



# Damping Modeling in Dual Axis Torsion Micro-Actuators Considering the Bending of the Supporting Beams

M. Khadembashi<sup>1</sup>, H. Moeenfard<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

<sup>2</sup>Center of Excellence in Soft Computing and Intelligent Information Processing, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

**ABSTRACT:** Torsional micro-actuators are employed in a variety of applications such as optical switches and biomedical imaging. Squeezed film damping is one of the important energy loss mechanisms in these systems. This kind of damping is a key factor in the performance characterization of micro-electro-mechanical systems and has been paid attention by many researchers. The objective of this paper is modeling the squeeze film air damping in dual axis torsional micro-actuators by considering the bending of the supporting torsion beams. To do so, first, the air inertial effects is neglected compared to its viscosity and the Reynolds equation governing the behavior of trapped air between the actuator and the underneath plate is simplified. The resulting equation is then normalized and solved using the extended Kantorovich method for obtaining the air pressure distribution under the plate. This pressure distribution is then employed for finding the damping force and torques. A parametric study is also carried out to determine the effect of different design parameters on the damping of the system. The results of this paper can be effectively employed for accurate dynamic modeling of dual axis torsional micro-actuators.

**Review History:**

Received: 2018/10/29

Revised: 2019/02/23

Accepted: 2019/03/11

Available Online: 2019/03/25

**Keywords:**

Torsional micro-actuator

squeezed film damping

bending of the supporting torsion

beams

Extended Kantorovich method

## 1- Introduction

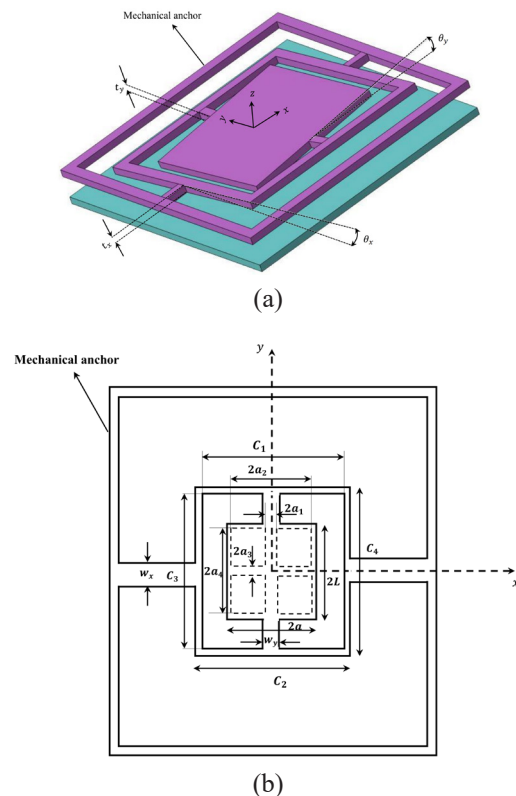
Torsional micro-actuators have found a variety of applications in optical switches and biomedical imaging [1]. Squeezed film damping in these structures affects the performance of the device. So, many researchers have studied the effect of this damping on the behavior of micro structures. For example, Moeenfard et al. [2] used the Extended Kantorovich Method (EKM) to solve the squeezed film damping in single axis micromirrors. Malihi et al. [3] modeled the squeezed film damping investigated the effect of squeezed film damping on the stability of micro structures. Moeenfard and Ahmadian [4] studied the effect of bending of the supporting beams on the squeezed film damping of single axis torsional micro-actuators.

In previous studies, the problem of modeling squeeze film damping of micron sized dual axis torsional actuators have not been investigated. More specifically, the bending of the supporting torsion beams on the damping forces and torques had not been modeled yet. So in this study, the mentioned problem will be simulated and the relevant results are presented.

## 2- Methodology

### 2- 1- Mathematical modeling

Fig. 1 shows a schematic view of a dual axis torsional micro-actuator.



**Fig. 1. Schematic (a) three and (b) two dimensional view of the torsional micro actuator.**

\*Corresponding author's email: h\_moeenfard@um.ac.ir



Neglecting the inertial effects and assuming incompressible conditions, the governing Reynolds equations become

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{y}^2} = \frac{12\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} \quad (1)$$

where  $\bar{p}$  is the underneath pressure and  $h$  is the gap between the electrode and the actuator and can be easily derived as  $h = h_0 - \delta_x - \delta_y + \bar{y}\theta_x + \bar{x}\theta_y$ . By substituting  $h(t)$  into Eq. (1), one can get

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \Gamma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{x\eta_1}{\eta_2} + y - \frac{\eta_3}{\eta_2} \quad (2)$$

where  $\Gamma$  is the aspect ratio of the actuator plate. The normalized boundary conditions are also derived as

$$p(\pm 1, y) = p(x, \pm 1) = 0 \quad (3)$$

### 2-2- Solution of the damping equation using extended Kantorovich method

For solving Eq. (2), three new variables  $P_1$ ,  $P_2$  and  $P_3$  are introduced. The variables shall satisfy the following sets of equations and boundary conditions.

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \Gamma^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} = -x \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \Gamma^2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} = -1 \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 P_3}{\partial x^2} + \Gamma^2 \frac{\partial^2 P_3}{\partial y^2} = y \quad (6)$$

$$\begin{cases} P_i(\pm 1, y, t) = 0 \\ P_i(x, \pm 1, t) = 0 \end{cases}, i = 1, 2, 3 \quad (7)$$

### 3- Results and Discussion

Using the EKM, these equations can be solved as the multiplication of  $f(x)$  and  $g(y)$  both of which are derived in the solution process. The EKM provides very fast convergence. Fig. 2 shows that even a single iteration provides very satisfactory results.

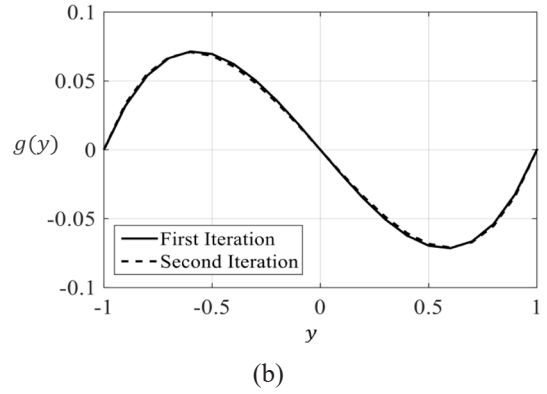
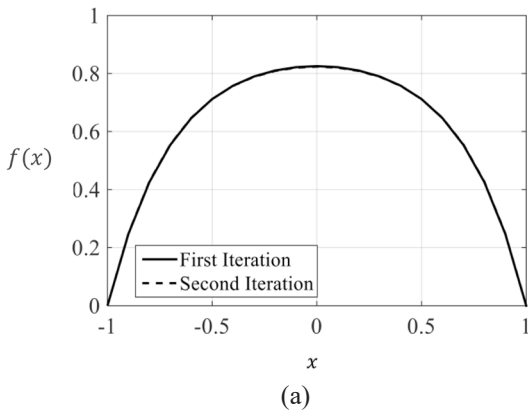


Fig. 2. Functions (a)  $f(x)$  and (b)  $g(y)$  at different iterations.

The damping force and torques can also be derived by integrating the pressure obtained from EKM as

$$F_d(t) = \frac{\bar{F}_d(t)}{aL\eta_3} = \frac{\eta_2}{\eta_3} \iint_R P(x, y, t) dx dy \quad (8)$$

$$R = [-1, 1] \times [-1, 1]$$

$$M_{dx}(t) = \frac{\bar{M}_{dx}(t)}{aL^2\eta_2} = \iint_R y P(x, y, t) dx dy \quad (9)$$

$$R = [-1, 1] \times [-1, 1]$$

$$M_{dy}(t) = \frac{\bar{M}_{dy}(t)}{La^2\eta_1} = \frac{\eta_2}{\eta_1} \iint_R -x P(x, y, t) dx dy \quad (10)$$

$$R = [-1, 1] \times [-1, 1]$$

In Fig. 3 the variation of the normalized damping torques along both  $x$  and  $y$  axes are depicted. It is observed that with increasing the aspect ratio of the plate, damping torques in both directions are increased.

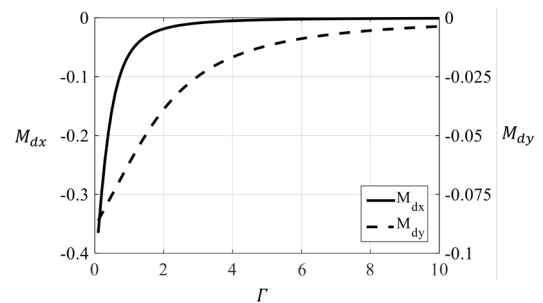


Fig. 3. Normalized squeeze film damping torques  $M_{dx}$  and  $M_{dy}$  vs  $\Gamma$

### 4- Conclusion

The technology of optical microelectromechanical systems is growing rapidly. Torsional micro actuators are one of the most important optical Micro Electro Mechanical System (MEMS) devices. They work based on the capacitive micro plates which are moving towards each other and consequently, the trapped air in between can produce an energy loss mechanism known as squeezed film damping, which affects the performance of torsional micro actuators. So the objective of this paper was modeling and simulation of this squeezed film damping. On the other hand, the bending of the supporting torsion beams of

the actuator significantly affects the damping force and torques of the squeezed film damping problem. So in this paper, this effect was modeled. The solution procedure was carried out using EKM which was shown to have a very remarkable convergence speed. The simulation results revealed that the deflection of the beams is very important on the damping of the system and its ignorance may lead to appreciable accuracy loss in predicting the structure behavior. They can be accurately employed for simulation of the nonlinear dynamic behavior of dual axis torsional micro actuators with considering the bending effects.

## 5- References

- [1] O. Solgaard, A.A. Godil, R.T. Howe, L.P. Lee, Y.-A. Peter, H. Zappe, Optical MEMS: From micromirrors to complex systems, *Journal of Microelectromechanical systems*, 23(3) (2014) 517-538.
- [2] H. Moeenfard, M.T. Ahmadian, A. Farshidianfar, Analytical modeling of squeeze film damping in micromirrors, in: *Proceedings of the ASME international design engineering technical conferences and computers and information in engineering conference*, 2011, pp. 10016-15990.
- [3] S. Malihi, Y.T. Beni, H. Golestanian, Dynamic pull-in stability of torsional nano/micromirrors with size-dependency, squeeze film damping and van der Waals effect, *Optik*, 128 (2017) 156-171.
- [4] H. Moeenfard, M.T. Ahmadian, The influence of vertical deflection of the supports in modeling squeeze film damping in torsional micromirrors, *Microelectronics Journal*, 43(8) (2012) 530-536.





