



## تأثیر یاتاقان‌های غیرهمگن بر رفتار دینامیکی و پایداری اتوبالانسر ساچمه- فنر

موسی رضائی\*، میرمحمد اتفاق، رضا فتحی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷-۰۳-۰۵  
بازنگری: ۱۳۹۷-۰۸-۲۴  
پذیرش: ۱۳۹۷-۱۰-۰۶  
ارائه آنلاین: ۱۳۹۷-۱۰-۲۹

### کلمات کلیدی:

اتوبالانسر ساچمه- فنر  
یاتاقان‌های غیرهمگن  
روش مقیاس‌های چندگانه  
پاسخ ارتعاشی  
ناحیه بالانس پایدار

**خلاصه:** در سال‌های اخیر استفاده از اتوبالانسر دینامیکی ساچمه‌ای برای رفع نابالانسی‌های متغیر با شرایط کاری، بیش از پیش مورد توجه محققان قرار گرفته است. اتوبالانسر دینامیکی ساچمه‌ای وسیله‌ای است که بطور خودکار نابالانسی‌های متغیر با شرایط کاری را بدون نیاز به متوقف کردن تجهیزات دوار در شرایط خاص رفع و سیستم را بالانس می‌کند. بالانسر اتوماتیک ساچمه- فنر نوع جدیدی از بالانس‌های اتوماتیک ساچمه‌ای می‌باشد و مزیت اصلی آن نسبت به اتوبالانسرهای ساچمه‌ای متداول، کاهش دامنه ارتعاشی روتور در ناحیه گذرا و وسیع بودن ناحیه بالانس پایدار است. یاتاقان‌ها یکی از مهم‌ترین اجزا تأثیرگذار بر رفتار دینامیکی و پایداری سیستم‌های دوار هستند و در پژوهش‌های پیشین رفتار دینامیکی و پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با یاتاقان‌های همگن بررسی شده است. در عمل، به دلایل مختلف از جمله ساخت، یاتاقان‌ها دارای رفتار غیرهمگن می‌باشند. در این پژوهش برای اولین بار رفتار دینامیکی و پایداری روتور نابالانس با یاتاقان‌های غیرهمگن مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی مقیاس‌های چندگانه بررسی شده است. نتایج حاکی از این است غیرهمگن بودن یاتاقان‌ها خللی در مزیت‌های اصلی اتوبالانسر ساچمه- فنر وارد نمی‌کند و در ضمن افزایش پارامتر غیرهمگنی یاتاقان‌ها سبب کاهش ناحیه بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانسر می‌شود.

### ۱- مقدمه

نهایتاً در وضعیتی قرار می‌گیرند که نابالانسی سیستم را جبران کرده و نهایتاً آن را به حالت بالانس در می‌آورند [۱]. اتوبالانسر ساچمه‌ای کاربردهای متفاوتی در سیستم‌های مختلف از جمله در دی.وی.دی-رام<sup>۱</sup> یا سی.دی-رام<sup>۲</sup>، ماشین‌های ابزار و غیره دارد [۲-۵]. تحقیقات اولیه در زمینه بالانسر اتوماتیک ساچمه‌ای توسط تیارل [۶] انجام شده است. در سال ۱۹۹۹ جینوچی و همکاران [۷] با بررسی خود نشان دادند هرچند اتوبالانسر ساچمه‌ای قادر به بالانس سیستم در دوره‌های بالای دور بحرانی اول است ولی در دوره‌های پایین، دامنه روتور را افزایش می‌دهد. در سال ۱۹۹۹ چانگ و رو [۸] رفتار دینامیکی روتور جفکات مجهز به اتوبالانسر متداول را بررسی کرده‌اند. آن‌ها معادلات حرکت را به کمک دستگاه مختصات قطبی به صورت خودگردان تبدیل کرده و توانستند پایداری سیستم را حول نقاط تعادل بطور کامل بررسی کنند. چانگ و جانگ [۹] به بررسی اثر

یکی از عمده‌ترین عوامل ایجاد ارتعاشات در سیستم‌های دوار نابالانسی است. عدم رفع نابالانسی در تجهیزات دوار می‌تواند خسارت‌های زیادی نظیر کاهش عمر یاتاقان‌ها، افزایش هزینه نگهداری سیستم و غیره را به دنبال داشته باشد. اگر نابالانسی مشخص و ثابت باشد عملیات بالانس با متوقف کردن سیستم دوار و اضافه یا کم کردن جرم در صفحاتی که برای بالانس کردن سیستم تعبیه شده، انجام می‌گیرد. اما اگر نابالانسی بسته به شرایط کاری تغییر کند، دیگر با روش‌های متداول نمی‌توان ارتعاشات سیستم دوار را کاهش داد. یکی از راهکارهای ساده و موثر جهت کنترل و رفع نابالانسی این نوع سیستم‌ها استفاده از اتوبالانسر ساچمه‌ای است. بالانسر دینامیکی ساچمه‌ای وسیله ساده‌ای است که از یک دیسک دوار شیاردار تشکیل شده که در آن ساچمه‌هایی قرار دارند و در فضای خالی بین ساچمه‌ها در داخل شیار، یک مایع لزج وجود دارد. تحت شرایطی این ساچمه‌ها

1 DVD- ROM

2 CD- ROM

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: m\_rezaee@tabrizu.ac.ir



وابسته به محل نصب آن روی شفت است و در صورت نزدیکی اتوبالانسر به محل نابالانسی، اتوبالانسر عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهد. در سال ۲۰۱۶ یانگ و اسمیت [۲۰] به بررسی رفتار چرخه حدی روتور صفحه‌ای مجهز به اتوبالانسر تحت اثر نیروی آلفورد<sup>۱</sup> پرداختند. نتایج تحقیق آن‌ها نشان داد که افزایش ضریب میرایی اتوبالانسر می‌تواند ارتعاشات مخرب ناشی از چرخه حدی سیستم تحت اثر نیروی آلفورد را از بین ببرد. همچنین آن‌ها در مقاله دیگری [۲۱] به بررسی رفتار چرخه حدی روتور مجهز به اتوبالانسر پرداختند ولی در مدل جدید روتور را غیرصفحه‌ای و شفت را انعطاف‌پذیر در نظر گرفتند. مرور تحقیقات پیشین نشان می‌دهد که اتوبالانسر ساچمه‌ای علاوه بر مزایای متعدد، از جمله ساختار ساده و بالانس اتوماتیک نابالانسی‌های متغیر در شرایط خاص، دارای دو عیب اساسی می‌باشد. اولین عیب افزایش دامنه ارتعاشی روتور در ناحیه گذرا است و این افزایش دامنه در ناحیه گذرا سبب کاهش عمر خستگی، ایجاد صدا و غیره می‌شود. دومین عیب محدود بودن ناحیه بالانس پایدار است. به عبارت دیگر اتوبالانسر به ازای پارامترهای مشخصی از سیستم می‌تواند روتور را بالانس نماید [۸ و ۱۰]. بنابراین محدود بودن این ناحیه سبب می‌شود گستره کاربرد این نوع اتوبالانسر کاهش یابد. با توجه به ایرادات ذکر شده اخیراً مدل جدیدی از اتوبالانسر با عنوان اتوبالانسر ساچمه-فتر [۲۲] ارائه گردیده است. این اتوبالانسر توانسته هر دو عیب مذکور را به طور همزمان تا حد قابل ملاحظه‌ای رفع نماید. با توجه مزیت‌های اتوبالانسر جدید ساچمه-فتر نسبت به اتوبالانسر متداول که در مدل صفحه‌ای جفکات با یاتاقان همگن در مرجع [۲۲] اثبات شده است، بنابراین بررسی دقیق رفتار دینامیکی اتوبالانسر جدید حائز اهمیت است. در تحقیقات پیشین رفتار دینامیکی روتور با یاتاقان‌های همگن و مجهز به اتوبالانسر ساچمه-فتر با استفاده از روش‌های عددی بررسی شده است. با توجه به اینکه یاتاقان‌ها تاثیر غالب بر رفتار دینامیکی روتورها دارند و بنابه دلایل مختلف از جمله روش ساخت، غیرهمگن هستند و همچنین روش‌های نیمه تحلیلی دارای مزیت‌های متعددی می‌باشند، به همین منظور در این مقاله برای اولین بار رفتار دینامیکی و پایداری روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن مجهز به اتوبالانسر ساچمه-فتر با روش مقیاس‌های چندگانه بررسی شده است.

در این پژوهش با در نظر گرفتن روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن

ژیروسکوپی بر رفتار دینامیکی و پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر پرداختند. نتایج بررسی آن‌ها نشان داد اتوبالانسر علاوه بر بالانس سیستم قادر است زوایای اوپلر ناشی از اثر ژيروسکوپی را میرا کند. لو و همکاران [۱۰] به بررسی تحلیلی پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر با دو ساچمه پرداختند. آن‌ها محدوده پایداری در همسایگی وضعیت تعادل را به وسیله معادلات خطی‌سازی شده حول نقاط تعادل و با استفاده از مسأله مقدار ویژه بررسی کردند. همچنین لو و هانگ [۱۱] در تحقیقی دیگر رفتار دینامیکی و پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر با سه ساچمه را بررسی کردند. در سال ۲۰۰۹ احيایی و مقدم [۱۲] به بررسی تحلیلی و عددی یک محور انعطاف‌پذیر دوار نابالانس واقع بر روی دو تکیه‌گاه الاستیک خطی و مجهز به چندین اتوبالانسر ساچمه‌ای پرداختند. آن‌ها با فرض توزیع نابالانسی به صورت جرم‌های نقطه‌ای در طول محور دوار بدون جرم، معادلات حرکت را استخراج کردند و نشان دادند که با انتخاب مناسب پارامترهای بالانس می‌توان شفت را بالانس نمود و هنگامی که بالانس‌ها در نزدیکی نابالانسی‌ها قرار داده شوند نتایج بهتری حاصل می‌شود. در سال ۲۰۱۱ چان و همکاران [۱۳] تاثیر غیرخطی بودن سیستم تعلیق بر پایداری سیستم مجهز به بالانس ساچمه‌ای متداول را بدون استخراج پاسخ دینامیکی مورد مطالعه قرار دادند. در سال ۲۰۱۳ سانق و همکاران [۱۴] تاثیر تحریک خارجی بر عملکرد اتوبالانسر ساچمه‌ای را مورد مطالعه قرار دادند. در همان سال، بایکو [۱۵] به بررسی رفتار روتور انعطاف‌پذیر ارتوتروپیک مجهز به اتوبالانسر ساچمه‌ای پرداخت. نتایج تحلیل ایشان نشان داد که ناحیه پایدار برای روتور ارتوتروپیک کمتر از ناحیه پایدار روتور ایزوتروپیک است. در سال ۲۰۱۴ رضائی و فتحی [۱۶] تاثیر ضریب میرایی و جرم ساچمه‌های اتوبالانسر بر پایداری و بالانس روتور صفحه‌ای مجهز به اتوبالانسر را بررسی کردند. در سال ۲۰۱۵ رضائی و همکاران [۱۷] با لحاظ کردن اثرات ژيروسکوپی و با استفاده از الگوریتم سیمپلکس نلد-مید پارامترهای بهینه اتوبالانسر به منظور کمینه‌سازی زمان بالانس و صفر کردن زوایای اوپلر را استخراج کردند. همچنین رضائی و فتحی [۱۸] در تحقیق دیگر رفتار دینامیکی اتوبالانسر ساچمه‌ای دو ردیفه در حضور اثر ژيروسکوپی را بررسی کردند. در سال ۲۰۱۵ ماجسکی و همکاران [۱۹] به بررسی رفتار دیسک صلب نصب شده بر روی شفت الاستیک مجهز به اتوبالانسر پرداختند. نتایج بررسی آن‌ها نشان داد که عملکرد اتوبالانسر کاملاً

