



حل عددی جریان چندلایه هسته - حلقه با روان کار ویسکوپلاستیک به روش المان طیفی

مهران پارسایی^۱، محمد سفید^۱، علی اکبر دهقان^{۱*}، آزاده جعفری^۲، احسان ایزدپناه^۳

^۱دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران

^۲دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران

^۳دانشکده مهندسی، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷-۰۶-۲۰

بازنگری: ۱۳۹۷-۰۹-۲۱

پذیرش: ۱۳۹۷-۱۱-۱۵

ارائه آنلاین: ۱۳۹۷-۱۱-۲۰

کلمات کلیدی:

روش المان طیفی

جریان هسته - حلقه

کانال دوبعدی

روان کار ویسکوپلاستیک

حل نیمه تحلیلی

خلاصه: هدف پژوهش حاضر شبیه‌سازی جریان چندلایه از نوع هسته-حلقه درون یک کانال دوبعدی است که در آن سیال نیوتنی در هسته قرار گرفته و بوسیله سیال ویسکوپلاستیک از نوع نظم‌یافته بینگهام به عنوان روان کار احاطه شده است. این شبیه‌سازی بر اساس تکنیک حجم سیال انجام گرفته است. معادلات جریان و غلظت، به روش المان طیفی گسسته‌سازی مکانی شده‌اند. طرح تصحیح سرعت، به عنوان یک الگوریتم مرتبه بالا، برای جداسازی متغیرهای سرعت و فشار برای جریان دو فاز با روان کار ویسکوپلاستیک، توسعه داده شده است. اعمال فرضیات جریان توسعه یافته، منجر به معادله غیرخطی در ناحیه پلاستیک جریان می‌شود که به صورت عددی حل شده و به عنوان حل نیمه تحلیلی شناخته می‌شود و برای اعتبار سنجی نتایج المان طیفی، در کنار کارهای گذشته، استفاده شده است. اثر پارامترهای اصلی جریان، یعنی عدد بینگهام، نسبت لزجت دو سیال و ضخامت هسته، بر افت فشار و ضخامت ناحیه تسلیم نشده مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که عدد بینگهام تأثیر بیشتری بر افت فشار و ضخامت ناحیه تسلیم نشده دارد. همچنین توزیع متغیرهای ثانویه، شامل لزجت ظاهری و تنش برشی، در مقطع کانال ارائه شده و نشان می‌دهد وجود اختلاط در مرز دو سیال، باعث تفاوت بین حل عددی و نیمه تحلیلی می‌گردد.

۱- مقدمه

در این حوزه گردید که تا حال ادامه دارد. دو هدف عمده در اکثر این کارها دنبال می‌شود؛ که یکی مبتنی بر تشخیص الگوی هیدرودینامیک حاکم بر جریان و تعیین افت فشار و توان پمپاژ است و دیگری متمرکز بر تعیین شرایطی است که در آن این الگوی جریان، در مدت زمان طولانی و در یک طول مسیر قابل توجه، پایدار بماند [۴].

یک استراتژی مهم برای حل مسأله پایداری جریان استفاده از سیال ویسکوپلاستیک به عنوان روان کار است. سیالات ویسکوپلاستیک در دسته سیالات لزج خالص قرار می‌گیرند. مشخصه رفتاری چنین سیالی، وجود تنش تسلیم، τ_y ، است که شرط لازم برای تغییر فرم ویسکوز گذشتن تنش اعمالی خارجی از مقدار آن است و پس از آن رفتار تنش- کرنش ممکن است خطی و یا غیر خطی باشد؛ و اگر به عکس، مقدار تنش اعمالی از تنش تسلیم کمتر باشد رفتار جامد از خود نشان می‌دهند. گل حفاری، مواد غذایی، بیولوژیک، معدنی، مذاب آتشفشان و بسیاری از پلیمرهای صنعتی در دسته سیالات

آرایش جریان دو سیال غیر قابل اختلاط در کانال به نحوی که معمولاً سیال با لزجت کمتر در ناحیه با نرخ برش بیشتر- یعنی در مجاورت مرز جامد- مانند یک روان کار قرار گیرد، به صورت عمده، در انتقال سیالات سنگین، اکستروژن و پوشش سطحی قابل مشاهده است. در این حالت، یک الگوی هسته-حلقه یا چندلایه ساندویچی (در حالت دوبعدی) شکل می‌گیرد [۱]. البته شایان ذکر است که مهمترین بخش از کاربردهای جریان هسته-حلقه به انتقال سیالات سنگین و به ویژه انتقال نفت سنگین، بوسیله روان کار آب، مربوط است که در سالهای اخیر تقاضا برای آن به نحو چشمگیری افزایش یافته است [۲].

ایده تزریق آب به خط لوله انتقال نفت برای کاهش افت فشار و در نتیجه توان پمپاژ، نخستین بار در ۱۹۵۰ میلادی بوسیله کلارک و شاپیرو [۳] مطرح شد و منجر به دسته ای مهم از کارهای پژوهشی

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: adehghan@yazd.ac.ir

می‌باشد و در کار حاضر به عنوان مدل مشخصه سیال ویسکوپلاستیک مورد استفاده قرار می‌گیرد. در معادله (۴)، ε مقدار بسیار کوچکی است که پارامتر تنظیم نامیده می‌شود.

ایده استفاده از سیال ویسکوپلاستیک به عنوان روان کار و در مجاورت مرز جامد، نخستین بار بوسیله فریگارد [۹] مطرح شد. بر اساس این ایده چنانچه تنش در مرز دو سیال به مقدار تنش تسلیم، τ_Y ، نرسیده باشد، یک توده تسلیم نشده در فصل مشترک دو سیال شکل می‌گیرد که مانند یک دیوار دو سیال را از هم جدا نموده و مانع ناپایداری جریان می‌شود. فریگارد به بررسی پایداری خطی جریان چند لایه مربوط به دو سیال ویسکوپلاستیک، درون کانال دوبعدی پرداخت و استنتاج کرد چنانچه سیال نزدیک به مرز جامد تنش تسلیم بیشتری داشته باشد، پایداری جریان از حالتی که تنها سیال ویسکوپلاستیک هسته (با تنش تسلیم کمتر و یا صفر) درون کانال باشد، بیشتر است و همچنین به صورت مشخص و متمایزی این جریان نسبت به جریان مشابه دو سیال نیوتنی و یا نیوتنی تعمیم‌یافته- که در آن ناپایداری‌های با طول موج کوتاه، حتی در رینولدزهای پایین بین دو لایه دیده می‌شد- پایدارتر است.

هوون و همکاران [۱۰] به مشاهده آزمایشگاهی جریان هسته-حلقه با روان کار ویسکوپلاستیک پرداختند. این کار آزمایشگاهی متشکل از چهار نوبت آزمایش با استفاده از محلول کربوپال^۲ به عنوان روان کننده ویسکوپلاستیک با غلظت‌های مختلف و در نتیجه خواص رئولوژیکی متفاوت بود. در هر مورد جریان پایدار پیش‌بینی شده بوسیله تئوری مشاهده شد. همچنین مشاهده شده بود که علاوه بر پایداری، این جریان در دبی‌های مختلف و نسبت‌های مختلف شعاع هسته به حلقه، کاملاً متقارن است. در هر حال، آزمایش به دلیل محدودیت در توان پمپاژ دبی‌های مختلف و نیز از لحاظ تنوع خواص رئولوژیکی به دلیل نوع سیال، امکان مطالعه جامع را در این حوزه ندارد.

هرمزی و همکاران به بررسی عددی جریان با حلقه ویسکوپلاستیک درون لوله [۱۱] و کانال دوبعدی [۱۲] پرداختند. تمرکز آنان نخست بر این جنبه بود که چگونه می‌توان چنین جریانی را برقرار نمود. برای تضمین وجود توده تسلیم نشده در فصل مشترک دو سیال،

ویسکوپلاستیک هستند [۵]. سه مدل ریاضی متداول برای توصیف رفتار سیالات ویسکوپلاستیک وجود دارد؛ شامل بینگهام، کیسون و هرشل-بالکلی که از این میان مدل بینگهام ساده‌ترین و متداول‌ترین مدل است [۶] که به صورت:

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_{ij} = 0 & \text{for } \tau(\dot{\gamma}) \leq \tau_Y, \\ \tau_{ij} = \left(\frac{\tau_Y}{\dot{\gamma}} + \mu_B \right) \dot{\gamma}_{ij} & \text{for } \tau(\dot{\gamma}) > \tau_Y, \end{cases} \quad (1)$$

می‌باشد. که در آن μ_B ، لزجت سیال بینگهام در ناحیه تسلیم است و پارامترهای $\tau(\dot{\gamma})$ و $\dot{\gamma}$ به ترتیب اسکالره‌های تنش و نرخ کرنش هستند؛ که به صورت:

$$\tau(\dot{\gamma}) = \sqrt{\frac{1}{r} \left[\sum_{i,j=1}^r \tau_{ij}^2 \right]}, \quad \dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{r} \left[\sum_{i,j=1}^r \dot{\gamma}_{ij}^2 \right]}, \quad (2)$$

تعریف می‌شوند. که در آن:

$$\dot{\gamma}_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}, \quad (3)$$

مؤلفه تانسور نرخ کرنش است.