## مدل سازی میرایی در میکرومحرک های پیچشی دو محوره با در نظر گرفتن خمش تیرهای نگهدارنده

مژده خادم باشی<sup>۱</sup>، حمید معین فرد<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup> دانشکده مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران  
<sup>۲</sup> قطب علمی رایانش نرم و پردازش هوشمند اطلاعات، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷-۰۸-۰۷  
بازنگری: ۱۳۹۷-۱۲-۰۴  
پذیرش: ۱۳۹۷-۱۲-۲۰  
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸-۰۱-۰۵

### کلمات کلیدی:

میکرومحرک پیچشی  
میرایی لایه فشرده  
خمش تیرهای نگهدارنده  
روش گسترش یافته ی کانتروویچ

**خلاصه:** میکرومحرک های پیچشی در کاربردهای متعددی از جمله سوئیچ های نوری، تصویربرداری زیست پزشکی و نورشناسی مورد استفاده قرار می گیرند. میرایی لایه هوای فشرده یکی از مکانیزم های اتلاف انرژی در این میکرومحرک ها می باشد. این میرایی، یک عامل کلیدی در تعیین عملکرد دینامیکی سیستم های میکروالکترومکانیکی می باشد که به طور گسترده مورد توجه محققان قرار گرفته است. هدف از این مقاله نیز، مدل سازی میرایی لایه هوای فشرده در میکرومحرک های پیچشی دو محوره با در نظر گرفتن اثر خمشی تیرهای نگهدارنده می باشد. بدین منظور ابتدا معادله رینولدز حاکم بر رفتار هوا حبس شده در زیر میکرومحرک نوشته و سپس با توجه به شرایط مسئله و صرف نظر از اثرات اینرسی هوا در مقایسه با اثرات لزجت، معادله رینولدز، ساده سازی شده است. معادله حاصل پس از بی بعدسازی، با استفاده از روش گسترش یافته ی کانتروویچ، حل شده و توزیع فشار هوای فشرده به دست آمده است. از توزیع فشار حاصله به منظور محاسبه نیرو و گشتاور میرایی لایه هوای فشرده استفاده شده است. در ادامه، تأثیر پارامترهای طراحی میکرومحرک دو محوره روی گشتاورهای میرایی بررسی شد و برای تحلیل دقیق تر اثر این پارامترها بر روی گشتاورها و نیروی باعد نیز مورد مطالعه قرار گرفت. از نتایج این مقاله می توان به خوبی برای مدل سازی دقیق دینامیک و کنترل میکرومحرک های پیچشی استفاده کرد.

در نتیجه فاصله کمی بین دو صفحه ایجاد می شود که حرکت هوای عمود بر سطح را محدود می کند. این شرایط باعث می شود مکانیزم انرژی از دست دهد که در سیستم های میکروالکترومکانیکی، به عنوان میرایی لایه هوای فشرده شناخته شده است.

میرایی لایه هوای فشرده، به علت جابجایی حجم عظیمی از مولکول های هوای محبوس، به بیرون از فضای بین الکترودها می باشد که مخالف با سرعت هوا حرکت می کنند. زمانی که با حرکت صفحات، فاصله بین آنها کمتر می شود، هوا از لبه ی آنها خارج می شود. مسیر باریک موجود، جریان را آهسته می کند و در نتیجه فشار هوا افزایش می یابد. این افزایش فشار باعث کاهش سرعت حرکت صفحات می شود. توزیع فشار زیر صفحات می تواند شبیه به یک نیروی میرایی و یا فنر عمل کند که باعث از دست دادن انرژی می شود [۲].

در سیستم های میکروالکترومکانیکی، از خازن هایی با صفحات موازی استفاده می شود که یکی از صفحات به صورت الکترواستاتیکی

### ۱- مقدمه

میکرومحرک های پیچشی بر پایه تکنولوژی سیستم های میکروالکترومکانیکی نوری<sup>۱</sup> در محدوده وسیعی نظیر ارتباطات نوری، تصویربرداری زیست پزشکی و نورشناسی [۱] به کار گرفته می شوند. میکرومحرک ها معمولاً بر اساس نحوه تحریک آنها به چند دسته تقسیم بندی می شوند. رایج ترین روش های تحریک شامل تحریک الکترواستاتیکی، تحریک الکترومکانیکی، تحریک الکترومغناطیسی و تحریک پیزوالکتریک است. روش تحریک الکترواستاتیکی به دلیل مصرف کم انرژی، پاسخ دهی سریع و راحتی در راه اندازی آن بیشتر از دیگر روش ها مورد استفاده قرار می گیرد. بدین منظور برای بهبود در دقت تشخیص و عملکرد تحریک میکرومحرک ها، فاصله بین صفحات خازنی مینیمم و مساحت الکترودها ماکزیمم اختیار می شود.

1 Micro Opto Electro Mechanical Systems (MOEMS)

\* نویسنده عهده دار مکاتبات: h\_moeenfar@um.ac.ir



تحریک شده و اندازه حرکت صفحه به کمک تغییر ظرفیت خازن، تشخیص داده می‌شود. در حالت کلی، نیروهای حجمی مانند نیروی جاذبه و اینرسی که بر روی یک سیستم کار انجام می‌دهند با توان سوم طول رابطه مستقیم دارند، در حالی که نیروهای سطحی مانند نیروی لزجت، با مجذور طول رابطه مستقیم دارند. به همین دلیل نیروهای سطحی‌ای که در یک سیستم با ابعاد معمولی، می‌توان از تأثیرشان صرف‌نظر کرد، نقش بسیار مهمی در سیستم‌هایی با ابعاد میکرو و نانو، بازی می‌کنند و با کاهش بیشتر ابعاد، تأثیرشان پررنگ‌تر می‌شود [۳]. در چنین شرایطی میرایی لایه فشرده هوا بین صفحات به مهم‌ترین عامل میراسازی در سیستم تبدیل می‌شود. حرکت انبوه هوای به دام افتاده در بین صفحات می‌خواهد به فضای خارج برود ولی لزجت هوا از این حرکت ممانعت می‌کند. توزیع فشار ایجاد شده در هوا، تحت تأثیر این مکانیزم به نحو‌یست که نتیجه آن می‌تواند یک نیروی میرایی، یک نیروی فنری و یا ترکیبی از آن دو باشد [۴].

با پیشرفت سریع در تکنولوژی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی در دهه‌های اخیر، نیاز به فهم بهتر قانون میرایی لایه هوای فشرده و تأثیر آن بر روی حرکت میکروسازه‌ها امری ضروری شده است. بدین منظور پژوهش‌های گسترده‌ای در زمینه بررسی رفتار میکروسازه‌ها تحت تأثیر میرایی لایه هوای فشرده وجود دارد. به عنوان مثال، دیاب و لاکیس [۵] با استفاده از یک شبیه‌ساز عددی به بررسی رفتار لایه هوا در میکروتیرها پرداختند. در این پژوهش برخلاف دیگر مقالات، میکروتیر تحت یک جابجایی هارمونیک با دامنه‌ی بالا، بین نقطه تعادل و صفحه زیرین ثابت، قرار دارد. آن‌ها رفتار فشار هوای فشرده شده در میکروتیر را، تحت شرایط متفاوت شبیه‌سازی، مورد بررسی قرار دادند. یعقوبی‌زاده و یونس [۶] به بررسی رفتار غیرخطی و تأثیر آن روی میرایی لایه هوای فشرده و پاسخ میکروتیر دو سر گیردار، تحت شوک مکانیکی پرداختند. آن‌ها پاسخ میکروتیر را تحت فشارهای مختلف هوای محیط، فاصله‌ی میان صفحات گوناگون و دامنه‌های متفاوت شوک، بررسی کردند. نتایج نشان داد که برای سیستم‌هایی که با هوا کار می‌کنند، میرایی فیلم فشرده می‌تواند به منظور کمینه کردن جابجایی میکروسازه‌ی قرار گرفته‌شده تحت شوک و ضربه، مورد استفاده قرار گیرد.

علاوه بر بررسی رفتار میرایی لایه هوای فشرده در میکروتیرها، محققان به بررسی این رفتار در میکروصفحات نیز پرداخته‌اند. یونس

و نایفه [۷] یک روش جدید برای شبیه‌سازی میرایی لایه فشرده هوا، در میکروصفحات تحت بار الکترواستاتیک زیاد، ارائه دادند. این روش توانایی تخمین ضریب کیفیت میکروصفحه را تا ناپایداری کششی، تحت محدوده‌ای از فشار هوا و بار الکترواستاتیک، دارا می‌باشد. نتایج نشان از تأثیر فشار و نیروی الکترواستاتیک روی شکل موده‌های سازه، فرکانس طبیعی و ضریب کیفیت را دارد. نویل [۸] مشاهده کرد اثر میرایی هوای اطراف سیستم هنگامی که یک صفحه در نزدیکی صفحه‌ی دیگری نوسان می‌کند، افزایش پیدا می‌کند و این امر به دلیل نقشی است که لایه‌ی هوای حبس شده بین صفحات بازی می‌کند. هم‌چنین نتیجه گرفت، اگر ضخامت لایه‌ی هوای حبس شده بین دو صفحه از یک سوم عرض صفحات کمتر باشد، میرایی لایه‌ی هوای حبس شده از میرایی نیروی درگ نیز بیشتر می‌شود.

میکرومحرک‌ها برپایه مود کاری آن‌ها به دو دسته تقسیم می‌شوند، میکرومحرک‌های پیستونی و میکرومحرک‌های پیچشی. میکرومحرک‌های پیستونی درست مانند یک پیستون در جهت عمود بر آینه به سمت بالا و پایین حرکت می‌کنند و میکروآینه‌های پیچشی حول یک محور دوران می‌کنند. فینی و ریسمی [۹] به بررسی رفتار میرایی لایه هوای فشرده در میکرومحرک‌های پیستونی پرداختند. هم‌چنین در این مقاله تأثیر الگوی سوراخ بر روی میرایی لایه هوای فشرده مورد بررسی قرار گرفت.

فینی و ریسمی [۲] به مطالعه میرایی لایه فشرده هوا در ساختار میکرومحرک‌ها پرداختند. تحلیل میرایی برای ترکیب مواد متفاوت که دارای کمترین ضریب میرایی و بهینه‌ترین ضریب کیفیت می‌باشند، انجام شده است. هم‌چنین تأثیر میرایی روی فشار محیط مورد بررسی قرار گرفته است. معین‌فرد و همکاران [۴] از روش کانتروبیچ گسترش یافته به منظور حل مسئله میرایی لایه هوای فشرده در میکرومحرک‌های پیچشی بهره بردند. آن‌ها نشان دادند زمانی که زاویه میکرومحرک کوچک است، میرایی نیز رفتار لزج خطی دارد. فامیل و همکاران [۱۰] به تحلیل تولید آنتروپی در میکرومحرک‌های پیچشی پرداختند. آن‌ها گزارشی از تأثیر ویژگی‌های هندسی و دینامیکی میکرومحرک و میرایی لایه هوا فشرده بر تولید آنتروپی و توزیع پارامترهای هیدرودینامیک میکرومحرک، ارائه دادند.

ضریب میرایی لایه فشرده هوا، تابعی از لزجت و فشار هوا است و یک معادله‌ی غیرخطی بر آن حاکم می‌باشد. ملیحی و همکاران [۱۱]

دو محوره روی نیرو و گشتاورهای میرایی مورد بررسی قرار گرفته است.