1 Alford's Force

اتوبالانسر ساچمه- فنر ابتدا انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و تابع اتلاف ریلی سیستم را بدست آورده و نهایتاً با استفاده از روابط لاگرانژ معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت سیستم استخراج می‌گردد. برای استخراج انرژی جنبشی سیستم سرعت مطلق مرکز جرم روتور و سرعت مطلق خطی ساچمه‌ها طبق روابط زیر استخراج می‌شود:

$$\vec{v}_G = (\dot{x} - y\omega)\vec{i} + (\dot{y} + x\omega + \varepsilon\omega)\vec{j} \quad (1)$$

$$\vec{v}_{B_i} = [(\dot{x} - y\omega) + \delta_i \cos \phi_i - \delta_i (\dot{\phi}_i + \omega) \sin \phi_i] \vec{i} + [(\dot{y} + x\omega) + \delta_i \sin \phi_i + \delta_i (\dot{\phi}_i + \omega) \cos \phi_i] \vec{j} \quad (2)$$

بنابراین انرژی جنبشی سیستم طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} m_d \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G + \frac{1}{2} m_b \sum_{i=1}^n \vec{v}_{B_i} \cdot \vec{v}_{B_i} \quad (3)$$

در رابطه بالا جمله اول بیانگر انرژی جنبشی ناشی از دوران دیسک می‌باشد و جملات دوم و سوم به ترتیب نشان‌دهنده انرژی جنبشی انتقالی دیسک و ساچمه‌ها می‌باشد. در رابطه (۳)  $J$  و  $m_d$  به ترتیب ممان اینرسی جرمی و جرم دیسک می‌باشد و  $m_b$  جرم هر یک از ساچمه‌ها می‌باشد. با جایگذاری روابط (۱) و (۲) در رابطه (۳) انرژی جنبشی اتوبالانسر ساچمه- فنر به همراه روتور با فرض یکسان بودن جرم ساچمه‌ها و کوچک بودن قطر آن‌ها، از رابطه (۴) بدست می‌آید:

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} M [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2(x\dot{y} - \dot{x}y)\omega + (x^2 + y^2)\omega^2] + \frac{1}{2} m_d (2x\varepsilon\omega^2 + \varepsilon^2\omega^2 + 2\varepsilon\dot{y}\omega) + \frac{1}{2} m_b \sum_{i=1}^n [2\delta_i (\dot{\phi}_i + \omega)(\dot{y} + \omega x) \cos \phi_i - 2\delta_i (\dot{\phi}_i + \omega)(\dot{x} - \omega y) \sin \phi_i + \delta_i^2 (\dot{\phi}_i + \omega)^2 + \delta_i^2 + 2\delta_i (\dot{x} - \omega y) \cos \phi_i + 2\delta_i (\dot{y} + \omega x) \sin \phi_i] \quad (4)$$

که در آن  $M$  جرم کل مجموعه است. انرژی پتانسیل روتور

جفکات با یاتاقان‌های غیرهمگن از رابطه (۵) استخراج می‌گردد:

$$V = \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 \quad (5)$$

انرژی پتانسیل اتوبالانسر ساچمه- فنر طبق مرجع [۲۲] برابر با رابطه (۶) است.

$$V = \frac{1}{2} k_r \sum_{i=1}^n (\delta_i - a)^2 + \frac{1}{2} k_p d^2 \left[ \left( \phi_2 - \phi_1 - \frac{2\pi}{n} \right)^2 + \dots + \left( \phi_n - \phi_{n-1} - \frac{2\pi}{n} \right)^2 \right] \quad (6)$$

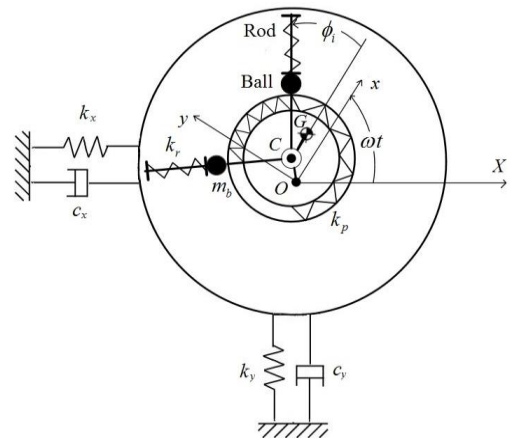
که جمله اول ناشی از فنرهای شعاعی بوده و جمله دوم ناشی از فنرهای محیطی می‌باشد. بنابراین انرژی پتانسیل روتور با یاتاقان‌های

مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر معادلات غیرخطی حاکم بر سیستم استخراج شده است. با توجه به مزیت‌های متعددی که روش‌های نیمه‌تحلیلی نسبت به روش‌های عددی دارند، پاسخ زمانی سیستم با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه استخراج شده است. همچنین محدوده بالانس پایدار سیستم تعیین و تاثیر پارامتر غیرهمگنی یاتاقان بر آن بررسی شده است. نهایتاً پاسخ زمانی و محدوده بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با روتور مجهز به اتوبالانسر متداول تحت شرایط یکسان مقایسه شده است.

## ۲- استخراج معادلات غیرخطی حرکت

مدل شماتیک روتور نابالانس مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با یاتاقان‌های غیرهمگن در شکل ۱ نشان داده شده است. همانطور که از شکل مشاهده می‌شود، یاتاقان‌های غیرهمگن در دو جهت با فنر و دمپر ویسکوز با سفتی و میرایی متفاوت مدل شده است. موقعیت ساچمه‌ها به وسیله شعاع  $\delta_i$  و زاویه  $\phi_i$  که  $i = 1, 2, \dots, n$  تعیین می‌شود و  $n$  تعداد ساچمه‌ها می‌باشد. مرکز جرم روتور با  $G$  و خروج از مرکز با  $\varepsilon$  نشان داده شده است. مرکز هندسی روتور،  $C$ ، با استفاده از مختصات  $x$  و  $y$  تعیین می‌شود. برای خودگردان کردن معادلات حرکت، دستگاه مختصات  $OXY$  متصل به روتور فرض شده است که با سرعت زاویه‌ای روتور چرخش می‌کند. هنگامی که روتور در حالت سکون قرار دارد  $C$  منطبق بر نقطه عبور خط واصل محور یاتاقان‌ها (نقطه  $O$ ) است.

در ادامه برای استخراج معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت



شکل ۱: نمای شماتیک روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر

Fig.1: Schematic of a rotor with anisotropic bearings equipped with an automatic ball-spring balancer

می‌شود تأیید می‌گردد. به منظور کسب نتایج عمومی‌تر، مختصه‌ها و پارامترهای بی‌بعد به صورت رابطه (۱۳) تعریف می‌شوند:

$$\bar{x} = \frac{x}{\gamma}, \bar{y} = \frac{y}{\gamma}, \bar{\delta}_i = \frac{\delta_i}{\gamma}, \tau = \omega_n t, r = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}, \gamma = \frac{k_r a}{k_r - m_b \omega^2} \quad (13)$$

$$\zeta_x = \frac{c_x}{2M\omega_n}, \zeta_y = \frac{c_y}{2M\omega_n}, \bar{m} = \frac{m_b}{M}, e = \frac{\varepsilon}{\gamma}, \bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_n}, \beta = \frac{c_r}{2m_b \omega_n}$$

$$\omega_b = \sqrt{\frac{k_r}{m_b}}, \omega_n = \sqrt{\frac{k_x}{m_d}}, f = \frac{\omega_b}{\omega_n}, \eta = \frac{k_p d^2}{m_b \gamma^2 \omega_n^2}, \sigma = \frac{k_y}{k_x}$$

که در آن  $\bar{k}_x$  و  $\bar{k}_y$  بیانگر نسبت میرایی روتور در راستاهای  $x$  و  $y$ ،  $\beta$  نسبت میرایی بالانس،  $\bar{\delta}_i$  جابجایی بی‌بعد ساچمه‌ها در راستای شعاعی و  $\lambda$  طول تعادل فنرهای شعاعی می‌باشد. همچنین  $\omega_b$  فرکانس طبیعی سیستم ساچمه- فنر شعاعی و  $\sigma$  نسبت سفتی معادل روتور در راستای  $y$  به راستای  $x$  است. معادلات حرکت سیستم با استفاده از پارامترهای بی‌بعد معرفی شده به صورت روابط (۱۴) تا (۱۷) بدست می‌آیند:

$$\ddot{\bar{x}} + \bar{m} \sum_{i=1}^n \left[ \left( \ddot{\bar{\delta}}_i - \bar{\delta}_i (\dot{\bar{\phi}}_i + \bar{\omega}) \right) \cos \phi_i - \left( \bar{\delta}_i \ddot{\bar{\phi}}_i + 2\bar{\delta}_i \dot{\bar{\phi}}_i (\dot{\bar{\phi}}_i + \bar{\omega}) \right) \sin \phi_i \right] - (1-\bar{m})e \bar{\omega}^2 + 2\zeta_x \dot{\bar{x}} - 2\bar{\omega} \dot{\bar{y}} + (1-\bar{\omega}^2) \bar{x} - 2\zeta_x \bar{\omega} \bar{y} = 0 \quad (14)$$

$$\ddot{\bar{y}} + \bar{m} \sum_{i=1}^n \left[ \left( \ddot{\bar{\delta}}_i - \bar{\delta}_i (\dot{\bar{\phi}}_i + \bar{\omega}) \right) \sin \phi_i + \left( \bar{\delta}_i \ddot{\bar{\phi}}_i + 2\bar{\delta}_i \dot{\bar{\phi}}_i (\dot{\bar{\phi}}_i + \bar{\omega}) \right) \cos \phi_i \right] + 2\zeta_y \dot{\bar{y}} + 2\bar{\omega} \dot{\bar{x}} + (\sigma - \bar{\omega}^2) \bar{y} + 2\zeta_y \bar{\omega} \bar{x} = 0 \quad (15)$$

$$\bar{m} \bar{\delta}_i \left[ \left( \ddot{\bar{y}} + 2\bar{\omega} \dot{\bar{x}} - \bar{\omega}^2 \bar{y} \right) \cos \phi_i + \left( \ddot{\bar{x}} - 2\bar{\omega} \dot{\bar{y}} - \bar{\omega}^2 \bar{x} \right) \sin \phi_i + \bar{\delta}_i \ddot{\bar{\phi}}_i + 2\bar{\delta}_i \dot{\bar{\phi}}_i (\dot{\bar{\phi}}_i + \bar{\omega}) \right] + 2\bar{m} \beta \bar{\delta}_i^2 \dot{\bar{\phi}}_i + \eta \bar{m} q_i (\phi_i) = 0 \quad (16)$$

$$\bar{m} \left[ \left( \ddot{\bar{y}} + 2\bar{\omega} \dot{\bar{x}} - \bar{\omega}^2 \bar{y} \right) \sin \phi_i + \left( \ddot{\bar{x}} - 2\bar{\omega} \dot{\bar{y}} - \bar{\omega}^2 \bar{x} \right) \cos \phi_i - \left( \bar{\delta}_i \ddot{\bar{\phi}}_i + 2\bar{\omega} \bar{\delta}_i \dot{\bar{\phi}}_i + \bar{\delta}_i \right) \right] + 2\bar{m} \beta \bar{\delta}_i + \bar{m} (\bar{\delta}_i - 1) (f^2 - \bar{\omega}^2) = 0 \quad (17)$$