معادله بینگهام یک معادله دوضابطه‌ای است و بهتر است یک منحنی هموار تک‌ضابطه را جایگزین رابطه تکه‌ای (۱) نمود که در مسائل ریاضی کار با آن راحت‌تر است. از نظر فیزیکی نیز لزجت بینهایت در شرایط تسلیم، قابل قبول نیست و منطقی‌تر است که لزجت بزرگ ولی محدود باشد [۷]. بنابراین باید به دنبال یک مدل هموار بود که رابطه تنش-کرنش سیال بینگهام را برازش کند. به این گونه مدل‌ها که همراه با معرفی پارامترهای برازش منحنی هستند، مدل‌های نظم‌یافته^۱ گویند. مدل‌های نظم یافته زیادی ارائه شده است. یکی از دقیق‌ترین مدل‌ها، توسط برکوویر و انگلمن [۸] پیشنهاد شده است، که به صورت:

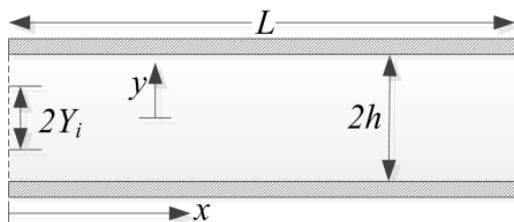
$$\tau_{ij} = \left(\frac{\tau_Y}{\sqrt{\dot{\gamma}^2 + \varepsilon^2}} + \mu_B \right) \dot{\gamma}_{ij}, \quad (4)$$

مکانی معادلات جریان و معادلات مشخصه است. اهمیت روش‌های مرتبه بالا از این جهت است که در آن‌ها، مرتبه اندازه خطای تقطیع عددی، در قیاس با دامنه ناپایداری‌های فیزیکی موجود در جریان، قابل صرف نظر است و بنابراین در جریان با ناپایداری‌های فیزیکی با دامنه کم و با فرکانس زیاد، استفاده از روش‌های مرتبه بالا باعث می‌شود که مدهای مزاحم عددی مانع فهم درست فیزیک جریان نشوند؛ به خصوص زمانی که مسأله پایداری جریان مطرح است [۱۵]. در کار حاضر قدم‌های اولیه در این مسیر برداشته شده است و زیربنای یک حل عددی مرتبه بالا فراهم شده است. و البته حجم محاسبات و فضای حافظه و زمان پردازش هم به نحو چشم‌گیری کاهش می‌یابد. ضرورت دیگر کار حاضر در بررسی متغیرهای ثانویه، نظیر تنش برشی و لزجت ظاهری جریان دوفاز مطرح شده می‌باشد. همچنین تلاش شده است که یک حل تحلیلی برای جریان توسعه یافته جریان هسته- حلقه نیوتنی- ویسکوپلاستیک بر اساس مدل نظم‌یافته برکوویر- انگلن ارائه شود که قبل از این در کار دیگری مشاهده نشده است.

۲- تئوری حاکم

۲-۱- معادلات مدل

طرحواره مسأله حاضر، که در شکل ۱ نشان داده شده است، کانالی به طول $L = 0.8 \text{ m}$ و عرض $h = 0.1 \text{ m}$ می‌باشد که در ابتدا حاوی سیال ویسکوپلاستیک، در حالت سکون است. در لحظه $t = 0$ گرادیان فشار اعمال شده و همزمان سیال هسته از طریق ورودی به عرض $2Y_i$ وارد می‌شود. سرعت هر دو سیال ثابت فرض می‌شود به گونه‌ای که لغزشی نسبت به هم ندارند و از اثر کشش سطحی بین دو سیال صرف‌نظر می‌گردد. متوسط سرعت ورودی به کانال برابر U می‌باشد که در مسأله حاضر مقدار ثابتی برای آن فرض



شکل ۱: طرحواره مسأله حاضر
Fig. 1. The sketch of the problem

مقدار عدد رینولدز کمتر از ۱۰۰ در نظر گرفته شد. آنان مشاهده کردند ناپایداری اولیه و اختلاط نامنظم در ناحیه جلویی جریان شکل می‌گیرد و با خروج از انتهای لوله یک جریان پایدار را در پشت خود به جا می‌گذارد. آنان به بررسی طول ناحیه در حال توسعه در چنین جریانی پرداختند و برای هندسه لوله [۱۱] نتایج خود را با کار آزمایشگاهی هوون و همکاران [۱۰] مقایسه کردند. طول ناحیه در حال توسعه با افزایش عدد رینولدز افزایش می‌یابد و با افزایش عدد بینگهام و نسبت لزجت دو سیال کاهش می‌یابد. جنبه دوم کار آنان بر پایداری جریان تمرکز داشت. آنان کد عددی را نخست برای جریان چند لایه دو سیال نیوتنی به کار بردند و نشان دادند که خوبی پدیده‌های مرتبط با این جریان را، که توسط دی‌آلس و همکاران [۱۳] به صورت آزمایشگاهی مشاهده شده بود، شبیه‌سازی می‌کند. سپس به مطالعه پایداری این جریان پرداختند و نشان دادند که جریان حتی در رینولدزهای بالا و دامنه زیاد اغتشاشات، که قادر است توده تسلیم نشده را بشکند، پایدار است. آنان یک حل تحلیلی بر مبنای در نظر گرفتن مدل بینگهام، که در معادله (۱) ظاهر شده است، برای سیال ویسکوپلاستیک برای جریان توسعه یافته درون کانال دوبعدی به دست آوردند و به مقایسه آن با حل عددی پرداختند. در این شبیه‌سازی معادلات پیوستگی، اندازه حرکت و غلظت (کسر حجمی) حل شد. حل آنان مبتنی بر روش حجم محدود بود.

اخیراً در کار دیگری توسط سرمدی و همکاران [۱۴] جریان سه لایه درون لوله بررسی شده است که شامل یک توده ویسکوپلاستیک تسلیم نشده در بین هسته و سیال روان کار می‌شود. آنان با استفاده از تئوری کلاسیک روان‌کاری به بررسی اثر نسبت لزجت، هندسه و شکل هسته روی افت فشار، دبی جریان هسته و سیالات روان کار و نیروی وارد بر هسته پرداختند و نشان دادند که نسبت لزجت و شعاع هسته پارامترهای اصلی کنترل کننده افت فشار و دبی جریان هستند. همچنین به تخمین تنش تسلیم لازم برای وجود ناحیه تسلیم نشده اطراف هسته پرداختند.

در کار حاضر، تلاش شده است که جنبه‌هایی از جریان چندلایه هسته- حلقه با سیال بینگهام به عنوان حلقه، در کانال دوبعدی، به روش حل عددی مورد ارزیابی قرار گیرد. اگرچه این کار قبل از این توسط هرمزی و همکاران [۱۲] صورت گرفته است، ولی نوآوری کار حاضر استفاده از روش مرتبه بالای المان طیفی برای گسسته‌سازی

دیفرانسیلی هستند، می‌توان تانسور تنش را بر اساس کسر حجمی سیال هسته، C ، به صورت:

$$\tau_{ij} = \left(\frac{C}{\tau_{ij}^{[1]}} + \frac{1-C}{\tau_{ij}^{[2]}} \right)^{-1}, \quad (7)$$

نوشت. معادله (۷) مبتنی بر درونیایی هارمونیک است که به وسیله پاتانکار پیشنهاد شده است [۱۸]. بالانویس‌های ۱ و ۲ به ترتیب برای سیال هسته و حلقه می‌باشند. به این ترتیب، در هر نقطه یا المان دیفرانسیلی که بوسیله سیال هسته پر شده باشد ($C = 1$)، تنش بر اساس معادله مشخصه سیال نیوتنی محاسبه می‌شود:

$$\tau_{ij} = r_{\mu} \dot{\gamma}_{ij}, \quad (8)$$

که در آن r_{μ} نسبت لزجت سیال هسته به حلقه است؛ و در هر نقطه‌ای که سیال حلقه حاضر باشد ($C = 0$)، معادله مشخصه سیال ویسکوپلاستیک اعمال می‌شود.

$$\tau_{ij} = \left(1 + \frac{Bn}{\sqrt{\dot{\gamma}^2 + \varepsilon^2}} \right) \dot{\gamma}_{ij} = \mu(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}_{ij}, \quad (9)$$

تابع $\mu(\dot{\gamma})$ ، لزجت ظاهری سیال ویسکوپلاستیک و Bn عدد بینگهام است. در بین این دو حالت نیز تنش بر اساس یک درونیایی هارمونیک از هر دو معادله (۸) و (۹) به دست می‌آید. غلظت (کسر حجمی) بر اساس قانون بقای ذرات، طبق معادله،

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \right] C = 0, \quad (10)$$

به دست می‌آید؛ که Pe ، عدد پکله نام دارد.

چهار گروه بدون بعد در معادلات (۶) تا (۱۰) موجود است:

$$r_{\mu} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, Re = \frac{\rho U h}{\mu_2}, Pe = \frac{U h}{D_m}, Bn = \frac{h}{\mu_2 U} \tau_y, \quad (11)$$

که شامل نسبت لزجت سیال هسته به حلقه، r_{μ} ، عدد رینولدز، Re ، عدد پکله، Pe ، و عدد بینگهام، Bn ، می‌شود. پارامتر μ نیز بیان‌گر لزجت سیال است و همان‌طور که پیشتر نیز اشاره شد،

می‌شود. در خروجی کانال، فشار نسبی روی صفر ثابت شده است. برای توصیف از مختصات کارتزین استفاده شده است.

تحلیل جریان‌های دو فازی، و به طور خاص جریان هسته-حلقه‌ای، نیاز به استفاده از معادلاتی دارد که در عین ارائه تصویر درستی از ویژگی‌های فیزیکی جریان، ساده و قابل حل با کمترین هزینه‌های ممکن به لحاظ زمان و حافظه محاسباتی باشند. بدین منظور، با توجه به شرایط مسأله حاضر که فرض می‌شود دو سیال پیوسته و جدا از هم هستند، روش کسر حجمی گزینه مناسبی به نظر می‌رسد [۱۶]. در این روش معادلات پیوستگی و اندازه حرکت همراه با معادله غلظت برای معین کردن هر فاز به صورت همزمان حل می‌شوند. این کار قبل از این به وسیله محققین زیادی انجام و پیشنهاد شده است [۱۲ و ۱۷].

