



Modeling of Hyperelastic Incompressible Behavior of Functionally Graded Material under Bending Load

G. H. Rahimi*, M. M. Memarianm, Y. Anani, S. Hosseini Chaleshtori

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

ABSTRACT: In this paper, the behavior of inhomogeneous functionally graded rubber with large deformations and under bending loading is modeled by assuming an incompressible hyper-elastic material. For modeling the nonlinear behavior of the material, hyperelastic theory and strain energy functions were used. The strain energy is a function of the left Cauchy-Green deformation tensor invariants. The constants of strain energy are considered as power and in direction of curvature radius. Also, the generalized Mooney-Rivlin function was used for modeling the nonlinear behavior. Supposing the power constants of strain energy is convenient for description of material behavior. Also the results of the analytical solution are compared to those of Finite Element method and there is acceptable accuracy.

Review History:

Received: 2018/08/01
Revised: 2018/10/13
Accepted: 2018/12/03
Available Online: 2019/01/30

Keywords:

Hyperelastic material
incompressible
bending of rectangular section
functionally graded material
Exact Solution

1- Introduction

Different groups of materials, such as foams, elastomers, biological tissues, and polymers are the nonlinear hyperelastic materials. Reversibility is the most important physical property of hyperelastic materials. Natural rubber sometimes stretches up to eight times its original length and then comes back to its original state. Typical Natural rubbers are bitumen, turtle outer cover, animal's antler, and gum trees and artificial rubber such as polybutadiene, styrene-butadiene, nitrile, butyl, etc. Different types of materials, such as rubber, are reversible in large deformation. The maximum value of the stretch is usually between 5-10 (the ratio of the current length to the initial length) and the stress-stretch curve is non-linear. So the material does not follow Hooke's law. To modeling on the behavior of these materials, the material is considered as a continuous environment, and a strain energy density function is obtained, which is usually in terms of the deformation invariant [1].

2- Methodology

The geometry of the section before and after deformation shown in Fig. 1. The displacement fields are:

$$r = f(X), \quad \theta = \frac{Y}{\rho}, \quad z = Z. \quad (1)$$

which r, θ, z and X, Y, Z are Cartesian and cylindrical coordinates, respectively.

*Corresponding author's email: rahimi_gh@modares.ac.ir

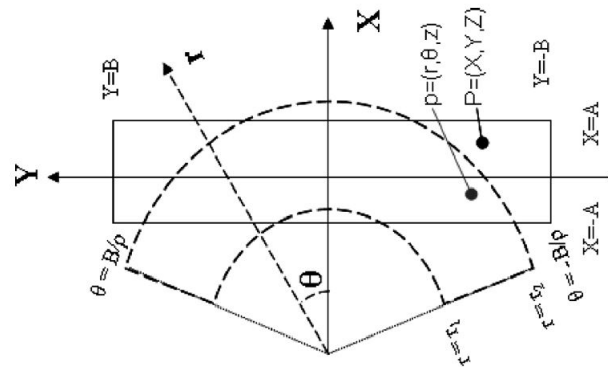


Fig. 1. The rectangular section before deformation and the circular section after deformation [2]

Using the Rivlin method [3], the constitutive method for incompressible and isotropic hyperelastic materials is expressed as follows:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\mathbf{B} - 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{B}^{-1} \quad (2)$$

where p is hydrostatic pressure depends on the incompressibility constraint, \mathbf{T} is the Cauchy stress and \mathbf{I} is the unit matrix. $W = W(I_1, I_2)$, is the strain potential energy function, which is based on $(I_1 - 3)$ and $(I_2 - 3)$. Mooney-Rivlin strain energy is the classical stress energy density for homogeneous incompressible rubber:

$$W^{MR} = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3), \quad (3)$$



which C_1, C_2 are the constants of the Mooney-Rivlin energy function. For functionally graded materials, the Mooney-Rivlin energy function is $W = \mu(r)(I_1 - 3) + \mu'(r)(I_2 - 3)$, which μ indicates the shear modulus of the material in the deformed configuration.

For the functionally graded inhomogeneous material, $\mu(r) = \mu_{10} \left(\frac{r}{r_2}\right)^n, \mu'(r) = \mu_{01} \left(\frac{r}{r_2}\right)^m$ which n and m are inhomogeneous coefficients of material. Therefore, the generalized Mooney-Rivlin strain energy function for inhomogeneous functionally graded materials is:

$$W = \mu_{10} \left(\frac{r}{r_2}\right)^n (I_1 - 3) + \mu_{01} \left(\frac{r}{r_2}\right)^m (I_2 - 3) \quad (4)$$

3- Solving method

The equilibrium equations along the radius and in the absence of volumetric forces are simplified as follows [2]:

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(T_{rr} - T_{\theta\theta}) = 0, \quad \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

To calculate the main stresses, Eq. (5) is integrated and after simplifying, the Cauchy stress relations for inhomogeneous functionally graded materials are obtained:

$$T_{rr}(r) = \frac{2\mu_{10}\rho^2}{(n-2)r_2^n} (r_1^{n-2} - r^{n-2}) + \frac{2\mu_{01}}{(m+2)\rho^2 r_2^m} (r^{m+2} - r_1^{m+2}) + \frac{2\mu_{10}}{(n+2)\rho^2 r_2^n} (r^{n+2} - r_1^{n+2}) + \frac{2\mu_{01}\rho^2}{(m-2)r_2^m} (r_1^{m-2} - r^{m-2}). \quad (6)$$

$$T_{\theta\theta}(r) = -\frac{2\mu_{10}\rho^2}{r_2^n} \left(r^{n-2} + \frac{r^{n-2}}{n-2} - \frac{r_1^{n-2}}{n-2} \right) - \frac{2\mu_{01}}{\rho^2 r_2^m} (-r^{m+2} + \frac{r_1^{m+2}}{m+2} - \frac{r^{m+2}}{m+2}) - \frac{2\mu_{10}}{\rho^2 r_2^n} \left(\frac{r_1^{n+2}}{n+2} - \frac{r^{n+2}}{n+2} - r^{n+2} \right) - \frac{2\mu_{01}\rho^2}{r_2^m} \left(\frac{r^{m-2}}{m-2} - \frac{r_1^{m-2}}{m-2} + r^{m-2} \right) \quad (7)$$

$$T_{zz}(r) = -\frac{2\mu_{10}\rho^2}{r_2^n} \left(r^{n-2} + \frac{r^{n-2}}{n-2} - \frac{r_1^{n-2}}{n-2} \right) - \frac{2\mu_{01}}{\rho^2 r_2^m} (-r^{m+2} + \frac{r_1^{m+2}}{m+2} - \frac{r^{m+2}}{m+2}) - \frac{2\mu_{10}}{r_2^m} \left(\frac{\rho^2 r_1^{m-2}}{m-2} - \frac{\rho^2 r^{m-2}}{m-2} + r^m \right) - \frac{2\mu_{10}}{r_2^n} \left(\frac{r^{n+2}}{(n+2)\rho^2} - \frac{r_1^{n+2}}{(n+2)\rho^2} - r^n \right). \quad (8)$$

4- Results and Discussion

The results of the exact solution are compared with those of modeling in ABAQUS software. CPE8RH element has been used in ABAQUS modeling. The comparison between exact solution and numerical solution for stresses along radius of

the section are shown in Figs. 2 to 4 for radial, circumferential and axial stresses respectively.

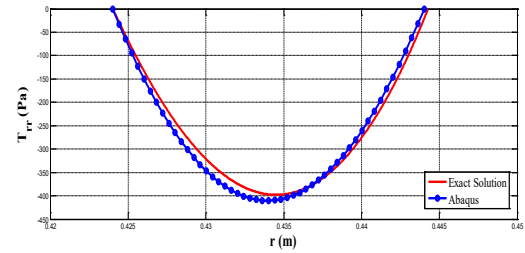


Fig. 2. Comparison of theoretical and numerical solution results for radial Cauchy stress

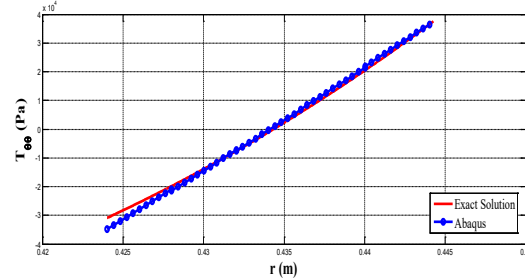


Fig. 3. Comparison of theoretical and numerical solution results for circumferential Cauchy stress

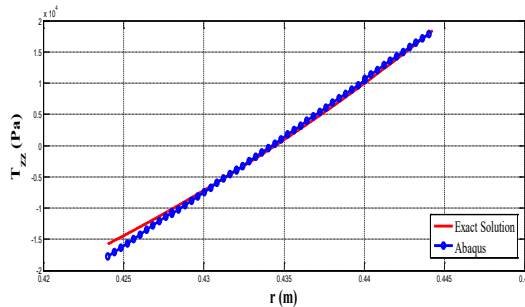


Fig. 4. Comparison of theoretical and numerical solution results for axial Cauchy stress

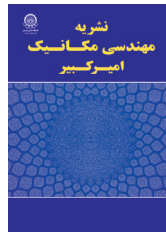
As a result, new equations are obtained for describing the behavior of the incompressible hyperelastic rectangular cross-section of inhomogeneous isotropic under bending using analytical solution. By comparing the exact solution method used in this paper to the numerical model, it is concluded that these relations have good accuracy. Therefore, it can be concluded that simplifying assumptions such as zero shear stress, are good and correct assumptions. The advantage of this article is that it integrates into equilibrium equations as direct and there are no errors due to numerical methods.

5- Conclusions

In this research, the modeling of the hyperelastic behavior of inhomogeneous functionally graded rubber under bending loading and extracting the Cauchy stress relations of the cross-sectional by this loading has been made. For modeling, the generalized Mooney-Rivlin energy function has been used and the properties were changing into radius. Also the property was inhomogeneous. Finally, the analytical results are compared to those of the numerical results and it is shown that the functions are described the behavior of the hyperelastic materials under pure bending.

6- References

- [1] Y. Anani, G.H. Rahimi, Modeling of hyperelastic behavior of functionally graded rubber under mechanical and thermal load, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15,(No. 11,) (2015) pp. 359-366.
- [2] L. M. Kanner, C.O. Horgan, Plane strain bending of strain-stiffening rubber-like rectangular beams, *International Journal of Solids and Structures*, 45(6) (2008) 1713-1729.
- [3] Y. B. Fu, R.W. Ogden, *Nonlinear Elasticity: Theory and Applications*, Cambridge University Press, London, (2001).



مدل سازی رفتار مواد هایپیرالاستیک تراکم ناپذیر مدرج تابعی تحت بارگذاری خمشی

غلامحسین رحیمی*، محمد مهدی معماریان، یاور عنانی، شهرام حسینی چالستری

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷-۰۵-۱۰
بازنگری: ۱۳۹۷-۰۷-۲۱
پذیرش: ۱۳۹۷-۰۹-۱۲
ارائه آنلاین: ۱۳۹۷-۱۱-۱۰

کلمات کلیدی:

ماده هایپیرالاستیک
تراکم ناپذیر
خمش مقطع مستطیلی
ماده مدرج تابعی
حل دقیق

خلاصه: در این مقاله رفتار لاستیک‌های ناهمگن مدرج تابعی با تغییر شکل‌های بزرگ و تحت بارگذاری خمشی و با فرض ماده هایپیرالاستیک تراکم‌ناپذیر مدل سازی شده است. برای مدل کردن رفتار غیر خطی ماده از تئوری هایپیرالاستیسیته و توابع انرژی کرنشی که تابعی از نامتغیرهای تانسور تغییر شکل چپ کوشی- گرین هستند، استفاده می‌شود. برای اینکه بتوان توابع انرژی موجود را برای مواد ناهمگن مدرج تابعی به کار برد، باید در آنها تغییراتی صورت گیرد. بنابراین برای تصحیح کردن ثوابت مربوط به توابع انرژی ذکر شده، با توجه به ناهمگن بودن ماده مدرج تابعی، این ثابت‌ها به صورت توانی و در راستای شعاع انحناء پس از خمش، فرض شده است. برای مدل سازی از تابع انرژی مونی-ریولین تعمیم یافته استفاده شده است. از مهمترین نتایج به دست آمده از تحقیق حاضر می‌توان به، فرض توانی بودن ثابت‌های تابع انرژی کرنشی جهت مدل سازی رفتار ماده در روش تحلیلی، که این فرض رفتار ماده را به خوبی مدل کرده است، اشاره کرد. همچنین مدل سازی ماده مدرج تابعی غیر همگن به صورت لایه لایه‌ای در نرم افزار اجزاء محدود مدل شده است، که این روش نیز به خوبی رفتار ماده را توصیف کرده و با نتایج تحلیلی همپوشانی خوبی دارد.

