورق می‌توان سه سفتی بکار برد که عبارتند از سفتی برشی، خمشی و سفتی برخورد شیواکومار یک فنر دیگر نیز که مربوط به سفتی غشایی است، به سامانه اضافه نمود [۷]. از سوی دیگر طرح بالانس انرژی را نیز بکار برده و ارائه نمود. این طرح وقتی که فقط بیشترین نیروی برخورد و مدت زمان برخورد نیاز باشد سودمند بوده و سریع جواب می‌دهد.

خلیلی ورق ارتوتروپیک را تحت بار ضربه‌ای بررسی نمود. او ورق را بی‌نیهایت بزرگ فرض نمود و از تئوری هرگز- اسوکلو برای برخورد استفاده نمود. هم‌چنین از تئوری کلاسیک ورق استفاده نمود و بصورت تحلیلی به کمک تبدیلات فوریه پاسخ دینامیکی ورق را بدست آورد و از اثرات اینرسی‌های چرخشی و تغییر شکل‌های برشی صرف‌نظر نمود. او تابع نیروی برخورد را با توجه به جرم و سرعت ضربه‌زننده بدست آورد [۸].



شکل (۱): ورق ساندویچی مستطیلی با دو رویه چند لایه کامپوزیتی و هسته میانی انعطاف پذیر

معادلات دیفرانسیل ورق ساندویچی با هسته انعطاف پذیر را می توان به کمک روش انرژی و اصل همپلتون به صورت رابطه (۱) بدست آورد [۲]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U + V - T + U_f) dt = 0 \quad (1)$$

معادله تغییرات مرتبه اول انرژی پتانسیل بصورت رابطه (۲) بیان شده است:

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_{V_t} (\sigma_{xx}^t \delta \epsilon_{xx}^t + \sigma_{yy}^t \delta \epsilon_{yy}^t + \tau_{xy}^t \delta \gamma_{xy}^t + \tau_{xz}^t \delta \gamma_{xz}^t + \tau_{yz}^t \delta \gamma_{yz}^t) dV \\ & + \int_{V_b} (\sigma_{xx}^b \delta \epsilon_{xx}^b + \sigma_{yy}^b \delta \epsilon_{yy}^b + \tau_{xy}^b \delta \gamma_{xy}^b + \tau_{xz}^b \delta \gamma_{xz}^b + \tau_{yz}^b \delta \gamma_{yz}^b) dV \\ & + \int_{V_c} (\sigma_{zz}^c \delta \epsilon_{zz}^c + \tau_{xz}^c \delta \gamma_{xz}^c + \tau_{yz}^c \delta \gamma_{yz}^c + \sigma_{xx}^c \delta \epsilon_{xx}^c + \sigma_{yy}^c \delta \epsilon_{yy}^c + \tau_{xy}^c \delta \gamma_{xy}^c) dV \end{aligned} \quad (2)$$

معادله تغییرات مرتبه اول انرژی حاصل از نیروهای خارجی بصورت رابطه (۳) بیان شده است:

$$\begin{aligned} \delta V = & - \int_{\Omega_i} [n_{xi} \delta u_0^i + n_{yi} \delta v_0^i + q_i \delta w_0^i] d\Omega_i \\ & - \sum_{j=1}^2 \int_0^a \int_0^b (N_{xy}^t \delta u_0^t + N_{xy}^t \delta v_0^t + N_{xy}^b \delta u_0^b + N_{xy}^b \delta v_0^b) \delta_D (x - x_j) dx dy \\ & - \sum_{j=1}^2 \int_0^a \int_0^b (N_{yy}^t \delta v_0^t + N_{xy}^t \delta u_0^t + N_{yy}^b \delta v_0^b + N_{xy}^b \delta u_0^b) \delta_D (y - y_j) dx dy \end{aligned} \quad (i=t,b)$$

شده است و تغییر شکل های برش عرضی در نظر گرفته نمی شود [۱۶].

پاسترناک یک طرح دو عاملی برای رفتار بستر پیشنهاد نمود که بسیاری از نارسایی های موجود در طرح وینکلر برای توصیف پاسخ واقعی بستر و پیچیدگی های محاسباتی رفتار سه بعدی بستر را برطرف می نمود. در طرح دو عاملی پاسترناک علاوه بر تغییر شکل های عمودی که بر نیروی عکس العمل بستر مؤثرند، تغییر شکل های برشی عرضی نیز بر آن اثرگذارند. این طرح بصورت وسیعی برای توصیف رفتار مکانیکی فونداسیون ها پذیرفته شده است. طرح پاسترناک دارای مدول فنی عمودی و مدول برشی است [۱۷].

در مورد بستر الاستیک کارهای مختلف بر روی تحلیل ارتعاشات و کماتش تیرها و ورق های کامپوزیتی چند لایه با شرایط مرزی مختلف انجام شده است. اما در مورد ضربه بر روی ورق های ساندویچی با بستر الاستیک کار خاصی انجام نشده است و بیشتر تحقیقات بر روی حالت استاتیکی بارگذاری و ارتعاشات آزاد ورق های ساندویچی با هسته FGM و بدست آوردن فرکانس های طبیعی ارتعاشی در ورق ها انجام شده است.

در این مقاله برای اولین بار نویسندگان، تئوری بهبود یافته خود را با افزودن اثرات بستر الاستیک دو عاملی پاسترناک ارائه داده و این اثرات را روی بارگذاری ضربه ای و ارتعاشات آزاد ورق بررسی نموده اند. برای شبیه سازی ضربه آرام از طرح جرم و فنر با دو درجه آزادی استفاده می شود و از روش های ارائه شده توسط ملک زاده و خلیلی، معادلات با استفاده از قوانین برخورد بدست می آیند.

## ۲- معادلات حاکم

معادلات حاکم در دو بخش زیر بررسی شده اند:

### ۱-۲- ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی

ورق ساندویچی مورد مطالعه شکل (۱)، یک ورق مستطیلی با دو رویه چند لایه کامپوزیتی و هسته میانی از جنس مواد نرم انعطاف پذیر است. در تحلیل دینامیکی ورق، تغییر مکان ها کوچک و تحلیل در محدوده الاستیک خطی مورد نظر است. لایه ها و هسته میانی به طور کامل به هم چسبیده و توابع کرنش در سطوح اتصال لایه ها پیوسته هستند. لایه چینی در رویه های ورق ساندویچی بصورت متقارن و بالانس در نظر گرفته می شود.

با توجه به روابط ارائه شده در طرح دوم فراستیگ و تامسون [۱] و نتایج بدست آمده توسط ملک‌زاده و همکاران [۲] جابجایی‌ها در جهت‌های مختلف در هسته میانی به صورت چند جمله‌ای با ضرایب نامعلوم فرض شده است:

$$\begin{aligned} u_c(x, y, z_c, t) &= u_0(x, y, t) + z_c u_1(x, y, t) + z_c^2 u_2(x, y, t) + z_c^3 u_3(x, y, t) \\ v_c(x, y, z_c, t) &= v_0(x, y, t) + z_c v_1(x, y, t) + z_c^2 v_2(x, y, t) + z_c^3 v_3(x, y, t) \\ w_c(x, y, z_c, t) &= w_0(x, y, t) + z_c w_1(x, y, t) + z_c^2 w_2(x, y, t) \end{aligned} \quad (۸)$$

گرش در رویه‌های بالایی و پایینی ورق با استفاده از معادلات زیر بدست می‌آید [۱]، [۲]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^i &= u_{0,x}^i, \quad \varepsilon_{yy}^i = v_{0,y}^i, \quad \varepsilon_{xy}^i = u_{0,y}^i + v_{0,x}^i \\ k_{xx}^i &= \psi_{x,x}^i, \quad k_{yy}^i = \psi_{y,y}^i, \quad k_{xy}^i = \psi_{x,y}^i + \psi_{y,x}^i \end{aligned} \quad (۹)$$