برای کم کردن تعداد پارامترهای حاکم بر مسأله و کاهش فضای محاسباتی ضروری، با در نظر گرفتن پارامترهای تکراری نظیر سرعت متوسط، U ، نیم عرض کانال، h و چگالی دو سیال، ρ ، معادلات به صورت بدون بعد ارائه می‌گردند. برای بی‌بعدسازی متغیرها ی مستقل مسأله، از مقیاس‌های زیر استفاده شده است:

$$x_i^* = \frac{x_i}{h}, u_i^* = \frac{u_i}{U}, t^* = t \frac{U}{h}, \quad (5)$$

$$P^* = \frac{P}{\rho U^2}, \tau_{ij}^* = \frac{h}{\mu_2 U} \tau_{ij}.$$

پارامترهای ستاره‌دار پارامترهای بدون بعد هستند. x_i ، متغیر موقعیت، u_i ، سرعت، t ، زمان، P ، فشار و τ_{ij} ، تانسور تنش است. به این ترتیب عرض کانال بین -1 و $+1$ تغییر می‌کند. به منظور سادگی، از این به بعد پارامترهای بدون بعد به صورت بدون ستاره نوشته می‌شوند. معادلات اندازه حرکت و پیوستگی بر اساس روش کسر حجمی بدون بعد به صورت زیر هستند:

$$u_{j,j} = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right] u_i = \frac{1}{Re} \tau_{ij} - P_{,i}, \quad (6)$$

که در آن Re ، عدد رینولدز است. با دانستن این حقیقت که معادلات (۶)، در واقع توصیف بقای جرم و اندازه حرکت در یک المان

نیز بر این مهم می‌تواند تأثیر گذار باشد [۲۰]. در شرایط توسعه یافتگی تنها مؤلفه برشی نرخ کرنش، غیر صفر است؛ به صورت:

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{du}{dy}, \quad (12)$$

که u مؤلفه افقی سرعت، در جهت x است. برای $|y| \leq y_i$ ، از معادلات (۶)، (۸) و (۱۰) بدست می‌آید:

$$C = 1, \quad \frac{dP}{dx} = \frac{r_\mu}{Re} \frac{d^2 u^{[1]}}{dy^2}, \quad (13)$$

و برای $1 \leq |y| \leq y_i$ از معادلات (۶)، (۹) و (۱۰) می‌توان یافت:

$$C = 0, \quad \frac{dP}{dx} = \frac{1}{Re} \frac{d}{dy} \left[\left(1 + \frac{Bn}{\sqrt{\left(\frac{d^2 u^{[1]}}{dy^2} + \varepsilon^2 \right)}} \right) \frac{du^{[1]}}{dy} \right], \quad (14)$$

با توجه به تقارن فیزیکی و هندسی روی خط مرکزی کانال، $y = 0$ ، و شرط عدم لغزش روی دیواره کانال، $|y| = 1$ ، می‌توان شرایط مرزی زیر را استنباط نمود:

$$\begin{aligned} \frac{du^{[1]}}{dy} &= 0 \quad \text{at } y = 0, \\ u^{[1]} &= 0 \quad \text{at } y = 1. \end{aligned} \quad (15)$$

به علاوه دو شرط مرزی در فصل مشترک دو سیال، $|y| = y_i$ ، با توجه به پیوستگی تنش برشی و سرعت قابل اعمال است که به صورت:

$$\text{at } |y| = y_i : \quad u^{[1]} = u^{[2]}, \quad \tau_{xy}^{[1]} = \tau_{xy}^{[2]}, \quad (16)$$

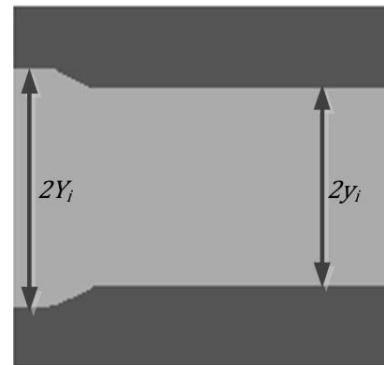
می‌باشد. با توجه به معادلات مشخصه (۸) و (۹) می‌توان قید پیوستگی تنش را به صورت:

$$r_\mu \frac{du^{[1]}}{dy} = \left[1 + \frac{Bn}{\sqrt{\left(\frac{du^{[1]}}{dy} \right)^2 + \varepsilon^2}} \right] \frac{du^{[1]}}{dy}, \quad (17)$$

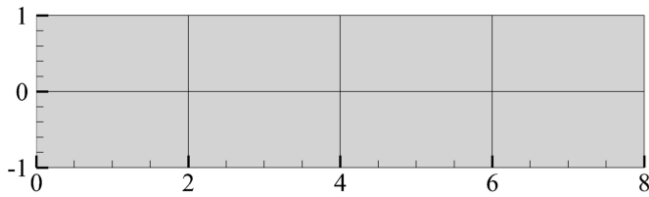
زیرنویس ۱ به سیال هسته و زیرنویس ۲ به حلقه اشاره دارد. ملاحظه می‌شود که Re بر مبنای لزجت سیال حلقه تعریف شده است. در این صورت، عدد رینولدز مربوط به سیال هسته، به صورت Re / r_μ می‌شود. پارامتر D_m به ضریب نفوذ مولکولی اشاره دارد، که در تعریف Pe به کار می‌رود و مقدار آن برای آب در حدود $10^{-10} \text{ m}^2 / \text{s}$ است [۱۹]. با احتساب لزجت سینماتیک آب، $\nu \approx 10^{-5} \text{ m}^2 / \text{s}$ و $Re \approx 10$ مرتبه اندازه Pe در حدود 10^4 است [۱۳]، که در این حالت غلظت نفوذ ضعیفی دارد [۱۲] و حجم فصل مشترک دو سیال به صفر میل می‌کند. فرض دیگری که در این جا مطرح می‌باشد این است که از اثر کشش سطحی بین دو سیال صرف نظر می‌گردد که خود می‌تواند مانند یک چشمه اندازه حرکت صفحه‌ای عمل کند. عدد بینگهام، Bn ، در واقع تنش تسلیم بدون بعد است.

۲-۲- حل نیمه تحلیلی

با فرض جریان دائمی و توسعه یافته درون کانال، می‌توان از عبارات غیر خطی مرتبط با جابجایی صرف نظر و حل تحلیلی برای این جریان ارائه نمود؛ که برای اعتبار سنجی و مقایسه با نتایج عددی مناسب است. در حل تحلیلی پایه، فرض می‌شود مرز دو سیال صاف و بدون هر گونه ناپایداری و موج هستند. به علاوه این که مرز دو سیال یک فیلم بسیار نازک است که حجم آن به صفر میل می‌کند و به عبارتی $Pe \rightarrow \infty$. پارامترهای ضخامت هسته در ورودی و خروجی کانال در شکل ۲ نمایش داده شده است. در اثر کاهش سرعت جریان سیال حلقه در مجاورت دیوار جامد به دلیل اثر مرز، برای بقای جرم، منطقی است که سطح مقطع آن افزایش یابد؛ هر چند خواص سیال



شکل ۲: پارامترهای ضخامت هسته در ورودی و خروجی کانال
Fig. 2. Core thickness parameters at inlet and outlet of the channel



شکل ۳: المان‌های مستطیلی دامنه حل
Fig. 3. Rectangular elements of the domain

نشان داده شده است. این المان، به یک المان استاندارد محاسباتی نگاشته شده و هر متغیر وابسته اولیه شامل فشار، سرعت و غلظت روی المان استاندارد، از طریق بسط پایه تانسوری به صورت:

$$\psi(\xi, \eta) \cong \sum \sum \phi_p(\xi) \phi_q(\eta) \hat{\psi}_{pq} \quad (20)$$

درونیابی می‌شود. که در آن، ψ ، متغیر وابسته عمومی، $\hat{\psi}_{pq}$ ضریب مجهول و ξ و η متغیرهای مکانی المان استاندارد محاسباتی هستند که بین $+1$ و -1 قرار دارند. N درجه بسط پایه گفته می‌شود و هر چه بیشتر باشد، درونیابی دقیق‌تر است. افزایش N معادل با تطبیق شبکه‌بندی داخل المان است که در شکل ۳ نمایش داده شده است. تابع درونیاب ϕ_p پایه مودال^۴ گفته می‌شود و به صورت:

$$\phi_p = \begin{cases} (1-\xi)/2 & \text{for } p=0, \\ \frac{(1-\xi)(1+\xi)}{2} P_{p-1}^{1,1} & \text{for } 0 < p < N, \\ (1+\xi)/2 & \text{for } p=N. \end{cases} \quad (21)$$

در نظر گرفته می‌شود که $P_{p-1}^{1,1}$ تابع ژاکوبی را نشان می‌دهد [۲۱].

در غالب معادلات جریان سیال، ضمن گسسته‌سازی مکانی، می‌توان به یک معادله کلی از نوع هلمهلتز رسید. برای متغیر کلی ψ :

$$\left[\left(D(\psi) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{,j} + \lambda \right] \psi = f, \quad (22)$$

که در آن، λ ، ضریب ثابت، f ، عبارت چشمه و متغیر $D(\psi)$ نیز ضریب نفوذ معادله هلمهلتز است [۲۲]. برای گسسته‌سازی مکانی، ابتدا باید به فرم ضعیف معادله رسید. برای این منظور، طرفین

استخراج نمود. حل معادله (۱۳) منجر می‌شود به:

$$u^{[1]}(y) = \frac{\alpha}{r_\mu} \frac{y^2}{2} + c, \quad (18)$$

که در آن $\alpha = Re(dP/dx)$ تعریف می‌شود. c نیز ثابت انتگرال‌گیری است. حل معادله غیر خطی (۱۴) به صورت تحلیلی ممکن نیست و باید به صورت عددی انجام شود. اگر چنانچه به جای معادله (۹) از معادله دوضابطه‌ای (۱) به عنوان مشخصه سیال ویسکوپلاستیک استفاده شود، حل تحلیلی کامل میسر می‌شود؛ که این کار توسط هرمزی و همکاران [۱۲] صورت گرفته است؛ هر چند این کار نیازمند پیش فرض درباره رفتار تنش قبل از محاسبه آن است. حل عددی معادلات (۱۴) و (۱۸) با اعمال شرایط مرزی (۱۵) تا (۱۷) نیازمند دانستن مقادیر c و α است. می‌توان این مقادیر را با حدس و خطا به دست آورد. بنابراین می‌توان پس از حدس اولیه برای این پارامترها، با حل عددی معادله دیفرانسیل معمولی (۱۴) با استفاده از شرط عدم لغزش و پیوستگی سرعت در فصل مشترک دو سیال، به یک جواب برای $u^{[2]}(y)$ رسید؛ پس از آن با استفاده از دو قید پیوستگی تنش در فصل مشترک، معادله (۱۷) و شرط پیوستگی کلی جریان به صورت:

$$1 = \int u(y) dy \quad (19)$$

خطا بودن حدس اولیه را بررسی نمود. فرآیند حدس و خطا تا رسیدن به جواب سازگار برای هر دو قید باید ادامه یابد. بدین منظور یک کد به زبان والفیریم^۱ توسعه داده شده است و با استفاده از نرم‌افزار ریاضی متمتیکا^۲، جواب جریان توسعه یافته به دست آمده است. در کار حاضر این جواب با عنوان حل نیمه-تحلیلی^۳ شناخته می‌شود.

