



حل تحلیلی انتقال حرارت در پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی ناهمگن با ضرایب هدایت وابسته به دما

بابک عرفان منش، محمدمحسن شاه‌مردان^{*}، محمود نوروزی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷/۰۸/۰۲
بازنگری: ۱۳۹۷/۰۹/۲۲
پذیرش: ۱۳۹۷/۱۲/۲۰
ارائه آنلاین: ۱۳۹۷/۱۲/۲۷

کلمات کلیدی:

حل تحلیلی
پوسته مخروطی کامپوزیتی
انتقال حرارت ناهمگن
تبدیل انتگرالی محدود
توابع گرین

خلاصه: در این مقاله، برای اولین بار یک حل تحلیلی برای انتقال حرارت در پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی ناهمگن وابسته به دما ارائه شده است. هندسه پوسته به‌طور کامل مخروطی شکل فرض شده است و الیاف به دور جسم، در جهات دلخواه پیچانده شده‌اند. به‌منظور دستیابی به کلی‌ترین حل، شرایط مرزی حرارتی اعمال شده به‌صورت کلی در پایه پوسته و همچنین اثرات انتقال حرارت هدایتی، جابجایی با جریان سیال اطراف و تشعشع (صورت تقریبی تشعشع) در مرزها مدل شده‌اند. ناهمگن بودن در مسئله حاضر ناشی از وابستگی ضریب انتقال حرارت هدایتی به دما است. بنابراین می‌بایست، معادله انتقال حرارت را ابتدا با استفاده از تبدیل کیرشهف به معادله قابل حل به کمک سری انتگرالی محدود تبدیل کرد، سپس به کمک این تبدیل، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به یک معادله دیفرانسیل معمولی مبدل می‌گردد. در نهایت معادله دیفرانسیل حاصل به کمک روش توابع گرین قابل حل است. در آخر با اعمال معکوس تبدیل انتگرالی محدود و معکوس تبدیل کیرشهف توزیع دمای ناهمگن بدست آید. حل حاضر بر اساس مقایسه نتایج حل تحلیلی با حل عددی به روش مرتبه دوم تفاضلات محدود اعتبارسنجی شده است. مفروضات این مسئله به‌گونه‌ای انتخاب گردیده که قابلیت حل حاضر برای رفع مشکلات صنعتی در زمینه تولید مخازن تحت فشار مخروطی کامپوزیتی مشخص گردد.

۱- مقدمه

کامپوزیتی اطلاعات با ارزشی در زمینه‌هایی نظیر آنالیز جایگذاری الیاف در فرآیند تولید [۲-۴]، جلوگیری از شکست حرارتی [۷-۵] و کنترل انتقال حرارت را دارا می‌باشد.

تحقیقات انجام شده در زمینه بررسی انتقال حرارت هدایتی در مواد کامپوزیتی عمدتاً به روش‌های حل عددی محدود شده است. به دلیل وجود خاصیت ناهمسانگردی^۱ در فیزیک مسائل مربوط به انتقال حرارت در مواد کامپوزیتی و نیز همچنین پیشرفت‌های صورت گرفته در زمینه علوم محاسباتی، روش‌های حل عددی به ابزاری مؤثرتر برای مدل‌سازی انتقال حرارت تبدیل شده است [۱۰-۸]. با این حال حل‌های تحلیلی، درک مستقیمی از فرآیندهای فیزیکی ارائه می‌دهند و همچنین چگونگی تأثیر پارامترهای سیستم بر روی رفتار حرارتی آن را مشخص و کنترل می‌کنند، که این موضوع برای طراحی و بهینه‌سازی سیستم‌ها ضروری است [۱۱].

اونیچکوه [۱۲] یک حل دقیق برای انتقال حرارت در محیط‌های کامپوزیتی با استفاده از تئوری انتگرال مرزی ارائه داده است. یک حل

از زمان به‌کارگیری اولین کامپوزیت‌ها توسط مصریان باستان تا معرفی کامپوزیت‌های پیشرفته در نیمه دوم قرن بیستم میلادی، تقریباً ۶۰۰۰ سال سپری شده است. پیشرفتی که در زمینه استفاده از مواد کامپوزیتی در پنجاه سال اخیر صورت گرفته بسیار عظیم‌تر از سابقه دیرینه نزدیک به ۶۰۰۰ ساله این صنعت است [۱]. دلیل این امر خواص منحصر به فرد این گونه مواد که شامل نسبت بالای مقاومت به دانسیته، نسبت بالای سفتی به دانسیته، انبساط حرارتی نزدیک به صفر، عمر خستگی استثنایی، مقاومت بالا در برابر ضربه، مقاومت بالا در برابر خوردگی، مقاومت بالا در برابر نفوذ و پلاسیسته می‌باشد. این خواص بی‌همتا باعث کاربردهای گسترده این مواد در صنعت، از جمله مخازن انبارش، مبدل‌های حرارتی، بین‌فین‌ها، لوله‌ها، محفظه‌های احتراق و غیره شده است. با اینکه تحقیقات فراوانی در زمینه خواص مکانیکی این گونه مواد صورت گرفته اما مطالعات کمی در راستای بررسی رفتار انتقال حرارتی آنان موجود است. تحقیق بر روی پدیده انتقال حرارت در مواد

1 Anisotropy

^{*} نویسنده عهده‌دار مکاتبات: mmshahmardan@yahoo.com

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode> دیدن فرمائید.



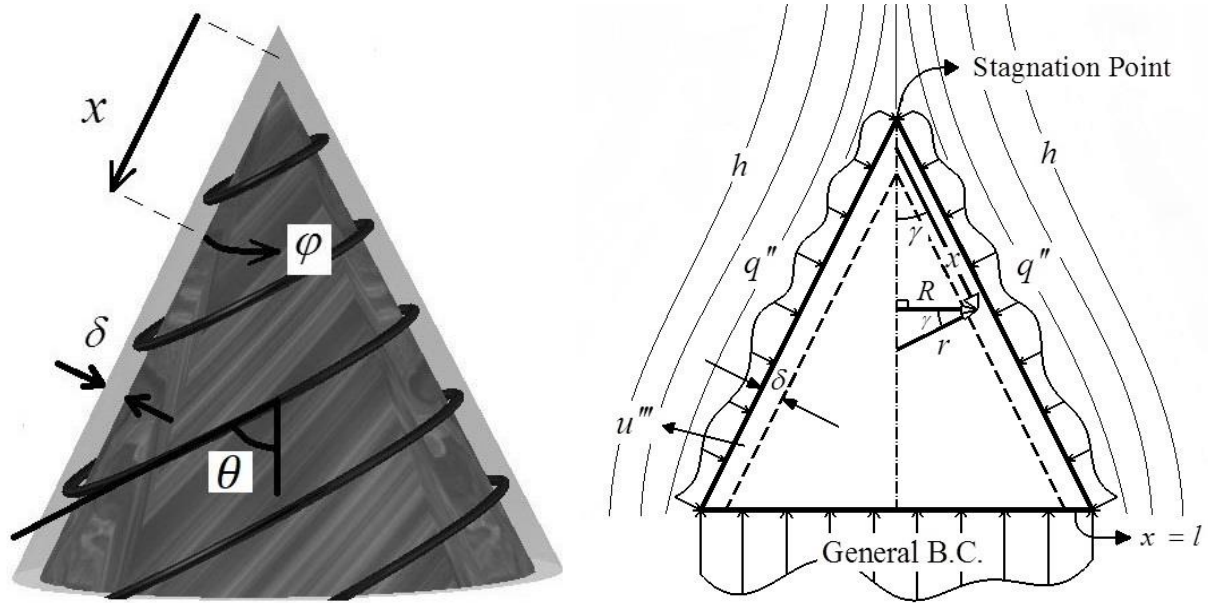
وجود دارد پیدا کردن دستگاه مختصات مناسب و نیز روش حل برای مسئله انتقال حرارت مخروط بسیار دشوار است. ماهیسی و همکاران [۱۹] یک حل برای انتقال حرارت غیردائمی در دماغه‌های کامپوزیتی، تحت شرایط حرارتی آترودینامیکی ارائه دادند که حل آن‌ها با استفاده از روش المان محدود انجام شده بود. انتقال حرارت هدایتی در پوسته مخروطی ناقص کامپوزیتی همگن توسط ری و همکاران [۲۰] بررسی شد. آن‌ها در تحقیق خود از دو روش نیمه‌تحلیلی و عددی استفاده کردند. نوروزی و رحمانی [۲۱] در تحقیق خود یک حل تحلیلی برای انتقال حرارت هدایتی در پوسته مخروطی کامپوزیتی، تحت شرایط مرزی کلی ارائه دادند. آن‌ها ابتدا معادله انتقال حرارت را به فرم کانونیکالی تبدیل کردند و سپس با استفاده از روش جداسازی متغیرها معادله را برای حالت عمومی و چند حالت خاص حل کرده و در نهایت حل تحلیلی خود را با حل عددی اعتبارسنجی کردند. همچنین نوروزی و رحمانی [۲۲] برای اولین بار یک حل تحلیلی برای انتقال حرارت غیردائمی در مخروط ناقص کامپوزیتی ارائه کردند. آن‌ها در حل خود ابتدا از روش تبدیل انتگرالی محدود استفاده کردند و سپس در ادامه حل از روش جداسازی متغیرها بهره بردند. در آخر حل خود را با حل عددی مرتبه دوم تفاضلات محدود اعتبارسنجی کردند.