## ۲- مدل سازی ریاضی

مشاهدات تجربی نشان داده‌اند که در مقیاس‌های بسیار کوچک در ابعاد میکرو و نانو، رفتار مکانیکی مواد، وابسته به اندازه است. تئوری‌های کلاسیک مکانیک محیط پیوسته، این وابستگی را به خوبی پوشش نمی‌دهند. به همین دلیل، امروزه استفاده از تئوری‌های غیرکلاسیک به منظور تحلیل رفتارهای مکانیکی میکرو سازه‌ها، به صورت گسترده مورد توجه محققین قرار گرفته است. به عنوان مثال تئوری الاستیسیته سه بعدی گرا دیان کرنش، یکی از تئوری‌های دقیق و توسعه یافته در این زمینه است [۱۳]. اما این مقاله به بررسی رفتار دینامیکی سیستم نپرداخته است. در مقاله حاضر، صرفاً میرایی لایه فشرده سیال مدل سازی شده است که در این معادلات اثر اندازه وارد نمی‌شود. رفتار لایه‌ی فشرده‌ی هوای بین دو صفحه، به طور کلی تحت تأثیر لزجت و اینرسی هوا است. کلی‌ترین شکل معادله رینولدز برای هوای فشرده‌ی بین دو صفحه، در قالب یک معادله دیفرانسیلی غیرخطی به صورت معادله‌ی (۱) قابل بیان است [۳].

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 1 \quad (1)$$

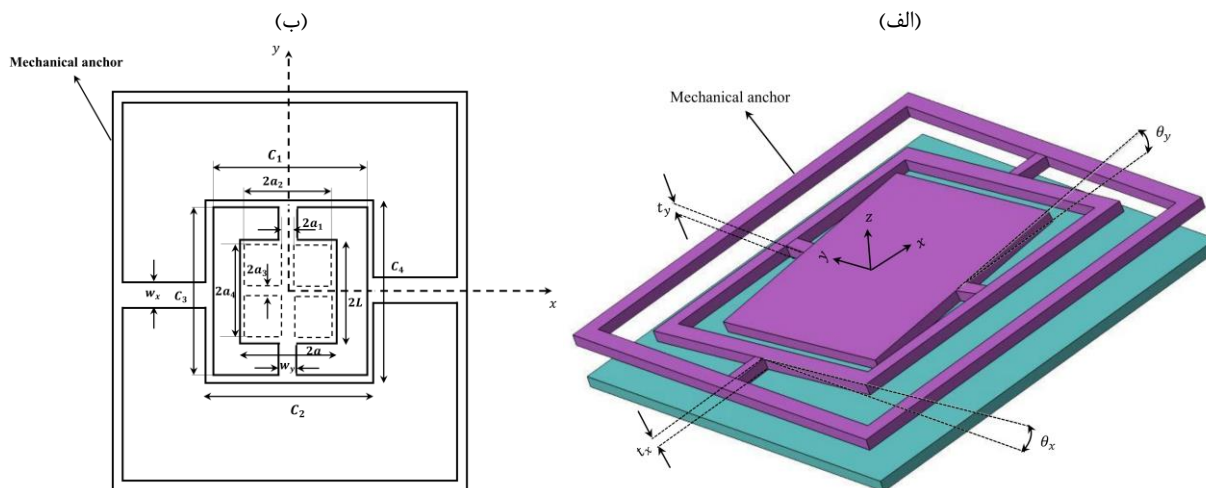
$$6 \left\{ 2 \frac{\partial(h\rho)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\rho h(u_1 + u_2)] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho h(v_1 + v_2)] \right\}$$

که  $p, \rho, \mu$  و  $h$  به ترتیب فشار مطلق، ضریب لزجت، چگالی و ضخامت لایه هوا و همچنین  $u_1$  و  $u_2$  سرعت صفحات بالا و پایین در جهت محور  $\bar{x}$ ،  $v_1$  و  $v_2$  سرعت صفحات بالا و پایین در جهت محور  $\bar{y}$  و  $t$  زمان می‌باشند.

شکل ۱ نمای شماتیک دو بعدی و سه بعدی یک میکرومحرک پیچشی دو محوره را نشان می‌دهد. در میکرومحرک‌های الکترواستاتیک پیچشی، زاویه چرخش میکرومحرک معمولاً بسیار کوچک (کمتر از پنج درجه [۱۴]) است، در نتیجه با تقریب خوبی، ضخامت لایه هوا ثابت فرض می‌شود. در چنین شرایطی معادله حاکم بر میرایی لایه فشرده هوا در میکرومحرک، به صورت تخمینی، معادله تراکم‌پذیری رینولدز فرض می‌شود. همان‌طور که گفته شد در هندسه‌های کوچک،

به بررسی تأثیر شرایط اولیه غیرصفر و تأثیر ضرایب غیرخطی میرایی لایه هوای فشرده در پایداری میکرومحرک‌های پیچشی پرداختند. همچنین معین‌فرد و همکاران [۱۲] با در نظر گرفتن تأثیر خمش در میکروتیرهای پیچشی، یک مدل تحلیلی برای مسئله میرایی لایه هوای فشرده در میکرومحرک‌ها ارائه دادند. نتایج نشان داد که در مورد زاویه‌های کوچک، میرایی لایه هوای فشرده را می‌توان با یک میرایی لزج خطی در هر دو جهت پیچشی و محوری مدل کرد. همچنین زمانی که زاویه کوچک است، با افزایش طول میکرومحرک، نیروی میرایی و گشتاور میرایی افزایش می‌یابد. اما در رابطه با زاویه‌های محدود، مشاهده شد که گشتاور میرایی شدیداً وابسته به زاویه میکرومحرک و نسبت سرعت زاویه‌ای و انتقالی است، پس نمی‌توان از تأثیر سرعت انتقالی بر نیرو و گشتاور میرایی لایه هوای فشرده در میکرومحرک صرف نظر کرد.

در تمام مقالاتی که میرایی میکرومحرک‌های پیچشی را مورد بررسی قرار داده‌اند، از خاصیت خمش تیرهای نگهدارنده میکرومحرک‌های پیچشی صرف نظر شده که این عامل باعث ایجاد خطا در پیش‌بینی پاسخ سیستم خواهد شد. تا جایی که نویسندگان این مقاله اطلاع دارند، تنها مرجعی که خمش میکروتیرهای پیچشی نگهدارنده را در مدل سازی میرایی لایه‌ی فشرده‌ی سیال لحاظ کرده بود، مرجع [۱۲] است. اما تاکنون مسئله میرایی لایه فشرده هوا در میکرومحرک‌های پیچشی دو محوره، مورد بررسی قرار نگرفته است. با توجه به توضیحات داده شده، در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی، میرایی لایه فشرده‌ی هوا یک مسئله مهم محسوب می‌شود که باید به آن بیش‌تر پرداخت و مدلی برای پیش‌بینی آن به دست آورد. در این مقاله به مدل سازی میرایی لایه هوای فشرده در میکرومحرک پیچشی دو محوره، پرداخته شده است. ابتدا معادله رینولدز حاکم بر رفتار هوای حبس شده در زیر میکرومحرک نوشته شده و سپس با توجه به شرایط مسئله و صرف نظر از اثرات اینرسی هوا در مقایسه با اثرات لزجت، معادله ساده سازی شده است. در ادامه معادله‌ی حاصل را بی‌بعد کرده و با استفاده از روش گسترش یافته‌ی کانتروویچ، معادله حل شده و توزیع فشار هوای فشرده به دست آمده است. از توزیع فشار حاصله به منظور محاسبه نیرو و گشتاورهای میرایی لایه هوای فشرده استفاده شده است. در انتها تأثیر پارامترهای طراحی میکرومحرک



شکل ۱: نمای شماتیک (الف) سه بعدی، (ب) دو بعدی یک میکرو محرک پیچشی دو محوره [۱۵]  
 Fig. 1. Schematic (a) three and (b) two dimensional view of the torsional micro actuator

در جابجایی‌های کم محرک اطراف نقطه تعادلش، می‌توان معادله (۴) را حول  $p = p_a$  ساده‌سازی کرد.

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{y}^2} - \frac{12\mu}{p_a h^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = \frac{12\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} \quad (۶)$$

هنگامی که  $\left(\frac{12\mu}{p_a h^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} / \frac{12\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} \ll 1\right)$ ، ضخامت لایه فشرده هوا در نقطه  $(\bar{x}, \bar{y})$  است و یا به عبارت ساده‌تر  $(\Delta p / p_a \ll \Delta h / h)$ ، هوا به مقدار قابل توجهی فشرده نمی‌شود [۱۶]. شرایط ذکر شده، به شرایط هوا تراکم‌ناپذیر<sup>۱</sup> مشهور است. در این شرایط معادله‌ی (۶) را می‌توان به صورت رابطه (۷) بازنویسی کرد [۱۷-۱۹].

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{y}^2} = \frac{12\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} \quad (۷)$$

در میکرو محرک‌های پیچشی، ضخامت لایه هوا بین صفحات، به صورت رابطه (۸) تعریف می‌شود.

$$h = h_0 - \delta_x - \delta_y + \bar{y}\theta_x - \bar{x}\theta_y \quad (۸)$$

در معادله (۸)،  $\delta_x$  و  $\delta_y$  به ترتیب خیز تیرهای نگهدارنده در جهت محورهای  $x$  و  $y$  و  $\theta_x$  و  $\theta_y$  به ترتیب زاویه‌های دوران حول محورهای  $x$  و  $y$  هستند و  $h$  فاصله اولیه بین میکرو محرک و الکترودهای زیرین آن قبل از اعمال هرگونه اختلاف پتانسیل الکتریکی است. هم‌چنین در این معادله،  $\tan \theta_x = \theta_x$  و  $\tan \theta_y = \theta_y$  فرض

مانند سیستم‌های میکروالکترومکانیکی، از اثر اینرسی هوا در مقابل اثر لزجت، می‌توان صرف‌نظر کرد. بدین ترتیب معادله‌ی رینولدز به صورت رابطه (۲) کاهش می‌یابد [۳].

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \right) = 12 \frac{\partial (h\rho)}{\partial t} \quad (۲)$$

فرآیند فرار هوا از فضای زیر میکرو محرک، یک فرآیند هم‌دماست. در فرآیندهای هم‌دما، چگالی به صورت خطی و همگن با فشار متناسب است [۳].

$$\rho = Kp \quad (۳)$$

که در این رابطه  $K$  یک عدد ثابت است. با جایگذاری رابطه (۳) در رابطه (۲) و باز کردن مشتق‌ها، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \right)^2 \left( \frac{h^3}{\mu} \right) + p \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial \bar{x}^2} + \left( \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \right)^2 \left( \frac{h^3}{\mu} \right) + p \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial \bar{y}^2} = 12h \frac{\partial p}{\partial t} + 12p \frac{dh}{dt} \quad (۴)$$

باید توجه داشت که فشار مطلق  $p$  از دو مقدار فشار محیط  $p_a$  و فشار انحرافی  $\bar{p}$ ، ناشی از حرکت محرک پیچشی تشکیل شده است.

$$p = p_a + \bar{p} \quad (۵)$$

1 Incompressible gas condition



پس می‌توان با جایگذاری معادله‌های (۱۷) و (۱۸) در معادله‌های (۱۳) و (۱۴)، آن‌ها را به صورت رابطه‌های (۱۹) و (۲۰) بازنویسی کرد.

$$\Theta_x \approx \frac{L}{h_0} \theta_x \quad (19)$$

$$\Theta_y \approx \frac{a}{h_0} \theta_y \quad (20)$$

با جایگذاری معادله‌های (۱۰) تا (۱۲)، (۱۵)، (۱۶)، (۱۹) و (۲۰)، معادله‌ی (۷) به صورت رابطه (۲۱) بازنویسی می‌شود.