۳- روش حل عددی

۳-۱- روش المان طیفی

در کار حاضر، مشتقات مکانی به روش المان طیفی گسسته شده‌اند که از کلاس المان محدود به شمار می‌رود. دامنه حل به تعدادی المان مستطیلی با اندازه ثابت تقسیم می‌شود که در شکل ۳

- 1 Wolfram language
- 2 Mathematica
- 3 Semi- Analytic (SA)

4 Modal basis

و اعمال شرط پیوستگی، یعنی صفر بودن دیورژانس سرعت در گام معلوم، یک معادله از نوع پواسون برای فشار به دست می‌آید؛

$$P_{,jj}^{n+1} = \left(\frac{\gamma}{\Delta t} \right) \tilde{u}_{j,j}, \quad (25)$$

که در آن $n+1$ گام زمانی جدید و مجهول است. بر اساس پیشنهاد ارائه شده توسط کارنیاداکیس و همکاران [۱۵]، برای محاسبه فشار در مرز ورودی و نیز روی دیواره‌ها می‌توان از شرط موسوم به مرتبه بالا برای فشار^۲ استفاده نمود که از معادله اندازه حرکت، (۶)، استخراج شده است.

$$P_{,i}^{n+1} = \sum_{q=0}^{J-1} \beta_q \left[-u_j u_{i,j} + \frac{1}{Re} u_{i,jj} \right]^{n-q}, \quad (26)$$

در قدم سوم، با استفاده از گرادیان فشار محاسبه شده و عبارات گذرا، $\partial u_i / \partial t$ ، دومین سرعت واسطه، \tilde{u}_i ، به صورت جبری به دست می‌آید؛

$$\tilde{u}_i = \tilde{u}_i + \left(\frac{\Delta t}{\gamma} \right) P_{,i}^{n+1}, \quad (27)$$

و با انتگرال‌گیری زمانی مجدد از معادله اندازه حرکت با وجود عبارت نفوذ، $(D(\dot{\gamma}, C) u_{i,j})_{,j}$ و عبارت گذرا، $\partial u_i / \partial t$ می‌توان به معادله هلمهلتز برای محاسبه سرعت در گام جدید، u_i^{n+1} ، رسید.

$$\left[\left(D(\dot{\gamma}, C) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{,j} - Re \frac{\gamma}{\Delta t} \right] u_i^{n+1} = - \left(Re \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \tilde{u}_i, \quad (28)$$

که برای جریان چندلایه با روان کار ویسکوپلاستیک، ضریب نفوذ $D(\dot{\gamma}, C)$ بر اساس معادلات (۶) الی (۹) به صورت:

$$D(\dot{\gamma}, C) = \left[\frac{C}{r_\mu} + \frac{1-C}{\mu(\dot{\gamma})} \right]^{-1}, \quad (29)$$

تعریف می‌شود. در معادله (۲۹) متغیر غلظت، C ، و تابع لزجت ظاهری سیال ویسکوپلاستیک، $\mu(\dot{\gamma})$ ، از گام معلوم n محاسبه می‌شود. در واقع تابع $D(\dot{\gamma}, C)$ در حکم لزجت ظاهری جریان دوفاز است.

معادله در تابع وزن، ω ، که بر اساس طرح گالرکین همان تابع بسط است، ضرب شده و روی دامنه المان، Ω ، از آن انتگرال‌گیری می‌شود. با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌توان داشت:

$$-\int \nabla \omega D(\psi) \nabla \psi d\Omega + \int \lambda \omega \psi d\Omega = \int \omega f d\Omega - [\omega D(\psi) \nabla \psi]_{\partial\Omega}, \quad (23)$$

که در آن $\partial\Omega$ مبین مرز المان است و شرایط مرزی را پوشش می‌دهد. با انجام مشتق و انتگرال‌های معادله (۲۳) معادلات دیفرانسیل معمولی وابسته به زمان به تعداد درجه بسط پایه برای هر المان ایجاد می‌شود. بر اساس پیوستگی متغیرهای وابسته اولیه روی مرز المان‌های دارای سطح مشترک باید معادلات را تجمیع نمود. برای جزئیات بیشتر به [۲۱] رجوع شود.

۲-۳- طرح تصحیح سرعت توسعه یافته

برای خارج کردن متغیرهای وابسته اولیه در معادلات مدل (۶) و (۱۰) از حالت جفت‌شدگی، کارنیاداکیس و همکاران [۱۵] الگوریتم موسوم به تصحیح سرعت^۱ را پیشنهاد داده‌اند، که ضمن آن مرتبه بالای گسسته‌سازی مکانی به روش المان طیفی حفظ شود. در این روش به دست آوردن سرعت و فشار در گام جدید $n+1$ ، طی سه مرحله صورت می‌گیرد. در هر مرحله برای انتگرال‌گیری زمانی از روش مرتبه بالای آدامز-بشفورث استفاده می‌شود [۲۳]. در قدم اول، یک سرعت واسطه نخستین، \tilde{u}_i ، بر اساس عبارات گذرا، $\partial u_i / \partial t$ ، و جابجایی، $u_j u_{i,j}$ ، در معادله اندازه حرکت (۶)، به صورت صریح حاصل می‌شود:

$$\tilde{u}_i = \sum_{q=0}^{J-1} \frac{\alpha_q}{\gamma} u_i^{n-q} + \Delta t \sum_{q=0}^{J-1} \frac{\beta_q}{\gamma} [u_j u_{i,j}]^{n-q} \quad (24)$$

که در آن، n گام زمانی معلوم، Δt ، اندازه گام زمانی، ضرایب α_q ، β_q و γ ، مربوط به روش عددی آدامز-بشفورث برای انتگرال‌گیری زمانی، و J نیز مرتبه این انتگرال‌گیری را نشان می‌دهد [۲۳].

در قدم بعد، با محاسبه دیورژانس معادله اندازه حرکت، این بار شامل عبارات گرادیان فشار، $P_{,j}^{n+1}$ ، و عبارت گذرا، $\partial u_i / \partial t$ ،

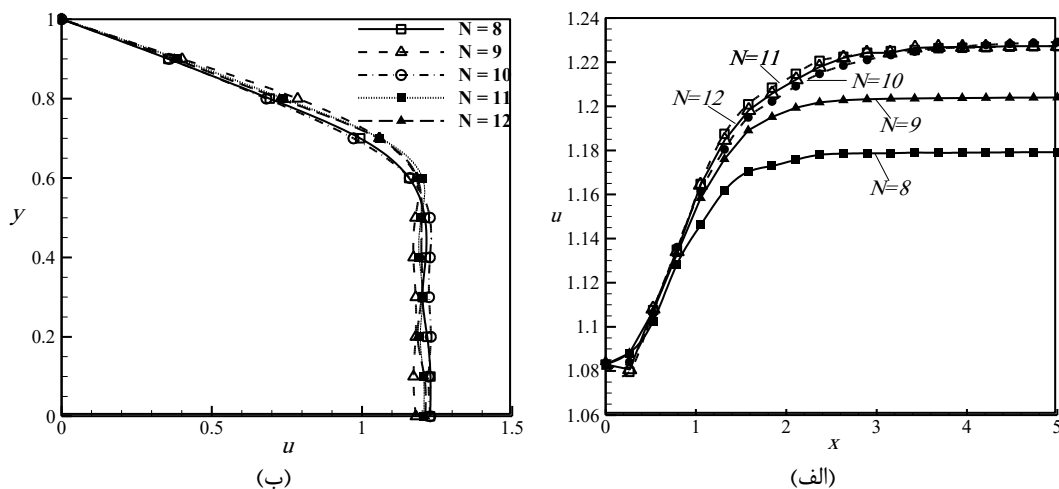
2 High order pressure boundary condition

1 Velocity correction scheme

جدول ۱: بررسی میزان استقلال نتایج از درجه بسط پایه و گام زمانی

Table 1. Study of results dependency to polynomial degree and time step

$R.E.$	زمان مصرفی CPU(s)	N	Δt	مورد
مطالعه درجه بسط پایه				
-	۴۴/۷	۸	۰/۰۱	۱
۲/۵۵	۶۵/۹	۹	۰/۰۱	۲
۱/۲۴	۸۳/۴	۱۰	۰/۰۱	۳
۰/۴۲	۱۰۲/۱	۱۱	۰/۰۱	۴
مطالعه گام زمانی				
۰/۵۶۹	۱۵۲/۷	۱۰	۰/۰۰۵	۵
۰/۱۵۶	۲۹۹/۴	۱۰	۰/۰۰۲۵	۶
۰/۰۳۵	۶۳۵/۷	۱۰	۰/۰۰۱۲۵	۷
۰/۰۱۲	۷۹۵/۲	۱۰	۰/۰۰۱	۸



شکل ۴: استقلال نتایج عددی از درجه بسط پایه، N ، به ازای $Re = 10$ ، $r_\mu = 10$ ، $Bn = 10$ ، $Y_i = 0.2$ و $L = 8$ برای مؤلفه طولی سرعت، u ، (الف) روی خط تقارن، $y = 0$ و (ب) در مقطع $x = 4$

Fig. 4. Independence of the numerical results from the basis expansion degree, N , per $Re = 10$, $r_\mu = 10$, $Bn = 10$, $Y_i = 0.2$ and $L = 8$ for x- velocity component, u , (a) on the symmetry line, $y = 0$ and (b) at the section $x = 4$

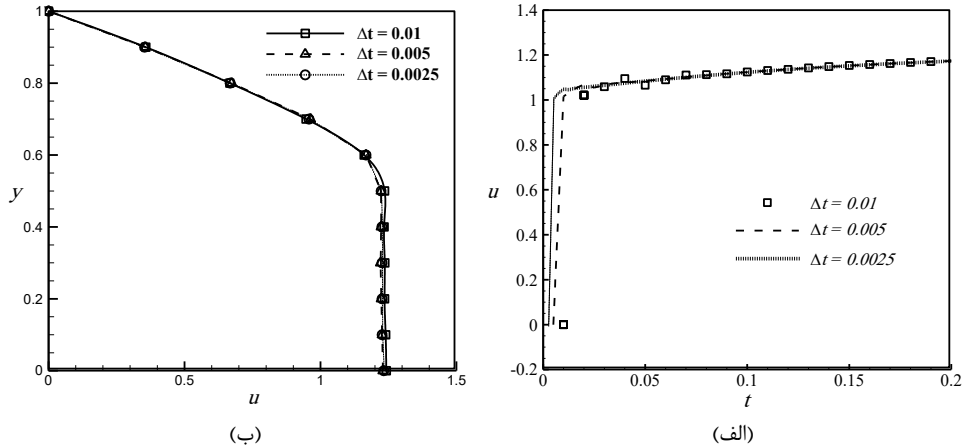
جابجایی، $u_j C_{,j}$ ، در معادله (۱۰)، به صورت صریح به دست می‌آید؛

$$\tilde{C} = \sum_{q=0}^{j-1} \frac{\alpha_q}{\gamma} C^{n-q} + \Delta t \sum_{q=0}^{j-1} \frac{\beta_q}{\gamma} [u_j C_{,j}]^{n-q}, \quad (30)$$