در مقاله حاضر روی انتقال حرارت پایای دوبعدی در جهت‌های طولی و زاویه‌ای (x, φ) در پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی ناهمگن^۳ و ناهمسانگرد تمرکز کرده‌ایم. ناهمگن بودن در مسئله ناشی از وابستگی ضریب انتقال حرارت هدایتی به دما است. هندسه پوسته به طور کامل مخروطی شکل است و ایلاف به دور جسم پیچانده شده‌اند به طوری که زاویه ایلاف قابل تغییر است. همچنین، شرایط مرزی به صورت کلی در نظر گرفته شده است تا در صورت نیاز تمامی مکانیزم انتقال حرارت را پوشش دهد. تبدیل کیرششف^۴ بر روی معادله انرژی اعمال شده تا مسئله از حوزه ناهمگن به همگن انتقال یابد سپس معادله دیفرانسیل جزئی حاصل با استفاده از یک تبدیل انتگرالی محدود^۵ در جهت زاویه‌ای به یک معادله معمولی ساده شده است که برای حل آن با اعمال شرایط مرزی از روش توابع گرین^۶ بهره برده‌ایم و جواب عمومی و خصوصی را به طور مستقیم به دست آورده‌ایم. در نهایت با اعمال معکوس تبدیل انتگرالی محدود و تبدیل کیرششف توزیع دما به دست آمده است. مفروضات مسئله به گونه‌ای انتخاب گردیده که قابلیت حل حاضر برای رفع مشکلات صنعتی در زمینه فرآیند تولید مخازن تحت

تحلیلی توسط میلر و ویور [۱۳] ارائه شد که این حل قابلیت پیش‌بینی توزیع دما برای مواد چندلایه تحت شرایط مرزی تشعشی و جابجایی را دارد. سینگ و جین [۱۴] یک حل تحلیلی برای انتقال حرارت دوبعدی در محیط‌های چندلایه ارائه نموده‌اند. حل آن‌ها بر پایه روش جداسازی متغیرها بوده و تنها شرایط مرزی همگن را پوشش می‌دهد. کیهانی و همکاران [۱۵] یک حل تحلیلی انتقال حرارت هدایتی پایا در لمینیت‌های کامپوزیتی استوانه‌ای تحت شرایط مرزی کلی در جهت‌های شعاعی و طولی (r, z) را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از تئوری اشتروم-لیوویل^۱ برای یافتن تبدیل فوریه مناسب برای مسئله خود بهره بردند و به کمک آن توزیع دما را به دست آوردند. حل موجود تنها برای گذشت زمان‌های زیاد و حالت دائم معتبر است. امیری دلویی و همکاران [۱۶] برای انتقال حرارت متقارن محوری در حالت ناپایا، یک حل دقیق تحلیلی برای لمینیت‌های چند لایه کامپوزیتی استوانه‌ای ناهمسانگرد ارائه کردند. آن‌ها ابتدا با اعمال تبدیل لاپلاس مسئله را از حوزه زمان به حوزه فرکانس منتقل کردند و سپس با بهره‌گیری از تئوری اشتروم-لیوویل به ساخت تبدیل فوریه مناسب و حل مسئله پرداختند. در انتها نیز جواب به دست آمده در حوزه فرکانس را با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس به حوزه زمان منتقل کردند. حل دقیقی برای حالت پایا در یک کره چند لایه که با ایلاف کامپوزیتی تقویت شده‌اند توسط نوروزی و همکاران [۱۷] نیز ارائه شده است. انتقال حرارت در جهات زاویه‌ای و شعاعی (r, θ) مورد بررسی قرار گرفت و شرایط مرزی در داخل و خارج کره به صورت کلی فرض شد. به منظور دستیابی به حل دقیق، روش جداسازی متغیرها استفاده گردید و سپس دستگاه معادلات مرتبط با ضرایب ثابت سری فوریه-لژاندر توزیع دما با استفاده از الگوریتم بازگشتی توماس حل شدند. امیری دلویی و نوروزی [۱۸] حل دقیق تحلیلی انتقال حرارت هدایتی ناپایا در لمینیت‌های کامپوزیتی کره‌ای چند لایه تقویت شده با ایلاف کامپوزیتی را ارائه کردند. در این حل پس از اعمال تبدیل لاپلاس از روش جداسازی متغیرها استفاده شد و پس از حل دستگاه معادلات مرتبط با ضرایب ثابت سری فوریه-لژاندر در انتها از تکنیک توابع مرمرفیک^۲ به منظور محاسبه لاپلاس معکوس بهره گرفتند. تقریباً اکثر مقالاتی که تاکنون نوشته شده‌اند سعی در حل مسئله انتقال حرارت در هندسه‌هایی نظیر: کره، استوانه و کانال را داشته‌اند. اما هندسه‌های مهم و کاربردی دیگری نیز متصور می‌باشند که کاربردهای اساسی در صنایع مختلف نیز دارند، در این میان یکی از این موارد هندسه مخروطی شکل است، اما به دلیل پیچیدگی که در هندسه مخروط

3 Heterogeneous
4 Kirchhoff Transformation
5 Integral Transformation
6 Green's Function

1 Strum-Liouville Theorem
2 Meromorphic Function



شکل ۱: جهت‌گیری الیاف با سیستم مختصات و شرایط مرزی در پوسته مخروطی کامپوزیتی [۲۱]

Fig. 1. Direction of fibers plus coordinate system and boundary conditions of composite conical shell

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_\phi \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{k}_{11}(T) & \bar{k}_{12}(T) \\ \bar{k}_{21}(T) & \bar{k}_{22}(T) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{R \partial \phi} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

در رابطه (۱)، x و ϕ متغیرهای مختصاتی بیانگر فاصله که $0 \leq x \leq l$ و $-\pi \leq \phi \leq \pi$ ، شار حرارتی، q شعاع یک قطاع حلقوی از پوسته مخروطی و T معرف دما است. همچنین ضرایب $\bar{k}_{11}(T)$ ، $\bar{k}_{12}(T)$ و $\bar{k}_{22}(T)$ با توجه به ضرایب انتقال حرارت هدایتی در جهت متناظر با راستای الیاف، $k_{11}(T)$ ، راستای عمود بر الیاف، $k_{22}(T)$ ، و همچنین میزان زاویه الیاف فرمول‌بندی می‌شوند.

$$\bar{k}_{11}(T) = m_l^2 k_{11}(T) + n_l^2 k_{22}(T) \quad (\text{الف})$$

$$\bar{k}_{22}(T) = n_l^2 k_{11}(T) + m_l^2 k_{22}(T) \quad (\text{ب}) \quad (2)$$

$$\bar{k}_{12}(T) = \bar{k}_{21}(T) = m_l n_l (k_{11}(T) - k_{22}(T)) \quad (\text{ج})$$

در روابط (۲)، $\cos(\theta)$ با m_l و $\sin(\theta)$ با n_l نشان داده شده است. همچنین θ نیز زاویه الیاف تعریف می‌شود. جهت تعیین معادله انتقال حرارت در پوسته مخروطی کامپوزیتی ناهمگن،

فشار کامپوزیتی مشخص گردد. همچنین به جهت اعتبارسنجی حل تحلیلی حاضر با حل عددی به روش مرتبه دوم تفاضلات محدود مقایسه شده است.

۲- معادلات حاکم

جهت تعیین معادله انتقال حرارت در پوسته مخروطی کامپوزیتی ناهمگن، بایستی المانی بر روی پوسته در نظر گرفته شود، سپس با اعمال معادله موازنه انرژی بر روی این المان، معادله انتقال حرارت دوبعدی پایا در پوسته مخروطی به دست خواهد آمد. بدین منظور دانش انتقال حرارت هدایتی در زمینه‌های ناهمسانگرد بسیار ضروری است. در شکل ۱ هندسه پوسته مخروطی کامپوزیتی، با زاویه الیاف θ و شرایط مرزی عمومی نمایش داده شده است.

با فرض یک زاویه الیاف دلخواه، خواص هدایتی در مواد کامپوزیتی بر اساس میزان زاویه الیاف در جهت‌ها و دماهای مختلف بسیار متفاوت است [۲۱]. با در نظر گرفتن رابطه فوریه برای انتقال حرارت در محیط‌های ناهمسانگرد و ناهمگن رابطه (۱) برای پوسته مخروطی کامپوزیتی ناهمگن ارائه می‌گردد:

برای این شرط مرزی رابطه‌ای به صورت زیر قابل بیان است:

$$\sigma \hat{\theta}(l, \varphi) + \omega \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x}(l, \varphi) = f(\varphi) \quad (۶)$$

که در رابطه (۶)، $f(\varphi)$ می‌تواند هر تابع دلخواهی باشد. ثابت‌های σ و ω به ترتیب ابعادی مشابه ضریب انتقال حرارت جابجایی، یعنی W/m^2K و ضریب انتقال حرارت هدایتی، یعنی W/mK دارند. پارامتر l نیز که مؤلفه‌ای از x می‌باشد، به صورت فاصله نوک مخروط تا پایه آن معرفی می‌شود.