### ۳- استخراج پاسخ زمانی

در این بخش پاسخ ارتعاشی روتور نابالانس مجهز به اتوبالانس ساچمه- فنر با استفاده از روش نیمه تحلیلی مقیاس‌های چندگانه استخراج می‌گردد. در اکثر پژوهش‌های پیشین از روش عددی برای استخراج پاسخ زمانی اتوبالانس ساچمه- فنر استفاده شده است. در مقاله حاضر با توجه به مزیت‌های روش‌های نیمه تحلیلی از روش مقیاس‌های چندگانه برای بررسی استخراج پاسخ دینامیکی اتوبالانس مذکور استفاده شده است. بدین منظور پاسخ معادلات غیرخطی به

غیرهمگن مجهز به اتوبالانس ساچمه- فنر به صورت رابطه (۷) بدست می‌آید:

$$V = \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 + \frac{1}{2} k_r \sum_{i=1}^n (\delta_i - a)^2 + \frac{1}{2} k_p d^2 \left[ \left( \phi_2 - \phi_1 - \frac{2\pi}{n} \right)^2 + \dots + \left( \phi_n - \phi_{n-1} - \frac{2\pi}{n} \right)^2 \right] \quad (7)$$

که در آن  $k_x$  سفتی معادل روتور در راستای  $x$ ،  $k_y$  سفتی معادل روتور در راستای  $y$ ،  $k_p$  سفتی فنرهای محیطی و  $k_r$  سفتی فنرهای شعاعی می‌باشد. تابع اتلاف ریلی ارائه شده در مرجع [۲۲] برای روتور با یاتاقان غیرهمگن به رابطه (۸) تبدیل می‌شود.

$$F = \frac{1}{2} c_x (\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\omega + \omega^2 y^2) + \frac{1}{2} c_y (\dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\omega + \omega^2 x^2) + \frac{1}{2} c_r \sum_{i=1}^n (\dot{\delta}_i^2 + \delta_i^2 \dot{\phi}_i^2) \quad (8)$$

که در آن  $c_x$  ثابت میرایی معادل روتور در راستای  $x$ ،  $c_y$  ثابت میرایی معادل روتور در راستای  $y$  و  $c_r$  ثابت میرایی لزوج اتوبالانس می‌باشد. معادلات غیرخطی حرکت روتور مجهز به اتوبالانس جدید با استفاده از معادلات لاگرانژ به صورت روابط (۹) تا (۱۲) به دست می‌آیند:

$$M\ddot{x} + m_b \sum_{i=1}^n \left[ \left( \ddot{\delta}_i - \delta_i (\dot{\phi}_i + \omega) \right) \cos \phi_i - \left( \delta_i \ddot{\phi}_i + 2\delta_i \dot{\phi}_i (\dot{\phi}_i + \omega) \right) \sin \phi_i \right] - m_d \varepsilon \omega^2 + c_x \dot{x} - 2M\omega \dot{y} + (k_x - M\omega^2)x - c_x \omega y = 0 \quad (9)$$

$$M\ddot{y} + m_b \sum_{i=1}^n \left[ \left( \ddot{\delta}_i - \delta_i (\dot{\phi}_i + \omega) \right) \sin \phi_i + \left( \delta_i \ddot{\phi}_i + 2\delta_i \dot{\phi}_i (\dot{\phi}_i + \omega) \right) \cos \phi_i \right] + c_y \dot{y} + 2M\omega \dot{x} + (k_y - M\omega^2)y + c_y \omega x = 0 \quad (10)$$

$$m_b \delta_i \left[ \left( \dot{y} + 2\omega \dot{x} - \omega^2 y \right) \cos \phi_i - \left( \dot{x} - 2\omega \dot{y} - \omega^2 x \right) \sin \phi_i + \delta_i \dot{\phi}_i + 2\delta_i \dot{\phi}_i (\dot{\phi}_i + \omega) \right] + c_r \delta_i^2 \dot{\phi}_i + k_p d^2 q_i (\phi_i) = 0 \quad (11)$$

$$q_1(\phi) = \left( \phi_1 - \phi_2 - \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$q_i(\phi) = (2\phi_i - \phi_{i-1} - \phi_{i+1})$$

$$q_n(\phi) = \left( \phi_n - \phi_{n-1} - \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$i = 2, 3, \dots, n-1$$

$$m_b \left[ \left( \dot{y} + 2\omega \dot{x} - \omega^2 y \right) \sin \phi_i + \left( \dot{x} - 2\omega \dot{y} - \omega^2 x \right) \cos \phi_i - \left( \delta_i (\dot{\phi}_i + \omega)^2 + \ddot{\delta}_i \right) \right] + c_r \dot{\delta}_i + k_r (\delta_i - a) = 0 \quad (12)$$

صحت روابط اخیر با قرار دادن  $\dot{\delta}_i = 0$ ،  $\delta_i = R$  و  $k_x = k_y = k$ ،  $c_x = c_y = c$  و  $k_r = k_p = 0$  در روابط (۹) تا (۱۲)، که به روابط موجود در مقالات [۱۰] و [۱۱] منجر

صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} & -2\bar{\omega}\delta_{i0}D_1\phi_{i1} - \delta_{i0}(D_0\phi_{i1})^2 - 2\phi_{i1}\bar{\omega}D_0\delta_{i1})\cos\phi_{i0} + \\ & (\bar{\omega}^2\delta_{i1}\phi_{i1} - \phi_{i1}D_0^2\delta_{i1} - \delta_{i1}D_0^2\phi_{i1} - 2\delta_{i0}D_0D_1\phi_{i1} \\ & - 2D_0\delta_{i1}D_0\phi_{i1} - 2\bar{\omega}D_0\delta_{i1} + 2\delta_{i0}\phi_{i1}\bar{\omega}D_0\phi_{i1})\sin\phi_{i0}] + \\ & 2D_0D_1x_1 + 2\zeta_x D_1x_1 - 2\bar{\omega}D_1y_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & D_0^2y_2 + 2\zeta_y D_0y_2 + (\sigma - \bar{\omega}^2)y_2 + 2\bar{\omega}D_0x_2 + \\ & 2\zeta_x \bar{\omega}x_2 + \bar{m}\sum_{i=1}^2 [(D_0^2\delta_{i2} - 2\delta_{i0}\bar{\omega}D_0\phi_{i2} - \bar{\omega}^2\delta_{i2})\sin\phi_{i0} \\ & + (\delta_{i0}\bar{\omega}^2\phi_{i2} + \delta_{i0}D_0^2\phi_{i2} + 2\bar{\omega}D_0\delta_{i2})\cos\phi_{i0}] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{m}\sum_{i=1}^2 [(2D_0D_1\delta_{i1} - \delta_{i0}\phi_{i1}D_0^2\phi_{i1} - 2\delta_{i1}\bar{\omega}D_0\phi_{i1} \\ & - 2\bar{\omega}\delta_{i0}D_1\phi_{i1} - \delta_{i0}(D_0\phi_{i1})^2 - 2\phi_{i1}\bar{\omega}D_0\delta_{i1})\sin\phi_{i0} + \\ & (\delta_{i1}D_0^2\phi_{i1} - \bar{\omega}^2\delta_{i1}\phi_{i1} + \phi_{i1}D_0^2\delta_{i1} + 2\delta_{i0}D_0D_1\phi_{i1} \\ & + 2D_0\delta_{i1}D_0\phi_{i1} + 2\bar{\omega}D_0\delta_{i1} - 2\delta_{i0}\phi_{i1}\bar{\omega}D_0\phi_{i1})\cos\phi_{i0}] + \\ & 2D_0D_1y_1 + 2\zeta_y D_1y_1 + 2\bar{\omega}D_1x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 : & \bar{m}\left[ (\delta_{i0}D_0^2y_2 + 2\delta_{i0}\bar{\omega}D_0x_2 - \delta_{i0}\bar{\omega}^2y_2 - \right. \\ & \left. \bar{\omega}^2\delta_{i0}x_0\phi_{i2} - \delta_{i2}\bar{\omega}^2y_0)\cos\phi_{i0} + (2\delta_{i0}\bar{\omega}D_0y_2 - \delta_{i0}D_0^2x_2 \right. \\ & \left. + \delta_{i0}\bar{\omega}^2x_2 + \bar{\omega}^2\delta_{i0}y_0\phi_{i2} + \delta_{i2}\bar{\omega}^2x_0)\sin\phi_{i0} + \delta_{i0}^2D_0^2\phi_{i2} \right] + \\ & 2\beta\delta_{i0}^2\bar{m}D_0\phi_{i2} + 2\delta_{i0}\bar{\omega}\bar{m}D_0\delta_{i2} \\ & + \bar{m}\left[ (\delta_{i1}D_0^2y_1 + 2\delta_{i0}\bar{\omega}D_1x_1 - \delta_{i1}\bar{\omega}^2y_1 + \right. \\ & \left. \bar{\omega}^2x_0\delta_{i1}\phi_{i1} + \bar{\omega}^2\phi_{i1}\delta_{i0}x_1 + 2\delta_{i0}\phi_{i1}\bar{\omega}D_0y_1 - \phi_{i1}\delta_{i0}D_0^2x_1 \right. \\ & \left. + 2\delta_{i1}\bar{\omega}D_0x_1 + 2\delta_{i0}D_0D_1y_1)\cos\phi_{i0} - (\delta_{i0}\phi_{i1}D_0^2y_1 - \right. \\ & \left. \bar{\omega}^2\phi_{i1}\delta_{i0}y_1 - 2\delta_{i1}\bar{\omega}D_0y_1 + \delta_{i1}D_0^2x_1 - \bar{\omega}^2y_0\delta_{i1}\phi_{i1} \right. \\ & \left. + 2\bar{\omega}\phi_{i1}\delta_{i0}D_0x_1 - \bar{\omega}^2\delta_{i1}x_1 - 2\delta_{i0}\bar{\omega}D_1y_1 \right. \\ & \left. + 2\delta_{i0}D_0D_1x_1)\sin\phi_{i0} \right] + \\ & + 2\delta_{i0}\delta_{i1}D_0^2\phi_{i1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \eta\bar{m}q_i(\phi_i) + 2\bar{m}\delta_{i0}^2D_0D_1\phi_{i1} \\ & + 4\beta\delta_{i0}\delta_{i1}\bar{m}D_0\phi_{i1} + 2\beta\delta_{i0}^2\bar{m}D_1\phi_{i1} + 2\delta_{i0}\bar{\omega}\bar{m}D_1\delta_{i1} + \\ & 2\bar{m}\delta_{i0}D_0\delta_{i1}D_0\phi_{i1} + 2\bar{m}\bar{\omega}\delta_{i1}D_0\delta_{i1} = 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{m}\left[ (D_0^2x_2 + \bar{\omega}^2y_0\phi_{i2} - \bar{\omega}^2x_2 - 2\bar{\omega}D_0y_2)\cos\phi_{i0} \right. \\ & \left. + (\bar{\omega}^2x_0\phi_{i2} - \bar{\omega}^2y_2 + 2\bar{\omega}D_0x_2 + D_0^2y_2)\sin\phi_{i0} \right] \\ & + 2\beta\bar{m}D_0\delta_{i2} - 2\delta_{i0}\bar{\omega}\bar{m}D_0\phi_{i2} + \bar{m}\bar{\delta}_{i2}(f^2 - \bar{\omega}^2) \\ & + \bar{m}D_0^2\delta_{i2} + \bar{m}\left[ (2D_0D_1x_1 - \bar{\omega}^2\phi_{i1}y_1 + \phi_{i1}D_0^2y_1 \right. \\ & \left. + 2\phi_{i1}\bar{\omega}D_0x_1 - 2\bar{\omega}D_1y_1)\cos\phi_{i0} + \right. \\ & \left. (2\phi_{i1}\bar{\omega}D_0y_1 + \bar{\omega}^2\phi_{i1}x_1 + 2D_0D_1y_1 - \phi_{i1}D_0^2x_1 + 2\bar{\omega}D_1x_1)\sin\phi_{i0} \right] \\ & + 2\beta\bar{m}D_1\delta_{i1} + 2\bar{m}D_0D_1\delta_{i1} - 2\delta_{i0}\bar{\omega}\bar{m}D_1\phi_{i1} \\ & - 2\bar{m}\bar{\omega}\delta_{i1}D_0\phi_{i1} - \bar{m}\delta_{i0}(D_0\phi_{i1})^2 = 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

در معادلات (۱۹) نقاط  $\delta_{i0}$  و  $\phi_{i0}$ ،  $y_0$ ،  $x_0$  نشانگر نقطه

تعادل سیستم بوده و مقدار آن‌ها ثابت و مشتق آن‌ها برابر صفر است.