و سپس، در نظر گرفتن عبارات گذرا، $\partial C / \partial t$ ، و نفوذ، $C_{,jj} / Pe$ ، منجر به معادله هلمهلتز با ضریب نفوذ برابر ۱، برای یافتن C در گام $n + 1$ ، به صورت ضمنی می‌شود؛

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - Pe \frac{\gamma}{\Delta t} \right] C^{n+1} = - \left(Pe \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \tilde{C}. \quad (31)$$

برای انجام این شبیه‌سازی، در $C++$ از کد منبع باز Nektar++ استفاده شده است که چارچوبی قوی و مطمئن برای حل معادلات جریان تراکم ناپذیر تک سیال نیوتنی (معادلات ناویر-استوکس) به روش المان طیفی است و برای کار حاضر توسعه داده شده است [۲۴]. در کار حاضر، این توسعه، شامل دو قسمت عمده است. یکی ارتقای معادله هلمهلتز به صورت معادله (۲۸) است که در کد منبع ضریب نفوذ، $D(\dot{\gamma}, C)$ ، برای سیال تک نیوتنی برابر ۱ است؛ و دیگر اضافه کردن یک کلاس به کد Nektar++ جهت توسعه الگوریتم فوق برای محاسبه غلظت، C ، همراه با بقیه متغیرهاست. برای این کار، ابتدا یک غلظت واسطه \tilde{C} بر اساس عبارات گذرا، $\partial C / \partial t$ ، و



شکل ۵: استقلال نتایج عددی از گام زمانی، Δt ، به ازای $Re = 10$ ، $r_\mu = 10$ ، $Bn = 10$ ، $Y_i = 0.2$ و $L = 8$ برای مؤلفه طولی سرعت، u ، (الف) در نقطه $x = 0$ و $y = 0$ و (ب) در مقطع $x = 4$

Fig. 5. Independency of the numerical results from the time step, Δt , per $Re = 10$, $r_\mu = 10$, $Bn = 10$, $Y_i = 0.2$ and $L = 8$ for x -velocity component, u , (a) at the point $x = 0$, $y = 0$ and (b) at the section $x = 4$

مقادیر $N = 10$ و $N = 11$ کمتر از ۱% است. همچنین در شکل ۵ مقادیر سرعت طولی در نقطه انتهای کانال و روی خط تقارن به مختصات $x = 4$ و $y = 0$ و همچنین در مقطع $x = 4$ به ازای همان پارامترها نمایش داده شده است. بعد از نوسانات اولیه مشاهده می‌شود که اختلاف نتایج مربوط به تغییر گام زمانی، Δt ، غیر قابل تشخیص است. برای وضوح بیشتر نتایج، فقط $t \leq 0.2$ نمایش داده شده است.

۴-۲- اعتبارسنجی حل طیفی و نیمه تحلیلی

ایده اصلی سنجش میزان درستی حل عددی، مقایسه دو حل عددی و نیمه تحلیلی به ازای تغییر پارامترهای مختلف است. این مقایسه شامل متغیرهای اولیه نظیر مؤلفه طولی سرعت، u ، فشار، P ، و نیز متغیرهای ثانویه نظیر تنش برشی، τ_{xy} ، و لزجت ظاهری، $D(\dot{\gamma}, C)$ ، است. به ازای پارامترهای مشخصی نیز نتایج کار هر مزی و همکاران [۱۲] با کار حاضر مقایسه شده است.

در شکل ۶، توزیع سرعت در خروجی کانال به ازای $r_\mu = 10$ و $Y_i = 0.2$ و مقادیر مختلف عدد بینگهام، Bn ، ارائه شده است. در این شکل و شکل‌های مقایسه‌ای بعد، نتایج روش المان طیفی با نماد، و نتایج حل نیمه تحلیلی با خطوط نمایش داده می‌شود. به دلیل تقارن، نتایج فقط روی نیم عرض کانال، $y \geq 0$ ، ارائه شده

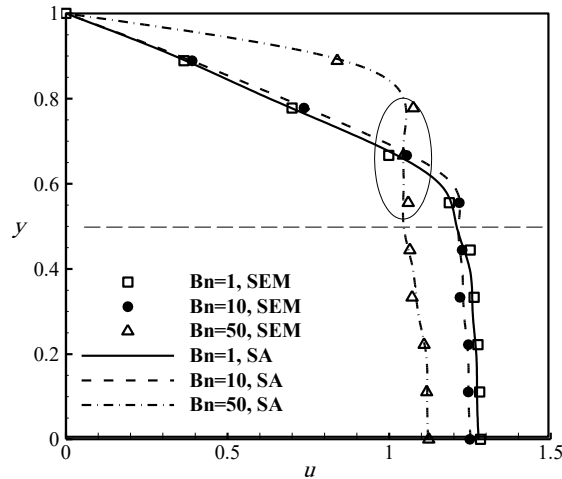
۴- نتایج

۴-۱- مطالعه استقلال نتایج از درجه بسط و گام زمانی

برای تضمین استقلال حل از درجه بسط پایه، N ، و گام زمانی، Δt ، حل عددی به ازای مقادیر مختلف از این دو پارامتر مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج مربوط به بررسی میزان استقلال حل عددی از دو پارامتر فوق در جدول ۱ به ازای $N = 8$ ، $N = 9$ ، $N = 10$ و $N = 11$ برای درجه بسط پایه و $\Delta t = 0.005$ ، $\Delta t = 0.01$ و $\Delta t = 0.025$ برای گام زمانی گردآوری شده است. این نتایج به ازای $Re = 10$ ، $r_\mu = 10$ ، $Y_i = 0.2$ و $Bn = 10$ ارائه شده است. در هر مورد زمان اجرای بسیار ناچیز نشان می‌دهد که تا چه میزان استفاده از یک روش مرتبه بالا در تسریع استحصال جواب مفید است. در هر مورد خطای نسبی، $R.E.$ ، با مورد قبل از آن آورده شده است که به صورت:

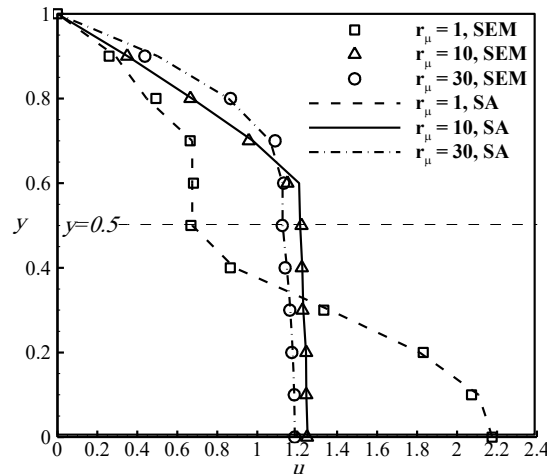
$$R.E. = \frac{|u_{\text{new}} - u_{\text{previous}}|_{\infty}}{|u_{\text{previous}}|_{\infty}} \times 100 \quad (32)$$

تعریف می‌شود و در آن $|u|_{\infty}$ بیانگر نرم بینهایت سرعت در کل دامنه حل است. در نهایت مورد شماره ۷ از جدول ۱ به عنوان مبنای گرفتن اجراها انتخاب شد. در شکل ۴ نمودار سرعت دائم روی خط تقارن کانال، $y = 0$ ، و نیز در مقطع $x = 4$ به ازای مقادیر مختلف درجه بسط پایه، N ، نمایش داده شده است. اختلاف نسبی بین



شکل ۶: مقایسه حل طیفی و نیمه تحلیلی پروفایل سرعت در خروجی کانال برای $Re = 10$ ، $y_i = 0.5$ ، $r_\mu = 10$ و به ازای $Bn = 1, 10, 50$.

Fig. 6. Comparison of Spectral with semi-analytical solutions of channel out flow velocity profiles for $Re = 10$ ، $y_i = 0.5$ ، $r_\mu = 10$ and per $Bn = 1, 10, 50$



شکل ۷: مقایسه حل طیفی و نیمه تحلیلی پروفایل سرعت در خروجی کانال برای $Re = 10$ ، $y_i = 0.5$ ، $Bn = 10$ و به ازای $r_\mu = 1, 10, 30$.

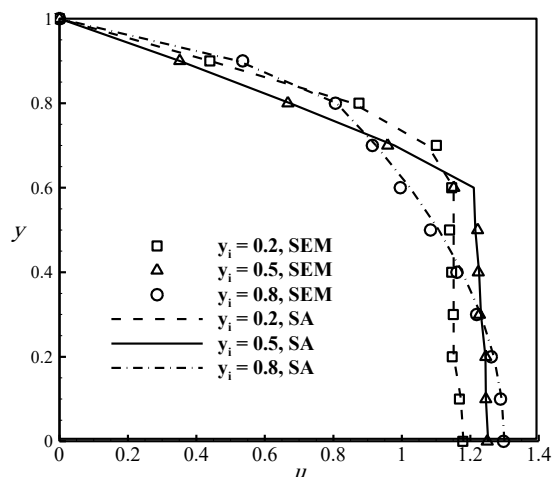
Fig. 7. Comparison of Spectral with semi-analytical solutions of channel out flow velocity profiles for $Re = 10$ ، $y_i = 0.5$ ، $Bn = 10$ and per $r_\mu = 1, 10, 30$

اصلی $Bn = 10$ ، $y_i = 0.5$ و $r_\mu = 1, 10, 30$ به واسطه دو روش عددی و نیمه تحلیلی ارائه و مقایسه شده اند. همان طور که ملاحظه می گردد افزایش نسبت لزجت، r_μ ، باعث کاهش ضخامت ناحیه تسلیم نشده می گردد. البته ضخامت ناحیه تسلیم نشده در دو حالت $r_\mu = 10, 30$ بسیار به هم نزدیک هستند (اختلاف آن ها کمتر از 0.1 است) و این نشان می دهد که با افزایش r_μ ، تأثیر آن روی ضخامت ناحیه تسلیم نشده کمتر می شود.