۳- ارائه حل تحلیلی برای توزیع دما

مواد جامد ناهمگن به دلیل داشتن محدوده وسیع دمایی، دارای اهمیت ویژه‌ای می‌باشند. معمولاً برای حل مسائل ناهمگن از روش‌های عددی استفاده می‌شود، اما می‌توان حل‌های تحلیلی هم برای آنان متصور بود. یکی از این روش‌های تحلیلی که بسیار هم پرکاربرد بوده استفاده از تبدیل کیرشهف است. در این قسمت، یک حل تحلیلی دائمی از پخش دما تحت شرایط مرزی کلی برای پوسته مخروطی ارائه شده است. ابتدا معادله انتقال حرارت ناهمگن را با استفاده از تبدیل کیرشهف به معادله قابل حل به کمک سری‌های انتگرالی محدود تبدیل می‌کنیم، سپس با استفاده از تبدیل انتگرالی محدود، معادله دما را حل کرده و بعد از آن با استفاده از روش توابع گرین جواب حاصل را به دست آورده و در نهایت از تبدیلات، معکوس می‌گیریم تا توزیع دما را به دست آوریم. تبدیلات کیرشهف به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۴]:

$$k_{11}(\hat{\theta}) = k_{011}(1 + \beta \hat{\theta}) \quad (الف)$$

$$k_{22}(\hat{\theta}) = k_{022}(1 + \beta \hat{\theta}) \quad (ب)$$

$$\hat{\Theta} = \int_0^{\hat{\theta}} (1 + \beta \hat{\theta}) d\hat{\theta} = \hat{\theta} + \frac{1}{2} \beta \hat{\theta}^2 \quad (ج) \quad (۷)$$

$$\hat{\theta}(x, \varphi) = \frac{1}{\beta} \left(-1 + \sqrt{1 + 2\beta \hat{\Theta}(x, \varphi)} \right) \quad (د)$$

همان‌گونه که از معادلات (۷-الف) و (۷-ب) برمی‌آید، ضرایب انتقال حرارت هدایتی به صورت خطی با دما تغییر می‌کنند. در این معادلات $k_{011} = k_{11}(0)$ و $k_{022} = k_{22}(0)$ است که بیانگر ضرایب انتقال

اثرات انتقال حرارت جابجایی با جریان سیال محیط، انتقال حرارت تشعشی خارجی و چشمه انرژی درون پوسته، مدل شده‌اند، سپس با اعمال معادله موازنه انرژی و استفاده از روابط (۱) و (۲) معادله انتقال حرارت دوبعدی پایا در پوسته مخروطی به صورت زیر به دست خواهد آمد [۲۱]:

$$\begin{aligned} & \bar{k}_{11}(T) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\bar{k}_{22}(T)}{x^2 \sin^2 \gamma} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \\ & + \frac{2\bar{k}_{12}(T)}{x \sin \gamma} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\bar{k}_{11}(T)}{x} \frac{\partial T}{\partial x} \\ & - \frac{h}{\delta} (T - T_{\infty}) = -\frac{u''' \delta + q''}{\delta} \end{aligned} \quad (۳)$$

جهت ساده‌سازی رابطه (۳)، توزیع دمای اصلاح‌شده به صورت $\hat{\theta}(x, \varphi) = T(x, \varphi) - T_{\infty}$ تعریف می‌گردد. که در آن T_{∞} بیانگر دمای محیط است. در این صورت، معادله انتقال حرارت دوبعدی (۳) به صورت زیر (رابطه (۴)) اصلاح می‌گردد:

$$\begin{aligned} & \bar{k}_{11}(\hat{\theta}) \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial x^2} + \frac{\bar{k}_{22}(\hat{\theta})}{x^2 \sin^2 \gamma} \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \varphi^2} \\ & + \frac{2\bar{k}_{12}(\hat{\theta})}{x \sin \gamma} \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\bar{k}_{11}(\hat{\theta})}{x} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} \\ & - \frac{h}{\delta} \hat{\theta} = -\frac{u''' \delta + q''}{\delta} \end{aligned} \quad (۴)$$

در رابطه (۴)، γ نصف زاویه نوک مخروط، δ ضخامت پوسته مخروطی، u''' نرخ انتقال حرارت تولیدی بر واحد حجم و h بیانگر ضریب انتقال حرارت جابجایی است. q'' نیز معرف شار حرارتی خارجی که بر پوسته مخروطی اعمال شده می‌باشد. شار گرمایی خارجی (q'') بسته به کاربردهای مختلف تعاریف مختلفی دارد. این شار می‌تواند به صورت تابعی از جهت زاویه‌ای (φ) بیان گردد. این تعریف برای زمانی است که شار گرمایی تابشی به یک سمت مخروط اعمال شود [۲۳].

$$q'' = \begin{cases} \bar{q}'' \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 & \pi \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad (۵)$$

شرط مرزی خطی درکلی‌ترین شکل خود در نظر گرفته شده است. که این شرایط مرزی محدوده وسیعی از شرایط مرزی پرکاربرد را دربرمی‌گیرد.

$$\Theta(x, n) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-in\varphi} \hat{\Theta}(x, \varphi) d\varphi \quad (\text{الف}) \quad (11)$$

$$\hat{\Theta} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{in\varphi} \Theta(x, n) \quad (\text{ب})$$

که $i^2 = -1$ و n عددی صحیح می‌باشد. به‌طور واضح مشخص است که معادله (۱۱-الف) تبدیل انتگرالی تابع Θ در جهت زاویه‌ای φ بوده و معادله (۱۱-ب) نیز نشان‌دهنده معکوس این تبدیل می‌باشد. با اعمال تبدیل انتگرالی محدود رابطه (۱۱-الف) و نیز معادله (۵) و بر روی معادله (۱۰)، معادله‌ای به‌صورت زیر تشکیل خواهد شد:

$$\bar{k}_{011} \frac{d^2 \Theta}{dx^2} + \left(\frac{2in\bar{k}_{012}}{x \sin \gamma} + \frac{\bar{k}_{011}}{x} \right) \frac{d\Theta}{dx} - \left(\frac{n^2 \bar{k}_{022}}{x^2 \sin^2 \gamma} + \frac{h}{\delta} \right) \Theta = -\frac{\bar{q}''}{\delta} \left(-\frac{e^{-in\pi} + 1}{n^2 - 1} \right) \quad (12)$$

در معادله (۱۲) به ازای مقادیر $n = -1, 1$ در سمت راست تساوی و در قسمت مخرج آن دارای ابهام ریاضیاتی بوده، برای جلوگیری از این ابهام ریاضیاتی باید جملات $n = -1, 1$ را به‌صورت جداگانه حساب کرد. در این صورت به ازای این دو جمله جواب‌هایی جداگانه به دست می‌آید که درنهایت با سایر جملات جمع می‌گردد. همچنین در این معادله به ازای $n = 0$ عبارت سمت راست تساوی مقداری متفاوت خواهد داشت. پس در نتیجه جمله صفرم را نیز باید به‌صورت جداگانه حساب کنیم، و درنهایت با سایر جملات جمع کنیم. برای ساده‌سازی، بعضی از مقادیر معادله را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Phi = \frac{2in\bar{k}_{012}}{\sin \gamma \bar{k}_{011}} + 1 \quad (\text{الف})$$

$$\Psi = -\frac{n^2 \bar{k}_{022}}{\sin^2 \gamma \bar{k}_{011}} \quad (\text{ب})$$

$$\Lambda = -\frac{h}{\delta \bar{k}_{011}} \quad (\text{ج}) \quad (13)$$

$$\chi = \begin{cases} -\frac{\bar{q}''}{\delta \bar{k}_{011}} \left(-\frac{in\pi}{2} \right) & n = -1, 1 \\ -\frac{2\pi \delta u''' + 2q''}{\delta \bar{k}_{011}} & n = 0 \\ -\frac{\bar{q}''}{\delta \bar{k}_{011}} \left(-\frac{e^{-in\pi} + 1}{n^2 - 1} \right) & n \neq -1, 0, 1 \end{cases} \quad (\text{د})$$

حرارت هدایتی در دمای مرجع (دمای محیط) در جهت متناظر با راستای الیاف و راستای عمود بر الیاف می‌باشند. ثابت β نیز ضریب دمایی انتقال حرارت هدایتی نامیده می‌شود. با اعمال تبدیل کیرشهف روابط (۷) بر معادله (۴)، معادله‌ای به شکل زیر ساخته خواهد شد:

$$\bar{k}_{011} \frac{\partial^2 \hat{\Theta}}{\partial x^2} + \frac{\bar{k}_{022}}{x^2 \sin^2 \gamma} \frac{\partial^2 \hat{\Theta}}{\partial \varphi^2} + \frac{2\bar{k}_{012}}{x \sin \gamma} \frac{\partial^2 \hat{\Theta}}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\bar{k}_{011}}{x} \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial x} - \frac{h}{\delta} \frac{1}{\beta} \left(-1 + \sqrt{1 + 2\beta \hat{\Theta}(x, \varphi)} \right) = -\frac{u''' \delta + q''}{\delta} \quad (8)$$

همان‌طور که مشخص است عبارت غیر خطی $\left(-1 + \sqrt{1 + 2\beta \hat{\Theta}(x, \varphi)} \right) / \beta$ در معادله (۸) ظاهر شده است، لذا برای ادامه روند حل به خطی‌سازی این عبارت نیاز داریم. یکی از روش‌های مرسوم خطی‌سازی استفاده از بسط تیلور می‌باشد. طبق بررسی داده‌های دقیق آزمایشگاهی، ضریب β در عمل عددی بسیار کوچک است [۲۵]، پس در نتیجه با به‌کارگیری بسط تیلور به ازای دو جمله اول، حول نقطه صفر با دقت بسیار خوبی می‌توان عبارت غیرخطی را به‌صورت خطی زیر تقریب زد:

$$\frac{1}{\beta} \left(-1 + \sqrt{1 + 2\beta \hat{\Theta}(x, \varphi)} \right) \approx \hat{\Theta} \quad (9)$$

حال با جایگذاری رابطه (۹) در معادله (۸) به یک معادله خطی به شکل زیر دست خواهیم یافت:

$$\bar{k}_{011} \frac{\partial^2 \hat{\Theta}}{\partial x^2} + \frac{\bar{k}_{022}}{x^2 \sin^2 \gamma} \frac{\partial^2 \hat{\Theta}}{\partial \varphi^2} + \frac{2\bar{k}_{012}}{x \sin \gamma} \frac{\partial^2 \hat{\Theta}}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\bar{k}_{011}}{x} \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial x} - \frac{h}{\delta} \hat{\Theta} = -\frac{u''' \delta + q''}{\delta} \quad (10)$$