پس از استخراج جملات هم‌مرتبه از  $\varepsilon$  برای بدست آوردن نقاط

تعادل سیستم با بیان  $x_0$  و  $y_0$  به صورت قطبی  $x_0 = r_0 \cos\theta_0$  و

$y_0 = r_0 \sin\theta_0$  که  $r_0$  نشانگر دامنه ارتعاشات روتور در حالت

$$\begin{aligned} \bar{x}(\tau; \varepsilon) &= x_0 + \varepsilon x_1(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, \dots) + \dots \\ \bar{y}(\tau; \varepsilon) &= y_0 + \varepsilon y_1(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 y_2(T_0, T_1, \dots) + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

$$\phi_i(\tau; \varepsilon) = \phi_{i0} + \varepsilon\phi_{i1}(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2\phi_{i2}(T_0, T_1, \dots) + \dots$$

$$\bar{\delta}_i(\tau; \varepsilon) = \delta_{i0} + \varepsilon\delta_{i1}(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2\delta_{i2}(T_0, T_1, \dots) + \dots$$

با در نظر گرفتن سه جمله از روابط (۱۸) و جایگذاری آن‌ها در معادلات (۱۴) تا (۱۷)، و از مساوی هم قرار دادن ضرایب جملات هم مرتبه از  $\varepsilon$ ، دستگاه معادلات دیفرانسیل مربوط به مرتبه‌های  $\varepsilon^0$ ،  $\varepsilon^1$  و  $\varepsilon^2$  به ترتیب مطابق روابط (۱۹) تا (۲۱) به دست می‌آید:

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} (1 - \bar{\omega}^2)x_0 - 2\zeta_x \bar{\omega}y_0 - (1 - \bar{m})e\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}^2\bar{m}\sum_{i=1}^n (\delta_{i0}\cos\phi_{i0}) = 0 \\ (\sigma - \bar{\omega}^2)y_0 - \bar{\omega}^2\bar{m}\sum_{i=1}^n (\delta_{i0}\sin\phi_{i0}) + 2\zeta_y \bar{\omega}x_0 = 0 \\ \bar{\omega}^2\bar{m}\delta_{i0}(x_0\sin\phi_{i0} - y_0\cos\phi_{i0}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \bar{m}\left[ (f^2 - \bar{\omega}^2)(\delta_{i0} - 1) - \bar{\omega}^2(x_0\cos\phi_{i0} + y_0\sin\phi_{i0}) \right] = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & D_0^2x_1 + 2\zeta_x D_0x_1 + (1 - \bar{\omega}^2)x_1 - 2\bar{\omega}D_0y_1 - 2\zeta_x \bar{\omega}y_1 + \\ & \bar{m}\sum_{i=1}^2 [(D_0^2\delta_{i1} - 2\delta_{i0}\bar{\omega}D_0\phi_{i1} - \bar{\omega}^2\delta_{i1})\cos\phi_{i0} \\ & + (\delta_{i0}\bar{\omega}^2\phi_{i1} - \delta_{i0}D_0^2\phi_{i1} - 2\bar{\omega}D_0\delta_{i1})\sin\phi_{i0}] = 0 \\ & D_0^2y_1 + 2\zeta_y D_0y_1 + (\sigma - \bar{\omega}^2)y_1 + 2\bar{\omega}D_0x_1 + 2\zeta_y \bar{\omega}x_1 + \\ & \bar{m}\sum_{i=1}^2 [(D_0^2\delta_{i1} - 2\delta_{i0}\bar{\omega}D_0\phi_{i1} - \bar{\omega}^2\delta_{i1})\sin\phi_{i0} \\ & + (\delta_{i0}D_0^2\phi_{i1} - \delta_{i0}\bar{\omega}^2\phi_{i1} + 2\bar{\omega}D_0\delta_{i1})\cos\phi_{i0}] = 0 \\ \varepsilon^1 : & \bar{m}\left[ (\delta_{i0}D_0^2y_1 + 2\delta_{i0}\bar{\omega}D_0x_1 - \delta_{i0}\bar{\omega}^2y_1 + \right. \\ & \left. \bar{\omega}^2\delta_{i0}x_0\phi_{i1} - \delta_{i1}\bar{\omega}^2y_0\phi_{i1})\cos\phi_{i0} + \right. \\ & \left. (2\delta_{i0}\bar{\omega}D_0y_1 - \delta_{i0}D_0^2x_1 + \delta_{i0}\bar{\omega}^2x_1 \right. \\ & \left. + \bar{\omega}^2\delta_{i0}y_0\phi_{i1} + \delta_{i1}\bar{\omega}^2x_0)\sin\phi_{i0} + \delta_{i0}^2D_0^2\phi_{i1} \right] + \\ & 2\beta\delta_{i0}^2\bar{m}D_0\phi_{i1} + 2\delta_{i0}\bar{\omega}\bar{m}D_0\delta_{i1} + \eta\bar{m}q_i(\phi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \bar{m}\left[ (D_0^2x_1 - \bar{\omega}^2\phi_{i1}y_0 - \bar{\omega}^2x_1 - 2\bar{\omega}D_0y_1)\cos\phi_{i0} + \right. \\ & \left. (D_0^2y_1 + \bar{\omega}^2\phi_{i1}x_0 - \bar{\omega}^2y_1 + 2\bar{\omega}D_0x_1)\sin\phi_{i0} \right. \\ & \left. + 2\beta\bar{m}D_0\delta_{i1} + \bar{m}D_0^2\delta_{i1} - 2\delta_{i0}\bar{\omega}\bar{m}D_0\phi_{i1} + \right. \\ & \left. \bar{m}\bar{\delta}_{i1}(f^2 - \bar{\omega}^2) = 0, \quad i = 1, \dots, n \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & D_0^2x_2 + 2\zeta_x D_0x_2 + (1 - \bar{\omega}^2)x_2 - 2\bar{\omega}D_0y_2 - 2\zeta_x \bar{\omega}y_2 + \\ & \bar{m}\sum_{i=1}^2 [(D_0^2\delta_{i2} - 2\delta_{i0}\bar{\omega}D_0\phi_{i2} - \bar{\omega}^2\delta_{i2})\cos\phi_{i0} \\ & + (\delta_{i0}\bar{\omega}^2\phi_{i2} - \delta_{i0}D_0^2\phi_{i2} - 2\bar{\omega}D_0\delta_{i2})\sin\phi_{i0}] + \\ & \bar{m}\sum_{i=1}^2 [(2D_0D_1\delta_{i1} - \delta_{i0}\phi_{i1}D_0^2\phi_{i1} - 2\delta_{i1}\bar{\omega}D_0\phi_{i1} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1(T_1)c_{1j}e^{\lambda_j T_0} + cc \quad \dot{x}_1 = C_2(T_1)c_{2j}e^{\lambda_j T_0} + cc \\ \phi_{11} &= C_3(T_1)c_{3j}e^{\lambda_j T_0} + cc \quad \phi_{21} = C_4(T_1)c_{4j}e^{\lambda_j T_0} + cc \\ \delta_{11} &= C_5(T_1)c_{5j}e^{\lambda_j T_0} + cc \quad \delta_{21} = C_6(T_1)c_{6j}e^{\lambda_j T_0} + cc \end{aligned} \quad (31)$$

که در آن  $\lambda_j, j=1,2,\dots,6$  و  $C_{ij}$  به ترتیب مقادیر و المان‌های بردارهای ویژه سیستم است که از ماتریس  $\mathbf{A}$  به دست آمده‌اند. برای استخراج پاسخ سیستم لازم است  $C_i(T_1)$  استخراج گردد. جمله دوم پاسخ، به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= b_{1j}e^{\lambda_j T_0} + cc \quad y_2 = b_{2j}e^{\lambda_j T_0} + cc \\ \phi_{12} &= b_{3j}e^{\lambda_j T_0} + cc \quad \phi_{22} = b_{4j}e^{\lambda_j T_0} + cc \\ \delta_{12} &= b_{5j}e^{\lambda_j T_0} + cc \quad \delta_{22} = b_{6j}e^{\lambda_j T_0} + cc \end{aligned} \quad (32)$$

با جایگذاری معادلات (۳۱) و (۳۲) در معادلات مربوط به ضرایب  $\mathcal{E}^2$  و انجام عملیات مفصل ریاضی مشخص می‌شود که  $\frac{dC_i(T_1)}{dT_1} = 0$  که به دلیل مفصل بودن روابط از آوردن آن‌ها خودداری شده است. پس برای به دست آوردن جواب نهایی لازم است ثابت  $C_i$  با اعمال شرایط اولیه محاسبه شود. بدین منظور با در نظر گرفتن دو جمله اول از روابط (۱۸) و در  $t=0$  داریم:

$$\mathcal{E}\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{X}(0) - \mathbf{X}_0) \quad (33)$$

که در آن  $\mathbf{B}$  ماتریسی بر حسب  $\lambda_i$  و  $C_{ij}$  است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} \quad (34)$$

که  $M_{ij} = C_{ij}$  و  $N_{ij} = \lambda_i C_{ij}$  می‌باشد. بدین ترتیب ثابت  $C_i$  به دست می‌آیند، و در نهایت پاسخ سیستم استخراج می‌گردد. با استفاده از روش توضیح داده شده در این بخش پاسخ ارتعاشی سیستم با در نظر گرفتن دو جمله از رابطه (۱۸) به دست آمد. به منظور اطمینان از دقت روش حل نیمه‌تحلیلی و برای صحت‌سنجی نتایج، پاسخ‌های زمانی معادلات غیرخطی حرکت به روش رانگ- کوتا نیز استخراج شد. شکل ۲ و ۳ به ترتیب مولفه  $x$  و  $y$  پاسخ زمانی ارتعاش روتور نابالانس را به ازای پارامترهای ارائه شده در جدول ۱ نشان می‌دهد. همان‌طور از این شکل‌ها مشاهده می‌شود، پاسخ بدست آمده از روش مقیاس‌های چندگانه انطباق مناسبی با پاسخ به دست آمده از روش رانگ کوتا دارد.