در شکل ۸ نیز، توزیع سرعت در خروجی کانال به ازای پارامترهای

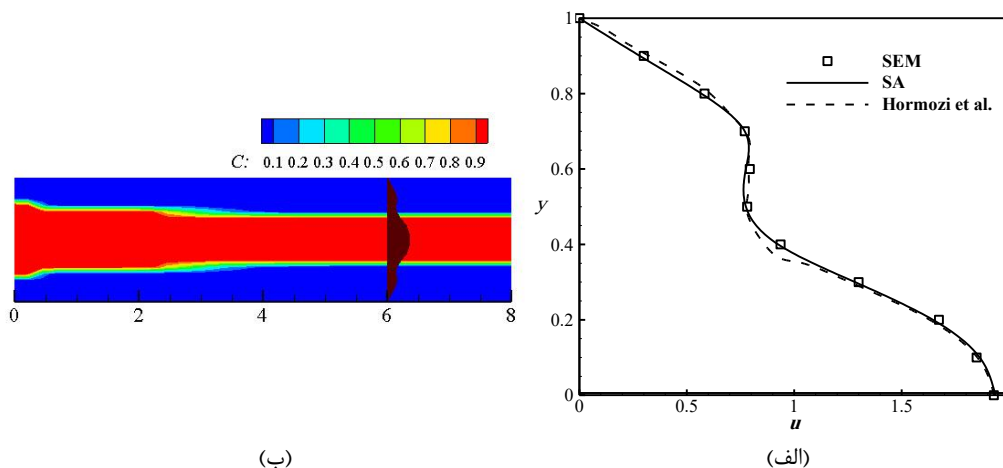
است. در حالت $Bn = 1$ ، سیال ویسکوپلاستیک در تمام ناحیه به حالت تسلیم رسیده است و فقط شیب نمودار با تغییر سیال از حلقه به هسته کاهش می یابد. مرز دو سیال با خط چین مشخص شده است. در دو حالت $Bn = 10, 50$ ناحیه تسلیم نشده وجود دارد که در حالت $Bn = 50$ درون بیضی نمایش داده شده است. همان طور که ملاحظه می گردد اثر افزایش عدد بینگهام، Bn افزایش ضخامت ناحیه تسلیم نشده و یکنواخت تر شدن نمودار سرعت است.

در شکل ۷، توزیع سرعت در خروجی کانال به ازای پارامترهای



شکل ۸: مقایسه حل طیفی و نیمه تحلیلی پروفایل سرعت در خروجی کانال برای $Re = 10$ ، $Bn = 10$ ، $r_\mu = 10$ و به ازای $y_i = 0.2, 0.5, 0.8$.

Fig. 8. Comparison of Spectral with semi-analytical solutions of channel out flow velocity profiles for $Re = 10$, $Bn = 10$, $r_\mu = 10$ and per $y_i = 0.2, 0.5, 0.8$



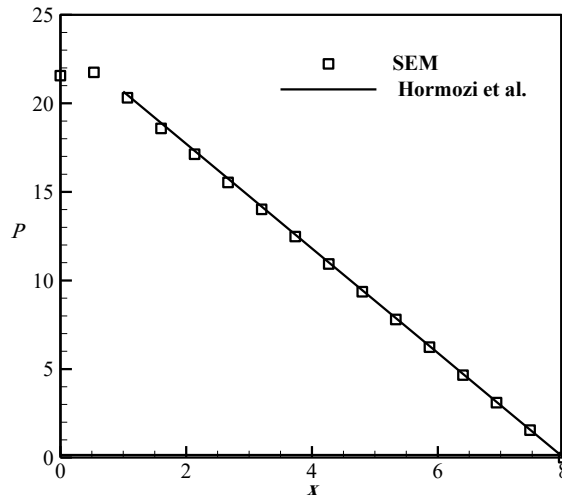
شکل ۹: (الف)، مقایسه نتایج حل طیفی و نیمه تحلیلی برای پروفایل سرعت در خروجی کانال با کار هرمزی و همکاران [۱۲] و (ب)، کانتر غلظت به همراه توزیع سرعت الحاق شده، به ازای $Re = 5$ ، $Bn = 10$ ، $r_\mu = 1$ و $y_i = 0.4$.

Fig. 9. (a), Comparison of Spectral (SEM) and semi-analytical results of the channel out flow velocity profiles with the work of Hormozi et. al [12] and (b), concentration contour with superimposed velocity profile, for $Re = 5$, $Bn = 10$, $r_\mu = 1$ and $y_i = 0.4$

کرده است.

در شکل ۹ (الف) نتایج حل عددی و نیمه تحلیلی با حل عددی ارائه شده توسط هرمزی و همکاران [۱۲] مقایسه شده است. توزیع سرعت در خروجی کانال به ازای پارامترهای اصلی، $Re = 5$ ، $Bn = 10$ ، $r_\mu = 1$ و $y_i = 0.4$ ارائه شده است. نتایج تطابق بسیار خوبی را با هم نشان می دهند. البته در نواحی تسلیم نشده دقت این تطابق کم می شود که می توان آن را به بد وضع بودن رفتار تابع نظم یافته ویسکوپلاستیک، معادله (۹)، در این ناحیه نسبت داد. همچنین

اصلی، $Bn = 10$ ، $r_\mu = 10$ و مقادیر مختلف ضخامت سیال هسته، y_i شامل $y_i = 0.2, 0.5, 0.8$ برای هر دو روش عددی و نیمه تحلیلی ارائه و مقایسه شده اند. در این حالت نیز تطابق خوب دو روش عددی و نیمه تحلیلی کاملاً مشهود است. با افزایش ضخامت سیال هسته، y_i از 0.2 به 0.5 ناحیه تسلیم نشده کوچکتر شده و در حالت $y_i = 0.8$ سیال ویسکوپلاستیک کاملاً تسلیم می شود. این تسلیم به علت این است که تنش از مرکز کانال به سمت دیواره بزرگتر شده و با رسیدن به سیال پلاستیک از حد تنش تسلیم عبور



شکل ۱۰: نتایج حل المان طیفی برای فشار روی خط تقارن، $y = 0$ ، به ازای $Re = 5$ ، $Bn = 10$ ، $r_\mu = 1$ و $y_i = 0.4$ و مقایسه با حل هرمزی و همکاران [۱۲].

Fig. 10. SEM results for pressure profile across the symmetry line, $y = 0$, for $Re = 5$, $Bn = 10$, $r_\mu = 1$ and $y_i = 0.4$, compared with the work of Hormozi et al. [12]

لزومی ندارد. این نتایج نشان می‌دهد که با افزایش عدد بینگهام، افت فشار، افزایش می‌یابد. همچنین افزایش نسبت لزجت، r_μ ، نیز باعث افزایش افت فشار می‌شود که البته با افزایش نسبت لزجت میزان این تأثیر کمتر می‌شود. می‌توان اضافه نمود هر چه r_μ بزرگتر باشد، همان‌طور که از شکل ۷ نیز بر می‌آید منحنی سرعت سیال یکنواخت‌تر، گرادیان سرعت در آن کمتر و به منحنی سیال بینگهام شبیه‌تر می‌شود. همچنین با افزایش ضخامت هسته، y_i ، میزان افت فشار کاهش می‌یابد. بنابراین می‌توان استنتاج نمود که هر چه میدان عمل سیال بینگهام و خاصیت پلاستیسیته افزایش می‌یابد، افت فشار افزایش می‌یابد. علت آن هم می‌تواند به افزایش لزجت ظاهری جریان در ناحیه تسلیم نشده نسبت داده شود. از آن جا که هدف نهایی استفاده از سیال روان کار کم کردن افت فشار و توان پمپاژ است، باید توجه نمود که استفاده از سیال پلاستیک به عنوان روان کار نباید افت فشار چشمگیری را بوجود آورد؛ به نحوی که استفاده از آن را غیر موجه سازد. همچنین از جدول ۲ مشاهده می‌شود که ضخامت تسلیم نشده، y_{UY} ، با عدد بینگهام، Bn ، نسبت مستقیم و با ضخامت هسته، y_i و نسبت لزجت، r_μ ، نسبت عکس دارد.

۴-۴- بررسی متغیرهای ثانویه

توزیع لزجت ظاهری، $D(\dot{\gamma}, C)$ ، و تنش برشی، τ_{xy} ، در

در قسمت (ب) از شکل ۹ کانتور غلظت به همراه توزیع سرعت الحاق شده در آن ارائه شده است.

توزیع فشار روی خط تقارن کانال، $y = 0$ ، برای پارامترهای قبلی یعنی $Re = 5$ ، $Bn = 10$ ، $r_\mu = 1$ و $y_i = 0.4$ در شکل ۱۰ نمایش داده شده است. همچنین به این نتایج، حل تحلیلی هرمزی و همکاران [۱۲] برای جریان توسعه یافته الحاق شده است. در ورودی کانال، افزایش فشار ناچیز، قبل از شروع به افت مشاهده می‌شود. می‌توان بر اساس شرط مرزی (۲۶)، این افزایش فشار را به قوی‌تر بودن نفوذ اندازه حرکت به جابجایی در جهت جریان در عدد رینولدز پایین نسبت داد.

۳-۴- اثر پارامترهای اصلی بر افت فشار و ضخامت تسلیم نشده

در جدول ۲، نتایج حل نیمه‌تحلیلی برای افت فشار و ضخامت ناحیه تسلیم نشده، y_{UY} ، به ازای مقادیر مختلف عدد بینگهام، Bn ، نسبت لزجت، r_μ و ضخامت هسته، y_i ، و برای $Re = 1$ ارائه شده است. منظور از ناحیه تسلیم نشده، ناحیه‌ای است که در آن گرادیان سرعت به صفر میل می‌کند. برای این کار از معیار مطلق

$$u(y_i) - u(y_i + y_{UY}) \leq 10^{-4}, \quad (33)$$

استفاده شده است. عدم استفاده از معیار نسبی به این دلیل است که مقدار متوسط سرعت در حدود واحد است و استفاده از آن

جدول ۲: نتایج حل نیمه تحلیلی برای ضخامت ناحیه تسلیم نشده، y_{UY} و افت فشار، $-(dp/dx)$ ، به ازای $Re = 1$ ، $Bn = 1, 10, 50$ ، $r_\mu = 1, 10, 30$ ، $y_i = 0.2, 0.5, 0.8$.