۱- مقدمه

مهم‌ترین کاربرد لاستیک‌ها در ساخت انواع تایر و تیوب اتومبیل‌ها، ساخت کفش، تیوب توپ‌های ورزشی، تسمه و نوارهای نقاله، روکش کابل و سیم، لوله‌ها و سایر وسایل لاستیکی است. همچنین از این ماده ارزشمند در پوشش مخازن و لوله‌ها، لاستیک‌های ضربه گیر و صداگیر در اطراف یاتاقان‌ها، ساخت قطعات مکانیکی و واشرهای مسطح و مدور استفاده می‌شود. پوشی‌های به کار رفته در صنایع، شیرهای کنترلی، درز بندهای به کار رفته در صنایع، پوشش داخلی پمپ‌ها، شیرها، لوله‌ها، خرطومی‌های به کار رفته در صنایع مختلف از جمله کاربردهای اساسی این مواد می‌باشند. سوندهای به کار رفته در صنایع پزشکی نیز جزء موارد استفاده از این مواد هستند. از دیگر موارد استفاده آن در لوله‌های داخلی و تجهیزات کارخانجات مواد شیمی‌آبی مثلاً آب‌بندی تانکرهای حامل گاز می‌باشد. همچنین لاستیک‌ها به صورت فراوان به عنوان عایق ارتعاشی، قطعات ذخیره کننده انرژی در صنایع خودرو، سپر و محافظ در قطعاتی که در برابر بارهای ضربه‌ای قرار دارد به کار می‌روند.

گروه‌های مختلفی از مواد از قبیل فوم‌ها، الاستومرها، بافت‌های بیولوژیکی و پلیمرها قابلیت تغییر شکل‌های بزرگ هایپیرالاستیک را دارند. مهم‌ترین و بارزترین مشخصه فیزیکی لاستیک‌ها و موادی از این دسته، این است که در اثر کشیده شدن، کش آمده و پس از رهاشدن به حالت اولیه خود باز می‌گردد. لاستیک‌های طبیعی گاه تا هشت برابر طول اولیه خود کش آمده و سپس به حالت اول خود بر می‌گردند، همچنین لاستیک‌ها توانایی کشش پذیری بالایی در برابر تنش‌های کوچک دارند. از جمله لاستیک‌های طبیعی می‌توان به قیر، پوشش خارجی لاک پشت، شاخ حیوانات و صمغ درختان و لاستیک‌های مصنوعی به پلی بوتادین^۱، استایرن بوتادین^۲، نیتریل^۳، بوتیل^۴ و غیره اشاره کرد.

- 1 Polybutadiene
- 2 Styrene Butadiene
- 3 Nitril
- 4 Butyl

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: rahimi_gh@modares.ac.ir



از جمله کاربردهای مواد مدرج تابعی^۱ با رفتار هایپرالاستیک در صنعت، می‌توان به لاستیک‌های مسابقات فرمول یک، که تحت تنش و حرارت بسیار بالا قرار دارند؛ و همچنین بالن‌های هواشناسی و اینترنت بالن‌ها که در ارتفاع بسیار بالا، تحت فشار و دماهای بسیار متغیر، مورد استفاده قرار می‌گیرند، اشاره کرد. از دیگر مواد مدرج تابعی که رفتار هایپرالاستیک از خودشان نشان می‌دهند، بافت‌های بدن موجودات زنده است. پوست بدن برخی موجودات زنده و ماهیچه‌ها و رباط‌های موجودات زنده، رفتار کاملاً هایپرالاستیک از خود نشان می‌دهد. شش و جگر، دریچه‌های قلب نیز رفتارشان با رفتار هایپرالاستیک مدل‌سازی می‌شود. مثانه موجودات زنده، سرخرگ‌ها و دهلیز و بطن قلب آن‌ها نیز، رفتاری شبیه مخازن تحت فشار هایپرالاستیک از خود نشان می‌دهند.

در تغییر شکل‌های کوچک، رفتار ماده مدرج تابعی می‌تواند به خوبی با تئوری خطی الاستیسیته یا یکی از تئوریهای پلاستیسیته بیان گردد و تئوری‌های مناسبی موجود و معمول است. روند طراحی برای مواد الاستیک غیرخطی در گام‌های ابتدایی تری نسبت به آنچه در بالا اشاره شد، قرار دارد. در این مورد تئوری بسط یافته‌ای که از منظر کاربرد عملی مورد قبول باشد، وجود ندارد و به همین دلیل پیشرفت کمی در جمع‌آوری اطلاعات و توسعه روندهای عملی طراحی صورت گرفته است. نمی‌توان گفت که تئوری غیرخطی الاستیک برای مواد مدرج تابعی وجود ندارد ولی این امر بیشتر در حوزه مکانیک نظری بوده و کمتر جنبه کاربردی داشته است. با افزایش کاربرد مواد و سازه‌های غیرخطی و پیشرفته در صنایع مختلف و نیاز به تحلیل رفتار آن‌ها، تحلیل‌های غیرخطی نیز مورد توجه اغلب محققین قرار گرفته است. طبیعت غیرخطی معادلات حاکم و عدم دسترسی به معادله رفتاری ماده- که بتواند رفتار ماده را به درستی توصیف نماید- دو مشکل عمده در حل مسائل مقدار مرزی غیر خطی می‌باشند. با توسعه و گسترش کامپیوترها و پیشرفت روز افزون روش‌های عددی از جمله روش اجزاء محدود، مشکل اول تا حدودی بر طرف شده است ولی مشکل دوم همچنان باقی مانده است.

دسته‌های مختلفی از مواد مثل لاستیک‌ها، قابلیت تغییر شکل‌های بزرگ الاستیک را دارند. ماکزیمم مقدارکشش معمولاً در محدوده ۱۰-۵ (نسبت طول ثانویه به طول اولیه) می‌باشد و منحنی

1 Functionally graded material

تنش-کشش غیرخطی است، لذا ماده از قانون هوک تبعیت نمی‌کند. برای مدل‌سازی رفتار این مواد، ماده به صورت یک محیط پیوسته در نظر گرفته می‌شود و یک تابع چگالی انرژی کرنشی به دست می‌آید که معمولاً بر حسب ناوردهای تغییر شکل است [۱]. برای کشش‌های کوچک می‌توان شیب منحنی را به عنوان مدول الاستیسیته تعریف کرد که در حدود ۱ مگاپاسکال است. کشش‌پذیری زیاد و مدول الاستیسیته پایین لاستیک‌ها در مقایسه با جامداتی مثل فلزات که مدول الاستیسیته آن‌ها حدود ۲۰۰ گیگاپاسکال و ماکزیمم کشش‌پذیری آن‌ها حدود ۱/۰۱ است باعث می‌شود تا اختلاف چشمگیری بین لاستیک‌ها و جامدات سختی مثل فلزات وجود داشته باشند. روابط ساختاری مواد هایپرالاستیک، برای مدل‌کردن رفتار مواد الاستیک، در تغییر شکل‌های بزرگ به کار می‌رود. در واقع این روابط برای مدل‌سازی رفتار غیرخطی مواد و تغییر شکل‌های بزرگ کاربرد دارد. عمده‌ترین کاربرد این تئوری، مدل‌کردن رفتار مواد پلیمری لاستیک مانند، پلیمرهای فوم مانند و بافت‌های بیولوژیک می‌باشد که تغییر شکل‌های بزرگ و برگشت پذیر دارند. حالت الاستیک غیرخطی مواد، با رفتار همانند لاستیک، می‌تواند با استفاده از توصیف فیزیکی اثر متقابل مولکول‌ها با استفاده از تئوری‌هایی مثل تئوری کلاسیک گوسی، تئوری باندهای لغزشی، تئوری شبکه ماکرو مولکولی، که توسط افرادی چون ترلور [۲]، بويس و ارودا [۳]، گوس و جیمز [۴]، فلوری [۵]، وال [۶]، الکساندر لاین [۷]، ون دایک و هوگر [۸]، میسنر و ماتجکا [۹] و آتارد [۱۰ و ۱۱] بحث شده است، توصیف شود و یا با استفاده از روش‌هایی که مبتنی بر پدیده‌شناسی می‌باشند، توصیف گردد. توابع انرژی که با استفاده از روش‌های مولکولی فرمول‌بندی می‌شوند معمولاً پیچیده بوده و مخصوص ماده خاصی می‌باشند. ولی در روش‌های مبتنی بر پدیده‌شناسی، ماده به صورت یک محیط پیوسته فرض می‌شود و یک تابع چگالی انرژی کرنشی استخراج می‌گردد که معمولاً بر حسب نامتغیرهای تغییر شکل می‌باشند. تعدادی از معمول‌ترین و معروف‌ترین توابع انرژی عبارتند از تابع انرژی نئوهوکین^۲، مونی-ریولین^۳، آگدن^۴ و یئوه^۵. جهت نشان دادن رفتار غیرخطی ماده معمولاً به چندین ثابت مادی

2 Invariant
3 Neo-Hookean
4 Mooney-Rivlin
5 Ogden
6 Yeoh

نیاز است. این ثوابت با استفاده از نتایج آزمایشگاهی و تست‌های انجام شده روی ماده تعیین می‌گردند که این ثابت‌ها با استفاده از روش‌های عددی، به دست می‌آیند. با استفاده از برخی از توابع انرژی ذکر شده، رفتار سازه‌های هایپیرالاستیک مورد بررسی قرار گرفته است.

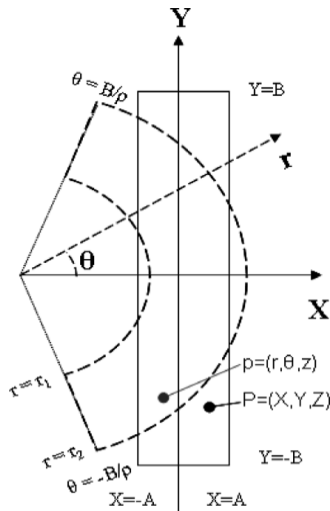
در خصوص بررسی رفتار هایپیرالاستیک لاستیک‌ها، ترلور، آزمایش‌های متعددی از جمله، کشش تک محوره، دو محوره و برش خالص را بر روی مواد مختلفی مانند لاستیک طبیعی^۱، انجام داده است. با توجه به داده‌های تجربی به دست آمده از این تست‌ها، و با توجه به معادلات تنش-کشیدگی برای این نوع بارگذاری‌ها، ثابت‌های توابع انرژی مختلف قابل محاسبه می‌باشند [۱۲]. در خصوص مدل‌سازی رفتار سازه‌های هایپیرالاستیک، اتارد [۱۳] در سال ۲۰۰۳ رفتار تیر تیموشنکو با تغییر شکل بزرگ، تحت بارگذاری کششی را با در نظر گرفتن تابع انرژی نئوهوگین تعمیم یافته، مورد بررسی قرار داده است. وی [۱۴ و ۱۵] همچنین کمانش و کمانش عرضی^۲ میله هایپیرالاستیک تحت بارگذاری محوری و عرضی را نیز مورد مطالعه قرار داده و اثرات تغییر شکل‌های برشی را بررسی کرده است و به استخراج روابط ساختاری و معادلات کمانش پرداخته است. نقدآبادی و عنانی [۱۶] نیز رفتار میله ویسکو-هایپیرالاستیک تحت بارگذاری محوری در تغییر شکل‌های بزرگ را مورد بررسی قرار داده‌اند. استفاده از مواد هایپیرالاستیک برای افزایش شکل‌پذیری مهاربندهای هم‌محور نیز توسط کافی و همکاران [۱۷] مورد توجه قرار گرفته است. فرمول‌بندی صفحات هایپیرالاستیک تحت بارگذاری عرضی و به روش المان محدود توسط سیچ و جلنچ [۱۸] صورت پذیرفته است. دقت فوق‌العاده و راندمان بالای روش ارائه شده، با مثال‌های عددی نشان داده شده است. کاربرد روش حاضر برای آنالیز سازه‌های هایپیرالاستیک، تحت نیروهای غیرمحافظة کارانه استاتیکی نشان داده شده و بعضی نتایج بارهای بحرانی برای ناپایداری دینامیکی در حالت لرزان ارائه شده است. همینطور آلتنباخ و ارمیف [۱۹] سختی مؤثر صفحات هایپیرالاستیک تحت بارگذاری خمشی را بررسی کرده و آن را محاسبه کرده‌اند. در این پژوهش آن‌ها معادلات ساختاری دو بعدی برای یک صفحه ارائه کرده‌اند. همچنین تأثیر تنش‌های اولیه در حجم ماده، روی رفتار صفحه را نیز مطرح کردند. در خصوص غشاهای هایپیرالاستیک نیز، تنش‌های تماسی دو صفحه کروی هایپیرالاستیک