بعد از اطمینان از صحت نتایج حاصل از روش مقیاس‌های

پایا می‌باشد، و با جایگذاری آن‌ها در روابط (۱۹)، روابط (۲۲) تا (۲۵) بدست می‌آید:

$$(1 - \bar{\omega}^2)r_0 \cos \theta_0 - 2\zeta_x \bar{\omega} r_0 \sin \theta_0 - (1 - \bar{m})e\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}^2 \bar{m} \sum_{i=1}^n (\delta_{i0} \cos \phi_{i0}) = 0 \quad (22)$$

$$(\sigma - \bar{\omega}^2)r_0 \sin \theta_0 + 2\zeta_y \bar{\omega} r_0 \cos \theta_0 - \bar{\omega}^2 \bar{m} \sum_{i=1}^n (\delta_{i0} \sin \phi_{i0}) = 0 \quad (23)$$

$$\bar{\omega}^2 \bar{m} \delta_{i0} r_0 \sin(\phi_{i0} - \theta_0) = 0 \quad (24)$$

$$\bar{m} \left[ (f^2 - \bar{\omega}^2)(\delta_{i0} - 1) - \bar{\omega}^2 r_0 \cos(\phi_{i0} - \theta_0) \right] = 0 \quad (25)$$

براساس معادلات به دست آمده از روابط (۲۲) تا (۲۵) می‌توان وضعیت‌های تعادل سیستم را برای دو مقدار  $r_0 = 0$  و  $r_0 \neq 0$  استخراج کرد. با توجه به اهمیت حالت بالانس، در این‌جا فقط وضعیت بالانس مورد بررسی قرار می‌گیرد. در حالت بالانس، معادلات (۲۲) تا (۲۵) سه معادله (۲۶) تا (۲۸) حاصل می‌شود:

$$\sum_{i=1}^n (\delta_{i0} \cos \phi_{i0}) + \frac{(1 - \bar{m})e}{\bar{m}} = 0 \quad (26)$$

$$\sum_{i=1}^n \sin \phi_{i0} = 0 \quad (27)$$

$$\delta_{i0} = 1 \quad (28)$$

با در نظر گرفتن دو ساچمه، و با توجه به همگن بودن معادلات (۲۰)، پاسخ معادلات مذکور به صورت نمایی و مطابق روابط (۲۹) در نظر گرفته می‌شود:

$$x_1 = c_1 e^{\lambda T_0} \dot{x} \quad y_1 = c_2 e^{\lambda T_0} \quad (29)$$

$$\phi_{11} = c_3 e^{\lambda T_0} \quad \phi_{21} = c_4 e^{\lambda T_0}$$

$$\delta_{11} = c_5 e^{\lambda T_0} \quad \delta_{21} = c_6 e^{\lambda T_0}$$

که با جایگذاری در معادلات داریم:

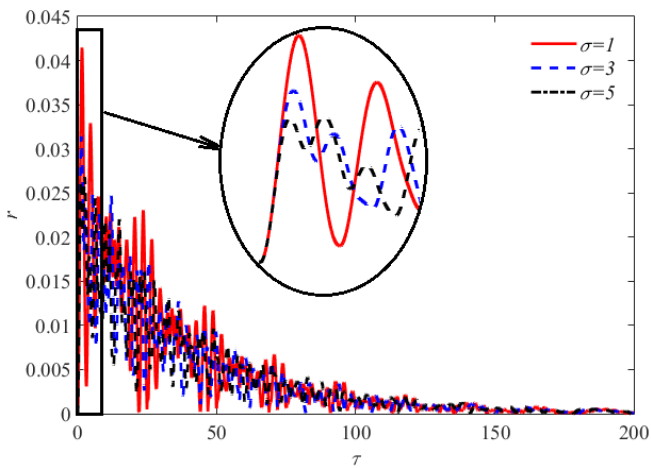
$$[\mathbf{A}]_{6 \times 6} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = 0 \quad (30)$$

که در آن  $\mathbf{A}$  ماتریس مربعی است که جهت رعایت اختصار، از آوردن آن خودداری شده است. شرط وجود جواب غیربدیهی برای  $C_i$  ها در دستگاه معادلات (۳۰)، صفر بودن دترمینان ماتریس ضرایب می‌باشد. به این ترتیب پاسخ زمانی سیستم روتور و اتوبالانس با دو ساچمه را می‌توان به صورت رابطه (۳۱) در نظر گرفت:

جدول ۱: مقادیر پارامترهای سیستم [22]

Table 1: Values of the system parameters [22]

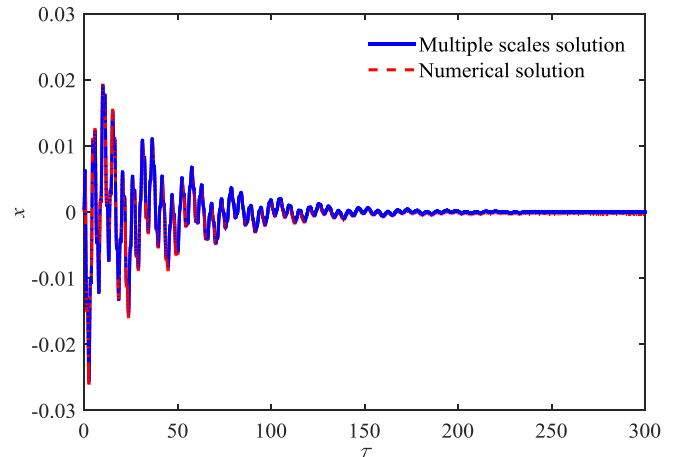
اندازه	پارامتر
۰/۰۲	$\bar{m}$
۰/۰۱	$\zeta_x$
۰/۰۵	$\zeta_y$
۰/۰۱	$e$
۰/۱	$\beta$
۵	$\sigma$
۳	$\bar{\omega}$
۴	$f$



شکل ۴: پاسخ زمانی روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر در ناهمگنی‌های مختلف یاتاقان به ازای پارامترهای  $\bar{m}=0.02$ ,  $\zeta_x=0.01$ ,  $\zeta_y=0.05$ ,  $e=0.01$ ,  $\beta=0.1$ ,  $\bar{\omega}=3$ ,  $\eta=0.004$  و  $f=4$

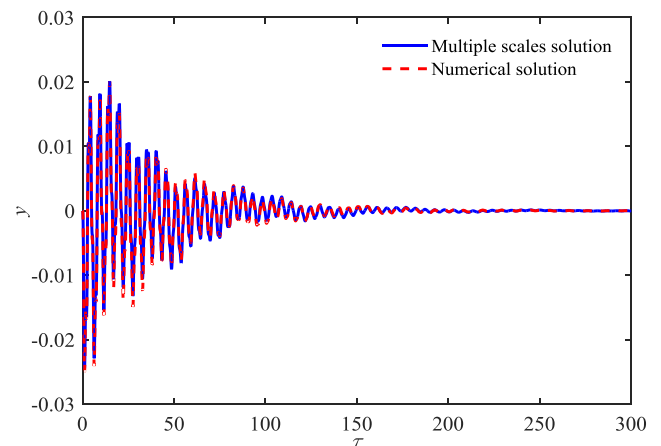
Fig. 4: Vibration response of the rotor with ball-spring AB for three different values of anisotropic parameters for  $\bar{m}=0.02$ ,  $\zeta_x=0.01$ ,  $\zeta_y=0.05$ ,  $e=0.01$ ,  $\beta=0.1$ ,  $\bar{\omega}=3$ ,  $\eta=0.004$  and  $f=4$

یاتاقان‌ها باز قادر به بالانس روتور است. همانطور که در قسمت بزرگنمایی شده مشاهده می‌شود، مطابق انتظار با افزایش سفتی در راستای  $y$  دامنه کاهش پیدا می‌کند. عملکرد اتوبالانسر ساچمه- فنر نسبت به نابالانسی متغیر به این طریق است که در اثر ایجاد نابالانسی ساچمه‌ها در اثر نیروی مماسی و شعاعی ناشی از نیروی گریز از مرکز در دوره‌های بالای دور بحرانی اول در خلاف جهت نابالانسی حرکت کرده و با رسیدن به موقعیت تعادل خود، باعث رفع نابالانسی و ارتعاشات می‌گردد.



شکل ۲: مقایسه پاسخ‌های زمانی روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر استخراج شده با روش تحلیلی مورد استفاده در این مقاله با روش عددی به ازای پارامترهای  $\bar{m}=0.02$ ,  $\zeta_x=0.01$ ,  $\zeta_y=0.05$ ,  $e=0.01$ ,  $\beta=0.1$ ,  $\sigma=5$ ,  $\bar{\omega}=3$ ,  $\eta=0.004$  و  $f=4$

Fig. 2: The time response of a rotor equipped with a ball-spring AB extracted by the analytical method and the numerical method for  $\bar{m}=0.02$ ,  $\zeta_x=0.01$ ,  $\zeta_y=0.05$ ,  $e=0.01$ ,  $\beta=0.1$ ,  $\sigma=5$ ,  $\bar{\omega}=3$ ,  $\eta=0.004$  and  $f=4$



شکل ۳: مقایسه پاسخ‌های زمانی روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر استخراج شده با روش تحلیلی مورد استفاده در این مقاله با روش عددی به ازای پارامترهای  $\bar{m}=0.02$ ,  $\zeta_x=0.01$ ,  $\zeta_y=0.05$ ,  $e=0.01$ ,  $\beta=0.1$ ,  $\sigma=5$ ,  $\bar{\omega}=3$ ,  $\eta=0.004$  و  $f=4$

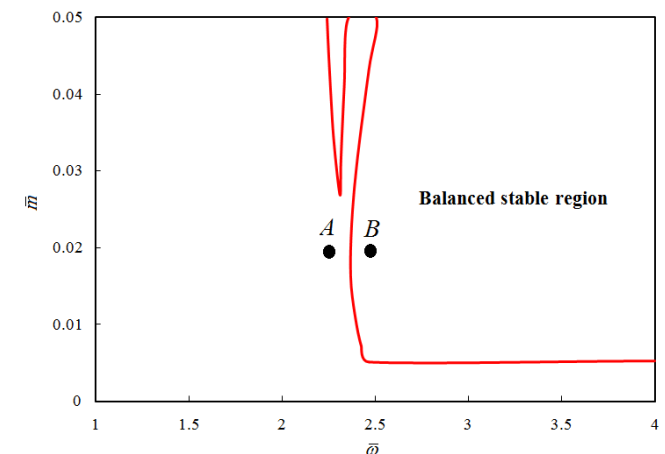
Fig. 3: The time response of a rotor equipped with a ball-spring AB extracted by the analytical method and the numerical method for  $\bar{m}=0.02$ ,  $\zeta_x=0.01$ ,  $\zeta_y=0.05$ ,  $e=0.01$ ,  $\beta=0.1$ ,  $\sigma=5$ ,  $\bar{\omega}=3$ ,  $\eta=0.004$  and  $f=4$

چندگانه، در ادامه به بررسی تاثیر پارامتر غیرهمگنی یاتاقان‌ها بر روی پاسخ ارتعاشی سیستم پرداخته می‌شود. همانطور که از شکل ۴ مشاهده می‌شود، اتوبالانسر ساچمه- فنر به ازای افزایش ناهمگنی

#### ۴- بررسی پایداری سیستم

برای بررسی پایداری سیستم‌های غیرخطی حول نقاط تعادل سیستم با معادلات پیچیده همانند سیستم غیرخطی مورد مطالعه، غالباً از خطی‌سازی معادلات حول نقاط تعادل استفاده می‌شود. بنابراین در این مقاله با در نظر گرفتن دو جمله از بسط روش مقیاس‌های چندگانه، معادلات غیرخطی حول نقاط تعادل سیستم خطی‌سازی شده و ماتریس  $\mathbf{A}$  به دست آمده است. سپس دترمینان ماتریس  $\mathbf{A}$  استخراج و با صفر قرار دادن آن معادله مشخصه سیستم به دست می‌آید. به این ترتیب با حل معادله مشخصه  $\lambda$ ها به دست می‌آید. هنگامی که همه  $\lambda$ ها دارای قسمت حقیقی منفی باشند، سیستم به صورت مجانبی پایدار است. اگر حداقل یکی از  $\lambda$ ها دارای قسمت حقیقی مثبت باشد، سیستم ناپایدار است. پس با استفاده از ماتریس  $\mathbf{A}$  ناحیه بالانس پایدار برای سیستم قابل استخراج است. با توجه به اینکه نواحی پایدار بر حسب تمامی پارامترها را نمی‌توان در یک نمودار واحد نشان داد لذا نواحی پایدار برای دو به دوی پارامتر رسم می‌شود.