Table 2. Semi-analytic results for un-yielded region thickness, y_{UY} and pressure drop, $-(dp/dx)$, for $Re = 1$, $Bn = 1, 10, 50$, $r_\mu = 1, 10, 30$ and $y_i = 0.2, 0.5, 0.8$

نسبت لزجت، r_μ	ضخامت هسته، y_i	ضخامت تسلیم نشده، y_{UY}	افت فشار، $-(dp/dx)$
$Bn = 1$			
۱	۰/۲	۰/۰۲۵۳	۴/۴۳۹۱
	۰/۵	۰/۰	۳/۹۷۱۸
	۰/۸	۰/۰	۲/۹۴۳۵
۱۰	۰/۲	۰/۰۲۳۶	۴/۴۷۱۴
	۰/۵	۰/۰	۴/۴۲۲۱
	۰/۸	۰/۰	۴/۲۵۳۶
۳۰	۰/۲	۰/۰۲۳۵	۴/۴۷۳۸
	۰/۵	۰/۰	۴/۴۶۰۱
	۰/۸	۰/۰	۴/۳۹۹۰
$Bn = 10$			
۱	۰/۲	۰/۴۲۹۲	۱۵/۸۹۳۵
	۰/۵	۰/۳۳۵۵	۱۳/۵۹۵۵
	۰/۸	۰/۰	۱۳/۰۰۴۱
۱۰	۰/۲	۰/۴۲۳۵	۱۶/۰۴۵۰
	۰/۵	۰/۱۳۲۹	۱۵/۷۹۹۵
	۰/۸	۰/۰	۱۵/۰۲۹۰
۳۰	۰/۲	۰/۴۲۲۸	۱۶/۰۵۶۳
	۰/۵	۰/۱۲۶۰	۱۵/۹۷۳۹
	۰/۸	۰/۰	۱۵/۷۰۴۷
$Bn = 50$			
۱	۰/۲	۰/۶۲۸۳	۶۰/۳۶۵۶
	۰/۵	۰/۳۴۱۵	۵۹/۰۲۷۳
	۰/۸	۰/۱۶۲۴	۴۳/۵۸۷۴
۱۰	۰/۲	۰/۶۱۵۱	۶۱/۳۴۰۱
	۰/۵	۰/۳۳۶۹	۵۹/۷۴۱۶
	۰/۸	۰/۱۴۰۴	۵۳/۱۶۹۳
۳۰	۰/۲	۰/۶۱۴۲	۶۱/۴۱۱۳
	۰/۵	۰/۳۲۱۲	۶۰/۸۸۷۸
	۰/۸	۰/۰۴۶۱	۵۹/۰۹۳۸

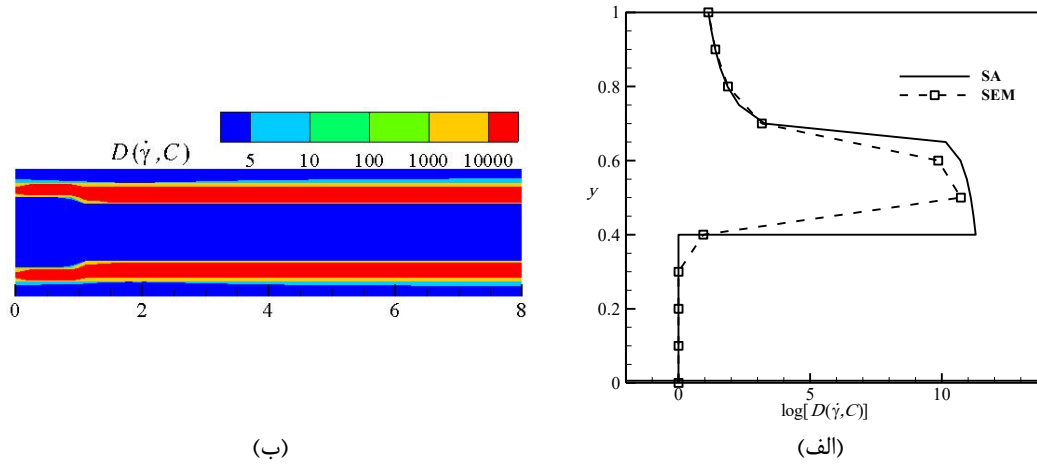
$$\mu(\dot{\gamma})_{SA} = \left(1 + \frac{Bn}{\sqrt{\left(\frac{du}{dy}\right)_{SA}^2 + \varepsilon^2}} \right) \left(\frac{du}{dy}\right)_{SA} \quad \text{for } y > y_i, \quad (35)$$

به دست می‌آید. به دلیل فرض مرز مشخص با $Pe \rightarrow \infty$ ، به صورت لزجت هسته، $y_i \leq y$ ، برابر با r_μ است. این ناپیوستگی اگرچه در شکل ۱۱ (الف) واضح است ولی در نتایج مربوط به تنش، شکل ۱۲، خود را نشان نمی‌دهد و توزیع تنش کاملاً خطی و پیوسته مشاهده می‌گردد. همچنین ملاحظه می‌شود که به عنوان نرخ کرنش فقط du/dy محاسبه می‌گردد. تنش برشی در روش المان طیفی با استفاده از پردازش

نیم‌عرض ($0 \leq y \leq 1$) و در خروجی کانال به همراه کانتورهای مربوطه به ازای پارامترهای $Re = 5$ ، $Bn = 10$ ، $r_\mu = 1$ و $y_i = 0.4$ به ترتیب در شکل ۱۱ و شکل ۱۲ نشان داده شده‌اند. لزجت و تنش در هر دو روش نیمه تحلیلی و عددی از طریق پردازش متغیر اولیه، یعنی سرعت، حاصل شده است. به شیوه نیمه تحلیلی از رابطه:

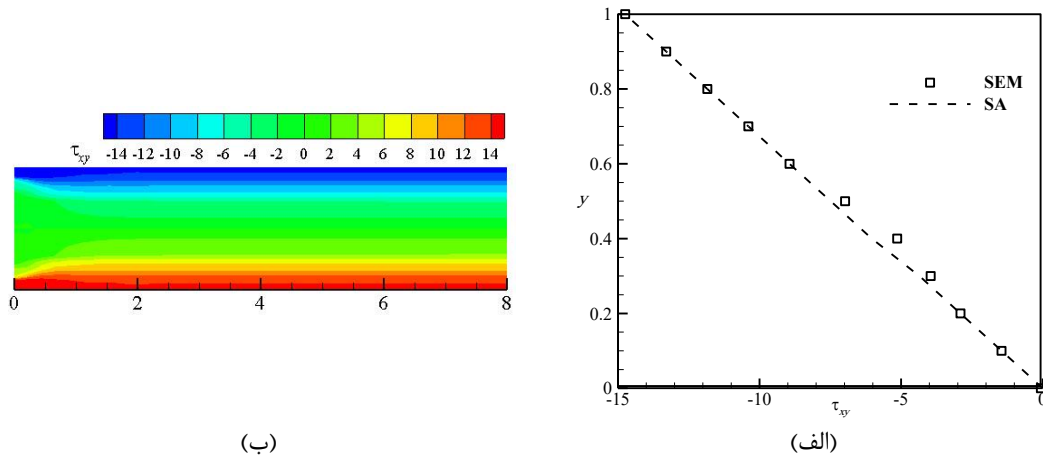
$$\tau_{xy} \Big|_{SA} = \mu(\dot{\gamma})_{SA} \left(\frac{du}{dy}\right)_{SA} \quad (34)$$

می‌توان تنش برشی را به دست آورد که در آن لزجت ظاهری سیال ویسکوپلاستیک از طریق:



شکل ۱۱: (الف) نتایج المان طیفی و نیمه تحلیلی توزیع لزجت ظاهری، $D(\dot{\gamma}, C)$ ، در خروجی و (ب) کانتور المان طیفی مربوطه به ازای $Re = 5$ ، $Bn = 10$ ، $r_\mu = 1$ و $y_i = 0.4$.

Fig. 11. (a) SEM and SA results of apparent viscosity, $D(\dot{\gamma}, C)$, profile at out flow and (b) related SEM contour per $Re = 5$, $Bn = 10$, $r_\mu = 1$ and $y_i = 0.4$



شکل ۱۲: (الف) نتایج المان طیفی و نیمه تحلیلی توزیع تنش برشی، τ_{xy} ، در خروجی و (ب) کانتور المان طیفی مربوطه به ازای $Re = 5$ ، $Bn = 10$ ، $r_\mu = 1$ و $y_i = 0.4$.

Fig. 12. (a) SEM and SA results of shear stress, τ_{xy} , profile at out flow and (b) related SEM contour per $Re = 5$, $Bn = 10$, $r_\mu = 1$ and $y_i = 0.4$.

متغیرهای اولیه در نرم افزار تک پلات^۱ و از طریق رابطه‌ی:

$$\tau_{xy} \Big|_{SEM} = D(\dot{\gamma}, C)_{SEM} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{SEM} \quad (36)$$

نیوتنی هسته (که طبق شکل لزجت بسیار کمی دارد و به صورت آبی رنگ نمایش داده شده است) پس از توسعه یافتگی کاملاً منقبض شده و در ناحیه منقبض شده لزجت کماکان کوچک (آبی رنگ) است. در اطراف آن سیال روان کار بینگهام قرار دارد که در مجاورت سطح مشترک دو سیال که هنوز تنش به مقدار تسلیم نرسیده است لزجت ظاهری آن بسیار بزرگ (ناحیه قرمز رنگ) بوده و بعد از تسلیم دوباره لزجت آن به حدود لزجت سیال نیوتنی (آبی رنگ) می‌رسد. از معادلات (۳۵) و نیز (۹) پیداست که در این ناحیه به دلیل کوچک

حاصل شده است. که در آن لزجت ظاهری، $D(\dot{\gamma}, C)$ ، از روابط (۲۹) و (۹) محاسبه می‌گردد. متغیر v نیز مؤلفه عمودی سرعت، در جهت y است. همان‌طور که ملاحظه می‌گردد لزجت ظاهری در ناحیه تسلیم نشده بسیار زیاد است. می‌توان مشاهده نمود که سیال

1 Tecplot

نشده سیال ویسکوپلاستیک مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که افزایش عدد بینگهام و نسبت لزجت تأثیر مستقیم بر افزایش افت فشار دارند زیرا هر دو، به نوعی، لزجت یا لزجت ظاهری را افزایش می‌دهند. افزایش ضخامت سیال هسته تأثیر عکس بر افت فشار و نیز ضخامت تسلیم نشده دارد و نیز این که عدد بینگهام در واقع مهمترین پارامتر مؤثر بر افت فشار و ضخامت ناحیه تسلیم نشده است. همچنین با پردازش متغیرهای اولیه، توزیع متغیرهای ثانویه جریان، شامل تنش برشی و لزجت ظاهری، در عرض کانال، در هر دو روش و کانتور آن‌ها در روش المان طیفی ارائه شد. مطابق انتظار، رفتار کاملاً خطی برای تنش در عرض کانال مشاهده شد. در ناحیه اختلاط دو سیال در فصل مشترک، بین دو روش مذکور تفاوت دیده می‌شود. این تفاوت برای لزجت چشمگیر است و می‌تواند به ایده‌آل نبودن مرز دو سیال در حالت عددی نسبت به حالت نیمه‌تحلیلی، از لحاظ عدد پکله محدود و نیز بعضی محدودیت‌های پردازش متغیرهای اولیه، نسبت داده شود.