توسط کومار و داس گوپتا [۲۰] به دست آمده است. آن‌ها مشاهده کردند که حالت چروکیدگی در حال پیدایش، در محدوده تماس رخ می‌دهد. بر این اساس، حداقل کشش اولیه مورد نیاز برای جلوگیری از چروک شدن در هر نقطه از غشاء را مشخص کردند. همینطور جیل [۲۱]، رفتار غشاء هایپیرالاستیک با کرنش‌های متوسط و با در نظر گرفتن تنش پسماند را تحلیل نموده است. ایشان یک فرمول کامل برای تحلیل ساختار غیرخطی غشاهای تقویت شده، برای حل مشکل هندسه غیرخطی آن‌ها، ارائه کرده است به طوری که نتایج عددی به خوبی فرمول‌بندی فوق را تأیید می‌کنند. در مقاله‌ای دیگر نیز جیل به همراه بونت [۲۲]، چروکیدگی غشاء هایپیرالاستیک تحت کرنش‌های متوسط و با در نظر گرفتن تنش پسماند را مورد بررسی قرار داده است.

همین طور در خصوص نانو تیوب‌های کربنی هایپیرالاستیک تحت کشش نیز، مطالعاتی با استفاده از روش اجزاء محدود، توسط فلورس و همکاران [۲۳] صورت گرفته است. مدل ارائه شده توسط آن‌ها از قابلیت پیش بینی خوبی برخوردار است، به طوری که در مقایسه با نتایج منتشر شده، مدل سازی عددی ارائه شده به خوبی نتایج حاصله را تأیید می‌کند. بیلگیلی [۲۴] نیز معادلات ساختاری برای مواد هایپیرالاستیک مدرج تابعی را ارائه داد و به صورت آزمایشگاهی به ساخت این مواد پرداخت. ایشان در این مطالعه تلاش کردند تا شکاف موجود در کمبود اطلاعات در دسترس، راجع به رفتار مکانیکی لاستیک‌های ساخته شده را از طریق مدل‌سازی ریاضی از بین ببرند. در خصوص مخازن جدار ضخیم تراکم ناپذیر غیرخطی، باترا [۲۵] به مطالعه عددی مخزن استوانه‌ای با استفاده از روش المان محدود پرداخت. وی تغییر شکل مخزن را متقارن در نظر گرفت و ماده تشکیل دهنده مخزن را مونی-ریولین با دو ثابت که به آرامی در راستای شعاع تغییر می‌کنند، فرض کرد. نتایج به دست آمده از مدل سازی ایشان، با نتایجی که به صورت تحلیلی محاسبه شده‌اند، به طور مناسب و بسیار نزدیکی همخوانی خوبی دارد. بیلگیلی [۲۶] تغییر شکل برشی و محوری مخزن استوانه‌ای ساخته شده از جنس لاستیک را در دو حالت دما ثابت و غیر دما ثابت در نظر گرفت و با این فرضیات به حل مسئله پرداخت و باترا [۲۷] طراحی مخازن مدرج تابعی کروی و استوانه‌ای جدار ضخیم ساخته شده از مواد الاستیک غیرخطی تراکم ناپذیر را ارائه نمود. ایشان راه حل‌های فرم بسته را برای تغییر شکل‌های شعاعی کرنش صفحه‌ای متقارن محوری یک استوانه توخالی مدرج

1 Natural Rubber

2 Lateral buckling



شکل ۱: مقطع مستطیلی قبل از تغییر شکل و دایروی بعد از تغییر شکل [۳۶]

Fig. 1. The rectangular section before deformation and circular section after deformation [36]

که r ، θ و Z مختصات استوانه‌ای و X ، Y و Z مختصات کارتزین می‌باشند. قبل از تغییر شکل، هندسه سطح مقطع، یک هندسه مستطیلی است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$-A \leq X \leq A, \quad -B \leq Y \leq B, \quad -C \leq Z \leq C \quad (2)$$

که A ، B و C همانطور که در شکل ۱ مشخص است، ابعاد سطح مقطع و ارتفاع آن می‌باشند.

تانسور گرادیان تغییر شکل برای این نوع بارگذاری به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۶]:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{df}{dX} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

که این رابطه با توجه به معادله $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$ که x_i, X_j به ترتیب مختصات فضایی و مادی ماده می‌باشند، به دست آمده است. که ρ شعاع انحناء یا میانگین هندسی بوده و برای ماده هایپیرالاستیک همگن به صورت $\sqrt{r_1 r_2}$ تعریف می‌گردد. که برای مواد تراکم ناپذیر

تابعی و همچنین انبساط و انقباض یک کره توخالی بارگذاری شده در سطح داخلی و خارجی تحت فشار هیدرواستاتیک یکنواخت، ارائه کرده‌اند. نتایج تحلیلی ارائه شده در این مقاله، معیار خوبی برای تأیید و مقایسه با نتایج به دست آمده از روش‌های عددی می‌باشد. نی و باترا [۲۸-۳۰] سازگاری بهینه ماده تشکیل دهنده مخزن جدار ضخیم استوانه‌ای و کروی را ارائه دادند. باترا [۳۱] سازگاری بهینه مخزن جدار ضخیم مدرج تابعی ساخته شده از جنس مواد لاستیک-مانند و روابط ساختاری کلی آن را بیان نموده است. همچنین ایشان مقطع هایپیرالاستیک تحت پیچش را در سال ۲۰۱۳ انجام داده است [۳۲]. در خصوص بررسی رفتار ویسکو-هایپیرالاستیک لاستیک‌ها و فوم‌ها در بارگذاری کشش تک محوره، دو پژوهش توسط عنانی و همکاران [۳۳ و ۳۴] انجام شده است. همچنین معرفی معادلات میدانی و راه حل عمومی برای پوسته جدار ضخیم متقارن محوری، متشکل از مواد هایپیرالاستیک تراکم ناپذیر مدرج تابعی، توسط رحیمی و عنانی [۳۵] ارائه گردیده است. کمر [۳۶] نیز به بررسی رفتار هایپیرالاستیک تیرهای مستطیلی لاستیک‌مانند تحت خمش پرداخته است. با توجه به پژوهش‌های صورت گرفته ذکر شده بالا، در این مقاله مدل‌سازی رفتار هایپیرالاستیک لاستیک‌های ناهمگن مدرج تابعی تحت بارگذاری خمشی و استخراج روابط تنش کوشی حاکم بر سطح مقطع، ناشی از این بارگذاری صورت گرفته است. برای مدل‌سازی از تابع انرژی مونی-ریولین تعمیم یافته استفاده شده و فرض توانی بودن ثابت‌های تابع انرژی کرنشی جهت مدل‌سازی رفتار ماده، در نظر گرفته شده است. همچنین تغییر خواص در راستای شعاعی پس از خمش، در نظر گرفته شده و تغییرات ناهمگنی نیز بررسی و ارائه می‌گردد. در پایان از آن جایی که بسیاری از مواد به صورت ناهمگن هستند، استفاده از فرض مواد ناهمگن مدرج تابعی یکی از کاربردی‌ترین روش‌هاست.

۲- مبانی تئوریک

مقطع قبل و بعد از تغییر شکل، که هندسه آن به شرح زیر می‌باشد، مطابق شکل ۱ نشان داده شده است. میدان جابه‌جایی تغییر شکل ذکر شده به صورت زیر است:

$$r = f(X), \quad \theta = \frac{Y}{\rho}, \quad z = Z. \quad (1)$$

دترمینان F برابر با یک است بنابراین خواهیم داشت:

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[(tr \mathbf{B})^2 - tr(\mathbf{B}^2) \right] = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 \quad (9)$$

$$\left(\frac{df}{dX} \right) \left(\frac{f}{\rho} \right) = 1 \quad (4)$$

$$I_3 = det \mathbf{B} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (10)$$

با انتگرال گیری از رابطه (۴) خواهیم داشت:

در مواد هایپرلاستیک تراکم ناپذیر، $I_3 = det(\mathbf{B}) = 1$ فرض می‌شود و با استفاده از روش ریولین [۳۷]، رابطه ساختاری برای مواد هایپرلاستیک تراکم ناپذیر و همسانگرد به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f(X) = r = \sqrt{2\rho X + \beta} \quad (5)$$

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} \quad (11)$$

که β ثابت عمل انتگرال گیری بوده و با استفاده از شرط مرزی هندسی به دست می‌آید. هندسه بعد از تغییر شکل به صورت قطاعی از دایره تبدیل می‌شود و به صورت شکل ۱ می‌باشد. با توجه به روابط (۵) و (۲)، رابطه زیر حاصل خواهد شد که r_1 و r_2 به ترتیب شعاع داخلی و خارجی دایره می‌باشند:

که p ترم فشار هیدرواستاتیک وابسته به قید تراکم ناپذیری، T تنش کوشی و I ماتریس همانی است. $W = W(I_1, I_2)$ تابع انرژی پتانسیل کرنشی است که به صورت چند جمله‌ای بر اساس $(I_1 - 3)$ و $(I_2 - 3)$ در نظر گرفته می‌شود و چگالی انرژی کرنشی کلاسیک برای لاستیک تراکم ناپذیر همگن، انرژی کرنشی مونی-ریولین^۱ است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r_1 = \sqrt{\beta - 2\rho A} \leq r \leq \sqrt{\beta + 2\rho A} = r_2, \quad -\frac{B}{\rho} \leq \theta \leq \frac{B}{\rho} \quad (6)$$

$$W^{MR} = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3), \quad (12)$$

که $\beta = \sqrt{\rho^2 + 4\rho^2 A^2}$ و Z نیز بعد از تغییر شکل، تغییر نمی‌کند.

تانسور کشیدگی چپ کوشی-گرین به صورت $B = FF^T$ تعریف می‌شود که F گرادیان تغییر شکل می‌باشد و به صورت زیر بیان می‌شوند:

که C_1 و C_2 ثوابت تابع انرژی مونی-ریولین می‌باشند.

برای مواد مدرج تابعی، تابع انرژی مونی-ریولین به صورت $W = \mu(r)(I_1 - 3) + \mu'(r)(I_2 - 3)$ در نظر گرفته می‌شود، که μ بیانگر مدول برشی ماده در پیکربندی تغییر شکل یافته است. در این جا برای مواد ناهمگن مدرج تابعی، $\mu(r) = \mu_{10} \left(\frac{r}{r_2} \right)^n$ ، $\mu'(r) = \mu_{01} \left(\frac{r}{r_2} \right)^m$ می‌شود که n و m ضرایب ناهمگنی ماده می‌باشند. بنابراین تابع انرژی مونی ریولین تعمیم یافته برای مواد ناهمگن مدرج تابعی برابر است با:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\rho}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\rho^2}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\lambda_1 = \frac{\rho}{r}, \lambda_2 = \frac{r}{\rho}, \lambda_3 = 1$$

که $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ کشش‌های اصلی می‌باشند.