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} + \frac{a^2}{L^2} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial y^2} = \frac{12a^2 \mu x}{h_0^2 (\Theta_y x - \Theta_x y + \Delta_x + \Delta_y - 1)^3} \frac{d\Theta_y}{dt} - \frac{12a^2 \mu y}{h_0^2 (\Theta_y x - \Theta_x y + \Delta_x + \Delta_y - 1)^3} \frac{d\Theta_x}{dt} + \frac{12a^2 \mu}{h_0^2 (\Theta_y x - \Theta_x y + \Delta_x + \Delta_y - 1)^3} \frac{d\Delta_x}{dt} + \frac{12a^2 \mu}{h_0^2 (\Theta_y x - \Theta_x y + \Delta_x + \Delta_y - 1)^3} \frac{d\Delta_y}{dt} \quad (21)$$

با توجه به اینکه مقادیر زوایای پیچشی و خیز تیرها در میکرومحرک پیچشی بسیار کوچک است، می‌توان  $\Theta_y x - \Theta_x y + \Delta_x + \Delta_y - 1$  ظاهر شده در معادله (۲۱) را به صورت تقریبی با  $-1$  برابر دانست. بنابراین معادله (۲۱) را می‌توان به شکل رابطه (۲۲) بازنویسی کرد.

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} + \Gamma^2 \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial y^2} = -x\eta_1 + y\eta_2 - \eta_3 \quad (22)$$

که در آن:

$$\Gamma = \frac{a}{L} \quad (23)$$

$$\eta_1 = \frac{12a^2 \mu}{h_0^2} \frac{d\Theta_y}{dt} \quad (24)$$

$$\eta_2 = \frac{12a^2 \mu}{h_0^2} \frac{d\Theta_x}{dt} \quad (25)$$

شده است که این فرض در صورتی معتبر است که زاویه‌های دوران میکرومحرک کوچک باشد. در غیر این صورت حتی فرض استفاده از معادله‌ی رینولدز (به جای استفاده از معادله‌ی ناویر-استوکس) دقت کافی را ندارد.

شرایط مرزی فشار برای حل معادله‌ی (۷) به صورت رابطه (۹) است.

$$\bar{p}(\pm a, \bar{y}, t) = \bar{p}(\bar{x}, \pm L, t) = 0 \quad (9)$$

در رابطه (۹)، پارامترهای  $a$  و  $L$  به ترتیب نصف طول و عرض میکرومحرک می‌باشند که در شکل ۱ نشان داده شده‌اند.

در مرحله بعد، معادله (۸) برحسب پارامترهای بی‌بعد به صورت رابطه (۱۰) بیان می‌شود.

$$h = h_0 - h_0 \Delta_x - h_0 \Delta_y + yL\theta_x^{\max} \Theta_x - xa\theta_y^{\max} \Theta_y \quad (10)$$

پارامترهای بی‌بعد به صورت رابطه‌های (۱۱) تا (۱۶)، تعریف می‌شوند.

$$\Delta_x = \frac{\delta_x}{h_0} \quad (11)$$

$$\Delta_y = \frac{\delta_y}{h_0} \quad (12)$$

$$\Theta_x = \frac{\theta_x}{\theta_x^{\max}} \quad (13)$$

$$\Theta_y = \frac{\theta_y}{\theta_y^{\max}} \quad (14)$$

$$x = \frac{\bar{x}}{a} \quad (15)$$

$$y = \frac{\bar{y}}{L} \quad (16)$$

که  $\theta_x^{\max}$  و  $\theta_y^{\max}$  به صورت رابطه‌های (۱۷) و (۱۸) تعریف می‌شوند.

$$\theta_x^{\max} = \tan^{-1} \left( \frac{h_0}{L} \right) \approx \frac{h_0}{L} \quad (17)$$

$$\theta_y^{\max} = \tan^{-1} \left( \frac{h_0}{a} \right) \approx \frac{h_0}{a} \quad (18)$$

$$\iint_S \left( \frac{\partial^2 P_1(x, y, t_0)}{\partial x^2} + \Gamma^2 \frac{\partial^2 P_1(x, y, t_0)}{\partial y^2} + x \right) \quad (34)$$

$$\delta p_1(x, y, t_0) dx dy = 0$$

در معادله (۳۴)،  $S$  سطح بی‌بعد شده‌ی میکرومحرک و  $\delta$  اپراتور تغییرات است.

حال طبق روش کانتروویچ، فرض می‌شود که توزیع فشار بی‌بعد  $P_1$  را می‌توان به صورت حاصل ضرب دو تابع  $f_1(x)$  و  $g_1(y)$  نوشت.

$$P_1(x, y, t_0) = f_1(x) g_1(y) \quad (35)$$

شرایط مرزی  $P_1$  که در معادله‌ی (۳۳) ارائه شده، برای تابع‌های  $f_1(x)$  و  $g_1(y)$  به صورت معادله‌های (۳۶) و (۳۷)، قابل بازنویسی است.

$$f_1(\pm 1) = 0 \quad (36)$$

$$g_1(\pm 1) = 0 \quad (37)$$

در صورتی که تابع  $f_1(x)$  یک تابع از پیش تعیین شده باشد، کلیه تغییرات در تابع فشار ناشی از تغییرات تابع  $g_1(y)$  می‌باشد. به عبارتی دیگر

$$\delta p_1(x, y, t_0) = f_1(x) \delta g_1(y) \quad (38)$$

اگر معادله‌های (۳۵) و (۳۸)، در معادله‌ی (۳۴) جایگذاری شود، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\iint_S \left( g_1(y) \frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} + \Gamma^2 f_1(x) \frac{d^2 g_1(y)}{dy^2} + x \right) \quad (39)$$

$$f_1(x) \delta g_1(y) dx dy = 0$$

با انتخاب ترتیب انتگرال‌گیری به نحوی که ابتدا انتگرال نسبت به متغیر مستقلی که تابع مربوط به آن مشخص است (یعنی متغیر  $x$ )، گرفته شود، معادله (۴۰) به دست می‌آید.

$$\int_{-1}^1 \left[ \left( \int_{-1}^1 f_1(x) \frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} dx \right) g_1(y) + \Gamma^2 \left( \int_{-1}^1 f_1^2(x) dx \right) \frac{d^2 g_1(y)}{dy^2} + \left( \int_{-1}^1 x f_1(x) dx \right) \right] \delta g_1(y) dy = 0 \quad (40)$$

$$\eta_3 = \frac{12a^2 \mu}{h_0^2} \left( \frac{d\Delta_x}{dt} + \frac{d\Delta_y}{dt} \right) \quad (26)$$

در مرحله بعد فشار بر حسب  $\eta_3$ ، به صورت رابطه (۲۷) بی‌بعد می‌شود.

$$P = \frac{\bar{P}}{\eta_2} \quad (27)$$

با جای‌گذاری فشار بی‌بعد در معادله‌ی (۲۲)، معادله‌ی فشار به صورت رابطه (۲۸) بازنویسی می‌شود.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \Gamma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{x\eta_1}{\eta_2} + y - \frac{\eta_3}{\eta_2} \quad (28)$$

### ۳- حل مسئله میرایی با استفاده از روش گسترش یافته‌ی کانتروویچ

برای حل معادله‌ی (۲۸) فرض می‌شود که رابطه (۲۹) برقرار است.

$$P(x, y, t) = \frac{\eta_1}{\eta_2} P_1(x, y, t) + \frac{\eta_3}{\eta_2} P_2(x, y, t) + P_3(x, y, t) \quad (29)$$

فشارهای  $P_1(x, y, t)$ ،  $P_2(x, y, t)$  و  $P_3(x, y, t)$  باید طوری تعیین شوند که به ترتیب معادله‌های (۳۰) تا (۳۲) را ارضا کرده و شرایط مرزی‌ای که در رابطه‌ی (۳۳) ارائه شده، در آن‌ها صدق کند.

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \Gamma^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} = -x \quad (30)$$

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \Gamma^2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} = -1 \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 P_3}{\partial x^2} + \Gamma^2 \frac{\partial^2 P_3}{\partial y^2} = y \quad (32)$$

$$\begin{cases} P_i(\pm 1, y, t) = 0 \\ P_i(x, \pm 1, t) = 0 \end{cases}, i = 1, 2, 3 \quad (33)$$

در ادامه برای حل معادلات (۳۰) تا (۳۲) از روش گسترش یافته‌ی کانتروویچ استفاده می‌شود. بدین منظور برای حل معادله (۳۰) برای تعیین توزیع فشار در زیر میکرومحرک در لحظه‌ی  $t = t_0$ ، در اولین قدم از یک تقریب مرتبه اول گالرکین استفاده می‌شود.

معادله دیفرانسیلی مشابه‌ای برای تابع  $f_1(x)$  به دست می‌آید.

$$J_{11} \frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} - \Gamma^2 J_{12} f_1(x) = -J_{13} x \quad (49)$$

ضرایب موجود در معادله (۴۹)، به صورت معادلات (۵۰) تا (۵۲) تعریف می‌شوند.

$$J_{11} = \int_{-1}^1 g_1^2(y) dy \quad (50)$$

$$J_{12} = \int_{-1}^1 \left( \frac{dg_1(y)}{dy} \right)^2 dy \quad (51)$$

$$J_{13} = \int_{-1}^1 g_1(y) dy \quad (52)$$

حل معادله (۴۹) تحت شرایط مرزی ارائه شده در معادله (۳۶)، به صورت معادله (۵۳) می‌باشد.

$$f_1(x) = \frac{J_{13}}{\Gamma^2 J_{12}} \left( x - \frac{\sinh(\nu_1 x)}{\sinh \nu_1} \right) \quad (53)$$

که

$$\nu_1 = \Gamma \sqrt{\frac{J_{12}}{J_{11}}} \quad (54)$$

با در نظر گرفتن یک حدس اولیه برای تابع  $f_1(x)$  و سپس حل پی در پی معادله‌های (۴۷) و (۵۳)، تابع‌های  $f_1(x)$  و  $g_1(y)$  جدید به دست می‌آیند. در نهایت با پیدا شدن تابع‌های  $f_1(x)$  و  $g_1(y)$ ، تابع  $P_1$  به صورت معادله (۵۵) خواهد بود.

$$P_1(x, y, t_0) = f_1^\infty(x) g_1^\infty(y) = \frac{J_{13}^\infty I_{13}^\infty}{\Gamma^2 J_{12}^\infty I_{12}^\infty} \left( x - \frac{\sinh(\nu_1^\infty x)}{\sinh \nu_1^\infty} \right) \left( 1 - \frac{\cosh(\lambda_1^\infty y)}{\cosh \lambda_1^\infty} \right) \quad (55)$$

از آنجایی که در مراحل حل، هیچ محدودیتی برای زمان  $t$  اعمال نشد، می‌توان از حل ارائه شده برای به دست آوردن تابع  $P_1$  برای تمام زمان‌ها استفاده نمود.

به طور مشابه، برای حل معادله (۳۱) طبق روش کانتروویچ، فرض می‌شود که توزیع فشار بی‌بعد  $P_\gamma$  را می‌توان به صورت حاصل ضرب دو تابع  $f_\gamma(x)$  و  $g_\gamma(y)$  نوشت.