برای حل معادله با مشتقات جزئی بالا در مرحله اول باید این معادله را با استفاده از تبدیل انتگرالی محدود در جهت زاویه‌ای (φ) به یک معادله ساده‌تر تبدیل کرد. حالت عمومی تبدیل انتگرالی محدود در جهت زاویه‌ای φ به‌صورت زیر قابل بیان است [۲۲]:

$$\Theta_q = \frac{F(n)}{J_0(\sqrt{\Lambda l})} J_0(\sqrt{\Lambda x}) \quad (\text{الف})$$

$$L(\Theta_q) = \frac{F(n)}{J_0(\sqrt{\Lambda l})} \times (\Psi x^{\Phi-2} J_0(\sqrt{\Lambda x}) + (1-\Phi)\sqrt{\Lambda x}^{\Phi-1} J_1(\sqrt{\Lambda x})) \quad (\text{ب}) \quad (18)$$

$$f(x) - L(\Theta_q) = \chi x^\Phi - \frac{F(n)}{J_0(\sqrt{\Lambda l})} \times (\Psi x^{\Phi-2} J_0(\sqrt{\Lambda x}) + (1-\Phi)\sqrt{\Lambda x}^{\Phi-1} J_1(\sqrt{\Lambda x})) \quad (\text{ج})$$

در معادلات (۱۸-الف)، (۱۸-ب) و (۱۸-ج) عبارت $F(n)$ همان تبدیل یافته شرط مرزی $f(\varphi)$ ، یعنی معادله (۶) می‌باشد. با جایگذاری مقادیر معادلات (۱۸-الف)، (۱۸-ب) و (۱۷) در معادله (۱۶)، معادله‌ای با شرایط مرزی همگن به‌صورت زیر ساخته می‌شود:

$$\frac{d}{dx} \left(x^\Phi \frac{d\Theta_1}{dx} \right) + (\Psi x^{\Phi-2} + \Lambda x^\Phi) \Theta_1 = \chi x^\Phi - \frac{F(n)}{J_0(\sqrt{\Lambda l})} \left(\Psi x^{\Phi-2} J_0(\sqrt{\Lambda x}) + (1-\Phi)\sqrt{\Lambda x}^{\Phi-1} J_1(\sqrt{\Lambda x}) \right) \quad (19)$$

جواب عمومی معادله (۱۹) به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\Theta_1 = x^{\frac{1}{2}(1-\Phi)} \left[C_1 Y_\nu(\sqrt{\Lambda x}) + C_2 J_\nu(\sqrt{\Lambda x}) \right] \quad (20)$$

$$\& \quad \nu = \frac{1}{2} \sqrt{(1-\Phi)^2 - 4\Psi}$$

در رابطه (۲۰)، J_ν و Y_ν توابع بسل اصلاح‌شده از مرتبه ν هستند. با اعمال شرط مرزی دما محدود در نوک مخروط یعنی نقطه $a=0$ ، کلیه جواب‌های ممکن برای تابع گرین روی بازه $(0, \xi)$ به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\Theta_{1,L} = C_2 x^{\frac{1}{2}(1-\Phi)} J_\nu(\sqrt{\Lambda x}) \quad x \in [0, \xi] \quad (21)$$

با اعمال شرط مرزی همگن شده در پایه مخروط یعنی نقطه $b=l$ ، کلیه جواب‌های ممکن برای تابع گرین روی بازه (ξ, l) عبارتند از:

در ادامه روند حل از روشی موسوم به توابع گرین استفاده خواهیم کرد، این روش برای تعیین جواب خصوصی معادلاتی که مستقل از زمان هستند، کاربرد دارد. توابع گرین برای معادلات معمولی خطی، مرتبه دو به شکل زیر تعریف می‌گردد [۲۶]:

$$L[y] = f(x), \quad a < x < b \quad (\text{الف})$$

$$L = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x) \quad (\text{ب}) \quad (14)$$

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = \alpha, \quad |a_1| + |a_2| \neq 0, \quad (\text{ج})$$

$$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = \beta, \quad |b_1| + |b_2| \neq 0, \quad (\text{د})$$

در تابع گرین، x متغیر مستقل و ξ یک پارامتر است. اگر y_q تابعی باشد که در شرایط مرزی صدق کند، آن‌گاه:

$$y(x) = y_q + \int_a^b G(x; \xi) (f(\xi) - L(y_q)) d\xi \quad (15)$$

رابطه (۱۵) جواب مسئله است. زیرا اگر بگیریم $y = y_1 + y_q$ در این صورت y_1 جواب مسئله زیر است:

$$L(y_1) = L(y) - L(y_q) = f(x) - L(y_q) \quad (\text{الف})$$

$$a_1 y_1(a) + a_2 y_1'(a) = 0 \quad (\text{ب}) \quad (16)$$

$$b_1 y_1(b) + b_2 y_1'(b) = 0 \quad (\text{ج})$$

با جایگذاری معادلات (۱۳-الف)، (۱۳-ب)، (۱۳-ج) و (۱۳-د) در معادله (۱۲) می‌توان معادله‌ای به شکل زیر را ساخت:

$$\frac{d}{dx} \left(x^\Phi \frac{d\Theta}{dx} \right) + (\Psi x^{\Phi-2} + \Lambda x^\Phi) \Theta = \chi x^\Phi \quad (17)$$

اگر Θ_q تابعی باشد که در شرایط مرزی صدق کند. می‌توان آن را به‌صورت زیر تعریف کرد:

ضرایب C_1 و C_2 در معادله (۲۶) قبلاً در معادلات (۲۴-الف) و (۲۴-ب) محاسبه شده‌اند. حال برای به دست آوردن جواب نهایی معادله انتقال حرارت، ابتدا از معادله (۲۶) باید تبدیل انتگرالی معکوس بگیریم، پس از آن با به کارگیری معکوس تبدیل کیرشهف، توزیع دما به شکل زیر به دست می‌آید:

$$T(x, \varphi) = T_\infty - \frac{1}{\beta} + \left[\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \{e^{in\varphi} (\Theta(x, n))\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (۲۷)$$

که در معادله بالا مقدار عبارت $\Theta(x, n)$ قبلاً در معادله (۲۶) محاسبه شده است.

۴- نتایج و بحث

در این بخش، سعی شده است که با ارائه نمونه‌های عملی توانایی حل ارائه شده در بررسی مسائل مربوط به پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی ناهمگن برای آرایش‌های مختلف الیاف نشان داده شود. امروزه یافتن موادی با خواص حفاظت گرمایی بالا برای استفاده در صنایع مختلف بسیار مهم و کاربردی است. در واقع برای خنک‌کاری پین‌ها، مخازن انبارش، ناحیه دماغه و کلاهک‌ها، خروجی موتورها و آگزوزها به موادی با خواص هدایت گرمایی بالا نیاز داریم. مواد کامپوزیتی کربن-کربن^۱ برای کاربردهای با حفاظت گرمایی بالا پیشنهاد می‌شوند. زیرا این مواد علاوه بر این که دارای وزن سبکی هستند در دماهای بالا نیز استحکام خود را به خوبی حفظ می‌کنند و ضریب هدایت گرمایی بالا و مناسبی هم دارند، این ویژگی‌ها باعث می‌شوند که این مواد برای کاربردهای حفاظت‌های پیشرفته گرمایی کاندید شوند [۲۵]. جدول ۱ خواص دو نوع از کامپوزیت‌ها که در حل حاضر به کار برده شده‌اند، را نشان می‌دهد.

در این مقاله مسئله انتقال حرارت در پوسته مخروطی کامپوزیتی ناهمگن برای کاربرد مخزن تحت فشار مورد بررسی قرار گرفته است. جدول ۲ هندسه و شرایط مرزی حاکم بر مسئله برای کاربرد مخزن تحت فشار را نشان می‌دهد.

از آنجا که در حل ارائه شده جنس و زاویه الیاف می‌تواند، تغییر کند، تأثیر این دو فاکتور به طور خاص در نتایج حل برای نمونه‌های صنعتی در نظر گرفته شده است. همچنین در این نمونه‌های عملی شرایط مرزی به صورت نامتقارن بررسی گردیده، برای این منظور پوسته مخروطی کامپوزیتی در معرض تابش آفتاب قرار گرفته است. شار تشعشی خورشید که در نزدیکی

$$\Theta_{1,R} = C_1 x^{\frac{1}{2}(1-\Phi)} \left[Y_{\nu}(\sqrt{\Lambda x}) + \lambda J_{\nu}(\sqrt{\Lambda x}) \right] \quad (۲۲)$$

$$x \in [\xi, l)$$

که ضریب λ در معادله بالا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda = -\frac{Y_{\nu}(\sqrt{\Lambda l})}{J_{\nu}(\sqrt{\Lambda l})} \quad (۲۳)$$

ضرایب C_1 و C_2 در معادلات (۲۱) و (۲۲) ضرایب مجهولی هستند که با استفاده از برقراری شرط پیوستگی تابع گرین در نقطه $x = \xi$ و همچنین با اعمال شرط مقدار جهش در مشتق در نقطه $x = \xi$ محاسبه می‌گردند. و در نهایت مقدار آن‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C_2 = \left(\frac{Y_{\nu}(\sqrt{\Lambda \xi})}{J_{\nu}(\sqrt{\Lambda \xi})} + \lambda \right) \quad (۲۴)$$

$$\left(\left(\xi^{\frac{1}{2}(1-\Phi)} J_{\nu}(\sqrt{\Lambda \xi}) \frac{Y_{\nu}(\sqrt{\Lambda \xi})}{J_{\nu}(\sqrt{\Lambda \xi})} - \xi^{\frac{1}{2}(1-\Phi)} Y_{\nu}(\sqrt{\Lambda \xi}) \right) \sqrt{\Lambda \xi} \right)^{-1}$$

$$C_1 = \left(\left(\xi^{\frac{1}{2}(1-\Phi)} J_{\nu}(\sqrt{\Lambda \xi}) \frac{Y_{\nu}(\sqrt{\Lambda \xi})}{J_{\nu}(\sqrt{\Lambda \xi})} - \xi^{\frac{1}{2}(1-\Phi)} Y_{\nu}(\sqrt{\Lambda \xi}) \right) \sqrt{\Lambda \xi} \right)^{-1} \quad (ب)$$