همچنین برای یک ماده ایزوتروپ، ناوردهای تانسور B به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$W = \mu_{10} \left(\frac{r}{r_2} \right)^n (I_1 - 3) + \mu_{01} \left(\frac{r}{r_2} \right)^m (I_2 - 3) \quad (13)$$

که μ_1 و μ_2 همان C_1 و C_2 می‌باشند که ثابت تابع انرژی برای ماده همگن بوده و با توجه به داده‌های تجربی استخراج شده از سه

$$I_1 = tr \mathbf{B} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (8)$$

صورت زیر ساده می‌شوند [۳۶]:

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(T_{rr} - T_{\theta\theta}) = 0, \quad \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (20)$$

حال برای محاسبه تنش‌های اصلی، با استفاده از معادله تعادل، روابط (۱۸) و (۱۹) را در رابطه (۲۰) جایگزین کرده و پس از ساده سازی و انتگرال‌گیری از طرفین و اعمال شرایط مرزی، به روابط تنش‌های کوشی برای مواد ناهمگن مدرج تابعی می‌رسیم. با دانستن این موضوع که به دلیل نوع بارگذاری، سطوح جانبی مقطع بعد از بارگذاری عاری از تنش کششی و بدون نیروی کشش می‌باشند، شرایط مرزی برای تیر تحت خمش به صورت زیر خواهد بود:

$$T_{rr} = 0 \text{ at } r = r_1 \text{ \& } r = r_2 \quad (21)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه تعادل (رابطه (۲۰))، و قرار دادن مؤلفه‌های تنش در آن، تنش شعاعی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} T_r(r) = & -\frac{2\mu_0\rho^2}{(n-2)r_2^n} + \frac{2\mu_0}{(m+2)\rho^2r_2^m}(r^{m+2}) + \frac{2\mu_0}{(n+2)\rho^2r_2^n}(r^{n+2}) \\ & + \frac{2\mu_0}{(n+2)\rho^2r_2^n}(r^{n+2}) - \frac{2\mu_0\rho^2}{(m-2)r_2^m}(r^{m-2}) + \frac{2\mu_0\rho^2}{(n-2)r_2^n}(r_1^{n-2}) \\ & - \frac{2\mu_0}{(m+2)\rho^2r_2^m}(r_1^{m+2}) + \frac{2\mu_0\rho^2}{(m-2)r_2^m} \\ & (r_1^{m-2}) - \frac{2\mu_0}{(n+2)r_2^n}(r_1^{n+2}) \end{aligned} \quad (22)$$

که با ساده سازی و عمل فاکتورگیری، تنش شعاعی به صورت زیر ساده خواهد شد:

$$\begin{aligned} T_r(r) = & \frac{2\mu_0\rho^2}{(n-2)r_2^n}(r_1^{n-2} - r^{n-2}) + \frac{2\mu_0}{(m+2)\rho^2r_2^m} \\ & (r^{m+2} - r_1^{m+2}) + \frac{2\mu_0}{(n+2)\rho^2r_2^n}(r^{n+2} - r_1^{n+2}) \\ & + \frac{2\mu_0\rho^2}{(m-2)r_2^m}(r_1^{m-2} - r^{m-2}). \end{aligned} \quad (23)$$

با مقایسه رابطه (۱۸) و (۲۳)، فشار p به صورت زیر محاسبه

تست کشش تک محوره، دو محوره و برش خالص، و همچنین روابط تئوری تنش-کشیدگی حاکم بر یک جسم هایپرالاستیک همگن تحت این بارگذاری‌ها و با استفاده از روش حداقل کردن مربعات خطاها به دست می‌آیند. این دو ثابت یعنی μ_0 و μ_1 با توجه به رابطه $\mu = 2(\mu_0 + \mu_1)$ ، با مدول برشی ماده نسبت مستقیم داشته و با افزایش و کاهش آن‌ها، ماده سخت‌تر و یا نرم‌تر می‌شود.

۳- روش حل و فرضیه‌ها

با توجه به رابطه (۱۱) و تعریف تانسور S ، تنش‌های اصلی کوشی برابر است با:

$$T_{rr} = -p + 2\frac{\rho^2}{r^2}W_1 - 2\frac{r^2}{\rho^2}W_2 \quad (14)$$

$$T_{\theta\theta} = -p + 2\frac{r^2}{\rho^2}W_1 - 2\frac{\rho^2}{r^2}W_2 \quad (15)$$

$$T_{zz} = -p + 2W_1 - 2W_2 \quad (16)$$

که به ترتیب معرف تنش شعاعی، محیطی و محوری می‌باشند.

$$T_{r\theta} = T_{rz} = T_{z\theta} = 0 \quad (17)$$

که به دلیل وجود تقارن محوری در مقطع تحت خمش (به عبارتی، وجود تقارن هندسی در سازه تحت خمش) و همچنین نوع بارگذاری که به صورت خمش خالص است، تنش‌های برشی صفر فرض می‌شوند (رابطه (۱۷)).

همچنین $I_1 = I_2 = \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{r^2}{\rho^2} + 1$ و $W_i = \frac{\partial W}{\partial I_i}$ ($i = 1, 2$) بنابراین روابط (۱۴) و (۱۵) به صورت زیر خواهند شد:

$$T_{rr} = -p + 2\frac{\rho^2}{r^2}\mu_{10}\left(\frac{r}{r_2}\right)^n - 2\frac{r^2}{\rho^2}\mu_{01}\left(\frac{r}{r_2}\right)^m \quad (18)$$

$$T_{\theta\theta} = -p + 2\frac{r^2}{\rho^2}\mu_{10}\left(\frac{r}{r_2}\right)^n - 2\frac{\rho^2}{r^2}\mu_{01}\left(\frac{r}{r_2}\right)^m \quad (19)$$

معادلات تعادل در راستای شعاع و در غیاب نیروهای حجمی به

می‌شود:

$$p = \frac{2\mu_{10}\rho^2}{r_2^n} \left(r^{n-2} + \frac{r^{n-2}}{n-2} - \frac{r_1^{n-2}}{n-2} \right) + \frac{2\mu_{01}}{\rho^2 r_2^m} \left(-r^{m+2} + \frac{r_1^{m+2}}{m+2} - \frac{r^{m+2}}{m+2} \right) + \frac{2\mu_{10}}{(n+2)\rho^2 r_2^n} (r_1^{n+2} - r^{n+2}) + \frac{2\mu_{01}\rho^2}{(m-2)r_2^m} (r^{m-2} - r_1^{m-2}). \quad (24)$$

سایر مؤلفه‌های تنش نیز با مقایسه روابط (۱۵) و (۱۶) با رابطه (۲۳) به دست می‌آیند:

$$T_{\theta\theta}(r) = -\frac{2\mu_{10}\rho^2}{r_2^n} \left(r^{n-2} + \frac{r^{n-2}}{n-2} - \frac{r_1^{n-2}}{n-2} \right) - \frac{2\mu_{01}}{\rho^2 r_2^m} \left(-r^{m+2} + \frac{r_1^{m+2}}{m+2} - \frac{r^{m+2}}{m+2} \right) - \frac{2\mu_{10}}{\rho^2 r_2^n} \left(\frac{r_1^{n+2}}{n+2} - \frac{r^{n+2}}{n+2} - r^{n+2} \right) - \frac{2\mu_{01}\rho^2}{r_2^m} \left(\frac{r^{m-2}}{m-2} - \frac{r_1^{m-2}}{m-2} + r^{m-2} \right). \quad (25)$$

$$T_{zz}(r) = -\frac{2\mu_{10}\rho^2}{r_2^n} \left(r^{n-2} + \frac{r^{n-2}}{n-2} - \frac{r_1^{n-2}}{n-2} \right) - \frac{2\mu_{01}}{\rho^2 r_2^m} \left(-r^{m+2} + \frac{r_1^{m+2}}{m+2} - \frac{r^{m+2}}{m+2} \right) - \frac{2\mu_{10}}{r_2^m} \left(\frac{r^2 r_1^{m-2}}{m-2} - \frac{r^2 r^{m-2}}{m-2} + r^m \right) - \frac{2\mu_{10}}{r_2^n} \left(\frac{r^{n+2}}{(n+2)\rho^2} - \frac{r_1^{n+2}}{(n+2)\rho^2} - r^n \right). \quad (26)$$

همچنین ρ ، که شعاع انحناء می‌باشد، با استفاده از جایگذاری شرط مرزی دوم در رابطه $T_{rr}(r)$ (رابطه (۲۳))، برابر است با:

$$\rho = \left[\frac{\mu_{01}}{(m+2)r_2^m} (r_1^{m+2} - r_2^{m+2}) + \frac{\mu_{10}}{(n+2)r_2^n} (r_1^{n+2} - r_2^{n+2}) \right]^{\frac{1}{4}} \left[\frac{\mu_{10}}{(n-2)r_2^n} (r_1^{n-2} - r_2^{n-2}) + \frac{\mu_{01}}{(m-2)r_2^m} (r_1^{m-2} - r_2^{m-2}) \right]^{-\frac{1}{4}} \quad (27)$$

۴- مدل سازی المان محدود

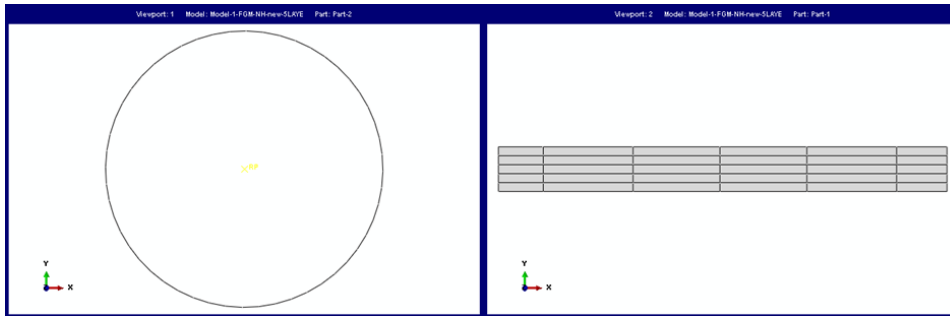
در این قسمت به شبیه سازی تیر تحت خمش در نرم افزار

آباکوس^۱ پرداخته می‌شود. برای اعمال خمش خالص و بررسی تنش‌های کوشی وارده بر سازه مورد نظر، نمونه تحت خمش چهار نقطه قرار داده شده است؛ به این صورت که تکیه گاه‌ها در طرفین نمونه، ثابت و به فاصله ۰/۰۶ متر از لبه‌ها قرار دارند و دو سنبه که به فاصله ۰/۰۲ متر از لبه‌ها و در بالای نمونه هستند، به طرف پایین جابه جا می‌شوند. طول این جابجایی ۰/۰۵ متر می‌باشد. با جابجایی سنبه‌ها به سمت پایین و خم شدن سازه مورد نظر، خمش خالص ایجاد شده بین دو تکیه‌گاه در نظر گرفته شده و به بررسی تنش‌ها در این محدوده پرداخته می‌شود. در ادامه به نحوه مدل سازی نمونه در نرم افزار اشاره می‌شود. برای مدل سازی نمونه، مقطع سازه، تکیه گاه‌ها و سنبه‌ها به صورت جداگانه همانند شکل ۲ مدل می‌شوند. برای مدل سازی مقطع، از فضای دو بعدی و حالت تغییر شکل پذیر^۲ استفاده شده است. ابعاد مقطع مدل سازی شده به این صورت است، طول مقطع برابر ۰/۲ متر و عرض آن ۰/۰۲ متر است و مقطع به صورت کرنش صفحه‌ای مدل می‌شود. برای مدل سازی مقطع مدرج تابعی به این صورت عمل می‌شود که مقطع مورد نظر را در راستای طول آن با دستور پارتیشن^۳ به ۵ قسمت یا ۵ لایه مساوی تقسیم کرده و به هر لایه خواص مخصوص به خودش داده می‌شود. تکیه گاه‌ها و سنبه‌های اعمال جابجایی نیز با مقطع دایروی و با قطر ۰/۰۱ متر و به صورت صلب در نظر گرفته شده است. در شکل ۳ نمونه مدل شده قابل مشاهده می‌باشد.

برای مدل سازی مواد هایپرلاستیک در نرم افزار به کمک توابع انرژی کرنشی، نیاز به وارد کردن ثوابت این توابع است که این ثابت‌ها با یک سری روابط مشخص به مدول برشی ماده مربوط می‌شوند. برای محاسبه این ثابت‌ها نیاز به داده‌های تجربی تست‌های کشش تک محوره، دو محوره و برش خالص بر روی مواد است، که در این مقاله که از دو ماده لاستیک طبیعی و سیلیکون استفاده شده است، از داده‌های تجربی ترلور برای لاستیک طبیعی و منییر برای سیلیکون استفاده شده است [۱۲ و ۳۸]. جدول ۱ مقادیر این ثابت‌ها را نشان می‌دهد.