با توجه به این که  $\delta g_1(y)$  به جز در نقاط مرزی مقدار دلخواهی دارد، معادله (۴۰) فقط و فقط در صورتی ارضا می‌شود که ضریب  $\delta g_1(y)$  برابر با صفر باشد. بنابراین:

$$\Gamma^2 \left( \int_{-1}^1 f_1^2(x) dx \right) \frac{d^2 g_1(y)}{dy^2} + \left( \int_{-1}^1 f_1(x) \frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} dx \right) g_1(y) + \left( \int_{-1}^1 x f_1(x) dx \right) = 0 \quad (41)$$

برای راحتی کار می‌توان انتگرال دوم در معادله (۴۱) را با انتگرال‌گیری جزء به جزء، به صورت معادله (۴۲) نوشت.

$$\int_{-1}^1 \left( f_1(x) \frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} \right) dx = - \int_{-1}^1 \left( \frac{df_1(x)}{dx} \right)^2 dx \quad (42)$$

حال می‌توان معادله (۴۱) را به صورت ساده شده بیان نمود.

$$\Gamma^2 I_{11} \frac{d^2 g_1(y)}{dy^2} - I_{12} g_1(y) = -I_{13} \quad (43)$$

که

$$I_{11} = \int_{-1}^1 f_1^2(x) dx \quad (44)$$

$$I_{12} = \int_{-1}^1 \left( \frac{df_1(x)}{dx} \right)^2 dx \quad (45)$$

$$I_{13} = \int_{-1}^1 x f_1(x) dx \quad (46)$$

حل معادله (۴۳) تحت شرایط مرزی ارائه شده در معادله (۳۷)، به صورت معادله (۴۷) می‌باشد.

$$g_1(y) = \frac{I_{13}}{I_{12}} \left( 1 - \frac{\cosh(\lambda_1 y)}{\cosh \lambda_1} \right) \quad (47)$$

که  $\lambda_1$  به صورت رابطه (۴۸) تعریف می‌شود.

$$\lambda_1 = \frac{1}{\Gamma} \sqrt{\frac{I_{12}}{I_{11}}} \quad (48)$$

اگر در روش گسترش یافته‌ی کانتروویچ، تابع  $g_1(y)$  به جای تابع  $f_1(x)$  یک تابع معلوم فرض شود، با طی پروسه‌ای مشابه،

و  $g_3(y)$  به صورت معادله‌های (۶۸) و (۶۹) استخراج می‌شوند.

$$f_3(x) = \frac{J_{33}}{\Gamma^2 J_{32}} \left( -1 + \frac{\cosh(\nu_3 x)}{\cosh \nu_3} \right) \quad (۶۸)$$

$$g_3(y) = \frac{I_{33}}{I_{32}} \left( -y + \frac{\sinh(\lambda_3 y)}{\sinh \lambda_3} \right) \quad (۶۹)$$

ضرایب موجود در معادلات (۶۸) و (۶۹) در معادلات (۷۰) تا (۷۷) ارائه شده‌اند.

$$I_{31} = \int_{-1}^1 f_3^2(x) dx \quad (۷۰)$$

$$I_{32} = \int_{-1}^1 \left( \frac{df_3(x)}{dx} \right)^2 dx \quad (۷۱)$$

$$I_{33} = \int_{-1}^1 f_3(x) dx \quad (۷۲)$$

$$J_{31} = \int_{-1}^1 g_3^2(y) dy \quad (۷۳)$$

$$J_{32} = \int_{-1}^1 \left( \frac{dg_3(y)}{dy} \right)^2 dy \quad (۷۴)$$

$$J_{33} = \int_{-1}^1 y g_3(y) dy \quad (۷۵)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{\Gamma} \sqrt{\frac{I_{32}}{I_{31}}} \quad (۷۶)$$

$$\nu_3 = \Gamma \sqrt{\frac{J_{32}}{J_{31}}} \quad (۷۷)$$

در این صورت تابع  $P_3$  به صورت معادله (۷۸) محاسبه می‌شود.

$$P_3(x, y, t_0) = f_3^\infty(x) g_3^\infty(y) = \frac{J_{33}^\infty I_{33}^\infty}{\Gamma^2 J_{32}^\infty I_{32}^\infty} \left( -1 + \frac{\cosh(\nu_3^\infty x)}{\cosh \nu_3^\infty} \right) \left( -y + \frac{\sinh(\lambda_3^\infty y)}{\sinh \lambda_3^\infty} \right) \quad (۷۸)$$

بنابراین با جایگذاری معادلات (۵۵)، (۶۷) و (۷۸) در معادله (۲۹)، رابطه توزیع فشار بی‌بعد در لایه فشرده هوا بین صفحات به دست می‌آید. همگرایی این روش به قدری بالاست که معمولاً پاسخ‌های به دست آمده بعد از دو تکرار دارای دقت کافی و قابل قبول هستند. به منظور

$$P_2(x, y, t_0) = f_2(x) g_2(y) \quad (۵۶)$$

با روندی مشابه، توابع  $f_2(x)$  و  $g_2(y)$  به صورت معادله‌های (۵۷) و (۵۸) به دست می‌آیند.

$$f_2(x) = \frac{J_{23}}{\Gamma^2 J_{22}} \left( 1 - \frac{\cosh(\nu_2 x)}{\cosh \nu_2} \right) \quad (۵۷)$$

$$g_2(y) = \frac{I_{23}}{I_{22}} \left( 1 - \frac{\cosh(\lambda_2 y)}{\cosh \lambda_2} \right) \quad (۵۸)$$

که

$$I_{21} = \int_{-1}^1 f_2^2(x) dx \quad (۵۹)$$

$$I_{22} = \int_{-1}^1 \left( \frac{df_2(x)}{dx} \right)^2 dx \quad (۶۰)$$

$$I_{23} = \int_{-1}^1 f_2(x) dx \quad (۶۱)$$

$$J_{21} = \int_{-1}^1 g_2^2(y) dy \quad (۶۲)$$

$$J_{22} = \int_{-1}^1 \left( \frac{dg_2(y)}{dy} \right)^2 dy \quad (۶۳)$$

$$J_{23} = \int_{-1}^1 g_2(y) dy \quad (۶۴)$$

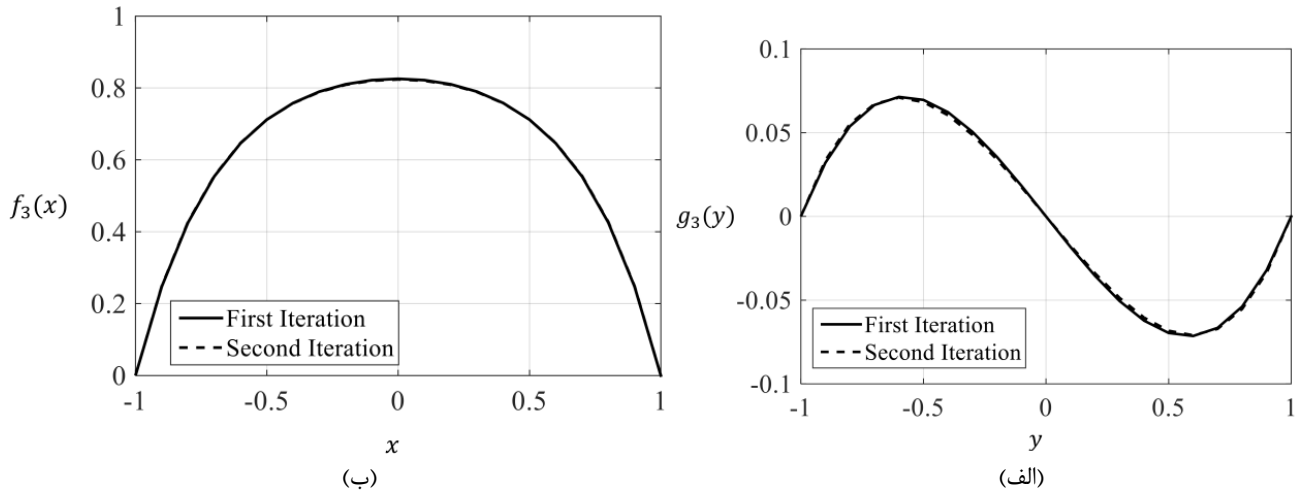
$$\lambda_2 = \frac{1}{\Gamma} \sqrt{\frac{I_{22}}{I_{21}}} \quad (۶۵)$$

$$\nu_2 = \Gamma \sqrt{\frac{J_{22}}{J_{21}}} \quad (۶۶)$$

در نتیجه با حل متوالی معادله‌های (۵۷) و (۶۲)، تابع  $P_2$  به صورت معادله (۶۷) به دست می‌آید.

$$P_2(x, y, t_0) = f_2^\infty(x) g_2^\infty(y) = \frac{J_{23}^\infty I_{23}^\infty}{\Gamma^2 J_{22}^\infty I_{22}^\infty} \left( 1 - \frac{\cosh(\nu_2^\infty x)}{\cosh \nu_2^\infty} \right) \left( 1 - \frac{\cosh(\lambda_2^\infty y)}{\cosh \lambda_2^\infty} \right) \quad (۶۷)$$

همچنین برای حل معادله (۳۲) به روش گسترش یافته کانتروویچ، با فرض  $P_2(x, y, t) = f_2(x) g_2(y)$ ، توابع  $f_2(x)$



شکل ۲: (الف) تابع  $f_3(x)$  و (ب) تابع  $g_3(y)$  در تکرارهای مختلف به ازای  $\Gamma=1$   
**Fig. 2. Different iteration of (a)  $f_3(x)$  and (b)  $g_3(x)$  where  $\Gamma=1$**

$$\bar{M}_{dx}(t) = \iint_R \bar{y} \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}, t) d\bar{x} d\bar{y} \quad (80)$$

$$\bar{M}_{dy}(t) = \iint_R -\bar{x} \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}, t) d\bar{x} d\bar{y} \quad (81)$$

که  $\bar{F}_d$  نیروی میرایی در جهت محور  $\bar{z}$ ،  $\bar{M}_{dx}$  و  $\bar{M}_{dy}$  گشتاورهای میرایی حول محورهای  $x$  و  $y$  هستند و  $R$  سطح میکرومحرک است.  $\bar{M}_{dy}$  و  $\bar{M}_{dx}$  می‌توانند به شکل بی بعد خود به صورت رابطه‌های (۸۲) تا (۸۴) نوشته شوند.