در شکل ۵ نواحی پایدار روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر بر حسب پارامترهای  $\bar{m}$  و  $\bar{\omega}$  به ازای  $\zeta_x = 0.01$ ،  $\zeta_y = 0.05$ ،  $e = 0.01$ ،  $\beta = 0.1$ ،  $\sigma = 5$ ،  $\eta = 0.004$  و  $f = 4$  نشان داده

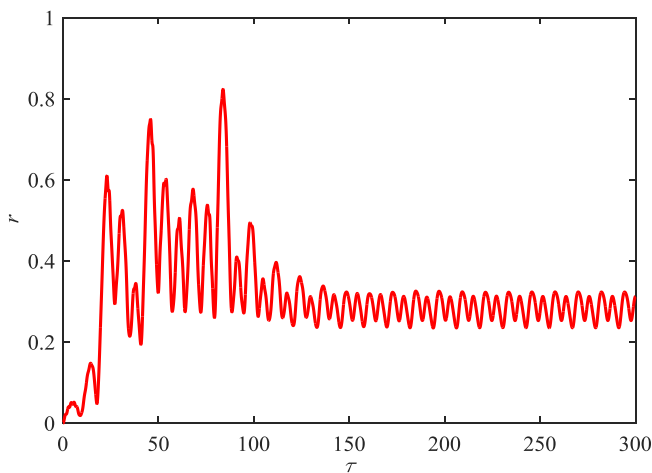


شکل ۵: محدوده بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر: تغییرات  $\bar{m}$  در مقابل  $\bar{\omega}$  به ازای  $\zeta_x = 0.01$ ،  $\zeta_y = 0.05$ ،  $e = 0.01$ ،  $\beta = 0.1$ ،  $\sigma = 5$ ،  $\eta = 0.004$  و  $f = 4$

Fig.5: Balanced stable region of the rotor with ball-spring AB: variation of  $\bar{m}$  versus  $\bar{\omega}$  for  $\zeta_x = 0.01$ ،  $\zeta_y = 0.05$ ،  $e = 0.01$ ،  $\beta = 0.1$ ،  $\eta = 0.004$ ،  $\sigma = 5$  and  $f = 4$ .

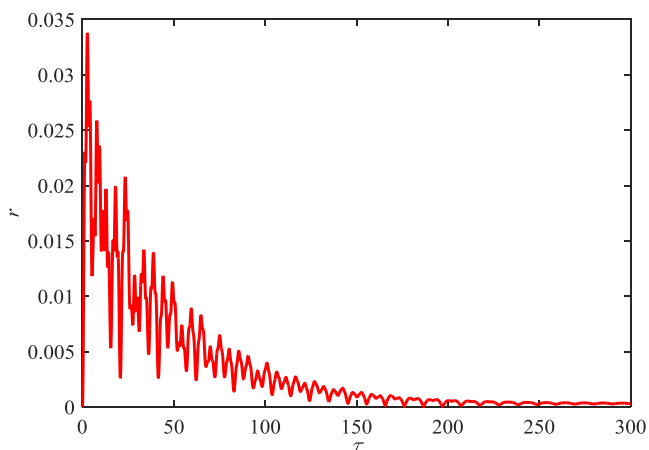
شده است. همان‌طور که از شکل ۵ مشاهده می‌شود، اتوبالانسر ساچمه- فنر به ازای محدوده خاصی از پارامترها قادر است روتور نابالانس با یاتاقان‌های غیرهمگن را بالانس کند.

به منظور صحت‌سنجی نتایج پایداری، در ادامه پاسخ‌های زمانی مربوط به روتور مجهز به اتوبالانسر جدید به ازای  $\bar{m} = 0.2$ ،  $\zeta_x = 0.01$ ،  $\zeta_y = 0.05$ ،  $e = 0.01$ ،  $\beta = 0.1$ ،  $\sigma = 5$ ،  $\eta = 0.004$  و  $f = 4$  در دو حالت الف)  $\bar{\omega} = 2/3$  (ب)  $\bar{\omega} = 2/5$  به دست آمده است. دو حالت اخیر در شکل ۵ به ترتیب توسط نقاط  $A$  و  $B$  مشخص شده است. همان‌طور که از این شکل مشاهده می‌شود در حالت الف) اتوبالانسر



شکل ۶: پاسخ زمانی روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر به ازای  $\bar{\omega} = 2/3$

Fig. 6: The time response of a rotor equipped with a ball-spring AB for  $\bar{\omega} = 2.3$



شکل ۷: پاسخ زمانی روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر به ازای  $\bar{\omega} = 2/5$

Fig.7: The time response of a rotor equipped with a ball-spring AB for  $\bar{\omega} = 2.5$

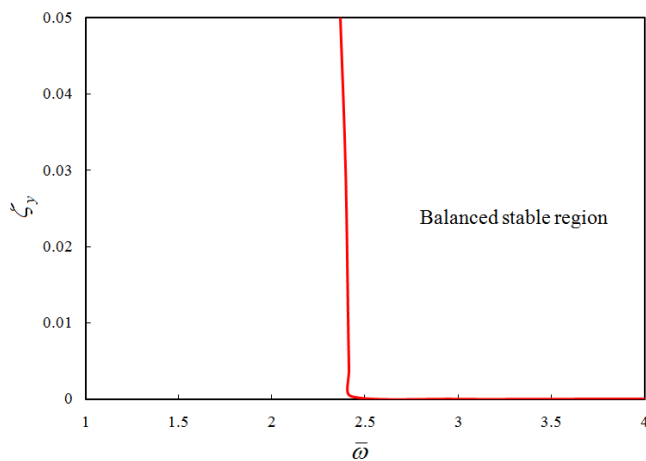


بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانس ساچمه- فنر به ازای سه مقدار مختلف  $\sigma$  آورده شده است. همانطور که از این شکل مشاهده می‌شود با افزایش پارامتر غیرهمگنی یاتاقان‌ها ناحیه بالانس پایدار سیستم کاهش می‌یابد. این امر اهمیت در نظر گرفتن ناهمگنی یاتاقان‌ها در بررسی رفتار روتور مجهز به اتوبالانس جدید را نشان می‌دهد. برای مثال، در حالت ایده‌آل، یاتاقان همگن، ممکن است نتایج در محدوده خاصی از پارامترهای سیستم حاکی از توانایی اتوبالانس ساچمه- فنر برای بالانس روتور باشد در حالی که با در نظر گرفتن حالت واقع‌بینانه، یعنی یاتاقان‌های غیرهمگن، اتوبالانس ساچمه- فنر قادر به بالانس سیستم نباشد.

همچنین در ادامه به بررسی رفتار دینامیکی و پایداری سیستم بر حسب تابع زمان پرداخته می‌شود. در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ تراجکتوری فاز- زمان و صفحه فاز در دو راستای  $x$  و  $y$  آورده شده است. در شکل‌های ۱۲-الف و ۱۲-ب تراجکتوری فاز- زمان به ازای دو سرعت زاویه‌ای  $\omega = 2/8$  و  $\omega = 2/3$  در راستای  $x$  رسم شده است. همانطور که از شکل ۱۲-الف مشاهده می‌شود در  $\omega = 2/8$  دامنه ارتعاشی روتور مجهز به اتوبالانس ساچمه- فنر بعد از مدتی به صفر میل می‌کند ولی در  $\omega = 2/3$  دامنه ارتعاشی سیستم مذکور صفر نمی‌شود (شکل ۱۲-ب). همچنین در شکل‌های ۱۲-ج و ۱۲-د صفحه فاز رسم شده است. همانطور که در این شکل‌ها مشاهده

قادر به بالانس روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن نبوده‌اند ولی در حالت (ب) اتوبالانس جدید قادر به بالانس سیستم است. در شکل‌های ۶ و ۷ پاسخ‌های زمانی متناظر با دو حالت ذکر شده رسم شده است. بررسی پاسخ‌های زمانی، صحت نتایج بدست آمده در شکل ۵ را تایید می‌کند. بعد از اطمینان از نتایج پایداری، ناحیه بالانس پایدار به ازای سایر پارامترها بی‌بعد سیستم استخراج گردید. همانطور که در شکل‌های ۸ تا ۱۰ مشاهده می‌شود اتوبالانس ساچمه- فنر به ازای محدوده خاصی از پارامترها قادر به بالانس روتور است. شکل ۸ محدوده بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانس بر حسب نسبت میرایی بالانس و سرعت دورانی بی‌بعد روتور را نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود اولاً به ازای دورهای بالاتر از دور بحرانی اول، اتوبالانس قادر است روتور را بالانس نماید، ثانیاً به ازای  $\beta = 0$  یعنی حالتی که نیروی ناشی از میرایی ویسکوز به ساچمه وارد نمی‌شود اتوبالانس توانایی بالانس سیستم را ندارد.

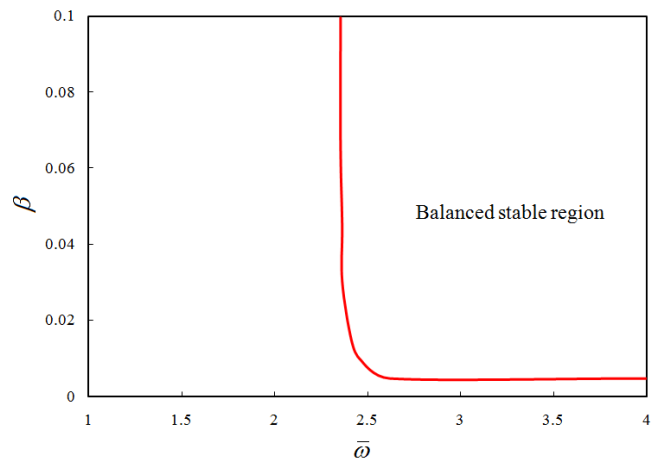
در شکل ۱۰ نواحی بالانس پایدار سیستم بر حسب پارامترهای  $e$  و  $\bar{\omega}$  نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل ۱۰ مشاهده می‌شود، اتوبالانس ساچمه- فنر به ازای جرم مشخصی از ساچمه‌ها قادر است روتور با مقدار ماکزیمم نابالانسی مشخصی را بالانس کند. در این قسمت به بررسی تاثیر پارامتر غیرهمگنی یاتاقان‌ها بر ناحیه بالانس پایدار سیستم پرداخته می‌شود. در شکل ۱۱ ناحیه



شکل ۹: محدوده بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانس ساچمه- فنر:

تغییرات  $\zeta_y$  در مقابل  $\bar{\omega}$  به ازای  $\bar{m}=0.02$ ,  $\zeta_x=0.01$ ,  $e=0.01$ ,  $\zeta_y=0.01$ ,  $\eta=0.004$ ,  $\sigma=5$ ,  $\beta=0.1$  و  $f=4$

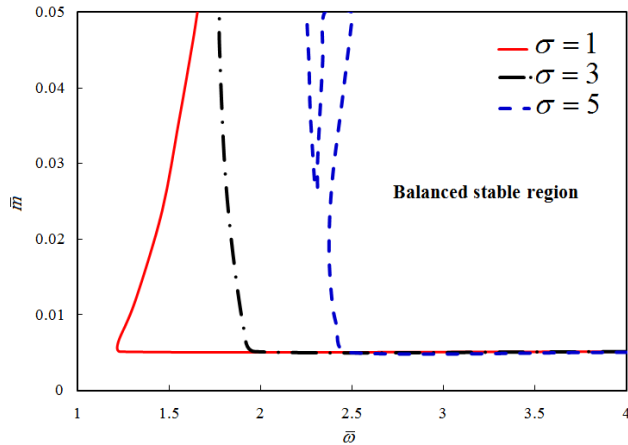
**Fig.9: Balanced stable region of the rotor with ball-spring AB: variation of  $\zeta_y$  versus  $\bar{\omega}$  for  $\bar{m}=0.02$ ,  $\zeta_x=0.01$ ,  $e=0.01$ ,  $\beta=0.1$ ,  $\eta=0.004$ ,  $\sigma=5$  and  $f=4$**