گرش‌های هسته میانی با استفاده از معادلات رابطه (۱۰) بدست می‌آیند [۱]، [۲]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz}^c &= (w_1 + 2z_c w_2) \\ \varepsilon_{xx}^c &= (u_{0,x} + z_c u_{1,x} + z_c^2 u_{2,x} + z_c^3 u_{3,x}) \\ \varepsilon_{yy}^c &= (v_{0,y} + z_c v_{1,y} + z_c^2 v_{2,y} + z_c^3 v_{3,y}) \\ \gamma_{xz}^c &= (u_1 + 2z_c u_2 + 3z_c^2 u_3 + w_{0,x} + z_c w_{1,x} + z_c^2 w_{2,x}) \\ \gamma_{yz}^c &= (v_1 + 2z_c v_2 + 3z_c^2 v_3 + w_{0,y} + z_c w_{1,y} + z_c^2 w_{2,y}) \\ \gamma_{xy}^c &= (v_{0,x} + z_c v_{1,x} + z_c^2 v_{2,x} + z_c^3 v_{3,x} \\ &\quad + u_{0,y} + z_c u_{1,y} + z_c^2 u_{2,y} + z_c^3 u_{3,y}) \end{aligned} \quad (۱۰)$$

شرایط سازگاری در محل اتصال هسته به رویه‌ها به صورت رابطه (۱۱) خواهد بود [۱]، [۲]:

$$\begin{aligned} u_c(z = z_{cj}) &= u_0^j + \frac{1}{2}(-1)^k h_j \psi_{xj} \\ v_c(z = z_{cj}) &= v_0^j + \frac{1}{2}(-1)^k h_j \psi_{yj} \\ w_c(z = z_{cj}) &= w_0^j \end{aligned} \quad (۱۱)$$

$$\begin{aligned} u_j(x, y, z, t) &= u_0^j(x, y, t) + z_j \psi_x^j(x, y, t) \\ v_j(x, y, z, t) &= v_0^j(x, y, t) + z_j \psi_y^j(x, y, t) \\ w_j(x, y, z, t) &= w_0^j(x, y, t) \end{aligned} \quad (۱۲)$$

مقدار  $j$  مشخص‌کننده لبه‌های ورق است و برای  $j=1,2$  داریم:

$$y_2 = b, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = a, \quad x_1 = 0$$

معادله تغییرات مرتبه اول انرژی جنبشی عبارت است از:

$$\begin{aligned} \delta T &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^a \int_0^b \int_{-\frac{h_t}{2}}^{+\frac{h_t}{2}} \rho_t (u_{t,t} \delta u_{t,t} + v_{t,t} \delta v_{t,t} + w_{t,t} \delta w_{t,t}) dx dy dz \right. \\ &\quad + \int_0^a \int_0^b \int_{-\frac{h_b}{2}}^{+\frac{h_b}{2}} \rho_b (u_{b,t} \delta u_{b,t} + v_{b,t} \delta v_{b,t} + w_{b,t} \delta w_{b,t}) dx dy dz \\ &\quad \left. + \int_0^a \int_0^b \int_{-\frac{h_c}{2}}^{+\frac{h_c}{2}} \rho_c (u_{c,t} \delta u_{c,t} + v_{c,t} \delta v_{c,t} + w_{c,t} \delta w_{c,t}) dx dy dz \right] dt \end{aligned} \quad (۴)$$

انرژی کرنشی فونداسیون الاستیک برای ورق ساندویچی بر روی بستر الاستیک بصورت رابطه (۵) بیان شده است [۱۸]:

$$U_f = \int_s f_e w_b ds \quad (۵)$$

$S$  مساحت ورق روی بستر الاستیک است و  $f_e$  نیروی عکس‌العمل فونداسیون الاستیک بر واحد سطح است با طرح دو-عاملی پاسترناک بصورت رابطه (۶) بیان شده است [۱۸]:

$$f_e = k_w w_b - k_{gx} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - k_{gy} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \quad (۶)$$

در طرح پاسترناک، نیروی فونداسیون با تغییر شکل‌های عمودی و تغییر شکل‌های برشی عرضی مرتبط است. در بسترهای ایزوتروپیک مدول برشی در جهات  $X$  و  $Y$  مشابه هستند و می‌توان  $k_g = k_{gx} = k_{gy}$  قرار داد.

برای رویه‌ها از تئوری برشی مرتبه اول با در نظر گرفتن تغییر مکان‌های کوچک و چرخش‌های کوچک استفاده شده است:

با استفاده از معادلات (۱۲) و (۱۳)، معادلات دیفرانسیل ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته انعطاف پذیر و رویه‌های متقارن و بالانس کامپوزیتی با بستر الاستیک تبدیل به یک مسأله استاندارد مقادیر ویژه بر حسب توابع تغییر مکان‌های صفحه‌ای، عرضی، چرخش‌ها در رویه‌ها و هم‌چنین در هسته میانی می‌شود:

$$([K] - [M]\omega^2)\{X_0^*\} = \{0\} \quad (14)$$

۱۵ مجهول وابسته به زمان وجود دارد که عبارتند از:

$$\{X_0^*\} = \left\{ \begin{array}{l} c_{u_0^i}, c_{\psi_x^i}, c_{v_0^i}, c_{\psi_y^i}, c_{w_0^i}, c_{u_0^b}, c_{\psi_x^b}, \\ c_{v_0^b}, c_{\psi_y^b}, c_{w_0^b}, c_{u_1}, c_{u_2}, c_{v_1}, c_{v_2}, c_{w_1}, c_{w_2} \end{array} \right\} \quad (15)$$

به علت حجم بالای روابط ماتریس‌های  $K$  و  $M$ ، در ضمیمه الف فقط دو درایه از هر کدام به عنوان مثال آورده شده است. از حل معادله مقدار ویژه (۱۴) فرکانس‌های طبیعی ورق بدست می‌آیند.

۲-۲- ضربه سرعت پایین

روش تحلیلی و طرح ارتعاشی جرم و فنر با دو درجه آزادی، برای محاسبه و بدست آوردن پاسخ دینامیکی ورق ساندویچی و نیروی برخورد و خیز عرضی ورق در نقطه برخورد با در نظر گرفتن انعطاف‌پذیری عرضی ورق ساندویچی با هسته انعطاف-پذیر تحت بار ضربه ای عرضی با سرعت پایین تخمین های قابل قبولی را ارائه می نمایند [۷].

این طرح ارتعاشی برای حالتی بکار می رود که شرایط مرزی فقط روی رویه ها اعمال شود و رویه ها و هسته میانی ورق در موقع ضربه در منطقه الاستیک باشند و در هسته میانی ورق له-شدگی ایجاد نشده باشد. سامانه دو درجه آزادی در نظر گرفته شده، در شکل (۲) نشان داده شده است.

هنگامی که  $j=t$  باشد،  $k=0$  و  $z_{ct} = -\frac{h_c}{2}$  است و هنگامی که  $j=b$  باشد،  $k=1$  و  $z_{cb} = \frac{h_c}{2}$  است.

سامانه معادلات دیفرانسیل ورق ساندویچی با بستر الاستیک با جایگذاری معادلات تغییرات مرتبه اول انرژی پتانسیل، انرژی حاصل از نیروهای خارجی و انرژی جنبشی برای ورق ساندویچی طبق مرجع [۱] در معادله (۱) و استفاده از معادلات (۲) الی (۱۱) استخراج شده است. با استفاده از روابط میان ضرایب وابسته، تعداد مجهولات و معادلات، کاهش داده می‌شوند. تعداد معادلات مستقل و تعداد ضرایب مجهول ۱۵ عدد است که شامل مجموع جایجایی‌های رویه‌ها و هسته میانی است.