$$F_d(t) = \frac{\bar{F}_d(t)}{aL\eta_3} = \frac{\eta_2}{\eta_3} \iint_R P(x, y, t) dx dy, \quad (82)$$

$$R = [-1, 1] \times [-1, 1]$$

$$M_{dx}(t) = \frac{\bar{M}_{dx}(t)}{aL^2\eta_2} = \iint_R y P(x, y, t) dx dy, \quad (83)$$

$$R = [-1, 1] \times [-1, 1]$$

$$M_{dy}(t) = \frac{\bar{M}_{dy}(t)}{La^2\eta_1} = \frac{\eta_2}{\eta_1} \iint_R -x P(x, y, t) dx dy \quad (84)$$

$$, R = [-1, 1] \times [-1, 1]$$

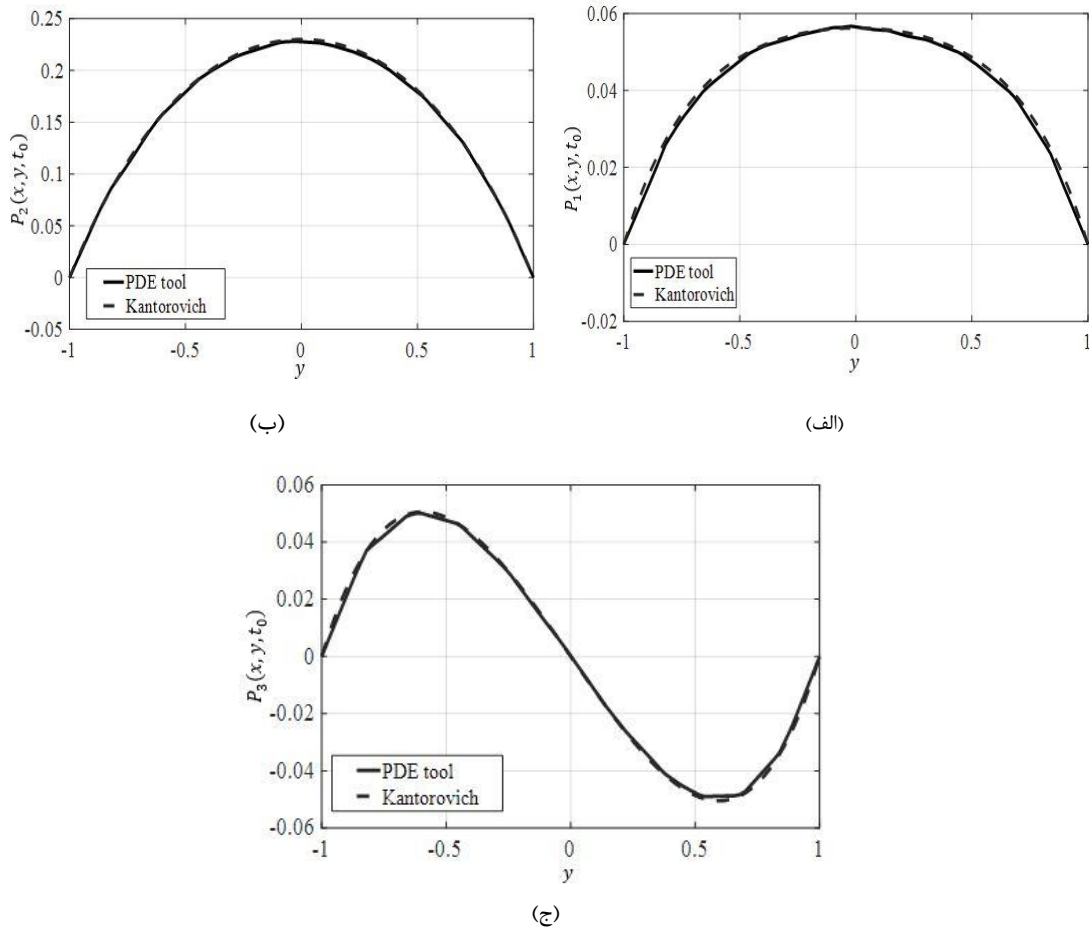
بنابراین با گرفتن انتگرال‌های موجود در معادله‌های (۸۲)–(۸۴)،

مقادیر بی بعد  $F_d$ ،  $M_{dx}$  و  $M_{dy}$ ، محاسبه می‌شوند.

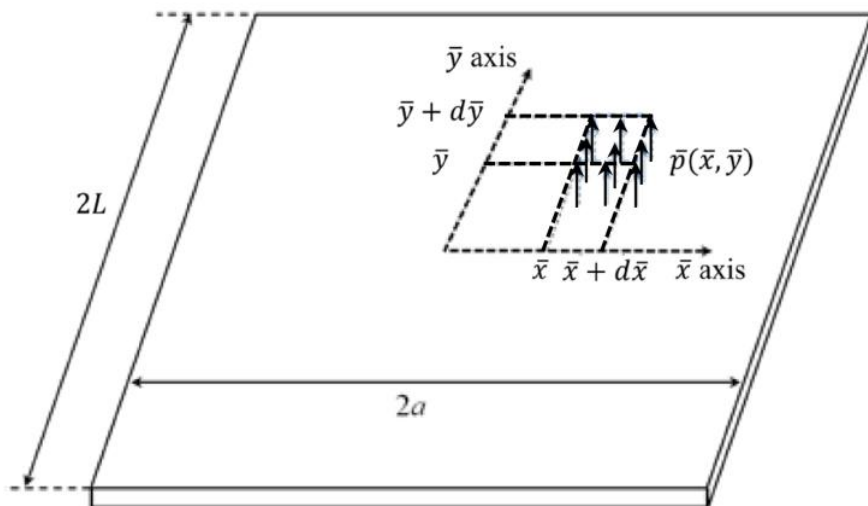
بررسی صحت، دقت و همگرایی روش گسترش یافته‌ی کانترویچ، به عنوان نمونه، تابع‌های  $f_3(x)$  و  $g_3(y)$  در شکل ۲ رسم شده‌اند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، شدت همگرایی به گونه‌ای است که تشخیص نمودارهای مختلف از یک‌دیگر غیرممکن است.

هم‌چنین برای صحت سنجی معادلات به دست آمده با روش گسترش یافته‌ی کانترویچ، از جعبه ابزار PDE نرم افزار متلب استفاده شد که برای حل معادلات دیفرانسیلی با مشتقات پاره‌ای، به کمک روش المان محدود است. معادله تعریف شده در این تولباکس از نوع بیضوی انتخاب گردید و تعداد المان‌های مثلثی ۳۱۲ عدد در نظر گرفته شد. در این جعبه ابزار برای حل در نقاط دلخواه که بر روی گره‌های تعریف شده قرار ندارد، از میانمایی استفاده می‌شود. مقایسه دو روش ذکر شده، در شکل ۳، آورده شده است. نمودارهای رسم شده در شکل ۳، به ترتیب فشارهای به دست آمده از دو روش ذکر شده را برای توابع  $P_1(x, y, t)$ ،  $P_2(x, y, t)$  و  $P_3(x, y, t)$ ، در  $x = 0.5$  و برای دامنه  $y \in (-1, 1)$ ، مقایسه می‌کنند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، حل ارائه شده از دقت زیادی برخوردار است. در شکل ۴ نحوه محاسبه نیرو و گشتاورهای میرایی با داشتن توزیع فشار، آمده است. با توجه به شکل ۴، می‌توان روابط (۷۹) تا (۸۱) را برای محاسبه نیرو و گشتاور میرایی نوشت.

$$\bar{F}_d(t) = \iint_R \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}, t) d\bar{x} d\bar{y} \quad (79)$$

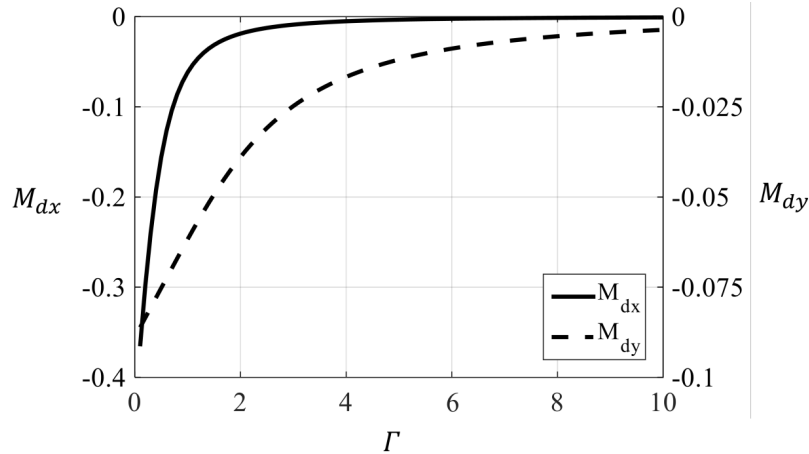


شکل ۳: (الف) تابع  $P_1(x, y, t_0)$ ، (ب) تابع  $P_2(x, y, t_0)$  و (ج) تابع  $P_3(x, y, t_0)$  در  $x = 0.5$  و برای دامنه  $y \in (-1, 1)$   
**Fig. 3. (a)  $P_1(x, y, t_0)$ , (b)  $P_2(x, y, t_0)$  and (c)  $P_3(x, y, t_0)$ , where  $x = 0.5$  and  $y \in (-1, 1)$**



شکل ۴: فشار هوایی که بر روی جزئی از سطح میکرومحرک اعمال می‌شود و باعث ایجاد نیروی جزئی در جهت محور  $\bar{z}$  و گشتاورهای جزئی حول محورهای  $\bar{x}$  و  $\bar{y}$  می‌شود [۱۵]

**Fig. 4. Gas pressure acting on a differential surface element, causes differential damping force in  $\bar{z}$  direction and damping torques in  $\bar{x}$  and  $\bar{y}$  directions [15]**



شکل ۵: گشتاور بی‌بعد میرایی لایه هوای فشرده،  $M_{dx}$  و  $M_{dy}$  بر حسب  $\Gamma$

Fig. 5. Normalized squeeze film damping torques  $M_{dx}$  and  $M_{dy}$  vs.  $\Gamma$

#### ۴- تحلیل و بررسی نتایج

برای مشاهده و بررسی تأثیر تغییر اندازه‌ی میکرومحرک در راستای محور  $x$  بر روی گشتاورهای بی‌بعد شده‌ی  $M_{dx}$  و  $M_{dy}$  از انتگرال‌های طرف دوم معادله‌های (۸۳) و (۸۴) استفاده می‌شود. با افزایش مقدار  $a$  و ثابت نگه‌داشتن مقدار  $L$ ، مقدار  $\Gamma$  افزایش می‌یابد. در شکل ۵ مشاهده می‌شود که با افزایش  $\Gamma$ ، مقدار  $M_{dx}$  با شیب بیشتری نسبت به  $M_{dy}$  افزایش می‌یابد. همین‌طور با افزایش اندازه  $L$  و ثابت نگه‌داشتن مقدار  $a$ ، اندازه  $\Gamma$  کاهش می‌یابد که منجر به کاهش مقدار  $M_{dx}$  و  $M_{dy}$  می‌شود.