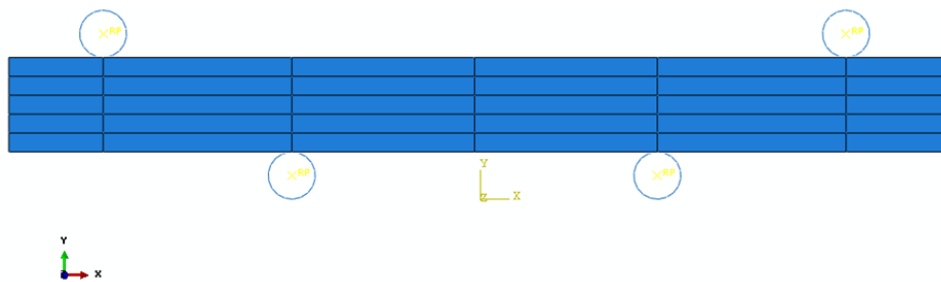
با توجه به رابطه $W = \mu(r)(I_1 - 3) + \mu'(r)(I_2 - 3)$ که $\mu(r) = \mu_1 \left(\frac{r}{r_1} \right)^n$ ، $\mu'(r) = \mu_1 \left(\frac{r}{r_1} \right)^m$

- 1 ABAQUS
- 2 Deformable
- 3 Partition



شکل ۲: مدل سازی مقطع نمونه، تکیه گاه‌ها و سنبه‌ها

Fig. 2. Modeling of sample section, supports and pins



شکل ۳: نمونه مدل شده

Fig. 3. Modeling of the sample

جدول ۱: مقادیر ثابت‌های تابع انرژی مونی-ریولین برای دو ماده لاستیک طبیعی و سیلیکون

Table 1. The values of the constants of the Moony-Rivlin energy function for the two materials of the natural rubber and silicon

سیلیکون	لاستیک طبیعی	تابع انرژی
$\mu_1 = 0.14 \text{MPa}$	$\mu_1 = 0.19 \text{MPa}$	مونی-ریولین
$\mu_2 = 0.23 \text{MPa}$	$\mu_2 = 0.15 \text{MPa}$	

شد. برای محاسبه n خواهیم داشت:

$$\mu(r) = 190e^3 \left(\frac{r}{r_2}\right)^n \xrightarrow{r=r_2} \mu(r) = 190e^3 \left(\frac{r_2}{r_2}\right)^n \Rightarrow \mu(r) = 190e^3 \quad (29)$$

$$\mu(r) = 190e^3 \left(\frac{r}{r_2}\right)^n \xrightarrow{r=r_1} 140e^3 = 190e^3 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n$$

که با یک \ln گیری ساده از طرفین مقدار n برابر با $n = 6/546$ خواهد شد. به روش مشابه $m = -9/162$ می‌باشد.

همچنین، نیاز به محاسبه شعاع خارجی و شعاع داخلی برای اختصاص دادن خواص به هر لایه می‌باشد. لایه درونی مقطع بعد از خمش از جنس سیلیکون و لایه بیرونی آن از جنس لاستیک طبیعی است و خواص ماده به تدریج از سیلیکون به لاستیک طبیعی تغییر

لایه باید دو مقدار $\mu(r), \mu'(r)$ که به ترتیب با C_1 و C_2 نشان داده شده است، مشخص شوند. برای این کار ابتدا به محاسبه مقادیر m و n پرداخته می‌شود:

طبق رابطه (۲۸) با توجه به این که لایه پایینی سازه از جنس سیلیکون و لایه بالایی آن، لاستیک طبیعی است، رابطه زیر برقرار است:

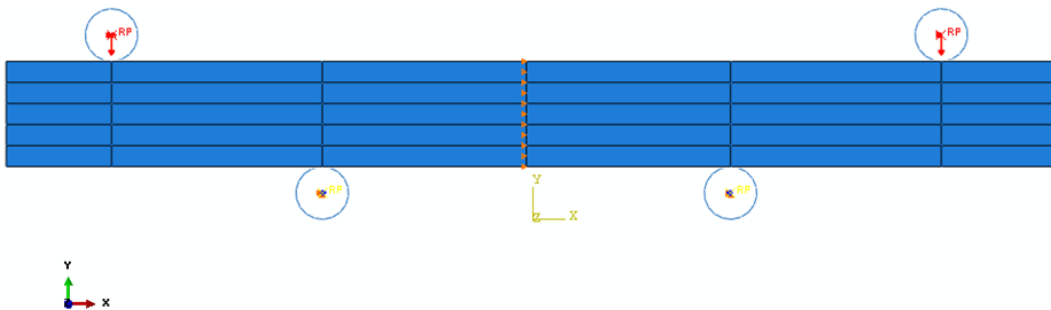
$$\mu(r) = \mu_{10} \left(\frac{r}{r_2}\right)^n \Rightarrow \mu(r) = 190e^3 \left(\frac{r}{r_2}\right)^n, \quad \mu(r) = 140e^3 \left(\frac{r}{r_1}\right)^n \quad (28)$$

به طوری که اگر $r = r_2$ باشد $\mu(r)$ برابر ثابت ماده لاستیک طبیعی و اگر $r = r_1$ باشد، $\mu(r)$ برابر ثابت ماده سیلیکون خواهد

جدول ۲: خواص ارائه شده به نرم افزار

Table 2. Defined properties for numerical Software

شماره لایه‌ها	C_{11} (Pa) ارائه شده به نرم افزار	C_{11} (Pa) ارائه شده به نرم افزار
لایه اول	۱۴۴۳۷۹,۷۲۷	۲۲۰۲۸,۹۵۴
لایه دوم	۱۵۳۴۸۷,۸۴۹	۲۰۲۲۱,۲۸۳
لایه سوم	۱۶۳۰۷۸,۱۵۸	۱۸۵۷۶,۶۶۹
لایه چهارم	۱۷۳۱۷۱,۳۸۱	۱۷۰۷۹,۰۹۹
لایه پنجم	۱۸۳۷۸۸,۹۳۳	۱۵۷۱۴,۲۵۸

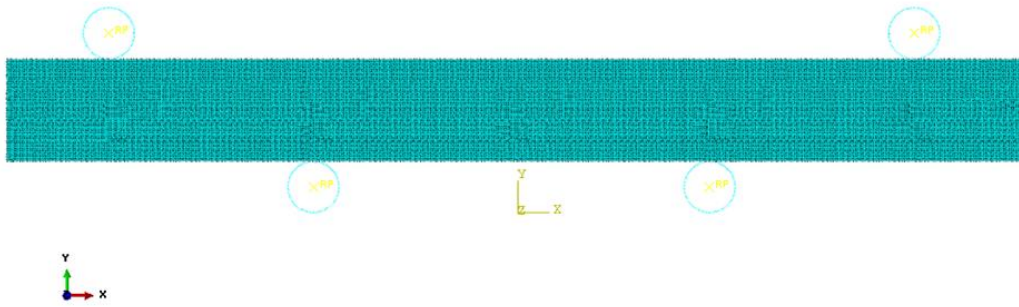


شکل ۴: نحوه اعمال جابجایی و شرط مرزی روی تکیه‌گاه‌ها

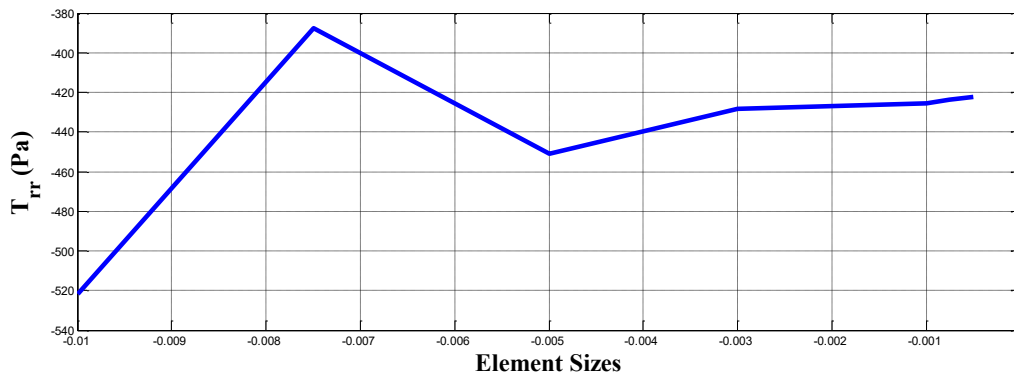
Fig. 4. Imposing the displacement and boundary condition on the supports

جدول ۲ خواص ارائه شده به آباکوس را نشان می‌دهد: تکیه‌گاه‌ها و سنبه‌های اعمال جابجایی به صورت مدل می‌شوند. برای تبیین شرایط مرزی سنبه بارگذاری، به این صورت عمل شده است که با تعریف یک نقطه به عنوان مرجع و نسبت دادن کل سنبه بارگذاری به آن نقطه و نهایتاً تعریف قید حرکت برای آن نقطه، شرایط مرزی سنبه بارگذاری مدل شده است. قید حرکت به این صورت است که فقط در یک راستا (راستای اعمال خمش) به اندازه $0/005$ متر حرکت می‌کند و در سایر جهات محدود می‌شود. تکیه‌گاه‌ها در تمام راستا مقید شده‌اند (صفر درجه آزادی). برای اینکه مقطع روی تکیه‌گاه‌ها حرکت نکند، صفحه میانی و عمود بر مقطع (و در راستای اعمال جابجایی)، مقید شده است تا فقط در راستای جابجایی سنبه حرکت کند. در شکل ۴ نحوه اعمال جابجایی و شرط مرزی روی تکیه‌گاه‌ها نشان داده شده است. برای اتصال بین مقطع با تکیه‌گاه‌ها و سنبه‌ها از تماس بدون

می‌یابد. برای محاسبه شعاع داخلی و خارجی ماده مدرج تابعی، به این صورت عمل می‌شود که ابتدا شعاع داخلی و خارجی دو ماده همگن لاستیک طبیعی و سیلیکون به صورت جداگانه محاسبه شده و سپس میانگین این دو شعاع به عنوان شعاع داخلی و خارجی ماده مدرج تابعی در نظر گرفته می‌شود. برای محاسبه شعاع داخلی و خارجی دو ماده همگن، دقیقاً از همان مدل سازی که برای ماده مدرج تابعی در نظر گرفته شده بود، استفاده می‌شود. پس از اعمال بارگذاری و خمش مقطع برای دو ماده همگن، مقادیر جابجایی عمودی لبه بالایی و پایینی مقطع، را محاسبه کرده و با استفاده از نرم افزار اکسل منحنی این جابجایی و همچنین معادله حاکم بر آن محاسبه می‌شود. با استفاده از رابطه شعاع انحناء، که به صورت رابطه $\frac{1}{\rho} = \frac{y'''}{(1+y''^2)^{3/2}}$ می‌باشد، برای محاسبه شعاع داخلی و خارجی، از این رابطه انتگرال‌گیری کرده و مقدار حاصله، بر اندازه طول قسمتی از مقطع که جابجایی عمودی نقاط آن محاسبه شد، تقسیم می‌شود.



شکل ۵: نحوه مش بندی نمونه
Fig. 5. Meshing of the model



شکل ۶: نمودار همگرایی مش
Fig. 6. Mesh Convergence graph

آمده از حل تحلیلی مقایسه خواهد شد. در شکل ۷ نحوه خمش مقطع بعد از اعمال جابجایی، نشان داده شده است.

۵- نتایج روش تحلیلی و عددی

در ابتدا مقایسه‌ای بین نتایج حل دقیق و نرم افزار در حالت همگن نشان می‌دهد که روش استفاده شده در مدل سازی نرم افزار برای حالت مدرج تابعی، با توجه به این که در حالت همگن، مدل سازی تا حدود زیادی با حل دقیق مطابقت دارد، صحیح می‌باشد. در شکل‌های ۸ تا ۱۰، مقایسه بین روش حل دقیق و نرم افزار در حالت همگن، به ترتیب برای تنش‌های کوشی شعاعی، محیطی و محوری بر حسب شعاع مقطع، نشان داده شده است.