برای بدست آوردن پاسخ دینامیکی ارتعاشات آزاد از روش حل سری فوریه استفاده شده است. برای ورق با تکیه‌گاه ساده از توابع زیر استفاده شده است [۲، ۱]:

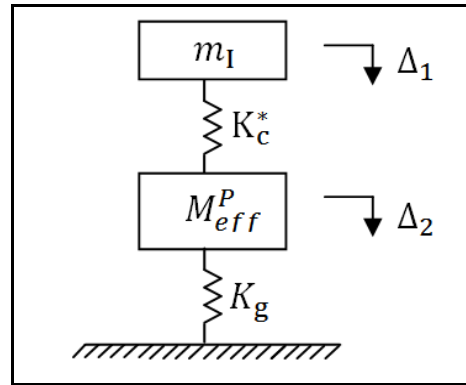
(۱۲)

$$\begin{aligned} u_0^i(x, y, t) &= \left( \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M C_{u_0^i}^{mn} \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \right) e^{I\omega t} \\ v_0^i(x, y, t) &= \left( \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M C_{v_0^i}^{mn} \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \right) e^{I\omega t} \\ w_0^i(x, y, t) &= \left( \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M C_{w_0^i}^{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \right) e^{I\omega t} \\ \psi_x^i(x, y, t) &= \left( \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M C_{\psi_x^i}^{mn} \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \right) e^{I\omega t} \\ \psi_y^i(x, y, t) &= \left( \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M C_{\psi_y^i}^{mn} \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \right) e^{I\omega t} \\ u_k(x, y, t) &= \left( \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M C_{u_k}^{mn} \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \right) e^{I\omega t} \\ v_k(x, y, t) &= \left( \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M C_{v_k}^{mn} \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \right) e^{I\omega t} \\ w_l(x, y, t) &= \left( \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M C_{w_l}^{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \right) e^{I\omega t} \end{aligned} \quad i=t, b \ \& \ k=0, 1, 2, 3 \ \& \ l=0, 1, 2$$

توابع بالا برای حالت رویه‌های کامپوزیتی متقارن و بالانس است که در این حالت داریم:

(۱۳)

$$A_{16}^i = A_{26}^i = B_{16}^i = B_{26}^i = D_{16}^i = D_{26}^i = 0 \quad i=t, b$$



شکل (۲): طرح جرم و فنر دو درجه آزادی

$$(۱۹)$$

$$K_c = \frac{4}{3} ER^{1/2}$$

که در آن:

$$(۲۰)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad \frac{1}{E} = \frac{1-\nu_2^2}{E_2} + \frac{1-\nu_1^2}{E_1}$$

در روابط بالا پایین‌نویس‌های ۱ و ۲ به ترتیب مربوط به ضربه‌زننده و ورق هدف هستند. در طرح جرم و فنر از سفتی تماس خطی شده استفاده خواهد شد. با خطی سازی رابطه (۱۹) نسبت به بیشترین نیروی برخورد و بیشترین تغییر شکل نسبی بین ضربه زننده و هدف می‌توان آن را بصورت رابطه (۲۱) نوشت [۱۳]:

$$(۲۱)$$

$$K_c^* = K_c^n F_{\max}^{\frac{n-1}{n}}$$

که مقدار  $K_c$ ، سفتی تماس هرگز بهبود یافته از رابطه (۱۹) بدست خواهد آمد. مقدار  $n$  اغلب برابر با ۱/۵ است. بر مبنای اصل بقای انرژی با مساوی قرار دادن انرژی جنبشی اولیه ضربه‌زننده با کار انجام شده یا انرژی ذخیره شده کرنشی در فنرها، نیروی تماس بیشینه را می‌توان محاسبه نمود [۱۹]:

$$(۲۲)$$

$$\frac{F_{\max}^2}{2K_g} + \frac{F_{\max}^{1+\frac{1}{n}}}{(n+1)K_c^n} = \frac{1}{2} m_1 V_0^2$$

با جایگذاری معادلات (۱۷) در معادلات (۱۶)، از آنجا که معادلات فوق به ازای همه مقادیر  $t$  باید برقرار باشد، در نتیجه با مرتب‌سازی و تبدیل به حالت ضرب ماتریسی داریم:

$$(۲۳)$$

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + K_c^* & -K_c^* \\ -K_c^* & -M_{eff}^p\omega^2 + K_c^* + K_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 0$$

برای حل دستگاه معادلات (۲۳) برای جواب غیربدیهی باید دترمینان ماتریس ضرایب را مساوی صفر قرار داد که منجر به تشکیل معادله مشخصه رابطه (۲۴) خواهد شد:

$$(۲۴)$$

$$(m_1 M_{eff}^p)\omega^4 + (-m_1 K_c^* - m_1 K_g - K_c^* M_{eff}^p)\omega^2 + K_c^* K_g = 0$$

فرض می‌شود که ضربه‌زننده با سرعت اولیه  $V_0$  به مرکز ورق ساندویچی برخورد می‌نماید. با در نظر گرفتن سامانه دو درجه آزادی اشاره شده و با استفاده از دیگرام آزاد جرم‌ها و کاربرد قانون دوم نیوتن می‌توان معادلات حرکت را نوشت:

$$(۱۶)$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\Delta}_1 + K_c^*(\Delta_1 - \Delta_2) = 0 \\ M_{eff}^p \ddot{\Delta}_2 + K_c^*(\Delta_2 - \Delta_1) + K_g \Delta_2 = 0 \end{cases}$$

مقدار جرم مؤثر پنل برای حالت تکیه گاه ساده برابر یک چهارم مقدار جرم کل پنل است [۷]. جابجایی عمودی جرم ضربه‌زننده و جرم مؤثر پنل ساندویچی بصورت رابطه (۱۷) است:

$$(۱۷)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= A_1 \sin(\omega t + \varphi) \\ \Delta_2 &= A_2 \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

سفتی معادل در محل ضربه را می‌توان از تحلیل استاتیکی توسط تئوری مرتبه بالای ورق ساندویچی [۱۴] بدست آورد و در حالت خاص که ضربه در وسط رویه رخ می‌دهد از رابطه (۱۸) بدست آورد [۱۵]:

$$(۱۸)$$

$$K_g = M_{tot} \omega_{11}^2$$

که در آن  $\omega_{11}$ ، فرکانس اولین حالت ارتعاشی، از حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی بر روی بستر الاستیک بدست می‌آید. مقدار سفتی تماس برای قانون تماس هرگز بهبود یافته از رابطه (۱۹) محاسبه خواهد شد [۱۴]:

از اعمال شرایط اولیه مربوط به جابجایی  $\psi_2 = \psi_1 = 0$  خواهند شد. با در نظر گرفتن دو شرط دیگر به دو معادله و دو مجهول می‌رسیم که از آن  $C_1$  و  $C_2$  عبارتند از:

$$C_1 = \frac{V_0 r_2}{\omega_{n1}(r_2 - r_1)}, \quad C_2 = -\frac{r_1 \omega_{n1}}{r_2 \omega_{n2}} C_1 \quad (29)$$

حال با معلوم شدن مجهولات معادله (27) می‌توان تابع نیروی تماس را بدست آورد:

$$F(t) = K_c^* (\Delta_1 - \Delta_2) \quad (30)$$

### ۳- نتایج

برای بررسی اثر عامل‌های بستر الاستیک در نتایج، مدول‌های عمودی و برشی بصورت زیر بی‌بعد شده‌اند:

$$(31)$$

$$D_i = \frac{E_i h^3}{12(1-\nu_i^2)}$$

$$K_w = \frac{k_w b^4}{D_i}, \quad K_{gx} = \frac{k_{gx} a^2}{D_i}, \quad K_{gy} = \frac{k_{gy} b^2}{D_i}$$

که در این روابط  $K_w$ ،  $K_{gx}$  و  $K_{gy}$  عامل‌های بی‌بعد مدول عمودی و برشی فونداسیون هستند و  $V_i$  و  $E_i$  مربوط به رویه پایینی را در نظر می‌گیریم و در اینجا  $E_i = E_{22}$  و  $V_i = V_{12}$  فرض می‌شود.

### ۳-۱- بررسی ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با بستر الاستیک

برای بررسی درستی روابط حاکم بر معادلات ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر بر روی بستر الاستیک، دلیل عدم دستیابی به مرجعی که اثر بستر الاستیک را در ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی بررسی نموده باشد، یک ورق فلزی یکپارچه از جنس مس را بصورت یک ورق ساندویچی شبیه‌سازی شده است و اثر بستر الاستیک را بر ارتعاشات آزاد آن بررسی نموده‌ایم.