هرچند بررسی و مشاهده رفتار  $M_{dx}$  و  $M_{dy}$  مفید است، اما طراح، نتایج و اطلاعات دقیق‌تری را با بررسی ارتباط گشتاورهای باعد  $\bar{M}_{dx}$  و  $\bar{M}_{dy}$  با ابعاد میکرومحرک، به دست می‌آورد. زیرا رفتار گشتاور باعد، می‌تواند با رفتار گشتاور بی‌بعد شده، یکسان نباشد. بدین منظور، ابتدا رابطه بین نیرو و گشتاورهای بی‌بعد  $F_d$ ،  $M_{dx}$  و  $M_{dy}$ ، با نیرو و گشتاورهای باعد  $\bar{F}_d$ ،  $\bar{M}_{dx}$  و  $\bar{M}_{dy}$ ، بررسی می‌شود. رابطه‌های (۸۵) تا (۸۷) این ارتباط را نشان می‌دهد.

$$\bar{F}_d = \frac{12\mu L^4}{h_0^3} \left( \frac{d\delta_x}{dt} + \frac{d\delta_y}{dt} \right) \Gamma^3 F_d \quad (85)$$

$$\bar{M}_{dx} = \frac{12\mu L^6}{h_0^3} \frac{d\theta_x}{dt} \Gamma^3 M_{dx} \quad (86)$$

$$\bar{M}_{dy} = \frac{12\mu L^6}{h_0^3} \frac{d\theta_y}{dt} \Gamma^3 M_{dy} \quad (87)$$

همان‌طور که در معادله‌های (۸۵) تا (۸۷) مشاهده می‌شود، با توجه به ثابت بودن پارامترهای  $F_d$ ،  $M_{dx}$  و  $M_{dy}$  نسبت به زمان، نیرو و گشتاورهای میرایی  $\bar{F}_d$ ،  $\bar{M}_{dx}$  و  $\bar{M}_{dy}$ ، به صورت خطی با سرعت انتقالی  $(d\delta_x/dt + d\delta_y/dt)$  و سرعت‌های زاویه‌ای  $\dot{\theta}_x$  و  $\dot{\theta}_y$  رابطه دارند. این بدین معنی است که نیرو و گشتاورهای میرایی در یک میکرومحرک دو محوره پیچشی، می‌تواند نقش میراگرهای لزج خطی را بازی کند.

همان‌طور که در مقدمه مقاله ذکر شد، در اکثر مطالعاتی که تا کنون بر روی میرایی میکرومحرک‌های پیچشی انجام شده است، از خاصیت خمش تیرهای نگهدارنده میکرومحرک‌های پیچشی صرف‌نظر شده و فقط اثر پیچشی آن‌ها در نظر گرفته می‌شود. در واقع در معادله‌های حاکم، تأثیر پیچش بسیار بیش‌تر از اثر خمش است. در عین حال، در این مقاله برای رسیدن به یک مدل دقیق‌تر، هر دو اثر خمش و پیچش لحاظ گردید، اما به راحتی می‌توان نشان داد اگر فرایند مدل‌سازی با لحاظ کردن اثر پیچشی تیرها و چشم‌پوشی از اثر خمش آن‌ها انجام می‌شد، ضخامت لایه هوا بین صفحات، به صورت رابطه (۸۸) در می‌آمد.

$$h = h_0 + \bar{y}\theta_x - \bar{x}\theta_y \quad (88)$$

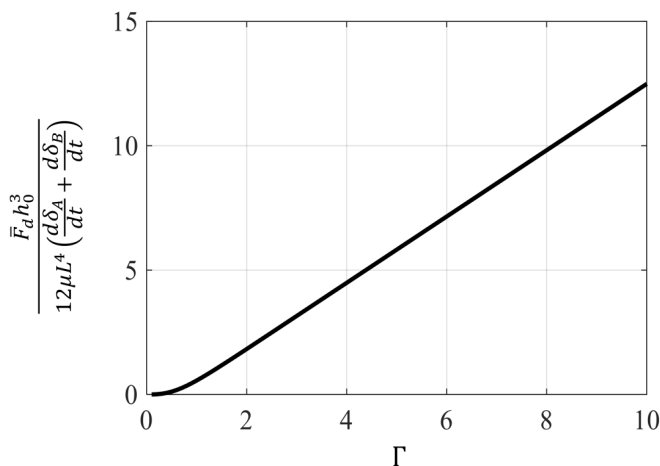
همچنین با جایگذاری رابطه (۸۸) در معادله (۷) و انجام

عبارت گفته شده در بالا توجیه قابل درک فیزیکی دارد. به عبارت دیگر با افزایش فاصله‌ی بین صفحه میکرومحرک و الکترودها، هوای به دام افتاده بین این دو صفحه، راحت‌تر امکان بیرون رفتن از بین دو صفحه را دارد و به نوعی نیرو و گشتاورهای میرایی کاهش پیدا می‌کند. از طرفی با افزایش لزجت هوا، مقاومت بیشتری در برابر حرکت هوای بین صفحات میکرومحرک و الکترودها (به خارج یا داخل) ایجاد می‌شود که مستلزم بیشتر شدن نیرو و گشتاورهای میرایی است.

به منظور مشاهده تأثیر تغییر اندازه میکرومحرک در جهت محورهای  $x$  و  $y$  بر مقدار نیروی میرایی، نمودار تغییرات مقدار  $(\bar{F}_d h^x) / (12\mu L^* (\dot{\delta}_x + \dot{\delta}_y))$  بر حسب  $\Gamma$  در شکل ۶ رسم شده است. با توجه به معادله (۸۵) با افزایش پارامتر  $\Gamma$ ، مقدار نیروی با بعد افزایش می‌یابد که این نتیجه در شکل ۶ نیز قابل مشاهده است.

در شکل ۷ مقدار  $(\bar{M}_{d\zeta} h^x) / (12\mu L^* \dot{\theta}_\zeta)$ ،  $(\zeta \in \{x, y\})$ ، بر حسب  $\Gamma$  رسم شده است. مشاهده می‌شود که به جز  $\bar{M}_{d\zeta}$ ، سایر پارامترها مستقل از پارامتر  $a$ ، هستند. در نتیجه با تغییر اندازه  $a$ ، که به تغییر اندازه  $\Gamma$ ، می‌انجامد، کلیه افزایش‌ها و کاهش‌های مشاهده شده در محور  $y$  شکل ۷، به دلیل افزایش و کاهش مقدار  $\bar{M}_{d\zeta}$  است. در این نمودار مشاهده می‌شود که با افزایش  $\Gamma$  (از طریق افزایش پارامتر  $a$  و ثابت در نظر گرفتن پارامتر  $L$ )، به  $\bar{M}_{dx}$  به طور یکنواخت کاهش می‌یابد، در حالی که اندازه آن در حال افزایش است. هم‌چنین می‌توان نتیجه گرفت که برای مقادیر کم پارامتر  $\Gamma$ ، مقدار  $\bar{M}_{dy}$  تقریباً ثابت و برابر با صفر می‌باشد و با افزایش  $\Gamma$ ،  $\bar{M}_{dy}$  به شدت کاهش می‌یابد (در صورتی که اندازه آن در حال افزایش است).

به منظور بررسی تأثیر تغییرات پارامتر  $L$  بر روی  $\bar{M}_{dx}$  و  $\bar{M}_{dy}$  نمی‌توان از شکل ۷ استفاده نمود. بنابراین برای مشاهده تغییرات مقدار گشتاور با بعد نسبت به تغییر اندازه پارامتر  $L$ ، در شکل ۸ نمودار تغییرات پارامتر  $(\bar{M}_{d\zeta} h^x) / (12\mu a^* \dot{\theta}_\zeta)$ ،  $(\zeta \in \{x, y\})$ ، بر حسب  $1/\Gamma$  رسم شده است. همان‌طور که قبلاً به آن اشاره شد، تمام پارامترها به جز  $\bar{M}_{d\zeta}$ ، مستقل از پارامتر  $L$ ، هستند. در نتیجه می‌توان رابطه میان گشتاور با بعد،  $\bar{M}_{d\zeta}$ ، و پارامتر  $L$ ، را در شکل ۸ مشاهده نمود. با مشاهده شکل ۸ می‌توان نتیجه گرفت که در این نمودار برای مقادیر کم پارامتر  $1/\Gamma$ ، مقدار  $\bar{M}_{dx}$  تقریباً ثابت و برابر با صفر



شکل ۶: نمودار  $(\bar{F}_d h^x) / (12\mu L^* (\dot{\delta}_x + \dot{\delta}_y))$  بر حسب  $\Gamma$

Fig. 6.  $(\bar{F}_d h_0^3) / (12\mu L^* (\dot{\delta}_x + \dot{\delta}_y))$  vs.  $\Gamma$

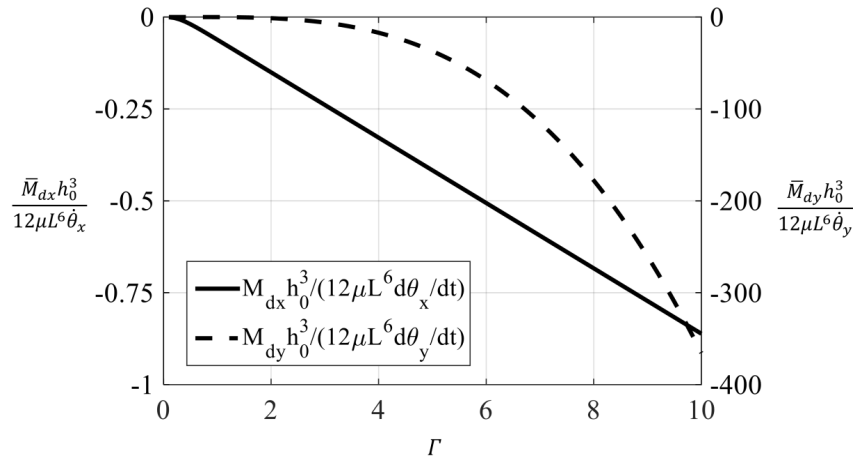
بی‌بعدسازی‌ها و فرضیاتی که قبلاً ذکر شد، تابع فشار  $P(x, y, t)$  از معادله (۸۹) قابل محاسبه می‌بود.

$$P(x, y, t) = \frac{\eta_1}{\eta_2} P_1(x, y, t) + P_3(x, y, t) \quad (89)$$

که  $\eta_1$  و  $\eta_2$ ، در معادله‌های (۲۳) و (۲۴) تعریف شده‌اند و توابع فشار  $P_1(x, y, t)$  و  $P_3(x, y, t)$  با استفاده از روش گسترش یافته‌ی کانتروویچ و شروط ذکر شده در معادله‌های (۳۰)، (۳۲) و (۳۳)، طبق معادله‌های (۵۵) و (۶۷)، به دست می‌آیند. با حذف تأثیر خمش و در نتیجه‌ی آن، به دست‌آمدن معادله (۸۹) برای تابع فشار هوای بین صفحات و جایگذاری آن در معادله‌های (۸۰) و (۸۱)، گشتاور میرایی حول محورهای  $x$  و  $y$ ، بدون تغییر باقی می‌مانند، زیرا در حاصل انتگرال‌های ذکر شده، تغییری ایجاد نمی‌شود. اما نیروی میرایی در راستای قائم، با جایگذاری معادله (۸۹) در معادله (۷۹) و به دست آوردن حاصل انتگرال، صفر می‌شود. این موضوع نشان دهنده‌ی اهمیت در نظر گرفتن درجات آزادی خمشی در مدل‌سازی میرایی لایه‌ی فشرده‌ی سیال می‌باشد.

با توجه به معادله‌های (۸۵) تا (۸۷)، می‌توان مشاهده کرد که اندازه نیرو و گشتاورهای میرایی واقعی، با مکعب فاصله میان میکرومحرک و الکترودها ( $h^x$ )، رابطه عکس دارند و با افزایش این فاصله، نیرو و گشتاورهای میرایی کاهش پیدا می‌کنند و هم‌چنین با افزایش لزجت هوا بین دو صفحه، مقدار نیرو و گشتاورهای میرایی، افزایش پیدا می‌کنند.