در نهایت تابع گرین به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$G(x; \xi) = \begin{cases} \frac{\left(x^{\frac{1}{2}(1-\Phi)} J_{\nu}(\sqrt{\Lambda x}) \right) \left(\frac{Y_{\nu}(\sqrt{\Lambda \xi})}{J_{\nu}(\sqrt{\Lambda \xi})} + \lambda \right)}{\left(\xi^{\frac{1}{2}(1-\Phi)} J_{\nu}(\sqrt{\Lambda \xi}) \frac{Y_{\nu}(\sqrt{\Lambda \xi})}{J_{\nu}(\sqrt{\Lambda \xi})} - \xi^{\frac{1}{2}(1-\Phi)} Y_{\nu}(\sqrt{\Lambda \xi}) \right) \sqrt{\Lambda \xi} \Phi} & 0 \leq x \leq \xi \\ \frac{x^{\frac{1}{2}(1-\Phi)} \left(Y_{\nu}(\sqrt{\Lambda x}) + \lambda J_{\nu}(\sqrt{\Lambda x}) \right)}{\left(\xi^{\frac{1}{2}(1-\Phi)} J_{\nu}(\sqrt{\Lambda \xi}) \frac{Y_{\nu}(\sqrt{\Lambda \xi})}{J_{\nu}(\sqrt{\Lambda \xi})} - \xi^{\frac{1}{2}(1-\Phi)} Y_{\nu}(\sqrt{\Lambda \xi}) \right) \sqrt{\Lambda \xi} \Phi} & \xi \leq x \leq l \end{cases} \quad (۲۵)$$

(الف)

(ب)

با جایگذاری معادلات (۱۸-الف)، (۱۸-ج) و (۲۵-الف) در معادله (۱۵)،

جوابی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Theta(x, n) = \frac{F(n)}{J_0(\sqrt{\Lambda l})} J_0(\sqrt{\Lambda x})$$

$$+ \int_{\xi}^l \left[C_2 \left(x^{\frac{1}{2}(1-\Phi)} J_{\nu}(\sqrt{\Lambda x}) \right) \right. \\ \left. \times \left(\chi \xi^{\Phi} - \frac{F(n)}{J_0(\sqrt{\Lambda l})} \left(\Psi \xi^{\Phi-2} J_0(\sqrt{\Lambda \xi}) + (1-\Phi) \sqrt{\Lambda} \xi^{\Phi-1} J_1(\sqrt{\Lambda \xi}) \right) \right) \right] d\xi \quad (۲۶)$$

$$+ \int_0^x \left[C_1 \left(x^{\frac{1}{2}(1-\Phi)} \left(Y_{\nu}(\sqrt{\Lambda x}) + \lambda J_{\nu}(\sqrt{\Lambda x}) \right) \right) \right. \\ \left. \times \left(\chi \xi^{\Phi} - \frac{F(n)}{J_0(\sqrt{\Lambda l})} \left(\Psi \xi^{\Phi-2} J_0(\sqrt{\Lambda \xi}) + (1-\Phi) \sqrt{\Lambda} \xi^{\Phi-1} J_1(\sqrt{\Lambda \xi}) \right) \right) \right] d\xi$$

Table 1. Specifications of polymeric composite materials

جدول ۱: خواص کامپوزیت‌های پلیمری [۲۵]

جنس ماده	دما مرجع (K)	چگالی (g/cm ³)	ظرفیت گرمایی (J/gK)	k ₀₁₁ (W/mK)	k ₀₂₂ (W/mK)	β (1/K)
کربن- کربن ۱	۲۹۵	۱/۷۷۰	۰/۶۸۷	۵۴/۸۵۰	۵/۱۹۳	۰/۰۰۱
کربن- کربن ۲	۲۹۵	۱/۵۴۷	۰/۶۹۰	۲۴/۶۶۷	۴/۷۹۵	۰/۰۰۱

۴-۲- سایر نتایج

به‌منظور بررسی الگوهای مختلف توزیع دما در زوایای مختلف الیاف، کانتورهای توزیع دمای پوسته مخروطی کامپوزیتی گسترش یافته^۱ به ازای ضرایب هدایتی مختلف رسم شده است. چنانچه از شکل ۳ برمی‌آید، تغییر جنس مواد می‌تواند به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای الگوهای توزیع درجه حرارت پوسته مخروطی را تغییر دهد. یعنی هرچه نسبت k_{11}/k_{22} بیشتر باشد، نرخ خنک‌کاری در پوسته بیشتر می‌شود و میزان توزیع دما در پوسته مخروطی کاهش خواهد یافت. در شکل ۳ کانتورهای توزیع دما در زاویه‌های الیاف $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ برای ماده کامپوزیتی کربن- کربن ۱ و کربن- کربن ۲ قابل‌ملاحظه می‌باشد. این کانتورها نشان می‌دهند که با افزایش زاویه الیاف، ماکزیمم دما به‌صورت کلی کاهش می‌یابد. این در حالیست که دمای میانگین با افزایش زاویه الیاف در حال افزایش است. به‌طورکلی توزیع درجه حرارت در پوسته کامپوزیتی همواره بین دو حالت حدی، یعنی زاویه الیاف صفر و نود درجه قرار دارد. بر اساس این شکل‌ها همچنین میزان نفوذ شار حرارتی خورشید به سمت دیگر پوسته مخروطی ($\pi \leq \varphi \leq 2\pi$)، با افزایش زاویه الیاف و افزایش ضرایب انتقال حرارت هدایتی گسترش می‌یابد. نتیجه دیگری که از بررسی این کانتورها به‌دست می‌آید این است که با افزایش زاویه الیاف تاثیرات شرایط مرزی پایه مخروط کاهش می‌یابد. دلیل این امر به‌صورت عمده به‌خاطر مقدار بالای ضریب انتقال حرارت هدایتی در جهت الیاف نسبت به جهت عمود بر آن است. علاوه بر این اندازه و مکان نواحی دمایی مختلف نشان می‌دهد که مقادیر بالای دمایی، در هر زاویه الیاف متفاوت است. با افزایش زاویه الیاف رژیم‌های با دمای بالا به سمت مرزهای پایینی (پایه مخروط) حرکت می‌کنند.

یکی از پارامترهای مهم، نرخ انتقال حرارت جابجایی بین مخزن تحت فشار و جریان سیال محیط است. اگرچه فاکتورهای مختلفی نظیر هندسه و

سطح زمین به پوسته مخروطی کامپوزیتی می‌رسد، به‌طور متوسط برابر با $\bar{q}'' = 1357 \text{ W/m}^2$ در نظر گرفته شده است [۲۷]. توزیع این شار روی سطح خارجی پوسته مخروطی به‌صورت تابع $q''(\varphi) = 1357 \sin \varphi$ فرض شده است. که این شار به نیمه‌ای از پوسته مخروطی وارد می‌گردد که در معرض تابش مستقیم خورشید است [۲۳].

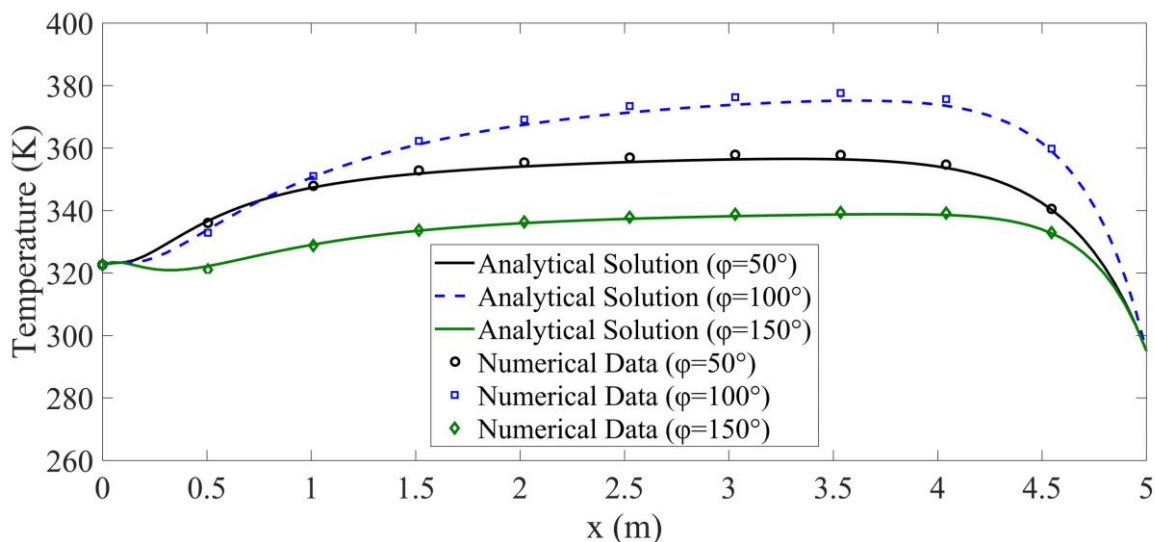
۴-۱- راستی‌آزمایی حل تحلیلی

در این حل به‌منظور راستی‌آزمایی، درستی جواب تحلیلی با حل عددی معادله (۳)، به روش مرتبه دوم تفاضلات محدود اعتبارسنجی شده است. همان‌طور که در شکل ۲ مشخص است نتایج حل تحلیلی فعلی منطبق بر حل عددی به روش مرتبه دوم تفاضلات محدود است.