با حل معادله بالا دو مقدار  $\omega_{n1}$ ،  $\omega_{n2}$  بدست می‌آید. مقادیر  $A_1, A_2$  مربوط به  $\omega_{n1}$  را بصورت  $A_1^{(1)}$  و  $A_2^{(1)}$  و مقادیر مربوط به  $\omega_{n2}$  را بصورت  $A_1^{(2)}$  و  $A_2^{(2)}$  نمایش می‌دهیم. برای مقادیر  $\omega_{n1}$  و  $\omega_{n2}$  نسبت‌های  $r_1 = \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}$  و  $r_2 = \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}}$  را می‌توان به صورت رابطه (25) تعیین نمود:

$$(25)$$

$$r_1 = \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \frac{-m_I \omega_{n1}^2 + K_c^*}{K_c^*} = \frac{K_c^*}{-M_{eff}^P \omega_{n1}^2 + K_c^* + K_g}$$

$$r_2 = \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \frac{-m_I \omega_{n2}^2 + K_c^*}{K_c^*} = \frac{K_c^*}{-M_{eff}^P \omega_{n2}^2 + K_c^* + K_g}$$

با توجه به نسبت‌های بدست آمده از روابط (25) برای  $r_i (i=1,2)$  حالت‌های طبیعی حرکت نوسانی مربوط به  $\omega_{n1}^2$  و  $\omega_{n2}^2$  را به ترتیب می‌توان به صورت رابطه (26) بیان نمود:

$$\vec{\varphi}^{(1)} = \begin{Bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1^{(1)} \\ r_1 A_1^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

$$\vec{\varphi}^{(2)} = \begin{Bmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1^{(2)} \\ r_2 A_1^{(2)} \end{Bmatrix}$$

حال با توجه به بردارهای  $\vec{\varphi}^{(1)}$  و  $\vec{\varphi}^{(2)}$  حرکت عمومی سامانه در لحظه زمانی  $t$  را با توجه به جواب‌های عمومی معادلات (16) می‌توان بصورت رابطه (27) بیان نمود:

$$(27)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = C_1 \vec{\varphi}^{(1)} \sin(\omega_{n1} t + \psi_1) + C_2 \vec{\varphi}^{(2)} \sin(\omega_{n2} t + \psi_2)$$

به طوریکه ضرایب مجهول  $C_1, C_2, \psi_1, \psi_2$  را با اعمال شرایط اولیه روابط (28) می‌توان بدست آورد:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1(t=0)=0 \\ \Delta_2(t=0)=0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \dot{\Delta}_1(t=0)=V_0 \\ \dot{\Delta}_2(t=0)=0 \end{Bmatrix} \quad (28)$$



جدول (۱): تغییرات فرکانس طبیعی پایه بی‌بعد با تغییرات

$b/h$	$K_w$	$K_g$	$\Omega_{11}$	
			$\Omega_{11}$ از روش حاضر	$[\Omega_{11}], [\Omega_{21}]$
۲	۱۰۰	۱۰۰	۲/۱۵	۲/۰۷
۲	۱۰۰	۱۰	۱/۷۴	۱/۸۱
۲	۱۰۰	۱	۱/۵۲	۱/۵۱
۲	۰	۰	-	۱/۳۰
۲	۰	۱۰	۱/۶۴	۱/۶۹
۲	۱۰	۱۰	۱/۶۵	۱/۷۰
۲	۱۰۰	۱۰	۱/۷۴	۱/۸۱
۲	۱۰۰۰	۱۰	۱/۸۴	۲/۰۷
۵	۰	۰	-	۱/۷۱
۵	۰	۱۰	۲/۲۳	۲/۲۰
۵	۱۰	۱۰	۲/۲۵	۲/۲۲
۵	۱۰۰	۱۰	۲/۴۲	۲/۴۱
۵	۱۰۰۰	۱۰	۳/۷۱	۳/۷۵

ساندویچی را مورد تأیید قرار داد. بنابراین  $\omega_{11}$  حاصل از روش حاضر برای ورق ساندویچی بر روی بستر الاستیک می‌تواند برای محاسبات ضربه مورد استفاده قرار گیرد.

### ۲-۳- بررسی ضربه سرعت پایین روی ورق ساندویچی با بستر الاستیک

یک ورق ساندویچی مربع شکل با تکیه‌گاه ساده بصورت  $[0_2/90_2/0_2/core/0_2/90_2/0_2]$  دارای رویه‌های چندلایه کامپوزیتی و هسته میانی فوم در نظر می‌گیریم. خواص هندسی و مکانیکی ورق در جدول (۲) موجود است [۲۲]. ضربه-زننده صلب فولادی با سر نیم‌کره با شعاع  $12/7$  میلی‌متر و جرم  $1/8$  کیلوگرم به وسط ورق برخورد می‌نماید.

جدول (۲): خواص هندسی و مکانیکی ورق ساندویچی

خواص	رویه	هسته
$E_{11}(GPa)$	۵۴	۰/۱۸
$E_{22}(GPa)$	۵۴	۰/۱۸
$E_{33}(GPa)$	۴/۸۴	۰/۱۸
$G_{12}(GPa)$	۳/۱۶	۰/۰۷
$G_{13}(GPa)$	۱/۸۷	۰/۰۷
$G_{23}(GPa)$	۱/۸۷	۰/۰۷
$\nu_{12}$	۰/۰۶	۰/۲۸۶
$\nu_{13}$	۰/۳۱۳	۰/۲۸۶
$\nu_{23}$	۰/۳۱۳	۰/۲۸۶
$\rho(Kg/m^3)$	۱۵۱۱	۱۱۰
$h_c(mm)$	-	۱۲/۷
Ply Thickness(mm)	۰/۲۶۴	-
$a(mm)$	۷۶/۲	۷۶/۲
$b(mm)$	۷۶/۲	۷۶/۲

در مرجع [۲۲] از طرح جرم و فنر یک درجه آزادی غیرخطی استفاده شده و ضرایب سفتی با حل معادلات دیفرانسیل ورق، از روش المان محدود بدست آمده است. شکل (۳) اثر انرژی ضربه-زننده روی توابع زمانی نیروی برخورد ورق را نشان می‌دهد. با افزایش انرژی ضربه زننده بیشینه، نیروی برخورد افزایش و زمان برخورد کاهش می‌ابد. این موضوع به دلیل افزایش انرژی جنبشی ضربه زننده است. افزایش بیشینه نیروی برخورد همراه با

فرض شده این ورق ایزوتروپیک مربعی شکل شامل دو رویه از جنس مس و یک هسته از جنس مس باشد و ارتعاشات آزاد این ورق بر روی یک بستر الاستیک طرح پاسترناک، از روش حاضر مورد بررسی قرار گرفته است. خواص فیزیکی و هندسی ورق عبارتند از:

$$a/b = 1, h_c/h = 0.9, E = 115 GPa, \nu = 0.31, \rho = 8960 kg/m^3$$

فرکانس‌های طبیعی ورق با رابطه (۳۲) بی‌بعد شده‌اند:

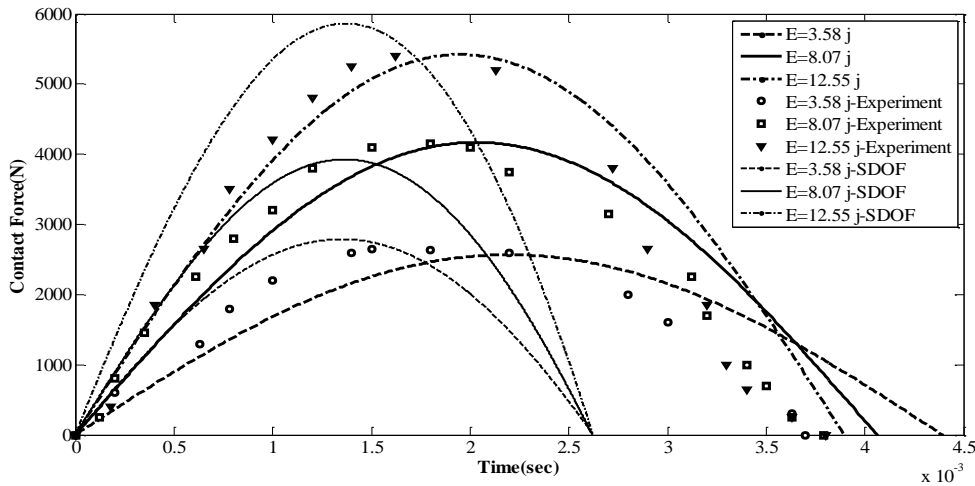
$$\Omega = \omega \frac{b^2}{\pi^2} \sqrt{\rho_i h / D_i}, D_i = \frac{E_i h^3}{12(1 - \nu_i^2)} \quad (32)$$

نتایج فرکانس طبیعی پایه بی‌بعد با تغییرات مدول‌های عمودی و برشی بستر الاستیک حاصل از ارتعاشات آزاد ورق از روش حاضر و نتایج حاصل در مراجع [۲۰ و ۲۱] در جدول (۱) نشان داده شده است.

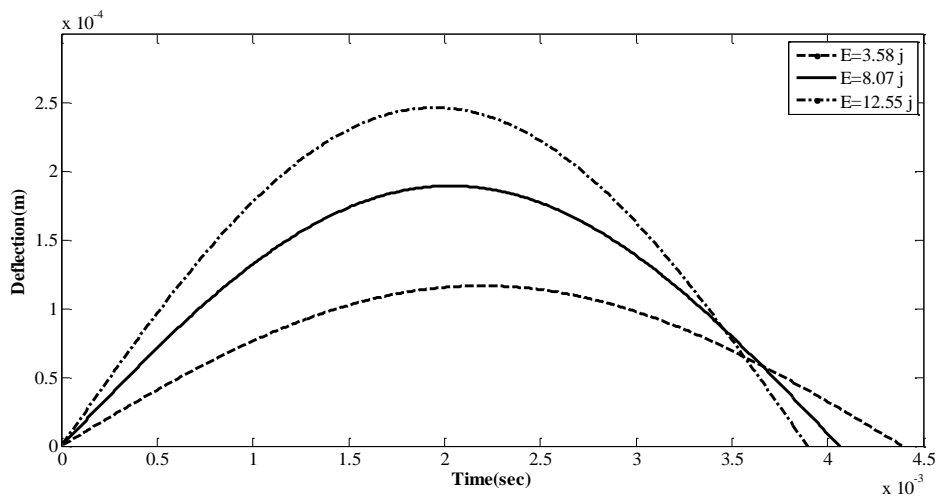
با توجه به ساده‌سازی‌های انجام شده در ورق، نتایج حاصل برابری قابل قبولی دارد. یاس [۲۰] فرکانس‌های طبیعی ورق را از یک روش نیمه تحلیلی بر پایه تئوری الاستیسیته سه بعدی ارتعاشات آزاد ورق بدست آورده است. هم‌چنین ملک‌زاده [۲۱] نیز فرکانس‌های طبیعی ورق را از روش DQM بدست آورده است. با توجه به نتایج حاصل می‌توان نحوه ورود ضرایب فونداسیون پاسترناک به معادلات حاکم ارتعاشات آزاد ورق

در سطوح انرژی بالاتر این امر برابری بیشتری دارد. همچنین در شکل (۴) اثر انرژی ضربه زننده روی خیز ورق در وسط رویه بالایی نشان داده شده است. با افزایش انرژی ضربه زننده، خیز نیز افزایش می یابد که علت افزایش انرژی منتقل شده به ورق و تبدیل به جابجایی های بیشتر است.

کاهش بیشینه زمان برخورد سبب می شود تا انرژی جنبشی ضربه زننده با مقدار بیشتر و در بازه زمانی کمتر به ورق ساندویچی وارد شده و باعث ایجاد شوک به سازه شود. همان طور که دیده می شود، دقت طرح دو درجه آزادی استفاده شده، دقت قابل قبولی نسبت به نتایج آزمایشگاهی دارد و از پاسخ های روش تحلیلی نشان داده شده نیز بسیار دقیق تر است؛ بخصوص



شکل (۳): اثر انرژی ضربه زننده روی تابع نیروی برخورد

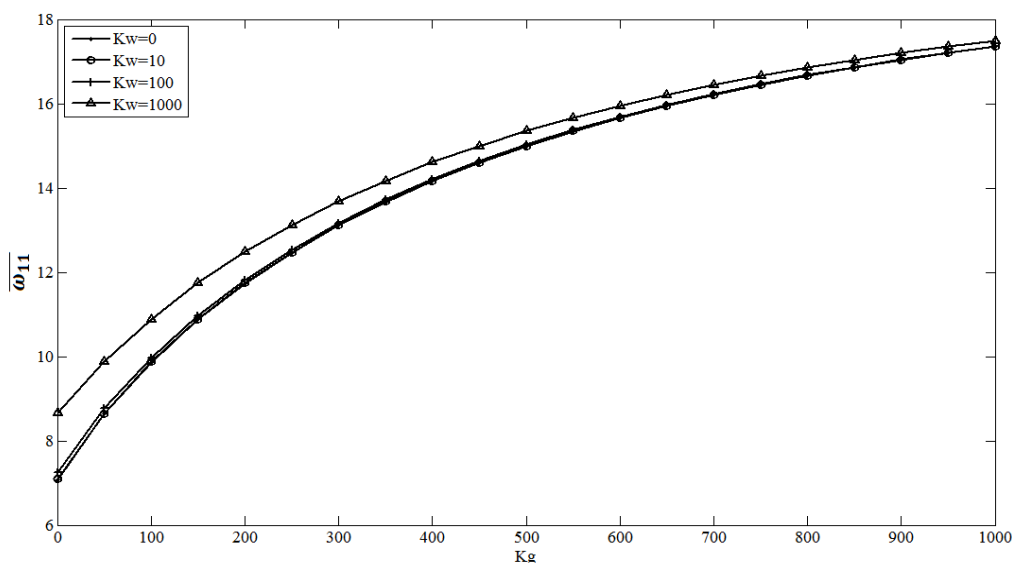


شکل (۴): اثر انرژی ضربه زننده روی خیز در وسط رویه بالایی

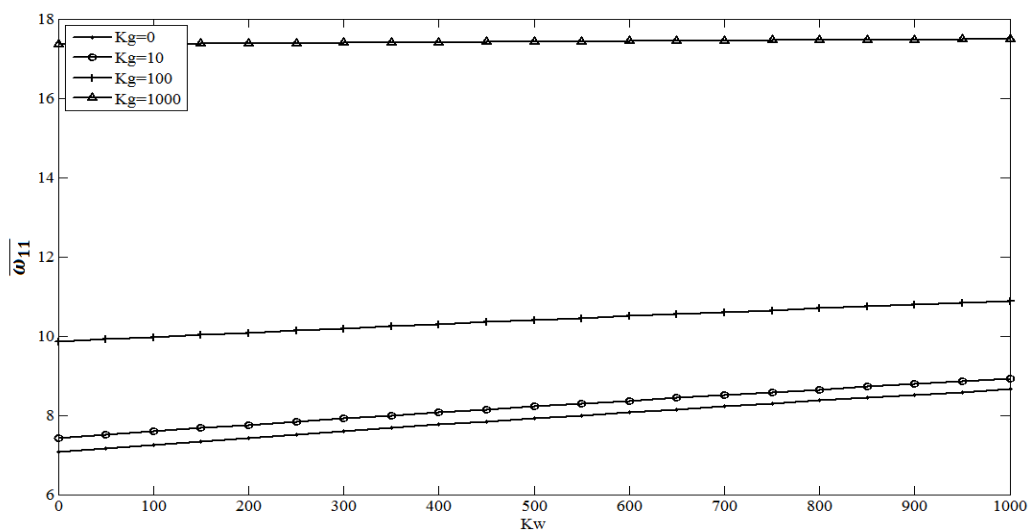
است. در این مثال فرکانس طبیعی بی بعد با استفاده از رابطه (۳۳) محاسبه شده است:

در شکل های (۵) و (۶) اثر تغییرات عامل های بی بعد بستر الاستیک بر فرکانس های طبیعی ورق ساندویچی نشان داده شده

$$\overline{\omega}_{11} = \omega_{11} \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}} \quad (33)$$



شکل (۵): تغییرات فرکانس طبیعی پایه بی بعد ورق ساندویچی با تغییرات مدول برشی عرضی بستر الاستیک



شکل (۶): تغییرات فرکانس طبیعی پایه بی بعد ورق ساندویچی با تغییرات مدول عمودی بستر الاستیک

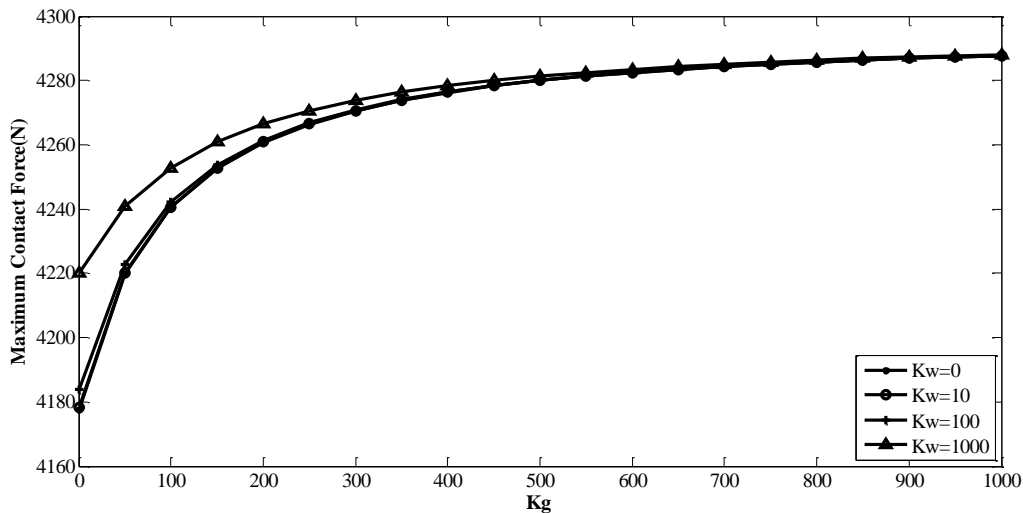
است. یعنی در مقادیر زیاد  $K^g$  تأثیر  $K^w$  بسیار کم است و افزایش مدول برشی اثر بیشتری بر فرکانس های طبیعی پایه ورق ساندویچی دارد.

در شکل های (۷) تا (۱۰) اثر تغییرات عامل های بی بعد بستر الاستیک بر نیروی برخورد و خیز این ورق ساندویچی نشان داده شده است. بیشینه نیروی برخورد با افزایش مدول عمودی افزایش و بیشینه خیز با افزایش مدول عمودی کاهش اندکی می یابد؛ اما این تغییرات با افزایش مدول برشی قابل توجه

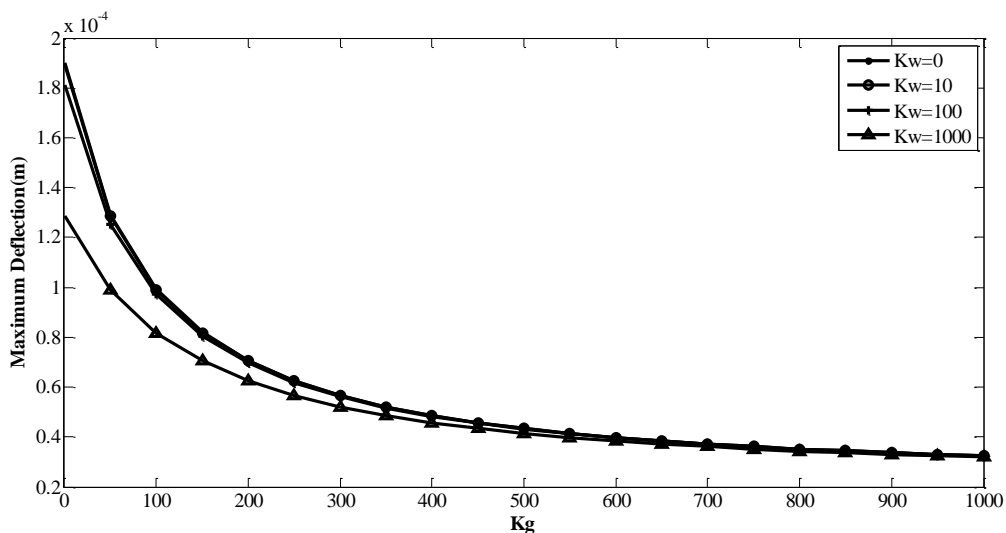
دیده می شود که با افزایش مقادیر مدول عمودی و مدول برشی بستر الاستیک مقدار فرکانس طبیعی بی بعد  $\overline{\omega}_{11}$  نیز افزایش می یابد؛ اما اثر مدول برشی عرضی در اینجا بیشتر است و باعث افزایش بیشتری برای مقادیر فرکانس طبیعی می شود. افزایش مدول عمودی  $K^w$  باعث افزایش  $\overline{\omega}_{11}$  بصورت خطی می شود که این افزایش برای مقادیر بالای  $K^g$  بسیار اندک

تحلیل ضربه با سرعت پایین روی ورق ساندویچی با بستر الاستیک ارائه می‌دهد. همچنین تأثیر تغییرات مدول‌های مختلف بستر الاستیک بر فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد، توابع زمانی نیروی برخورد و تغییر مکان عرضی ورق در حین ضربه را نشان می‌دهد.

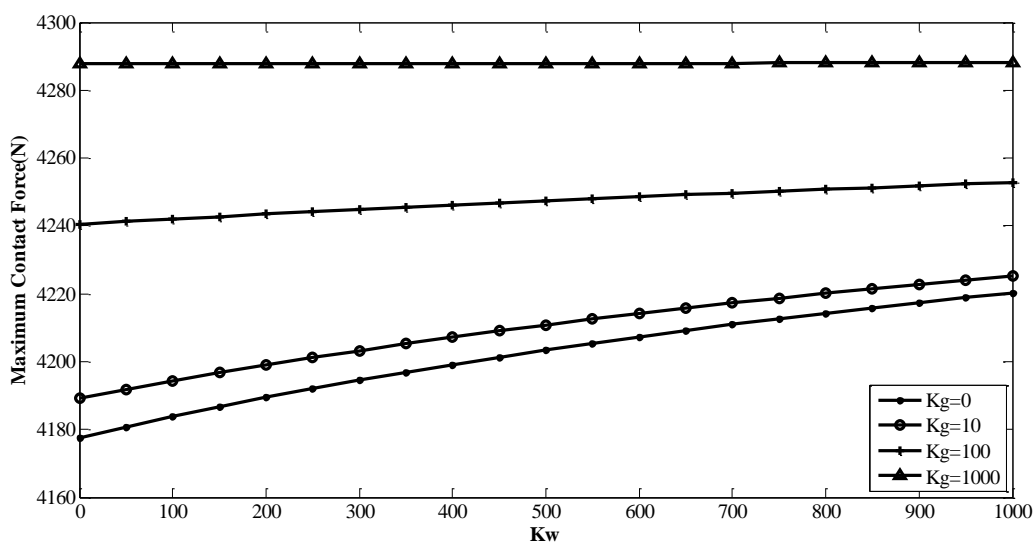
هستند. افزایش نیرو و کاهش خیز با تغییر مدول عمودی بصورت خطی هستند، اما با تغییر مدول برشی بصورت غیرخطی خواهند شد. نقش مدول برشی در تغییرات نیرو و خیز اثرگذارتر است. پژوهش انجام شده از این نظر با اهمیت است که روش ورود عامل‌های بستر الاستیک در معادلات حاکم و ماتریس سفتی ورق ساندویچی و معادلات ضربه را تأیید می‌نماید و روشی برای