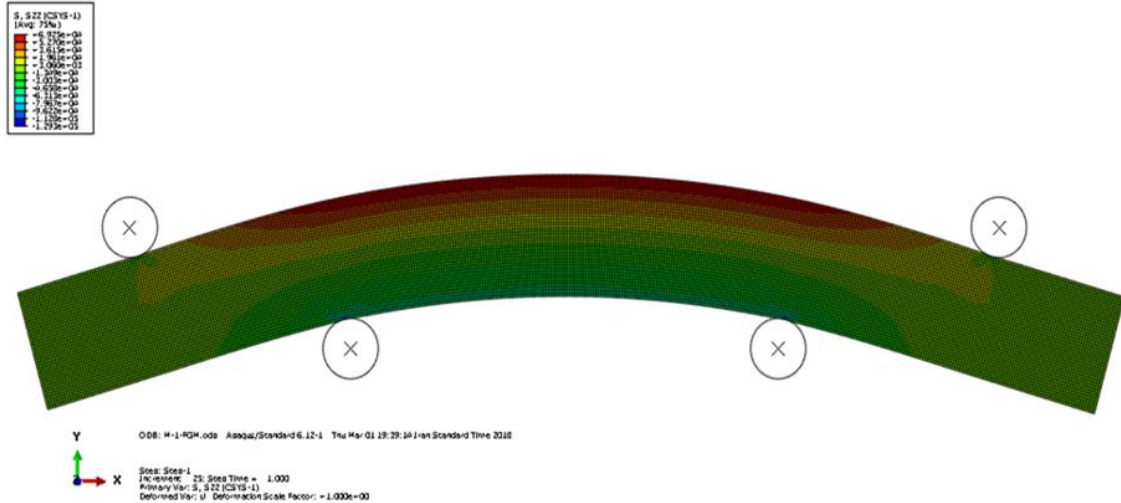
همچنین مقایسه‌ای بین نتایج حل دقیق در حالت همگن و غیرهمگن (مدرج تابعی)، نشان می‌دهد که چنانچه اگر درجه ناهمگنی (n, m) ، در رابطه تنش کوشی شعاعی به دست آمده برای ماده مدرج تابعی، برابر صفر قرار گیرد، نتیجه حاصله نشان دهنده رابطه تنش کوشی شعاعی برای مواد همگن می‌باشد [۳۶]، که این

اصطکاک استفاده شده است. مقطع با استفاده از المان چهار وجهی^۱ المان بندی شده است. المان از نوع ۸ نوده چهار ضلعی کرنش صفحه‌ای مرتبه چهارم هیبریدی کاهش یافته^۲ می‌باشد. برای به دست آوردن سائز مناسب مش‌ها مطالعه همگرایی مش^۳ صورت گرفته است که در ادامه به آن پرداخته خواهد شد. اندازه یا سائز مش $0.005/0$ در نظر گرفته شده است. همچنین برای المان بندی تکیه‌گاه‌ها و سنبه‌ها از المان ۲ نوده خطی دو بعدی صلب^۴ استفاده شده است. در شکل ۵ نحوه مش بندی نشان داده شده است.

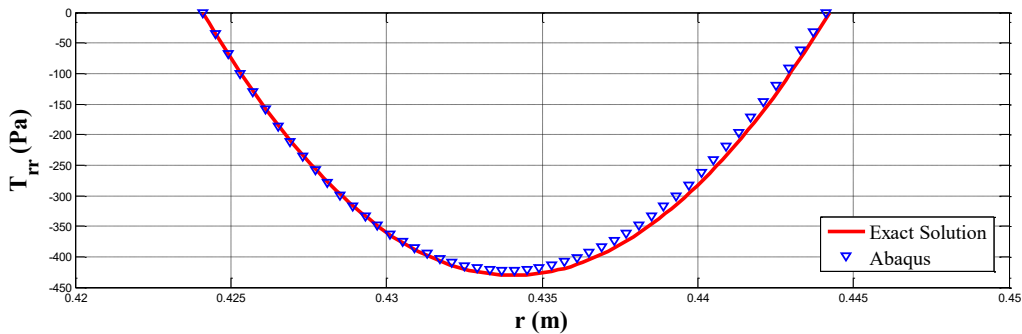
همان طور که در شکل ۶ قابل مشاهده است، سائز مش از $0.01/0$ تا $0.005/0$ در نظر گرفته شده و با توجه به شکل، نمودار از سائز مش $0.003/0$ به بعد تقریباً همگرا شده است.

در نهایت با تعریف یک job در ماژول job، مدل نهایی ایجاد شده برای تحلیل به نرم افزار ارائه می‌شود و نتایج با نتایج به دست

- 1 Quad-dominated
- 2 An 8-node biquadratic plane strain quadrilateral, hybrid, reduced integration (CPE8RH)
- 3 Mesh convergence study
- 4 A 2-node 2-D linear rigid link (R2D2)



شکل ۷: نحوه خمش مقطع بعد از اعمال جابجایی
Fig. 7. Bending of the cross section after applying the displacement



شکل ۸: مقایسه بین روش حل دقیق و حل عددی در حالت همگن برای تنش کوشی شعاعی
Fig. 8. Comparison between Exact Solution and numerical Solution in Homogeneous Mode for Radial Cauchy Stress

تنش کوشی شعاعی، کاهش یافته و همچنین این ماکزیمم مقدار در قسمت‌های داخلی تر سطح مقطع نمایان می‌شود. چنانچه نسبت تنش برای $n = 1$ و $n = 5$ در نقطه میانی محاسبه شود حدود $1/2$ بوده که بیانگر کاهش تنش با افزایش n می‌باشد و این بدان معنی است که با افزایش n ماده مقاوم‌تر شده، در نتیجه تنش کاهش می‌یابد. در شکل ۱۲ به بررسی تغییرات شعاع انحناء نسبت به افزایش n پرداخته شده است. نسبت ρ برای $n = 1$ و $n = 5$ حدود 0.9 بوده که بیانگر افزایش ρ با افزایش n می‌باشد پس با افزایش n شعاع انحناء زیاد شده که بیانگر افزایش مقاومت ماده در برابر تغییر شکل مقطع است. بنابراین با افزایش n مقاومت ماده در برابر تغییر شکل بیشتر، لذا تغییر شکل ماده کمتر می‌شود در نتیجه تنش کمتری به ماده در راستای اعمال جابجایی وارد می‌شود. در شکل‌های ۱۳ تا ۱۵ به ترتیب، مقایسه بین تنش‌ها بر حسب

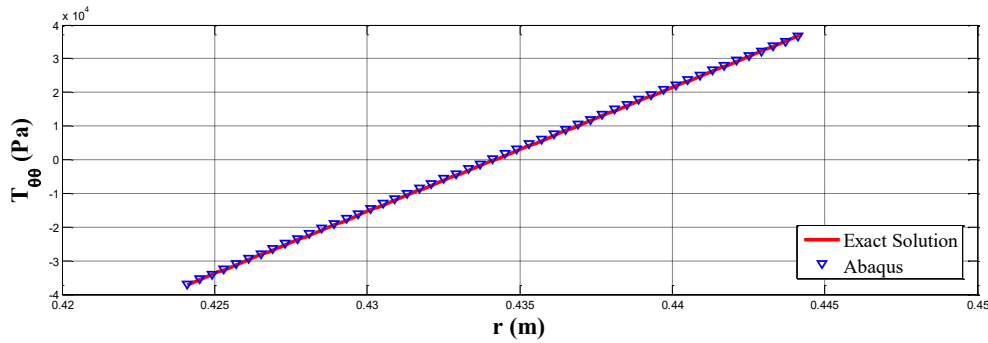
موضوع نیز خود تأکیدی بر درستی روابط حاکم بر مواد مدرج تابعی می‌باشد. رابطه (۳۰) به بررسی این موضوع می‌پردازد.

$$T_{rr}(r) = \frac{2\mu_{10}\rho^2}{(n-2)r_2^n}(r_1^{n-2} - r^{n-2}) + \frac{2\mu_{01}}{(m+2)\rho^2 r_2^m}(r^{m+2} - r_1^{m+2}) + \frac{2\mu_{10}}{(n+2)\rho^2 r_2^n}(r^{n+2} - r_1^{n+2}) \quad (30)$$

$$+ \frac{2\mu_{01}\rho^2}{(m-2)r_2^m}(r_1^{m-2} - r^{m-2}) \xrightarrow{n,m=0} T_{rr}(r) = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\rho^2}{r^2} + \frac{r^2}{\rho^2} - \frac{r_2}{r_1} - \frac{r_1}{r_2} \right)$$

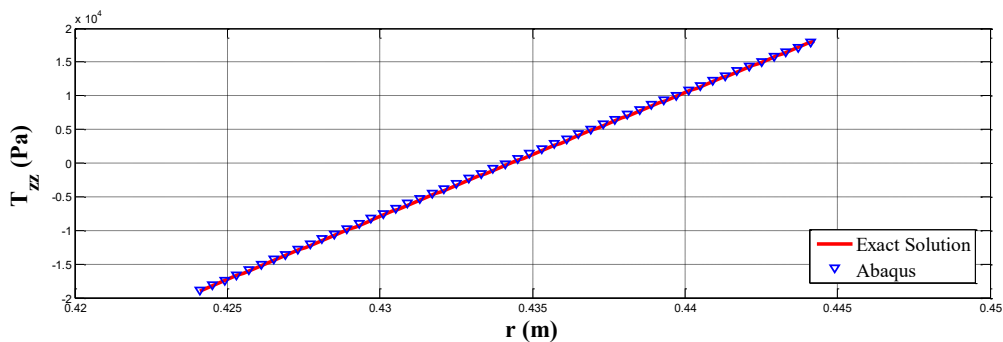
که μ مدول برشی ماده همگن بوده و برابر با $\mu = 2(\mu_1 + \mu_2)$ می‌باشد [۳۶].

در شکل ۱۱ به بررسی تغییرات تنش کوشی شعاعی بر حسب n ، با n های مختلف، برای حالت حل دقیق یا تحلیلی پرداخته شده است. همان طور که در شکل دیده می‌شود با افزایش n ، ماکزیمم مقدار



شکل ۹: مقایسه بین روش حل دقیق و حل عددی در حالت همگن برای تنش کوشی محیطی

Fig. 9. Comparison between Exact Solution and numerical Solution in Homogeneous Mode for Circumferential Cauchy stress



شکل ۱۰: مقایسه بین روش حل دقیق و حل عددی در حالت همگن برای تنش کوشی محوری

Fig. 10. Comparison between Exact Solution and numerical Solution in Homogeneous Mode for Axial Cauchy stress

درصد بوده که مقدار ناچیزی برای تغییرات می‌باشند. بنابراین می‌توان به این نتیجه رسید که با دقت قابل قبولی تعداد ۵ لایه می‌تواند نتایج مطلوب را حاصل کند. در شکل ۱۶، مقدار ماکزیمم تنش شعاعی بین چند لایه‌های مذکور نشان داده شده است.

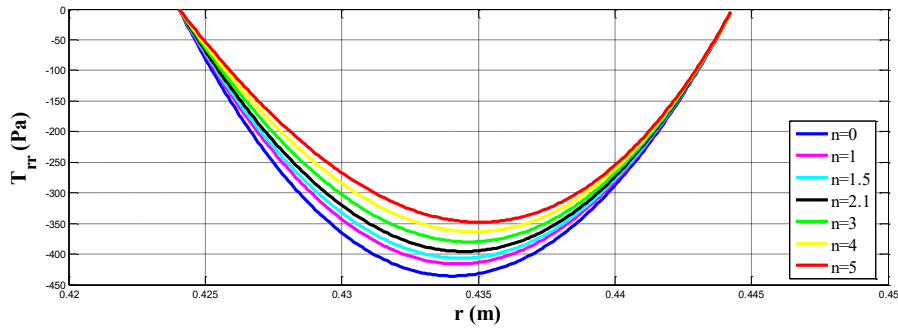
در شکل ۱۸ به بررسی اثر تغییر ضخامت، در تنش وارد شده به سطح مقطع پرداخته می‌شود. همانطور که در شکل دیده می‌شود با افزایش ضخامت سطح مقطع، با توجه به اینکه میزان خمش در هر سه مقطع یکسان می‌باشد، تنش نیز افزایش می‌یابد. واضح است که در مقاطع جدار نازک، تغییرات تنش اندک است ولی در مقاطع جدار ضخیم اینگونه نیست.

شکل ۱۹ به بررسی تغییر خواص در راستای ضخامت به صورت توانی می‌پردازد. مدل استفاده شده برای تغییر خواص در این مقاله به صورت خطی بوده و در این جا همانطور که اشاره شد، یک مقایسه برای توان‌های مختلف صورت گرفته است. معادله به کار برده شده برای بررسی تغییر خواص به صورت توانی، به صورت رابطه (۳۱)

شعاع، در دو حالت حل دقیق و حل نرم‌افزاری برای حالت مدرج تابعی، نشان داده شده است.