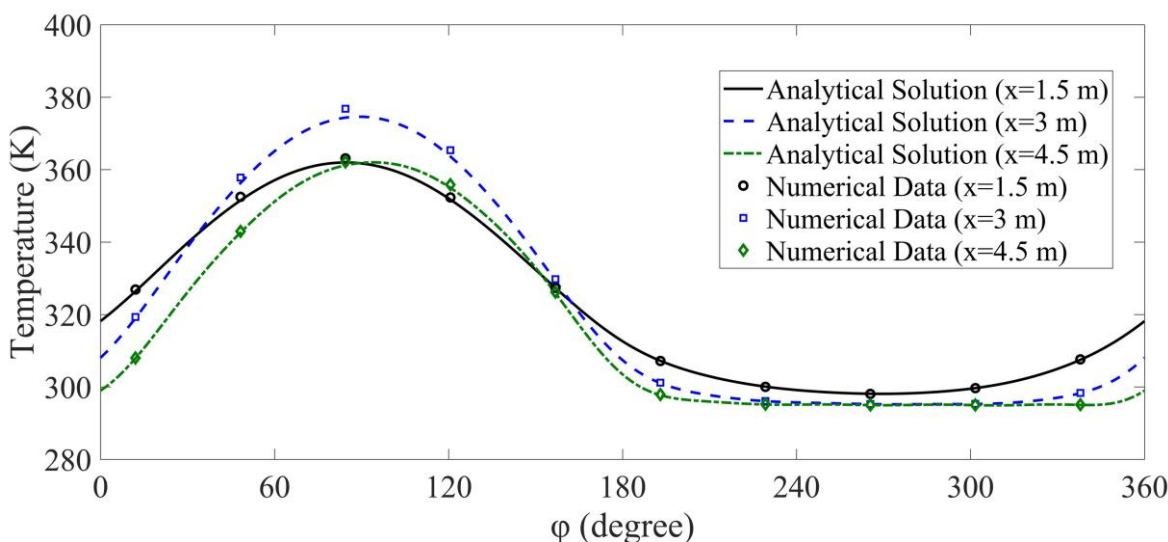
Table 2. Geometrical parameters and boundary conditions of the conical shell

جدول ۲: هندسه و شرایط مرزی پوسته مخروطی

طول یال (m)	۵
ضخامت پوسته (m)	۰/۰۵
نصف زاویه نوک مخروط (°)	۲۰
دمای محیط (K)	۲۹۵
ضریب جابجایی (W/m ² K)	۱۵
شار حرارتی (W/m ²)	۱۳۵۷
چشمه حرارتی (W/m ³)	۰
شرط مرزی عمومی (f)	۲۹۵
شرط مرزی عمومی (σ)	۱
شرط مرزی عمومی (ω)	۰



(۱) توزیع دما در جهت x



(۲) توزیع دما در جهت φ

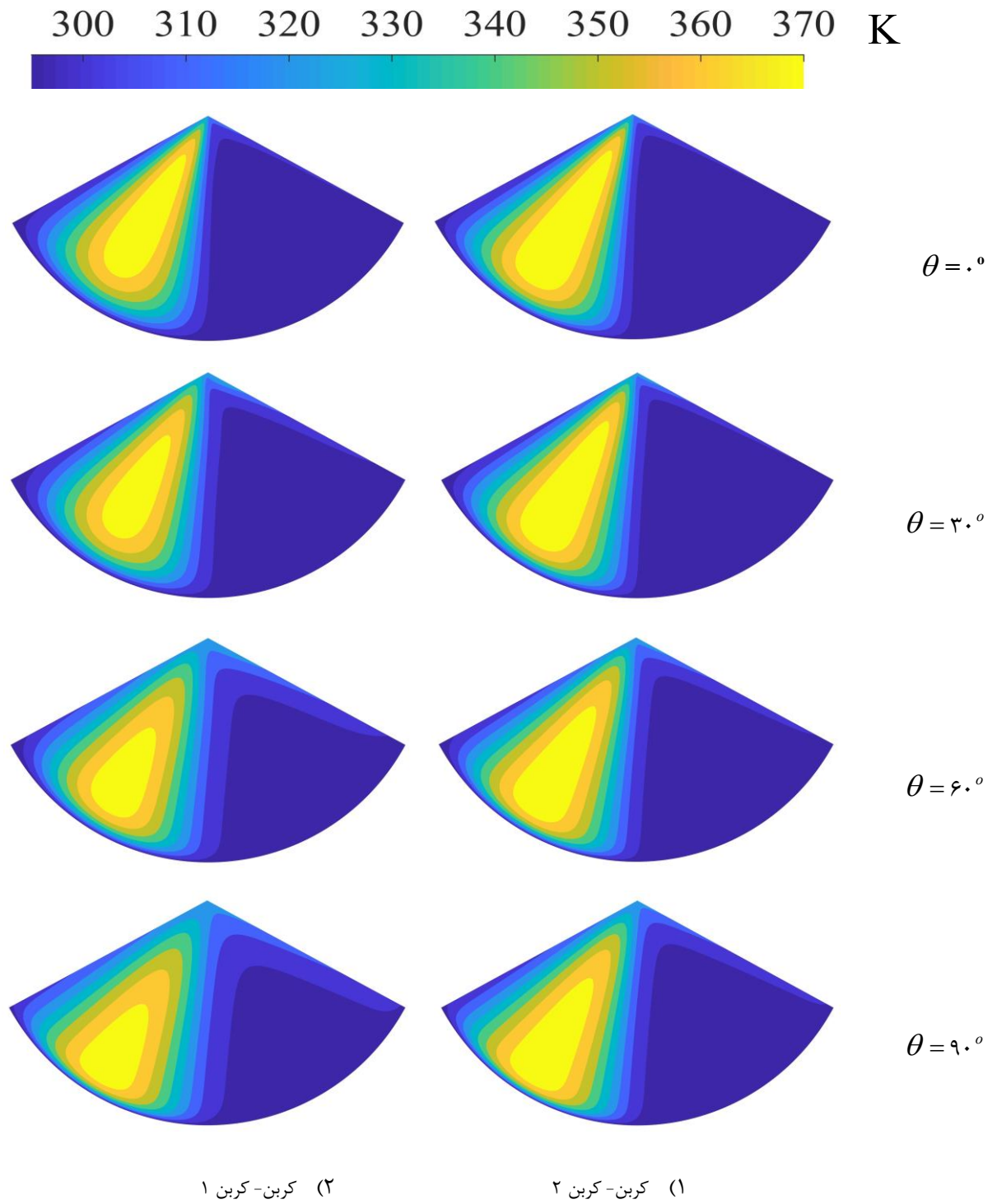
شکل ۲: توزیع دمای پوسته مخروطی کامپوزیتی ناهمگن در جهت‌های طولی و زاویه‌ای در زاویه الیاف 45° برای نمونه کربن-کربن ۱

Fig. 2. Temperature variations of composite conical shell versus x and φ directions which the fiber's angle is 45° and composite material is carbon-carbon 1

مخروطی کامپوزیتی می‌باشد و مطلب ذکر شده در بالا را تصدیق می‌کند. دمای متوسط در حالت $\theta = 90^\circ$ بیشتر از حالت $\theta = 0^\circ$ می‌باشد و با افزایش زاویه الیاف دمای متوسط در پوسته مخروطی افزایش خواهد یافت. شکل ۶ بیانگر تاثیر و نفوذ پارامتر زاویه الیاف بر دمای ماکزیمم پوسته مخروطی کامپوزیتی برای ماده کربن-کربن ۱ می‌باشد. دمای ماکزیمم در حالت $\theta = 0^\circ$ بیشتر از حالت $\theta = 90^\circ$ می‌باشد. بنابراین با افزایش ضریب انتقال حرارت هدایتی در راستای زاویه‌ای (φ)، شار گرمایی به دیگر

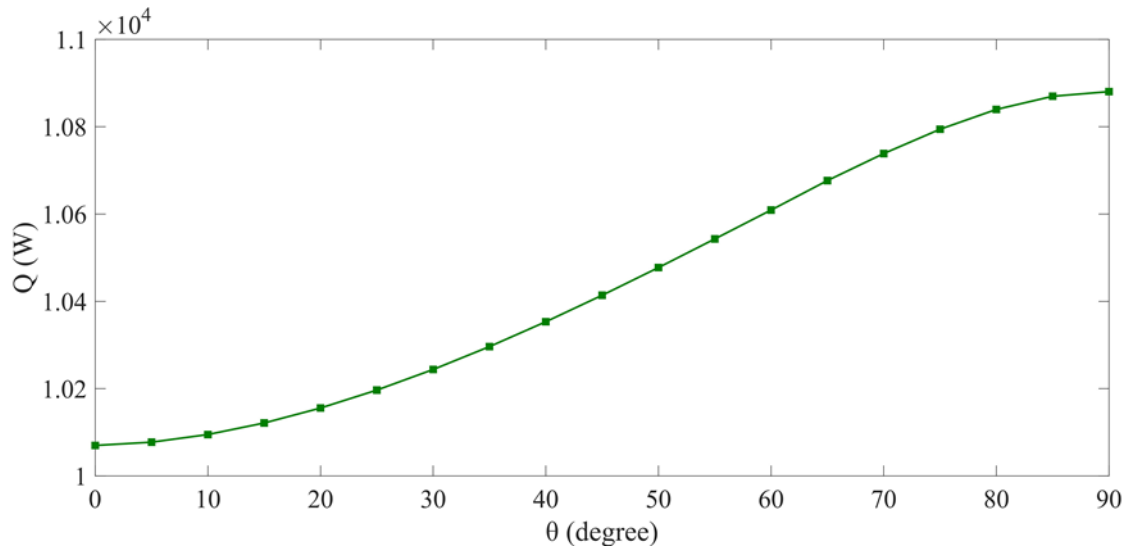
نوع ماده در نرخ انتقال حرارت جابجایی تأثیرگذار است، اما در این تحقیق تأثیر فاکتور زاویه الیاف مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور در شکل ۴ به بررسی تأثیر زاویه الیاف بر نرخ انتقال حرارت جابجایی بین پوسته مخروطی کامپوزیتی و هوا در ماده کربن-کربن ۱ پرداخته شده است. با افزایش زاویه الیاف، نرخ انتقال حرارت جابجایی و دمای متوسط در پوسته مخروطی افزایش خواهد یافت.