فهرست علائم

علائم انگلیسی

عدد بینگهام	Bn
غلظت (کسر حجمی)، m^3 / m^3	C
ضریب نفوذ مولکولی، m^2 / s	D_m
لزجت ظاهری جریان دوفاز	$D(\dot{\gamma}, C)$
ضریب نفوذ هلمهلتز	$D(\psi)$
چشمه هلمهلتز	$f(\psi)$
نیم عرض کانال، m	h
طول کانال، m	L
درجه بسط پایه	N
فشار، kg / ms^2	P
عدد پکله	Pe
عدد رینولدز	Re
نسبت لزجت	r_μ

شدن گرادیان سرعت، لزجت به بینهایت میل می‌کند. از نظر فیزیکی نیز می‌توان این موضوع را به تسلیم نشدن سیال بینگهام در مرز مشترک دو سیال نسبت داد که معادل با لزجت بسیار زیاد است. نکته دیگر اختلاف دو لزجت عددی و نیمه تحلیلی است که می‌توان آن را ناشی از عدم احتساب مؤلفه کرنش $\partial v / \partial x$ در این ناحیه نسبت داد. در حل نیمه تحلیلی این مقدار برابر صفر است ولی در حل عددی مقدار ناچیزی در مرتبه اندازه $\partial u / \partial y$ دارد. که باعث بروز خطای زیاد در این ناحیه می‌شود. دلیل دیگر خطا در این قسمت، اختلاط دو سیال در نواحی نزدیک به مرز دو سیال است. انتظار می‌رود با افزایش عدد پکله، Pe ، این مورد بهبود یابد، ولی باید در نظر داشت هم از نظر فیزیکی و هم از جهت ریاضی برای این افزایش محدودیت وجود دارد.

۵- نتیجه‌گیری

جریان دوبعدی و چندلایه با سیال نیوتنی به عنوان هسته در احاطه سیال ویسکوپلاستیک به عنوان روان کار یا حلقه، در کار حاضر بررسی شد. بدین منظور بر مبنای تکنیک حجم سیال معادلات پیوستگی، اندازه حرکت و کسر حجمی به روش المان طیفی گسسته‌سازی مکانی شدند. برای مدل کردن سیال ویسکوپلاستیک از مدل نظم‌یافته برکوویر- انگلمن برای سیال بینگهام استفاده شد. برای خارج کردن معادلات از حالت جفت‌شدگی، الگوریتم تصحیح سرعت کارنیاداکیس، برای سیال ویسکوپلاستیک و نیز جریان دوفاز برای کار حاضر توسعه داده شد. این الگوریتم روی چارچوب کد عددی Nektar++ پیاده‌سازی و توسعه داده شده است. همچنین با فرض توسعه‌یافتگی و دائمی بودن جریان یک حل نیمه‌تحلیلی، برای جریان ارائه شده است که برای آن یک کد به زبان والفیریم توسعه داده شده است.

ضمن ارائه نمودارهایی برای نشان دادن استقلال نتایج از درجه بسط پایه و گام زمانی، توزیع سرعت در خروجی کانال و فشار در طول کانال، به ازای تغییر در پارامترهای اصلی جریان، شامل عدد بینگهام، نسبت لزجت دو سیال و ضخامت ورودی هسته ارائه و با حل نیمه تحلیلی مقایسه شد. این مقایسه نشان از تطابق خوب دو حل مذکور با هم و همچنین کارهای گذشته می‌دهد. اثر پارامترهای اصلی جریان بر افت فشار و ضخامت ناحیه تسلیم

- annular flows, Annual Review of Fluid Mechanics, 29(1) (1997) 65-90.
- [2] R. Martínez-Palou, M.L. Mosqueira, B. Zapata-Rendón, E. Mar-Juárez, C. Bernal-Huicochea, J. de la Cruz Clavel-López, J. Aburto, Transportation of heavy and extra-heavy crude oil by pipeline: A review, Journal of Petroleum Science and Engineering, 75(3-4) (2011) 274-282.
- [3] A.F. Clark, S. Abraham, Method of pumping viscous petroleum, U.S. Patent No. 2,533,878 (1950).
- [4] S. Ghosh, T.K. Mandal, G. Das, P.K. Das, Review of oil water core annular flow, Renewable and Sustainable Energy Reviews, 13(8) (2009) 1957-1965.
- [5] R.P. Chhabra, J.F. Richardson, Non-Newtonian Flow and Applied Rheology: Engineering Applications, 2nd Edition, Butterworth-Heinemann Press, (2008).
- [6] E.C. Bingham, Fluidity and Plasticity, McGraw-Hill, New York, (1922).
- [7] I.A. Frigaard, C. Nouar, On the usage of viscosity regularisation methods for visco-plastic fluid flow computation, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 127(1) (2005) 1-26.
- [8] M. Bercovier, M. Engelman, A finite-element method for incompressible non-Newtonian flows, Journal of Computational Physics, 36(3) (1980) 313-326.
- [9] I.A. Frigaard, Super-stable parallel flows of multiple visco-plastic fluids, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 100(1-3) (2001) 49-75.
- [10] C.K. Huen, I.A. Frigaard, D.M. Martinez, Experimental studies of multi-layer flows using a visco-plastic lubricant, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 142(1) (2007) 150-161.
- [11] S. Hormozi, K. Wielage-Burchard, I.A. Frigaard, Entry, start up and stability effects in visco-plastically lubricated pipe flows, Journal of Fluid Mechanics, 673 (2011) 432-467.
- [12] S. Hormozi, K.W. Burchard, I.A. Frigaard, Multi-layer channel flows with yield stress fluids, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 166(5-6) (2011) 262-278.

مؤلفه طولی سرعت،	u
m/s،	
بردار سرعت،	u_i
m/s،	
مؤلفه عرضی سرعت،	v
m/s،	
مؤلفه طولی موقعیت،	x
m،	
بردار موقعیت،	x_i
m،	
مؤلفه عرضی موقعیت،	y
m،	
ضخامت خروجی سیال هسته	y_i
ضخامت ورودی سیال هسته	Y_i

علائم یونانی

مؤلفه عرضی استاندارد	η
ضریب هلمهلتز	λ
لزجت دینامیکی،	μ
kg/ms،	
لزجت سینماتیکی،	ν
m ² /s،	
مؤلفه طولی استاندارد	ξ
چگالی،	ρ
kg/m ³ ،	
تنش،	τ
kg/ms ² ،	
تابع بسط پایه	ϕ
متغیر وابسته عمومی	ψ
تابع وزن	ω

زیرنویس

سیال بینگهام	B
سیال هسته	γ
سیال حلقه	γ
$\partial/\partial x_j$	\cdot_j
$\partial^2/\partial x_j \partial x_j$	\cdot_{jj}

بالانویس

متغیر بدون بعد	*
گام زمانی	n

مراجع

- [1] D. D. Joseph, R. Bai, K. P. Chen, Y. Y. Renardy, Core-

- [20] S. Hormozi, D.M. Martinez, I.A. Frigaard, Stable core-annular flows of viscoelastic fluids using the visco-plastic lubrication technique, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166(23–24) (2011) 1356-1368.
- [21] A. Bolis, *Fourier Spectral/hp Element Method: Investigation of Time-Stepping and Parallelisation Strategies*, PhD Thesis, Imperial College London, 2013.
- [22] G.E. Karniadakis, S.J. Sherwin, *Spectral/hp Element Methods for CFD*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, New York, (1999).
- [23] C.W. Gear, *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Prentice Hall PTR, (1971).
- [24] C.D. Cantwell, D. Moxey, A. Comerford, A. Bolis, G. Rocco, G. Mengaldo, D. De Grazia, S. Yakovlev, J.E. Lombard, D. Ekelschot, B. Jordi, H. Xu, Y. Mohamied, C. Eskilsson, B. Nelson, P. Vos, C. Biotto, R.M. Kirby, S.J. Sherwin, Nektar++: An open-source spectral/hp element framework, *Computer Physics Communications*, 192 (2015) 205-219.
- [13] M. d’Olce, J. Martin, N. Rakotomalala, D. Salin, L. Talon, Pearl and mushroom instability patterns in two miscible fluids’ core annular flows, *Physics of Fluids*, 20(2) (2008) 024104.
- [14] P. Sarmadi, S. Hormozi, I.A. Frigaard, Triple-layer configuration for stable high-speed lubricated pipeline transport, *Physical Review Fluids*, 2(4) (2017) 044302.
- [15] G. Karniadakis, M. Israeli, S.A. Orszag, High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations, *Journal of Computational Physics*, 97(2) (1991) 414-443.
- [16] S.M. Ghiaasiaan, *Two-Phase Flow, Boiling and Condensation*, Cambridge University Press, Cambridge, (2008).
- [17] S. Ghosh, G. Das, P.K. Das, Simulation of core annular downflow through CFD—A comprehensive study, *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification*, 49(11) (2010) 1222-1228.
- [18] S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, (1980).
- [19] M. Le Bars, A. Davaille, Stability of thermal convection in two superimposed miscible viscous fluids, *Journal of Fluid Mechanics*, 471 (2002) 339-363.