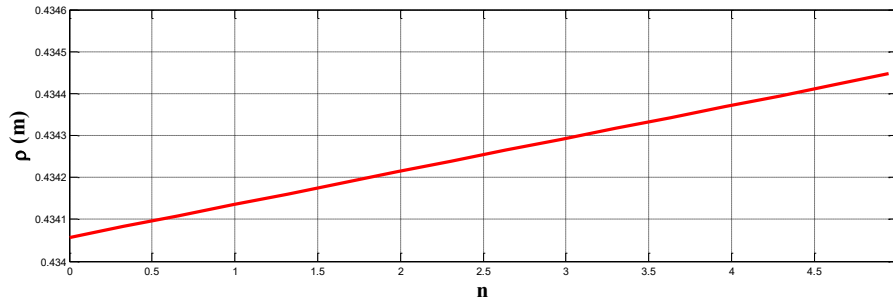
درصد خطای ایجاد شده بین دو روش حل دقیق و حل نرم‌افزاری برای سه تنش کوشی شعاعی، محیطی و محوری، به طور میانگین کمتر از ۱۰ درصد می‌باشد.

در مدل‌سازی المان محدود همان طور که قبلاً اشاره شد، تیر به صورت ۵ لایه مدل شد. در شکل ۱۶ و ۱۷ یک مقایسه بین حالت ۵ لایه، ۱۰ لایه، ۱۵ لایه و ۲۰ لایه انجام شده است که حاکی از اختلاف ناچیز بین مقادیر تنش شعاعی در مدل‌ها است و توجیه کننده علت استفاده از مدل ۵ لایه در این مقاله می‌باشد. یکی از روش‌های مرسوم برای مدل‌سازی رفتار مواد مدرج تابعی، لایه لایه در نظر گرفتن آن‌هاست (کرنش صفحه‌ای یا تنش صفحه‌ای) [۳۹]. هر چه تعداد لایه‌ها افزایش یابد، رفتار ماده به رفتار مواد مدرج تابعی نزدیک‌تر می‌شود. با توجه به شکل ۱۶، تغییر تعداد لایه‌ها موجب تغییر در تنش‌های شعاعی می‌شود. اما این تغییرات در حدود ۰/۳۴



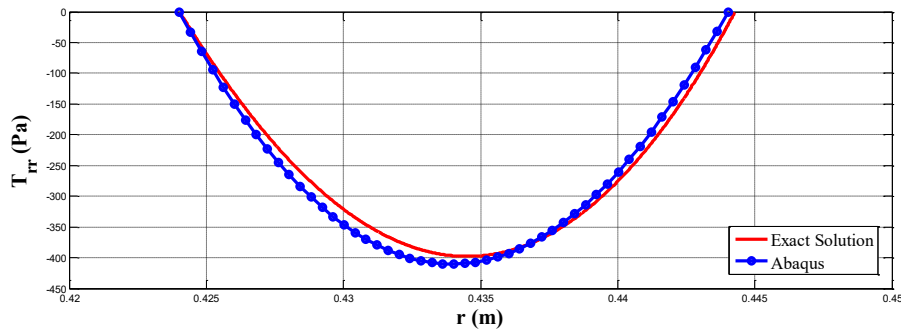
شکل ۱۱: بررسی تغییرات تنش کوشی شعاعی بر حسب r با n های مختلف

Fig. 11. Investigation of the variation of the radial Cauchy stress in r for different n



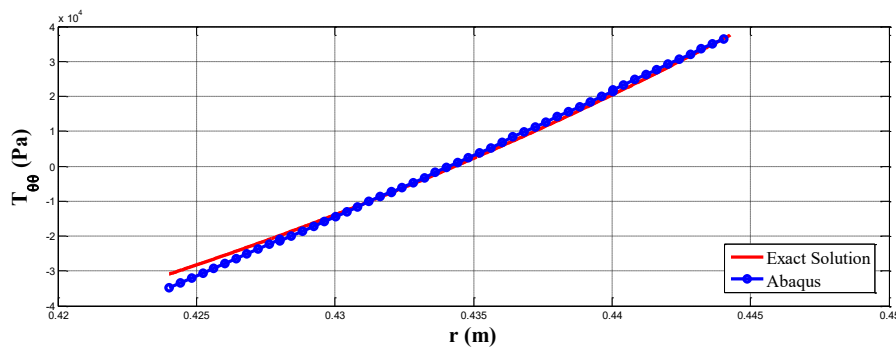
شکل ۱۲: بررسی تغییرات شعاع انحناء نسبت به n

Fig. 12 Investigation of the curvature radius changes relative to n



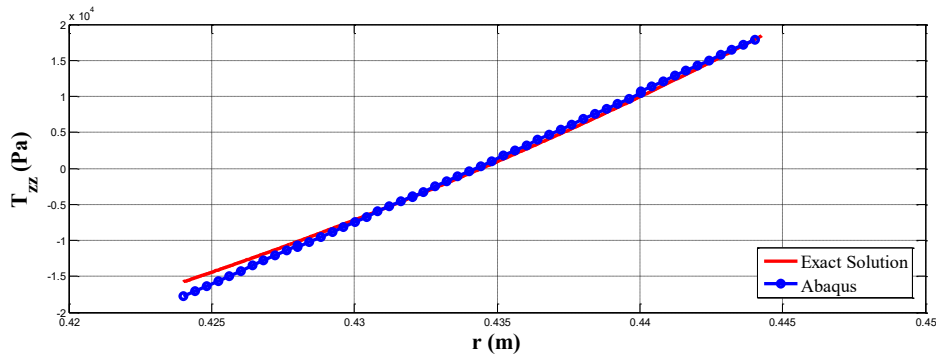
شکل ۱۳: مقایسه نتایج حل تئوری و عددی برای تنش کوشی شعاعی

Fig. 13. Comparison of theoretical and numerical solution results for radial Cauchy stress



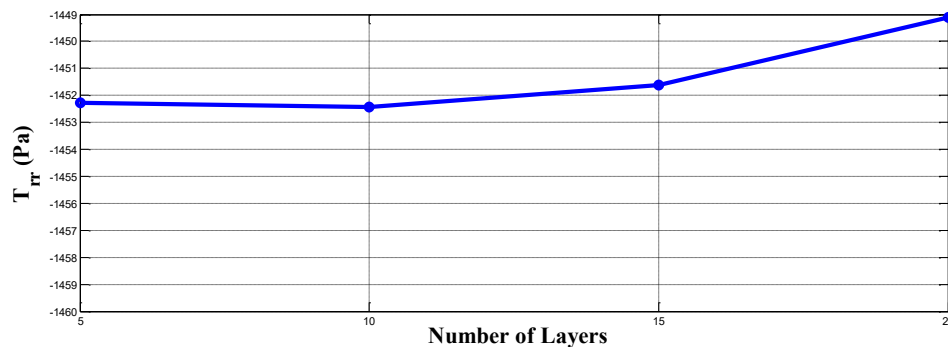
شکل ۱۴: مقایسه نتایج حل تئوری و عددی برای تنش کوشی محیطی

Fig. 14. Comparison of theoretical and numerical solution results for circumferential Cauchy stress



شکل ۱۵: مقایسه نتایج حل تئوری و عددی برای تنش کوشی محوری

Fig. 15. Comparison of numerical and theoretical solution results for axial Cauchy stress



شکل ۱۶: مقایسه مقدار تنش شعاعی ماکزیمم، بین مدل‌های ۵ لایه، ۱۰ لایه، ۱۵ لایه و ۲۰ لایه

Fig. 16. Comparison of maximum radial stress values between 5 layers, 10 layers, 15 layers and 20 layers

می‌کند. اما مزیت کار این مقاله، در این است که از معادلات تعادل مستقیم انتگرال‌گیری کرده و هیچ خطایی ناشی از روش عددی در آن وجود ندارد.

همان‌طور که در بالا اشاره شد، با توجه به اشکال ۱۳ تا ۱۵ و مقایسه دو روش مشخص می‌شود که یک هم‌پوشانی تقریباً مناسبی بین دو روش تحلیلی و عددی وجود دارد و با توجه به اینکه در روش عددی به جای کد نویسی در نرم‌افزار از روش جایگزین ساده‌تری برای مدل‌سازی ماده غیر همگن استفاده شده است، نتایج حاصل از نرم‌افزار تقریباً با نتایج حل دقیق متناسب می‌باشند.

۷- نتیجه‌گیری

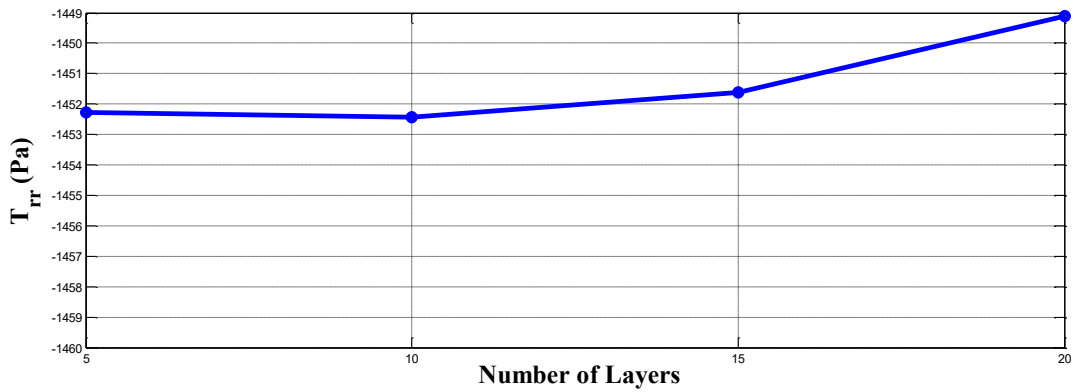
در این پژوهش، مدل‌سازی رفتار هایپرالاستیک لاستیک‌های ناهمگن مدرج تابعی تحت بارگذاری خمشی و استخراج روابط تنش کوشی حاکم بر سطح مقطع، ناشی از این بارگذاری صورت گرفته است. برای مدل‌سازی از تابع انرژی مونی-ریولین تعمیم یافته استفاده شده و تغییر خواص در راستای شعاعی در نظر گرفته شده و تغییرات

می‌باشد [۴۰].

$$\mu(r) = \mu_{10Si} + (\mu_{10NR} - \mu_{10Si}) \left[\frac{r^n - r_1^n}{r_2^n - r_1^n} \right] \quad (31)$$

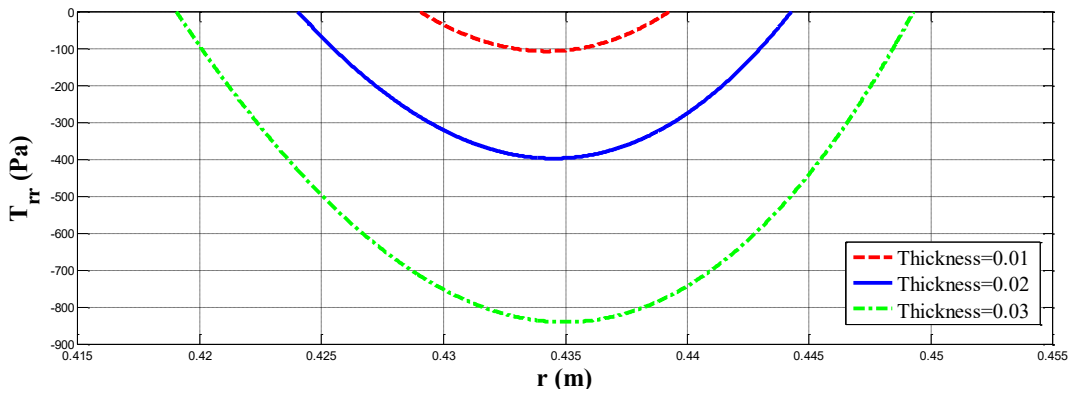
۶- نتایج و بحث

با استفاده از روش به کار گرفته شده در فرمول‌بندی روابط ساختاری در این مقاله، معادلات جدیدی برای توصیف رفتار مقطع مستطیلی هایپرالاستیک تراکم‌ناپذیر ایزوتروپ ناهمگن تحت خمش به دست می‌آید. با مقایسه روش حل دقیق به کار گرفته شده در این مقاله با مدل عددی، نتیجه گرفته می‌شود که این روابط دقت خوبی دارند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که فرضیات ساده‌کننده‌ای از جمله صفر بودن تنش‌های برشی، فرضیات خوب و صحیحی هستند. در حل عددی، از دو فرم قوی معادلات مثل روش ریتز که از سری‌ها کمک گرفته می‌شود؛ و فرم ضعیف معادلات مانند المان محدود در آباکوس که در آن از انتگرال‌گیری بهره گرفته می‌شود، استفاده می‌شود، که در هر دو روش تقریب وجود دارد و طبیعتاً در جواب‌ها خطا ایجاد