شکل ۵ نیز نشان‌دهنده تأثیر زاویه الیاف بر متوسط دمای پوسته



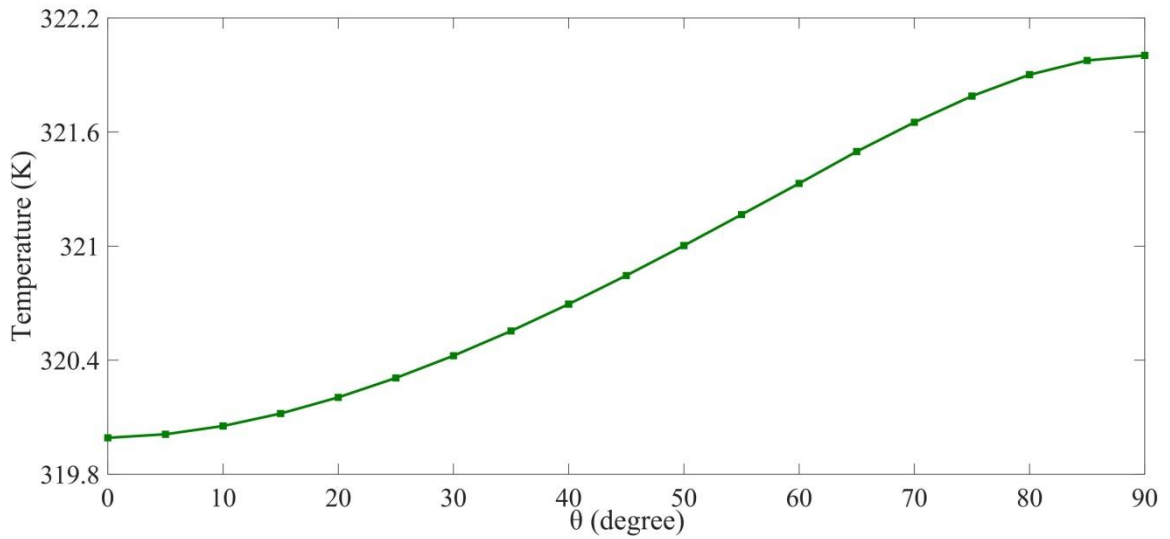
شکل ۳: کانتورهای توزیع دما برای آرایش الیاف مختلف برای دو ماده کامپوزیتی مختلف

Fig. 3. Temperature contours for different fiber's angles for two different composite materials



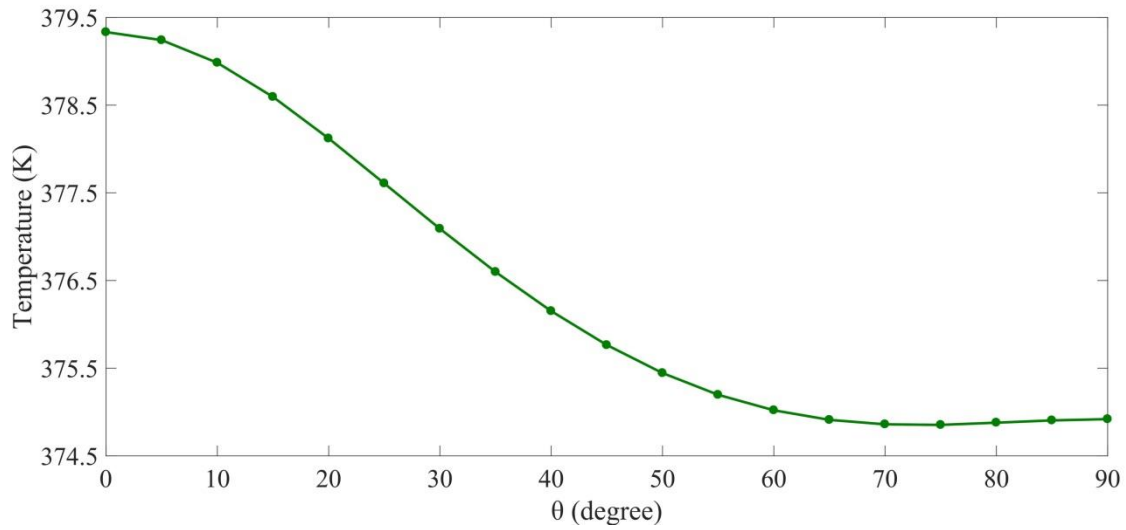
شکل ۴: نرخ انتقال حرارت جابجایی بر حسب زاویه الیاف برای نمونه کربن-کربن ۱

Fig. 4. Heat convection rate versus fiber's angle variations for carbon-carbon 1



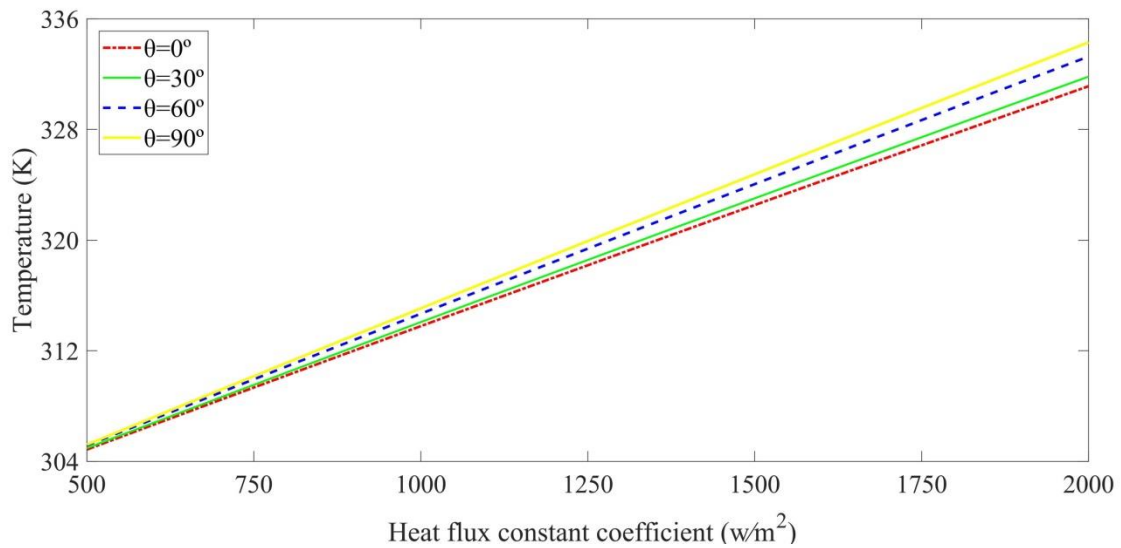
شکل ۵: تغییرات دمای میانگین بر حسب زاویه الیاف برای نمونه کربن-کربن ۱

Fig. 5. Mean temperature distribution versus fiber's angle variations for carbon-carbon 1



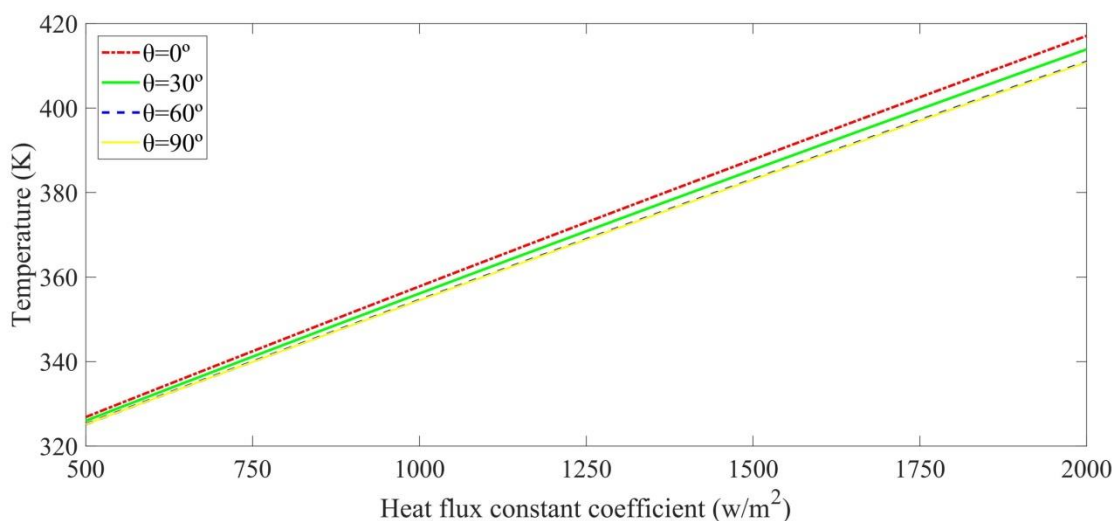
شکل ۶: تغییرات دمای ماکزیمم بر حسب زاویه الیاف برای نمونه کربن-کربن ۱

Fig. 6. Maximum temperature distribution versus fiber's angle variations for carbon-carbon 1



شکل ۷: تغییرات دمای میانگین بر حسب شار گرمایی برای نمونه کربن-کربن ۱ در چهار زاویه الیاف مختلف

Fig. 7. Mean temperature distribution versus heat flux coefficient for carbon-carbon 1 at four different fiber's angles



شکل ۸: تغییرات دمای ماکزیمم بر حسب شار گرمایی برای نمونه کربن-کربن ۱ در چهار زاویه الیاف مختلف

Fig. 8. Maximum temperature distribution versus heat flux coefficient for carbon-carbon 1 at four different fiber's angles

مخروطی کاهش می‌یابد و نتایج شکل ۶ را تصدیق می‌کند.