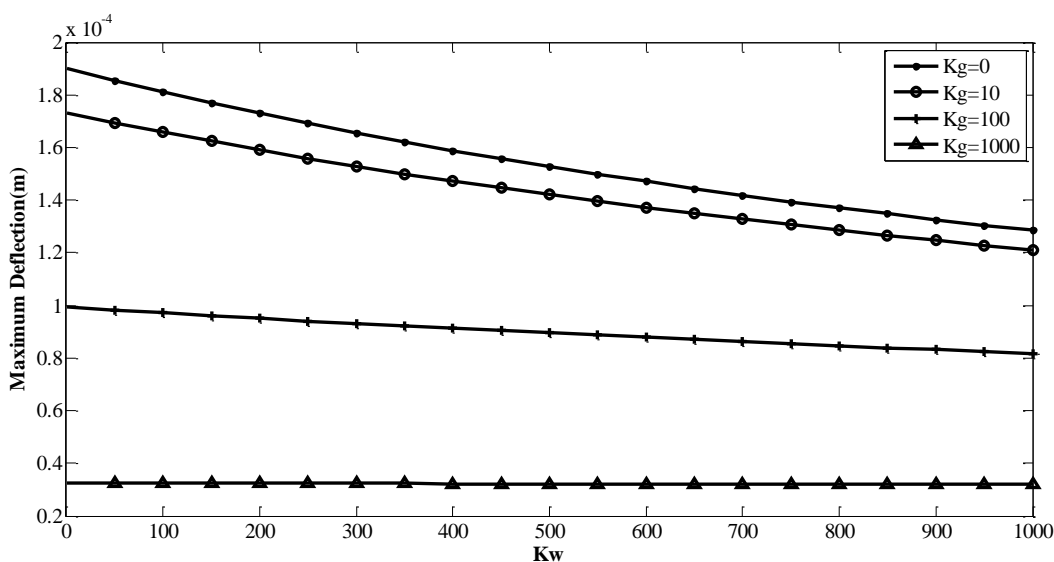
شکل (۷): اثر تغییرات مدول برشی در مدول‌های عمودی مختلف بر بیشینه نیروی برخورد



شکل (۸): اثر تغییرات مدول برشی در مدول‌های عمودی مختلف بر بیشینه خیز در وسط رویه بالایی



شکل (۹): اثر تغییرات مدول عمودی درمدول‌های برشی مختلف بر بیشینه نیروی برخورد



شکل (۱۰): اثر تغییرات مدول عمودی درمدول‌های برشی مختلف بر بیشینه خیز در وسط رویه بالایی

#### ۴- نتیجه‌گیری

مقادیر فرکانس طبیعی و بیشینه نیرو و خیز با افزایش مدول عمودی تغییرات اندکی دارد، اما با افزایش مدول برشی تغییرات قابل توجهی نشان می‌دهند. فرکانس طبیعی و نیروی برخورد با افزایش مدول عمودی و برشی افزایش می‌یابند، اما مقدار خیز با افزایش مدول عمودی و برشی کاهش می‌یابد. افزایش میزان فرکانس طبیعی پایه سامانه منجر به افزایش سفتی معادل ورق ساندویچی می‌شود و بنابراین باعث افزایش نیروی برخورد می‌شود؛ در حالی که خیز یا تغییر شکل کلی سازه کاهش می‌یابد.

با قرار دادن انرژی کرنشی فونداسیون الاستیک در رابطه انرژی و تئوری بهبود یافته مرتبه بالای ورق‌های ساندویچی و طرح دوم فراستیک، اثر عامل‌های بستر الاستیک بر فرکانس‌های طبیعی ارتعاش ورق ساندویچی و تابع نیروی برخورد با سرعت پایین قابل محاسبه است و می‌توان با استفاده از آن، ضربه در مرکز ورق ساندویچی با تکیه‌گاه ساده را تحلیل نمود و تابع نیروی برخورد با سرعت آرام و مقدار خیز در مرکز ورق ساندویچی را برای بستر الاستیک طرح پاسترناک محاسبه نمود.

$$K(6,2) = \left[ 8h_t \frac{g_2^{cxz}}{h_c^4} + 24h_t \frac{g_3^{cxz}}{h_c^5} \right] - \left[ 24h_t \frac{g_3^{cxz}}{h_c^5} + 72h_t \frac{g_4^{cxz}}{h_c^6} \right]$$

$$+ \alpha^2 \left[ \left( 2h_t \frac{e_4^{cxx}}{h_c^4} + 4h_t \frac{e_5^{cxx}}{h_c^5} \right) - \left( 4h_t \frac{e_5^{cxx}}{h_c^5} + 8h_t \frac{e_6^{cxx}}{h_c^6} \right) \right]$$

$$+ \beta^2 \left[ \left( 2h_t \frac{g_4^{cxy}}{h_c^4} + 4h_t \frac{g_5^{cxy}}{h_c^5} \right) - \left( 4h_t \frac{g_5^{cxy}}{h_c^5} + 8h_t \frac{g_6^{cxy}}{h_c^6} \right) \right]$$

$$I_n^i = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} (z_i^n \rho_i) dz_i$$

$$e_n^{c(xy,xz,yz)} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} (z_i^n E^{c(xy,xz,yz)}) dz_i$$

$$g_n^{c(xy,xz,yz)} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} (z_i^n G^{c(xy,xz,yz)}) dz_i$$

تغییرات فرکانس طبیعی و بیشینه نیرو و خیز با تغییر مدول عمودی بصورت خطی و با تغییر مدول برشی بصورت غیرخطی هستند و مدول برشی در تغییرات نیرو و خیز اثرگذارتر است.

**ضمیمه الف**

$$M(8,8) = I_0^b + \left[ 4 \frac{I_4^c}{h_c^4} + 8 \frac{I_5^c}{h_c^5} \right] + \left[ 8 \frac{I_5^c}{h_c^5} + 16 \frac{I_6^c}{h_c^6} \right]$$

$$M(11,7) = \left[ -h_b \frac{I_2^c}{h_c^2} + 4h_b \frac{I_4^c}{h_c^4} \right] - \left[ 2h_b \frac{I_3^c}{h_c^3} - 8h_b \frac{I_5^c}{h_c^5} \right]$$

$$K(10,10) = k_w + \alpha^2 k_{gx} + \beta^2 k_{gy}$$

$$+ \left[ \frac{e_0^{czz}}{h_c^2} + 4 \frac{e_1^{czz}}{h_c^3} \right] + \left[ 4 \frac{e_1^{czz}}{h_c^3} + 16 \frac{e_2^{czz}}{h_c^4} \right]$$

$$+ \alpha^2 \left[ \frac{\pi^2}{12} A^b(5,5) - \left( \frac{g_2^{cxz}}{h_c^2} - 2 \frac{g_3^{cxz}}{h_c^3} \right) + \left( -2 \frac{g_3^{cxz}}{h_c^3} - 4 \frac{g_4^{cxz}}{h_c^4} \right) \right]$$

$$+ \beta^2 \left[ \frac{\pi^2}{12} A^b(4,4) - \left( \frac{g_2^{cyz}}{h_c^2} - 2 \frac{g_3^{cyz}}{h_c^3} \right) + \left( -2 \frac{g_3^{cyz}}{h_c^3} - 4 \frac{g_4^{cyz}}{h_c^4} \right) \right]$$

که در آنها:

$m_I$	جرم ضربه‌زننده
$M_{eff}^P$	جرم مؤثر پنل
$M_{tot}$	جرم کل پنل
$[M]$	ماتریس جرم ورق ساندویچی
$\bar{n}$	بارهای خارجی صفحه‌ای
$N_{xx}^i, N_{yy}^i, N_{xy}^i$	بارهای خارجی عمود بر واحد طول لبه
$q_i$	بارهای دینامیکی عمودی توزیع شده
$R$	شعاع جسم
$t_2-t_1$	بازه زمانی
$T$	انرژی جنبشی
$u_c, v_c, w_c$	مولفه‌های تغییر مکان در هسته میانی
$u_b, v_b, w_b$	مولفه‌های تغییر مکان در رویه بالایی
$u_b, v_b, w_b$	مولفه‌های تغییر مکان در رویه پایینی
$U$	انرژی پتانسیل داخلی
$U_f$	انرژی کرنشی فونداسیون الاستیک
$V$	انرژی خارجی
$V_0$	سرعت اولیه ضربه‌زننده
$z_b, z_b, z_c$	مختصات قائم در رویه‌ها و هسته میانی

**۵- فهرست علائم**

$a, b$	طول و عرض ورق ساندویچی
$A, B, D$	ماتریس سفتی کششی، کوپلی و خمشی
$C_{mn}$	ضرایب سری فوریه
$E$	مدول الاستیسیته
$f_e$	دانشیته نیروی عکس العمل فونداسیون بر واحد سطح
$F(t)$	تابع نیروی برخورد
$F_{max}$	ماکزیمم نیروی برخورد
$G$	مدول برشی
$h_t, h_b, h_c, h$	ضخامت رویه‌های بالایی، پایینی، هسته میانی و کل ورق ساندویچی
$k_g$	مدول برشی عرضی بستر الاستیک
$k_w$	مدول فنری عمودی بستر الاستیک
$K_c, K_c^*$	سفتی برخورد خطی و غیر خطی قانون هرتز
$K_g$	سفتی مربوط به تغییر شکل کلی سازه
$[K]$	ماتریس سفتی ورق ساندویچی

## ۶- علائم یونانی

$\Psi_{xj}, \Psi_{yj}$	چرخش‌های مقاطع عرضی حول محورهای طول و عرض ورق ساندویچی	$\delta$	عملگر تغییرات مرتبه اول
		$\delta_D$	تابع دلتای دیراک
		$\Delta_1, \Delta_2$	توابع تغییر مکان عرضی در طرح جرم و فنر
		$v$	ضریب پواسون
		$\rho_t, \rho_b, \rho_c$	دانسیته رویه‌ها و هسته میانی
		$\sigma, \varepsilon$	تنش‌ها و کرنش‌های نرمال
		$\tau, \gamma$	تنش‌ها و کرنش‌های برشی
		$\omega_{11}$	فرکانس طبیعی پایه ورق
		$\Omega$	فرکانس طبیعی بی‌بعد

## ۷- مراجع

- Shivakumar, K.N., Elber, W., Illg, W. , [۷]  
“Prediction of Impact Force and Duration due to Low-Velocity Impact on Circular Composite Laminates”, *Journal of Applied Mechanics*, vol.52, pp. 674–680, 1985.
- Khalili, M.R. , [۸]  
“Analysis of the Dynamic Response of Large Orthotropic Elastic Plates to Transverse Impact and Its Application to Fiber Reinforced Plates”, *Ph.D. Thesis, Indian Institute of Technology, Delhi*, 1992.
- Olsson, R. , [۹]  
“Improved Theory for Contact Indentation of Sandwich Panels”, *Journal of AIAA*, vol.34n6, pp. 1238-1244, 1996.
- Abrate, S. , [۱۰]  
“Modeling of Impacts on Composite Structures”, *Journal of Composite Structures*, vol. 51, pp. 129-138, 2001.
- Abrate, S. , [۱۱]  
“Localized Impact on Sandwich Structures With Laminated Facings”, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 50n2, pp. 69-82, 1997.
- Hoo Fatt, M.S., Park, K.S. , [۱۲]  
“Dynamic Models for Low-Velocity Impact Damage of Composite Sandwich Panels-Part A: Deformation”, *Journal of Composite Structures*, vol.52, pp. 335-351, 2001.
- Choi, IH., Lim, CH. , [۱۳]  
“Low-velocity impact analysis of composite laminates using linearized contact law”, *Journal of*
- Frostig, Y., Thomsen, O.T. , [۱]  
“High-order free vibration of sandwich panels with a flexible core”, *Journal of Solid and Structures*, vol.41, pp. 1697–1724, 2004.
- Malekzadeh, K., Khalili, M. R., Mittal, R. [۲]  
K., “Local and Global Damped Vibrations of Plates with a Viscoelastic Soft Flexible Core: An Improved High-order Approach”, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 7, pp. 431–456, 2005.
- Sveklo, V.A. , [۳]  
“Hertz Problem of Compression of Anisotropic bodies”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol.38 , pp. 1023-1027, 1974.
- Olsson, R. , [۴]  
“Impact Response of Orthotropic Composite Plates Predicted from a One parameter Differential Equation”, *Journal of AIAA* , vol. 30, pp. 1587-1596, 1992.
- Caprino, G., Crivelli-Visconti, I., and Di Ilio, A. , [۵]  
“Elastic Behavior of Composite Structures under low Velocity Impact”, *Journal of Composites*, vol.15, pp. 231-234, 1984.
- Lal, K.M. , [۶]  
“Low Velocity Transverse Impact Behavior of 8-ply Graphite-Epoxy Laminates”, *Journal of Reinforced Plastic Composites*, vol.2, pp. 216-225, 1983.

- Chien, RD., Chen, CS. ,“Nonlinear vibration of laminated plates on an elastic foundation”, *Thin-Walled Structures*, vol.44, pp. 852–60, 2006. [18]
- Abrate, S. ,“Impact on Composite Structures”, *Cambridge University Press*, 1998. [19]
- Yas, M.H., Sobhani Aragh, B. ,“Free vibration analysis of continuous grading fiber reinforced plates on elastic foundation”, *International Journal of Engineering Science*, vol. 48, Issue 12, pp. 1881-1895, 2010. [20]
- Malekzadeh, P. ,“Three-dimensional free vibrations analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations”, *Journal of Composite Structures*, vol 89, Issue 3, pp. 367-373, 2009. [21]
- Anderson, Todd A. ,“An investigation of SDOF models for large mass impact on sandwich composites”, *Journal of Composites :part B*, vol.36n2, pp. 135-142, 2005. [22]
- Khalili, M.R., Malekzadeh, K., Mittal, R.K.,“Effect of physical and geometrical parameters on transverse low-velocity impact response of sandwich panels with atransversely flexible core”, *Journal of Composite Structures*,vol.77, pp. 430– 443, 2007. [23]
- Khalili, M.R., Malekzadeh, K., Mittal, R.K.,“Response of composite sandwich panels with transversely flexible core to low-velocity transverse impact: A new dynamic model”, *International Journal of Impact Engineering*, vol.34, pp. 522–543., 2007. [24]
- Winkler, E. ,“Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit”, Prag Dominicus, 1867. [25]
- Pasternak, PL. ,“On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants”, *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu I Arkhitekture*, Moscow, 1–56 (in Russian), 1954. [26]

## ۸- زیر نویس ها

- 
- <sup>1</sup> Thomson  
<sup>2</sup> Improved High-Order Sandwich  
<sup>3</sup> PanelTheory(IHSAPT)  
<sup>4</sup> Hertz  
<sup>5</sup> Sveklo  
<sup>6</sup> Olsson  
<sup>7</sup> Caprino  
<sup>8</sup> Lal  
<sup>9</sup> Shivakumar  
<sup>10</sup> Abrate  
<sup>11</sup> Hoo Fatt  
<sup>12</sup> Park  
<sup>13</sup> Choi  
<sup>14</sup> Lim  
<sup>15</sup> Winkler  
<sup>16</sup> Pasternak  
<sup>17</sup> Functionally Graded Material  
<sup>18</sup> First Shear Deformation Theory(FSDT)  
<sup>19</sup> Continuous Grading Fiber Reinforced Plate(CGFR)  
<sup>20</sup> Differential Quadrature Method  
<sup>21</sup> Single-Degree-Of-Freedom(SDOF)