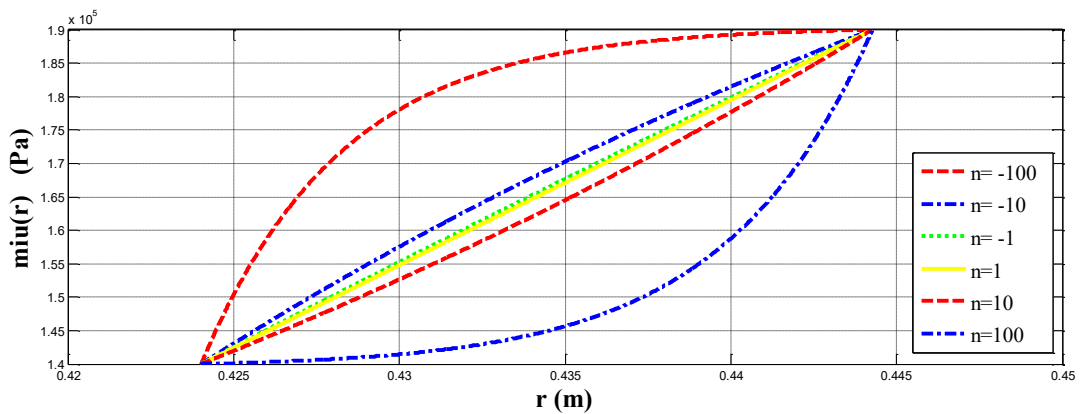
شکل ۱۷: مقایسه مقدار تنش شعاعی، بین مدل‌های ۵ لایه، ۱۰ لایه، ۱۵ لایه و ۲۰ لایه

Fig. 17. Comparison of radial stress values between 5 layers, 10 layers, 15 layers and 20 layers



شکل ۱۸: بررسی اثر تغییر ضخامت در تنش وارده به سطح مقطع

Fig. 18. Effect of the change of the thickness in the stress applied to the cross-section



شکل ۱۹: بررسی تغییر خواص در راستای ضخامت به صورت توانی

Fig. 19. Changing of the properties along the thickness in power mode

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ کشش‌های اصلی
 μ مدول برشی ماده، Pa
 μ_{10}, μ_{01} ثوابت تابع انرژی مونی-ریولین، Pa
 ρ شعاع انحناء، m

مراجع

- [1] Y. Anani, G.H. Rahimi, Modeling of hyperelastic behavior of functionally graded rubber under mechanical and thermal load, (2016).
- [2] L. R. G. Terloar, The Physics of Rubber Elasticity, Oxford University Press, New York, (2005).
- [3] E. M. Arruda, M. C. Boyce, A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 41(2) (1993) 389-412.
- [4] H. M. James, E. Guth, Theory of the elastic properties of rubber, The Journal of Chemical Physics, 11(10) (1943) 455-481.
- [5] P. Flory, Theory of elasticity of polymer networks. The effect of local constraints on junctions, The Journal of Chemical Physics, 66(12) (1977) 5720-5729.
- [6] F. T. Wall, P. J. Flory, Statistical thermodynamics of rubber elasticity, The Journal of Chemical Physics, 19(12) (1951) 1435-1439.
- [7] L. A., A Constitutive Model for Carbon Black Filled Rubber: Experimental Investigation and Mathematical Representation, j. of Continuum Mechanics and Thermodynamics, 8(3) (1996) 153-169.
- [8] T. J. Van Dyke, A. Hoger, A comparison of second-order constitutive theories for hyperelastic materials, International journal of solids and structures, 37(41) (2000) 5873-5917.
- [9] B. Meissner, L. Matějka, Comparison of recent rubber-elasticity theories with biaxial stress-strain data: the slip-link theory of Edwards and Vilgis, Polymer, 43(13) (2002) 3803-3809.
- [10] M. M. Attard, Finite strain—isotropic hyperelasticity, International Journal of Solids and Structures, 40(17)

ناهمگنی نیز بررسی و ارائه گردید. در نهایت نتایج تحلیلی به دست آمده با نتایج عددی مقایسه شده و مشخص گردیده که توابع به کار برده شده، با تقریب بسیار خوبی رفتار ماده را توصیف می‌کنند.

با توجه به نتایج به دست آمده، موارد زیر نتیجه‌گیری می‌شود:

۱) روش استفاده شده جهت تحلیل و بررسی رفتار خمشی ماده مدرج تابعی و استخراج روابط تنش‌های کوشی، با تقریب نسبتاً خوبی رفتار ماده را با توجه به نتایج عددی توصیف می‌کند.

۲) نحوه مدل کردن مواد مدرج تابعی در نرم افزار آباکوس به صورت لایه لایه‌ای و معین کردن خواص هر لایه به صورت تدریجی، می‌تواند تا حدود زیادی مدل‌سازی مناسب این گونه مواد را در نرم افزار، امکان‌پذیر کند.

۳) با مدل سازی مواد مدرج تابعی در نرم افزار آباکوس، مشخص شد که افزایش تعداد لایه‌ها برای مدل کردن این گونه مواد، تأثیر چندانی در افزایش دقت تحلیل این نرم افزار ندارد.

فهرست علائم

علائم انگلیسی

B	تانسور کوشی-گرین چپ
B^{-1}	معکوس تانسور کوشی گرین چپ
C_1, C_2	ثوابت تابع انرژی مونی-ریولین تعمیم یافته، Pa
F	تانسور گرادیان تغییر شکل
I	تانسور یکه (ماتریس همانی)
I_1, I_2, I_3	نوردهای اصلی تانسور کوشی گرین چپ
n, m	درجه ناهمگنی ماده
p	فشار هیدرواستاتیک، Pa
r	شعاع مقطع پس از خمش، m
r_1, r_2	شعاع داخلی و خارجی مقطع پس از خمش، m
T	تانسور تنش کوشی
T_{rr}	تنش کوشی شعاعی، Pa
$T_{\theta\theta}$	تنش کوشی محیطی، Pa
T_{zz}	تنش کوشی محوری، Pa
W	تابع انرژی
X, Y, Z	مختصات کارتزین
r, θ, z	مختصات استوانه‌ای

علائم یونانی

λ کشیدگی

- to moderate strains, *Computers & structures*, 84(15-16) (2006) 1012-1028.
- [22] A. J. Gil, B. J., Wrinkling analysis of prestressed hyperelastic Saint Venant-Kirchhoff membranes, In: Metro R, editor. *Shell and spatial structures: from models to realization*. IASS, (2004).
- [23] E. S. Flores, S. Adhikari, M. Friswell, F. Scarpa, Hyperelastic finite element model for single wall carbon nanotubes in tension, *Computational Materials Science*, 50(3) (2011) 1083-1087.
- [24] E. Bilgili, Modelling mechanical behaviour of continuously graded vulcanised rubbers, *Plastics, rubber and composites*, 33(4) (2004) 163-169.
- [25] R. Batra, Finite plane strain deformations of rubberlike materials, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15(1) (1980) 145-156.
- [26] E. Bilgili, Controlling the stress-strain inhomogeneities in axially sheared and radially heated hollow rubber tubes via functional grading, *Mechanics Research Communications*, 30(3) (2003) 257-266.
- [27] R. Batra, Optimal design of functionally graded incompressible linear elastic cylinders and spheres, *AIAA journal*, 46(8) (2008) 2050-2057.
- [28] G. Nie, R. Batra, Material tailoring and analysis of functionally graded isotropic and incompressible linear elastic hollow cylinders, *Composite structures*, 92(2) (2010) 265-274.
- [29] G. Nie, R. Batra, Exact solutions and material tailoring for functionally graded hollow circular cylinders, *Journal of Elasticity*, 99(2) (2010) 179-201.
- [30] G. Nie, Z. Zhong, R. Batra, Material tailoring for functionally graded hollow cylinders and spheres, *Composites Science and Technology*, 71(5) (2011) 666-673.
- [31] R. Batra, Material tailoring and universal relations for axisymmetric deformations of functionally graded rubberlike cylinders and spheres, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 16(7) (2011) 729-738.
- [32] R. Batra, Material tailoring in finite torsional (2003) 4353-4378.
- [11] M. M. Attard, G. W. Hunt, Hyperelastic constitutive modeling under finite strain, *International Journal of Solids and Structures*, 41(18-19) (2004) 5327-5350.
- [12] L. Treloar, Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation, *Transactions of the Faraday Society*, 40 (1944) 59-70.
- [13] M. M. Attard, Finite strain—beam theory, *International journal of solids and structures*, 40(17) (2003) 4563-4584.
- [14] M. M. Attard, G. W. Hunt, Column buckling with shear deformations—a hyperelastic formulation, *International Journal of Solids and Structures*, 45(14-15) (2008) 4322-4339.
- [15] M. M. Attard, M. Y. Kim, Lateral buckling of beams with shear deformations—A hyperelastic formulation, *International Journal of Solids and Structures*, 47(20) (2010) 2825-2840.
- [16] Y. Anani, Behavioral Modeling of Large-Deformed Rubber Based on the Model of Visco-Hyperelastic and Comparison with Experimental Results, Master's Thesis, Mechanical Engineering of Sharif University of Technology (2007).
- [17] A. Z. Kafi M. A., Bazaz M., Use of Hyperelastic materials to increase the stiffness of braces, *First National Conference on Structural and Steel*, Steel Structures Association of Iran, Tehran, (2010).
- [18] M. Saje, G. Jelenić, Finite element formulation of hyperelastic plane frames subjected to nonconservative loads, *Computers & structures*, 50(2) (1994) 177-189.
- [19] H. Altenbach, V. Eremeyev, On the effective stiffness of plates made of hyperelastic materials with initial stresses, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 45(10) (2010) 976-981.
- [20] N. Kumar, A. DasGupta, On the contact problem of an inflated spherical hyperelastic membrane, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 57 (2013) 130-139.
- [21] A. J. Gil, Structural analysis of prestressed Saint Venant-Kirchhoff hyperelastic membranes subjected

- [36] L. M. Kanner, C. O. Horgan, Plane strain bending of strain-stiffening rubber-like rectangular beams, in: *International Journal of Solids and Structures*, 2008, pp. 1713-1729.
- [37] Y. B. Fu, R. W. Ogden, *Nonlinear elasticity: theory and applications*, Cambridge University Press, 2001.
- [38] L. Meunier, G. Chagnon, D. Favier, L. Orgéas, P. Vacher, Mechanical experimental characterisation and numerical modelling of an unfilled silicone rubber, *Polymer Testing*, 27(6) (2008) 765-777.
- [39] A. A. Khan, M. Naushad Alam, M. Wajid, Finite element modelling for static and free vibration response of functionally graded beam, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 13(4) (2016) 690-714.
- [40] M. Foroutan, R. Moradi-Dastjerdi, R. Sotoodeh-Bahreini, Static analysis of FGM cylinders by a mesh-free method, *Steel & Composite Structures*, 12(1) (2012) 1-11.
- deformations of axially graded Mooney–Rivlin circular cylinder, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 20(2) (2015) 183-189.
- [33] Y. Anani, R. Naghdabadi, R. Avazmohammadi, Modeling of visco-hyperelastic behavior of foams in uniaxial tension, *Proceedings of The 16th International Conference on Iranian Society of Mechanical Engineering (ISME 2008)* Kerman, Iran. (in Persian), (2008).
- [34] Y. Anani, R. Naghdabadi, Modeling of visco-hyperelastic behavior of rubbers in uniaxial tension, *Proceedings of 7th Conference of Iranian Aerospace Society (AERO 2008)*, Tehran, Iran. (in Persian), (2008).
- [35] Y. Anani, G. H. Rahimi, Field equations and general solution for axisymmetric thick shell composed of functionally graded incompressible hyperelastic materials, *International Journal of Mechanical Sciences*, (2017).