۵- نتیجه گیری

در مقاله حاضر، برای اولین بار یک حل تحلیلی برای انتقال حرارت هدایتی در پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی ناهمسانگرد و ناهمگن با ضرایب هدایت وابسته به دما ارائه شده است. از نتایج مطالعه حاضر در فرآیند طراحی مخازن تحت فشار مخروطی کامپوزیتی که شامل آنالیز شکست حرارتی، آنالیز جایگذاری الیاف، عایق‌بندی مخازن کامپوزیتی، تحلیل تنش‌های حرارتی و کنترل دمای مواد انبارش یافته داخل آن‌ها، می‌توان بهره برد. در این حل، تأثیر زاویه الیاف به‌طور ویژه مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش زاویه الیاف، دمای متوسط در مخزن مخروطی کامپوزیتی افزایش می‌یابد، و زاویه الیاف صفر درجه به‌عنوان بهترین حالت پیشنهاد می‌شود. این درحالیست که با افزایش زاویه الیاف، ماکزیمم دما در پوسته مخروطی کاهش می‌یابد و زاویه الیاف نود درجه را به‌عنوان بهترین حالت پیشنهاد می‌کند. در نتیجه نویسندگان توصیه می‌کنند که در طراحی این نوع مخازن به هر دو پارامتر دمای متوسط و دمای ماکزیمم جهت یافتن بهینه‌ترین حالت زاویه الیاف به‌طور ویژه دقت شود.

سمت پوسته مخروطی ($\pi \leq \varphi \leq 2\pi$) نفوذ می‌کند و در نتیجه با افزایش زاویه الیاف دمای ماکزیمم در پوسته مخروطی کاهش می‌یابد.

در فرآیند طراحی و تولید مخازن تحت فشار، دمای ماکزیمم و دمای متوسط پارامتر بسیار مهمی محسوب می‌شود و پژوهش در مورد تغییرات دمای متوسط و دمای ماکزیمم بر حسب شارهای گرمایی مختلف، نقش مهمی در فرآیند طراحی این‌گونه مخازن ایفا می‌کند. شکل ۷ نشان‌دهنده نمودار متوسط دما بر حسب شار حرارتی گرمایی برای ماده کربن-کربن ۱ در چهار زاویه الیاف $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ می‌باشد. از نمودار شکل ۷ می‌توان رابطه خطی بین متوسط دمای پوسته مخروطی کامپوزیتی و ضریب شار حرارتی گرمایی را نتیجه گرفت. همچنین این نمودار نشان می‌دهد که با افزایش زاویه الیاف دمای متوسط در پوسته مخروطی افزایش خواهد یافت و نتایج شکل ۵ را تصدیق می‌کند.

شکل ۸ نیز بیانگر نمودار ماکزیمم دما بر حسب شار حرارتی گرمایی برای ماده کربن-کربن ۱ در چهار زاویه الیاف $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ می‌باشد. از این شکل می‌توان رابطه خطی بین ماکزیمم دمای پوسته مخروطی کامپوزیتی و ضریب شار حرارتی گرمایی را نتیجه گرفت. همچنین این نمودار نشان می‌دهد که با افزایش زاویه الیاف دمای ماکزیمم در پوسته

۶- فهرست علائم

علائم انگلیسی

C	ظرفیت گرمایی، J/gK
J_v	تابع بسل اصلاح شده نوع اول
k_{ij}	ضرایب هدایت اصلی، W/mK
k_{0ij}	ضرایب هدایت اصلی در دمای مرجع، W/mK
\bar{k}_{ij}	ضرایب هدایت فرعی، W/mK
\bar{k}_{0ij}	ضرایب هدایت فرعی در دمای مرجع، W/mK
l	طول یال مخروط، m
n_l	مقدار $\sin \theta$
m_l	مقدار $\cos \theta$
q	نرخ انتقال حرارت، W
T_∞	دمای محیط (دمای مرجع)، K
u^m	چشمه انرژی، W/m ³
Y_v	تابع بسل اصلاح شده نوع دوم

علائم یونانی

ρ	چگالی، g/cm ³
δ	ضخامت پوسته مخروطی
$\hat{\theta}$	دمای اصلاح شده، $T - T_\infty$
β	ضریب دمایی، ۱/K
θ	زاویه قرارگیری الیاف
γ	نصف زاویه نوک مخروط

زیرنویس

0	مرتبه صفر (بحث توابع بسل)
1	مرتبه اول (بحث توابع بسل)

منابع

- [3] T. Behzad, M. Sain, Finite element modeling of polymer curing in natural fiber reinforced composites, *Composites Science and Technology*, 67(7-8) (2007) 1666-1673.
- [4] V. Antonucci, M. Giordano, K.-T. Hsiao, S.G. Advani, A methodology to reduce thermal gradients due to the exothermic reactions in composites processing, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45(8) (2002) 1675-1684.
- [5] A. Gilbert, K. Kokini, S. Sankarasubramanian, Thermal fracture of zirconia–mullite composite thermal barrier coatings under thermal shock: A numerical study, *Surface and Coatings Technology*, 203(1-2) (2008) 91-98.
- [6] A. Gilbert, K. Kokini, S. Sankarasubramanian, Thermal fracture of zirconia–mullite composite thermal barrier coatings under thermal shock: An experimental study, *Surface and Coatings Technology*, 202(10) (2008) 2152-2161.
- [7] I. Dlouhy, Z. Chlup, D. Boccaccini, S. Atiq, A. Boccaccini, Fracture behaviour of hybrid glass matrix composites: thermal ageing effects, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 34(12) (2003) 1177-1185.
- [8] F. Wang, Q. Hua, C.-S. Liu, Boundary function method for inverse geometry problem in two-dimensional anisotropic heat conduction equation, *Applied Mathematics Letters*, 84 (2018) 130-136.
- [9] F. Wang, W. Chen, W. Qu, Y. Gu, A BEM formulation in conjunction with parametric equation approach for three-dimensional Cauchy problems of steady heat conduction, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 63 (2016) 1-14.
- [10] Y. Gu, X. He, W. Chen, C. Zhang, Analysis of three-dimensional anisotropic heat conduction problems on thin domains using an advanced boundary element method, *Computers & Mathematics with Applications*,

- [1] C.T. Herakovich, Mechanics of composites: a historical review, *Mechanics Research Communications*, 41 (2012) 1-20.
- [2] Z.-S. Guo, S. Du, B. Zhang, Temperature field of thick thermoset composite laminates during cure process, *Composites science and technology*, 65(3-4) (2005) 517-523.

- conduction analysis of laminated composite nose cone, *Journal of Aeronautical Society of India*, 32 (1980) 77-84.
- [20] S. Ray, A. Loukou, D. Trimis, Evaluation of heat conduction through truncated conical shells, *International Journal of Thermal Sciences*, 57 (2012) 183-191.
- [21] M. Norouzi, H. Rahmani, On exact solutions for anisotropic heat conduction in composite conical shells, *International Journal of Thermal Sciences*, 94 (2015) 110-125.
- [22] M. Norouzi, H. Rahmani, An exact analysis for transient anisotropic heat conduction in truncated composite conical shells, *Applied Thermal Engineering*, 124 (2017) 422-431.
- [23] V.S. Arpaci, *Conduction heat transfer*, Addison-Wesley, 1966.
- [24] Z.H. Khan, R. Gul, W.A. Khan, Effect of variable thermal conductivity on heat transfer from a hollow sphere with heat generation using homotopy perturbation method, in: *ASME 2008 Heat Transfer Summer Conference collocated with the Fluids Engineering, Energy Sustainability, and 3rd Energy Nanotechnology Conferences*, American Society of Mechanical Engineers, 2008, pp. 301-309.
- [25] C.W. Ohlhorst, W.L. Vaughn, P.O. Ransone, H.-T. Tsou, Thermal conductivity database of various structural carbon-carbon composite materials, *NASA Technical Memorandum*, (1997).
- [26] T. Myint-U, L. Debnath, *Linear partial differential equations for scientists and engineers*, Springer Science & Business Media, 2007.
- [27] J.R. Howell, M.P. Menguc, R. Siegel, *Thermal radiation heat transfer*, CRC press, 2015.
- 75(1) (2018) 33-44.
- [11] I. Dülk, T. Kovácsházy, Steady-state heat conduction in multilayer bodies: An analytical solution and simplification of the eigenvalue problem, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 67 (2013) 784-797.
- [12] O.O. Onyejekwe, Heat conduction in composite media: a boundary integral approach, *Computers & chemical engineering*, 26(11) (2002) 1621-1632.
- [13] J. Miller, P. Weaver, Temperature profiles in composite plates subject to time-dependent complex boundary conditions, *Composite Structures*, 59(2) (2003) 267-278.
- [14] S. Singh, P.K. Jain, Analytical solution to transient heat conduction in polar coordinates with multiple layers in radial direction, *International Journal of Thermal Sciences*, 47(3) (2008) 261-273.
- [15] M. Kayhani, M. Norouzi, A.A. Delouei, A general analytical solution for heat conduction in cylindrical multilayer composite laminates, *International Journal of Thermal Sciences*, 52 (2012) 73-82.
- [16] A.A. Delouei, M. Kayhani, M. Norouzi, Exact analytical solution of unsteady axi-symmetric conductive heat transfer in cylindrical orthotropic composite laminates, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55(15-16) (2012) 4427-4436.
- [17] M. Norouzi, A.A. Delouei, M. Seilsepour, A general exact solution for heat conduction in multilayer spherical composite laminates, *Composite Structures*, 106 (2013) 288-295.
- [18] A.A. Delouei, M. Norouzi, Exact analytical solution for unsteady heat conduction in fiber-reinforced spherical composites under the general boundary conditions, *Journal of Heat Transfer*, 137(10) (2015) 101701.
- [19] J. Mahishi, R. Chandra, M. Murthy, Transient heat