شکل ۸: محدوده بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانس ساچمه- فنر:

تغییرات  $\beta$  در مقابل  $\bar{\omega}$  به ازای  $\bar{m}=0.02$ ,  $\zeta_x=0.01$ ,  $\zeta_y=0.05$ ,  $e=0.01$ ,  $\eta=0.004$ ,  $\sigma=5$ ,  $\beta=0.1$  و  $f=4$

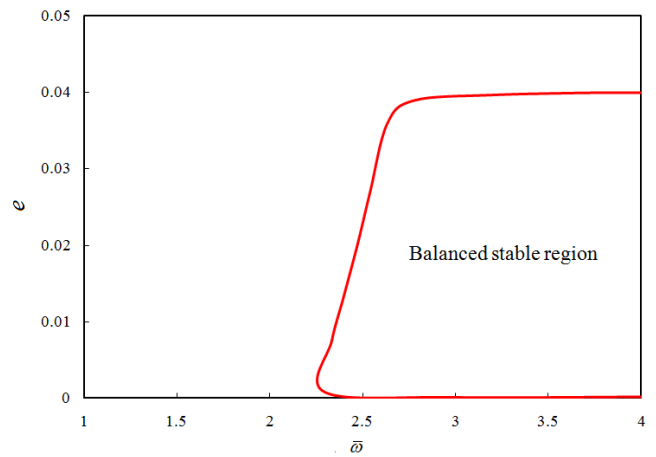
**Fig.8: Balanced stable region of the rotor with ball-spring AB: variation of  $\beta$  versus  $\bar{\omega}$  for  $\bar{m}=0.02$ ,  $\zeta_x=0.01$ ,  $\zeta_y=0.05$ ,  $e=0.01$ ,  $\eta=0.004$ ,  $\sigma=5$  and  $f=4$**



شکل ۱۱: محدوده بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر در ناهمگنی‌های مختلف یاتاقان: تغییرات  $\bar{m}$  در مقابل  $\bar{\omega}$  به ازای  $\zeta_x = 0.01$

$$f = 4 \text{ و } \eta = 0.004, \beta = 0.1, e = 0.01, \zeta_y = 0.05$$

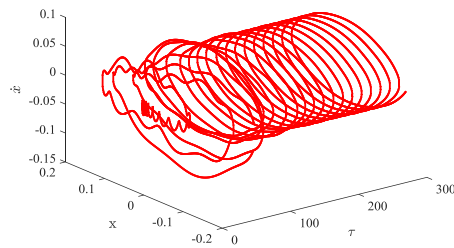
Fig. 11: Balanced stable region of the rotor with ball-spring AB for three different values of anisotropic parameter for  $\zeta_x = 0.01$ ,  $\zeta_y = 0.05$ ,  $e = 0.01$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\eta = 0.004$  and  $f = 4$



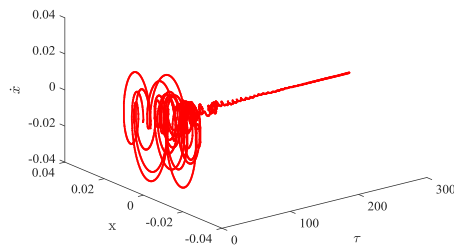
شکل ۱۰: محدوده بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر: تغییرات  $e$  در مقابل  $\bar{\omega}$  به ازای  $\bar{m} = 0.02$ ,  $\zeta_x = 0.01$

$$f = 4 \text{ و } \eta = 0.004, \sigma = 5, \beta = 0.1$$

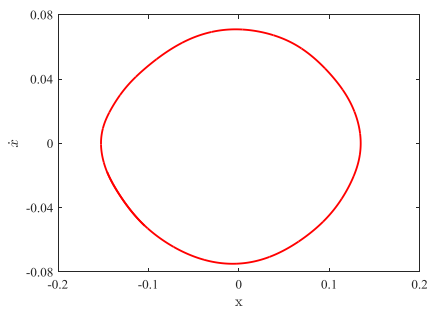
Fig. 10: Balanced stable region of the rotor with ball-spring AB: variation of  $e$  versus  $\bar{\omega}$  for  $\bar{m} = 0.02$ ,  $\zeta_x = 0.01$ ,  $\zeta_y = 0.05$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\eta = 0.004$ ,  $\sigma = 5$  and  $f = 4$



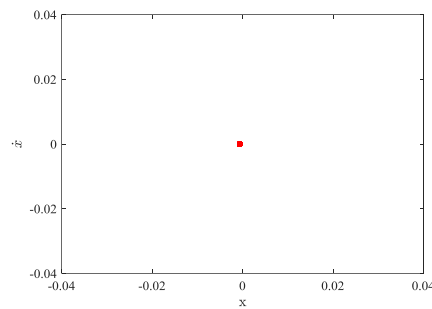
(ب)



(ف)



(د)



(ج)

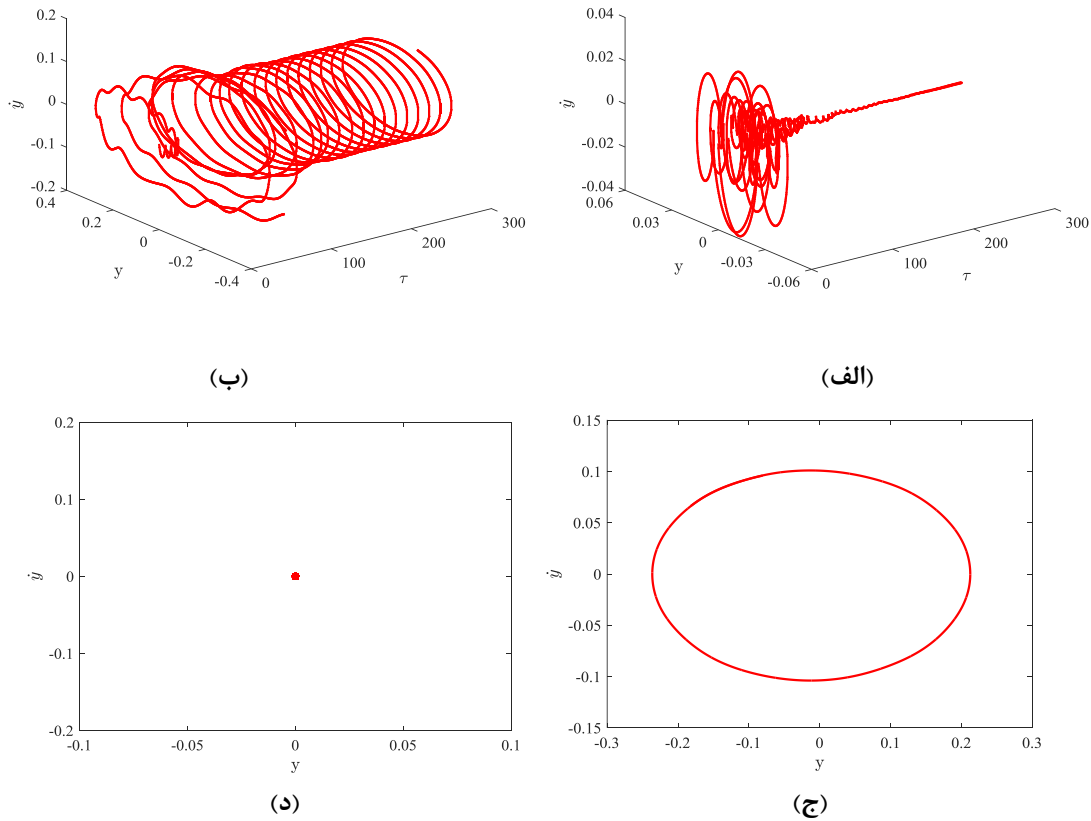
شکل ۱۲: تراجکتوری فاز- زمان و صفحه فاز برای روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر در راستای  $x$  به ازای  $\bar{m} = 0.01$ ,  $\zeta_x = 0.01$

$$f = 4 \text{ و } \eta = 0.004, \sigma = 5$$

Fig. 12: Phase-time trajectories and phase planes for the rotor with ball-spring AB for  $x$  direction for  $\bar{m} = 0.01$ ,  $\zeta_x = 0.01$ ,  $\zeta_y = 0.05$ ,  $e = 0.01$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\sigma = 5$ ,  $\eta = 0.004$  and  $f = 4$

در شکل‌های ۱۳-الف و ۱۳-ب تراجکتوری فاز- زمان به ازای دو سرعت زاویه‌ای  $\omega = 2/3$  و  $\omega = 2/8$  در راستای  $y$  رسم شده است. همانطور که از شکل‌ها مشاهده می‌شود سیستم رفتاری

می‌شود به ازای  $\omega = 2/8$  دامنه نوسانات نهایتاً به مقدار صفر میل می‌کند (شکل ۱۲-ج) در حالیکه به ازای  $\omega = 2/3$  دامنه نوسانات نهایتاً به یک مسیر بسته تبدیل می‌شود (شکل ۱۲-د).



شکل ۱۳: تراجکتوری فاز- زمان و صفحه فاز برای روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر در راستای  $y$  به ازای  $\bar{m}=0.01$ ،  $\zeta_x=0.01$ ،  $\zeta_y=0.05$ ،  $e=0.01$ ،  $\beta=0.1$ ،  $\sigma=5$ ،  $\eta=0.004$  و  $f=4$ .

Fig. 13: Phase-time trajectories and phase planes for the rotor with ball-spring AB for  $y$  direction for  $\bar{m}=0.01$ ،  $\zeta_x=0.01$ ،  $\zeta_y=0.05$ ،  $e=0.01$ ،  $\beta=0.1$ ،  $\sigma=5$ ،  $\eta=0.004$  and  $f=4$ .

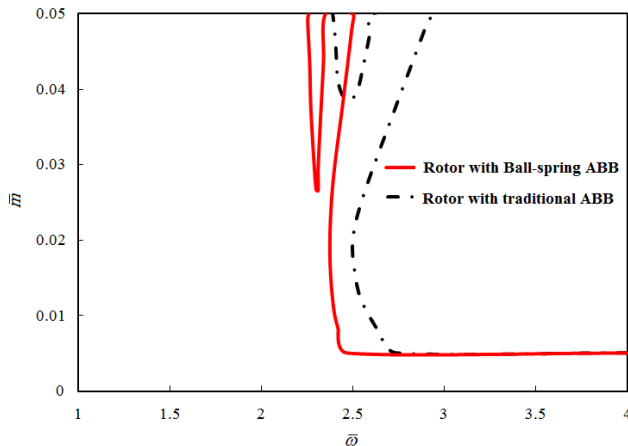
روتور مجهز به اتوبالانسر متداول کاهش یافته است، یعنی یاتاقان‌های غیرهمگن خللی بر اولین مزیت اتوبالانسر ساچمه- فنر یعنی کاهش دامنه ارتعاشی روتور در ناحیه گذرا وارد نمی‌کند. این مزیت ناشی از فنرهای محیطی در اتوبالانسر ساچمه- فنر می‌باشد. به طوری که در ناحیه گذرا وجود این فنرها سبب جلوگیری از همگرایی ساچمه‌ها به طرف نابالانسی شده و مانع افزایش دامنه سیستم در ناحیه گذرا می‌شوند.

همچنین برای بررسی دومین مزیت ادعایی برای اتوبالانسر ساچمه- فنر یعنی وسیع‌تر شدن ناحیه بالانس پایدار، این ناحیه برای روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر و روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن مجهز به اتوبالانسر متداول به ازای شرایط یکسان در شکل ۱۵ آورده شده است. همانطور که از این شکل مشاهده می‌شود، محدوده بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر نسبت به روتور مجهز به اتوبالانسر متداول بیشتر است.

مشابه رفتار در راستای  $x$  را دارد. بنابراین در سرعت  $\omega = 2/3$  اتوبالانسر قادر به بالانس روتور نبوده ولی در  $\omega = 2/8$  سیستم بالانس می‌شود. نتیجه حاصل از بررسی پایداری در صفحه فاز تایید کننده نتیجه پایداری حاصل از روش لیاپانوف است.

#### ۵- مقایسه نتایج اتوبالانسر ساچمه- فنر با اتوبالانسر متداول

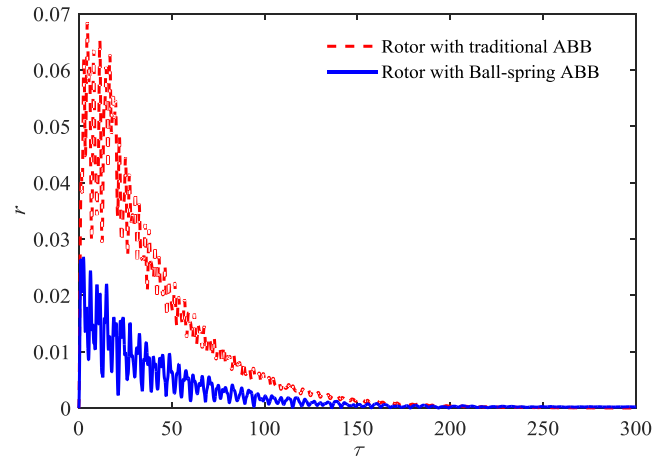
در این بخش برای نشان دادن اینکه مزیت‌های ادعایی اتوبالانسر جدید در حالت یاتاقان غیرهمگن پابرجاست، نتایج مربوط به روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با روتور مجهز به اتوبالانسر متداول مقایسه شده است. شکل ۱۴ پاسخ زمانی روتور در دو حالت نشان می‌دهد: الف- روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر ب- روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن مجهز به اتوبالانسر متداول. همان‌طور که از شکل ۱۴ مشاهده می‌شود پاسخ ارتعاشی در سیستم مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر در ناحیه گذرا نسبت به



شکل ۱۵: مقایسه محدوده بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با محدوده بالانس پایدار روتور مجهز به اتوبالانسر متداول:

تغییرات  $\bar{m}$  در مقابل  $\bar{\omega}$  به ازای  $\zeta_x = 0.01$ ،  $\zeta_y = 0.05$ ،  $e = 0.01$ ،  $\beta = 0.1$ ،  $\eta = 0.004$  و  $f = 4$

**Fig. 15: Balanced stable region of the rotor with ABB: variation of  $\bar{m}$  versus  $\bar{\omega}$  for  $\zeta_x = 0.01$ ,  $\zeta_y = 0.05$ ,  $e = 0.01$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\eta = 0.004$  and  $f = 4$ .**



شکل ۱۴: مقایسه پاسخ‌های زمانی روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با روتور مجهز به اتوبالانسر متداول به ازای پارامترهای  $\bar{m} = 0.02$

،  $\zeta_x = 0.01$ ،  $\zeta_y = 0.05$ ،  $e = 0.01$ ،  $\beta = 0.1$ ،  $\sigma = 5$ ،  $\bar{\omega} = 3$ ،  $\eta = 0.004$  و  $f = 4$

**Fig. 14: The time response of a rotor equipped with ABB for  $\bar{m} = 0.02$ ,  $\zeta_x = 0.01$ ,  $\zeta_y = 0.05$ ,  $e = 0.01$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\sigma = 5$ ,  $\bar{\omega} = 3$ ,  $\eta = 0.004$  and  $f = 4$**

- ۲- اتوبالانسر ساچمه- فنر قادر است روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن را در محدوده خاصی از پارامترهای سیستم، بالانس کند.
- ۳- ناحیه بالانس سیستم با افزایش پارامتر غیرهمگنی یاتاقان‌ها کاهش پیدا می‌کند.
- ۴- مقایسه پاسخ زمانی و ناحیه بالانس روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر با پاسخ زمانی و ناحیه بالانس روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن مجهز به اتوبالانسر متداول نشان داد که وجود اثر غیرهمگنی در یاتاقان‌ها خللی در دو مزیت ادعایی اتوبالانسر ساچمه- فنر، کاهش دامنه در ناحیه گذرا و افزایش ناحیه بالانس، ایجاد نمی‌کند.

### فهرست علائم

#### علائم انگلیسی

$C$	مرکز هندسی روتور
$e$	خروج از مرکزی بی‌بعد
$G$	مرکز جرم روتور
$J$	ممان اینرسی دیسک حول مرکز جرم، $\text{kg.m}^2$
$k_p$	سفتی فنرهای محیطی، $\text{N/m}^2$

این موضوع نشان می‌دهد که اتوبالانسر ساچمه- فنر توانایی بالانس روتور با محدوده وسیع‌تری از پارامترهای سیستم را دارد. دلیل وسیع بودن ناحیه بالانس پایدار اتوبالانسر ساچمه- فنر ناشی از فنرهای شعاعی می‌باشد. در اتوبالانسر نوع جدید برخلاف نوع متداول که ساچمه‌ها مقید به حرکت در مسیر دایره‌ای شکل هستند، ساچمه‌ها به دلیل متصل بودن به فنرهای شعاعی آزادی عمل بیشتری داشته که سبب افزایش ناحیه بالانس پایدار سیستم می‌شود.

### ۶- نتیجه‌گیری

یاتاقان‌ها یکی از اجزای تاثیرگذار بر رفتار دینامیکی سیستم‌های دوار هستند. عوامل متعددی باعث ایجاد غیرهمگنی در یاتاقان‌ها می‌شوند. در این مقاله برای اولین بار رفتار دینامیکی و پایداری روتور با یاتاقان‌های غیرهمگن مجهز به اتوبالانسر ساچمه- فنر مورد بررسی قرار گرفت. معادلات غیرخطی سیستم با استفاده از روش لاگرانژ استخراج و با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی مقیاس‌های چندگانه ناحیه بالانس پایدار و پاسخ ارتعاشی سیستم استخراج گردید. اهم نتایج تحقیق حاضر به شرح زیر می‌باشد:

- ۱- مقایسه نتایج حاصل از روش تحلیلی و روش عددی حاکی از دقت مطلوب روش مورد استفاده است.

- (1998) 453-466.
- [6] Thearle E. L, Automatic Dynamic Balancers, Machine Design, 22 (1950) 119-124.
- [7] Y. Jinnouchi, Y. Araki, J. Inoue, Y. Ohtsuka, C. Tan, Automatic balancer (static balancing and transient response of a multi-ball balancer), Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., Ser. C, 59(557) (1993) 79-84.
- [8] J. Chung, D. Ro, Dynamic analysis of an automatic dynamic balancer for rotating mechanisms, Journal of Sound and vibration, 228(5) (1999) 1035-1056.
- [9] J. Chung, I. Jang, Dynamic response and stability analysis of an automatic ball balancer for a flexible rotor, Journal of Sound and Vibration, 259(1) (2003) 31-43.
- [10] C.-J. Lu, M.-C. Wang, S.-H. Huang, Analytical study of the stability of a two-ball automatic balancer, Mechanical Systems and Signal Processing, 23(3) (2009) 884-896.
- [11] C.-J. Lu, C.-H. Hung, Stability analysis of a three-ball automatic balancer, Journal of Vibration and Acoustics, 130(5) (2008) 051008.
- [12] J. Ehyaei, M.M. Moghaddam, Dynamic response and stability analysis of an unbalanced flexible rotating shaft equipped with n automatic ball-balancers, Journal of Sound and Vibration, 321(3) (2009) 554-571.
- [13] T. Chan, C. Sung, P.C. Chao, Non-linear suspension of an automatic ball balancer, International Journal of Non-Linear Mechanics, 46(2) (2011) 415-424.
- [14] C. Sung, T. Chan, C. Chao, C. Lu, Influence of external excitations on ball positioning of an automatic balancer, Mechanism and Machine Theory, 69 (2013) 115-126.
- [15] B. Bykov, Auto-balancing of a rotor with an orthotropic elastic shaft, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 77(4) (2013) 369-379.
- [16] M. Rezaee, R. Fathi, The effect of damping ratio and balls mass on the stability of automatic ball balancer and determining their optimum values, 14(3) (2014) 110-118 (in Persian).
- [17] M. Rezaee, R. Fathi, A.M. Alizadeh Fard, Investigating the stability of automatic ball-balancer under the gyroscopic effect and optimization of its parameters using the Nelder-Mead simplex algorithm,

$k_r$  سفتی فنرهای شعاعی،  $N/m^2$

$k_x$  سفتی معادل روتور در راستای  $x$ ،  $N/m^2$

$k_y$  سفتی معادل روتور در راستای  $y$ ،  $N/m^2$

$m_d$  جرم روتور،  $kg$

$m_b$  جرم هر یک از ساچمه‌ها،  $kg$

$\bar{m}$  جرم بی‌بعد ساچمه‌ها

$n$  تعداد ساچمه‌ها

### علائم یونانی

$\beta$  نسبت میرایی بالانسر

$\bar{\delta}_i$  جابجایی بی‌بعد ساچمه‌ها در راستای شعاعی

$\sigma$  نسبت سفتی معادل روتور در راستای  $y$  به راستای  $x$

$\bar{\omega}$  فرکانس بی‌بعد سیستم

$\omega_b$  فرکانس طبیعی سیستم ساچمه- فنر شعاعی،  $rad/s$

$\zeta_x$  نسبت میرایی روتور در راستای  $x$

$\zeta_y$  نسبت میرایی روتور در راستای  $y$

### مراجع

- [1] Y. Ishida, Recent development of the passive vibration control method, Mechanical Systems and Signal Processing, 29 (2012) 2-18.
- [2] W. Kim, J. Chung, Performance of automatic ball balancers on optical disc drives, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 216(11) (2002) 1071-1080.
- [3] P.C. Chao, C.-K. Sung, C.-C. Wang, Dynamic analysis of the optical disk drives equipped with an automatic ball balancer with consideration of torsional motions, Journal of applied mechanics, 72(6) (2005) 826-842.
- [4] P.C.-P. Chao, C.-K. Sung, H.-C. Leu, Effects of rolling friction of the balancing balls on the automatic ball balancer for optical disk drives, Journal of Tribology, 127(4) (2005) 845-856.
- [5] C. Rajalingham, S. Rakheja, Whirl suppression in hand-held power tool rotors using guided rolling balancers, Journal of Sound and Vibration, 217(3)

- Rotor/Autobalancer System Influenced by Alford's Force, *Journal of Vibration and Acoustics*, 138(2) (2016) 021018.
- [21] D. Jung, H. DeSmidt, Limit-Cycle Analysis of Three-Dimensional Flexible Shaft/Rigid Rotor/Autobalancer System With Symmetric Rigid Supports, *Journal of Vibration and Acoustics*, 138(3) (2016) 031005.
- [22] M. Rezaee, R. Fathi, Improving the working performance of automatic ball balancer by modifying its mechanism, *Journal of Sound and Vibration*, 358 (2015) 375-391.
- Modares Mechanical Engineering, 14(14) (2015) 155-166 (in Persian).
- [18] M. Rezaee, R. Fathi, Dynamic analysis of an automatic double-race ball-balancer under the gyroscopic effect and optimization of its parameters using the genetic algorithm, *Journal of Mechanical Engineering*, 46(3) (2016) 129-137 (in Persian).
- [19] T. Majewski, D. Szwedowicz, M.A.M. Melo, Self-balancing system of the disk on an elastic shaft, *Journal of Sound and Vibration*, 359 (2015) 2-20.
- [20] D. Jung, H. DeSmidt, Limit-Cycle Analysis of Planar