شکل ۷: نمودار  $(\bar{M}_{d\zeta} h_0^3) / (12 \mu L^6 \dot{\theta}_\zeta)$  که  $\zeta \in \{x, y\}$  بر حسب  $\Gamma$

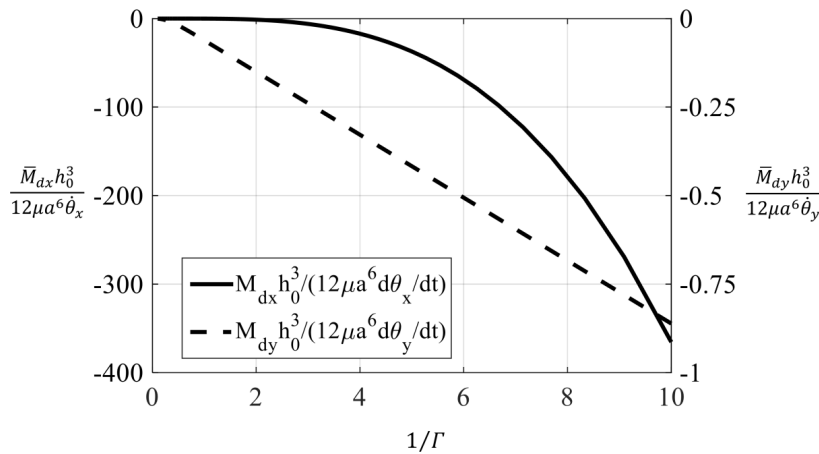
Fig. 7.  $(\bar{M}_{d\zeta} h_0^3) / (12 \mu L^6 \dot{\theta}_\zeta)$  where  $\zeta \in \{x, y\}$  vs.  $\Gamma$

هوای فشرده، و متعاقباً رفتار دینامیکی این سیستم‌ها، دارد. این واقعیت که تیرهای مورد استفاده در میکرومحرک‌های پیچشی، علاوه بر پیچش، تحت خمش هم قرار می‌گیرند، بررسی مسئله‌ی میرایی لایه فشرده‌ی سیال در این سیستم‌ها را سخت و پیچیده می‌کند. لذا هدف از ارائه این مقاله بررسی و مدل‌سازی میرایی لایه هوای فشرده در میکرومحرک پیچشی دو محوره با در نظر گرفتن اثر خمش تیرهای نگهدارنده می‌باشد. ابتدا معادله تراکم‌پذیری رینولدز حاکم بر رفتار هوای فشرده در زیر صفحه‌ی متحرک، با صرف نظر از اثرات اینرسی هوا در مقایسه با اثرات لزجت و با فرض هم‌دما بودن پروسه ارتعاش میکرومحرک، خطی‌سازی و بی‌بعدسازی شد. سپس معادله نرمال شده حاصل، با استفاده از روش گسترش یافته‌ی کانتروویچ حل گردید. به منظور محاسبه نیرو و گشتاورهای میرایی لایه هوای فشرده از توزیع فشار حاصله استفاده شد. نتایج به دست آمده از روش حل حاکی از آن بود که در صورت کوچک بودن زاویه دوران، نیرو و گشتاورهای میرایی نقش یک میرایی لزج خطی را ایفا می‌کنند. در انتها نیز تأثیر پارامترهای طراحی میکرومحرک پیچشی دو محوره روی گشتاورهای میرایی نگهدارنده مورد بررسی قرار گرفت. از نتایج و فرمول‌های به دست آمده برای نیرو و گشتاورهای میرایی لایه هوای فشرده در میکرومحرک پیچشی دو محوره در این مقاله، می‌توان برای مدل‌سازی دقیق دینامیک میکرومحرک‌هایی استفاده نمود که اثر خمش تیرهای پیچشی در آن‌ها قابل صرف نظر نیست.

می‌باشد و با افزایش  $1/\Gamma$ ،  $\bar{M}_{dx}$  به شدت کاهش می‌یابد (در صورتی که اندازه آن در حال افزایش است). در این نمودار مشاهده می‌شود که با افزایش  $1/\Gamma$ ،  $\bar{M}_{dy}$  به طور یکنواخت کاهش می‌یابد، در حالی که اندازه آن در حال افزایش است.

## ۵- نتیجه‌گیری

امروزه در کشورهای پیشرفته جهان، توسعه تلفیقی سیستم‌های مکانیکی و الکترونیکی در ابعاد کوچک مدنظر است. لزوم توسعه این فناوری باعث شده تا بسیاری از کشورهای جهان برای گسترش این فناوری و تولید محصول مربوطه اقداماتی صورت داده و در این راستا سرمایه‌گذاری‌هایی انجام دهند. این کوشش‌ها باعث ایجاد نسل جدیدی از سیستم‌های میکروالکترومکانیکی به نام سیستم‌های میکروالکترومکانیکی نوری گردید. به عنوان نمونه‌ای از این سیستم‌ها می‌توان به میکرومحرک‌های پیچشی اشاره کرد. در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی از جمله میکرومحرک‌ها، از خازن‌هایی با صفحات موازی استفاده می‌شود که به صورت الکترواستاتیکی تحریک، و حرکت آن با تغییر ظرفیت خازن پایش می‌شود. به منظور بهبود کارایی تحریک، فاصله‌های بین صفحات خازنی کمینه و مساحت الکترودها به صورت بیشینه طراحی می‌شوند. در چنین شرایطی میرایی لایه فشرده هوا به مهم‌ترین مکانیزم میراسازی حرکت در میکرومحرک‌ها تبدیل می‌شود. خمش تیرهای نگهدارنده میکرومحرک پیچشی دو محوره تأثیر فراوانی بر روی میرایی لایه



شکل ۸: نمودار  $(\bar{M}_{d\zeta} h_0^3) / (12\mu a^6 \dot{\theta}_\zeta)$  که  $\zeta \in \{x, y\}$  بر حسب  $1/\Gamma$

Fig. 8.  $(\bar{M}_{d\zeta} h_0^3) / (12\mu a^6 \dot{\theta}_\zeta)$  where  $\zeta \in \{x, y\}$ , vs.  $1/\Gamma$

چگالی هوا حبس شده بین صفحات در میکرومحرک،  
 $\rho$   
 kg/m<sup>3</sup>

بالانویس

حداکثر زاویه دوران  $max$

زیرنویس

میرایی  $d$

در جهت محور  $x$

در جهت محور  $y$

صفحه بالایی  $1$

صفحه پایینی  $2$

مراجع

- [1] O. Solgaard, A.A. Godil, R.T. Howe, L.P. Lee, Y.-A. Peter, H. Zappe, Optical MEMS: From micromirrors to complex systems, Journal of Microelectromechanical systems, 23(3) (2014) 517-538.
- [2] S. Finny, R. Resmi, Analysis of squeeze film damping in piston mode micromirrors, in: Inventive Computation Technologies (ICICT), International Conference on, IEEE, 2016, pp. 1-5.
- [3] M. Bao, H. Yang, Squeeze film air damping in MEMS, Sensors and Actuators A: Physical, 136(1) (2007) 3-27.
- [4] H. Moeenfar, M.T. Ahmadian, A. Farshidianfar, Analytical modeling of squeeze film damping

فهرست علائم

علائم انگلیسی

$a$  نصف طول میکرومحرک، m

$h$  ضخامت لایه حبس شده بین صفحات در میکرومحرک، m

$h_0$  فاصله اولیه بین میکرومحرک و الکترودهای زیرین، m

$L$  نصف عرض میکرومحرک، m

$F$  نیروی میرایی، N

$M$  گشتاور میرایی، N.m

$p$  فشار مطلق هوا حبس شده بین صفحات در میکرومحرک، Pa

$p$  فشار انحرافی بی بعد هوا حبس شده بین صفحات در میکرومحرک، Pa

$p_a$  فشار هوای محیط، Pa

$u$  سرعت هوا فشرده به دام افتاده در جهت محور  $x$ ، m/s

$v$  سرعت هوا فشرده به دام افتاده در جهت محور  $y$ ، m/s

علائم یونانی

$\epsilon_0$  ثابت گذردهی الکتریکی خلأ، C<sup>2</sup>N/m<sup>2</sup>

$\delta$  خیز تیرهای خمشی میکرومحرک، m

$\Delta$  خیز بی بعد تیرهای خمشی میکرومحرک

$\theta$  زاویه دوران میکرومحرک حول محور تیرهای پیچشی، rad

$\Phi$  زاویه دوران بی بعد میکرومحرک حول تیرهای پیچشی

$\mu$  لزجت هوا حبس شده بین صفحات در میکرومحرک، Pa.s

- effect, *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, 128(Supplement C) (2017) 156-171.
- [12] H. Moeenfar, M.T. Ahmadian, The influence of vertical deflection of the supports in modeling squeeze film damping in torsional micromirrors, *Microelectronics Journal*, 43(8) (2012) 530-536.
- [13] M. Radgolchin, H. Moeenfar, Size-dependent nonlinear vibration analysis of shear deformable microarches using strain gradient theory, *Acta Mechanica*, 229(7) (2018) 3025-3049.
- [14] J.P. Zhao, H.L. Chen, J.M. Huang, A.Q. Liu, A study of dynamic characteristics and simulation of MEMS torsional micromirrors, *Sensors and Actuators A: Physical*, 120(1) (2005) 199-210.
- [15] H. Moeenfar, Analytical modeling of squeeze film damping in dual axis torsion microactuators, *Surface Review and Letters*, 22(01) (2015) 1550006.
- [16] M. Bao, Y. Sun, J. Zhou, Y. Huang, Squeeze-film air damping of a torsion mirror at a finite tilting angle, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 16(11) (2006) 2330.
- [17] M. Bao, *Analysis and design principles of MEMS devices*, Elsevier, 2005.
- [18] J.B. Starr, Squeeze-film damping in solid-state accelerometers, in: *Solid-State Sensor and Actuator Workshop*, 1990. 4th Technical Digest., IEEE, IEEE, 1990, pp. 44-47.
- [19] M.H. Sadd, A.K. Stiffler, Squeeze film dampers: Amplitude effects at low squeeze numbers, *Journal of engineering for industry*, 97(4) (1975) 1366-1370.
- in micromirrors, in: *Proceedings of the ASME international design engineering technical conferences and computers and information in engineering conference*, 2011, pp. 10016-15990.
- [5] N.A. Diab, I.A. Lakkis, Investigation of the Squeeze Film Dynamics Underneath a Microstructure With Large Oscillation Amplitudes and Inertia Effects, *Journal of Tribology*, 138(3) (2016) 031704.
- [6] H. Yagubzade, M.I. Younis, The effect of squeeze-film damping on the shock response of clamped-clamped microbeams, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 134(1) (2012) 011017.
- [7] M.I. Younis, A.H. Nayfeh, Simulation of squeeze-film damping of microplates actuated by large electrostatic load, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2(3) (2007) 232-241.
- [8] W.E. Newell, Miniaturization of tuning forks, *Science*, 161(3848) (1968) 1320-1326.
- [9] S. Finny, R. Resmi, Material and geometry optimization for squeeze film damping in a micromirror, in: *Emerging Technological Trends (ICETT)*, International Conference on, IEEE, 2016, pp. 1-5.
- [10] I.Z. Famileh, J.A. Esfahani, H. Moeenfar, Entropy generation analysis of squeeze film air damping in torsional micromirrors, *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 126(1) (2015) 28-37.
- [11] S. Malihi, Y.T. Beni, H. Golestanian, Dynamic pull-in stability of torsional nano/micromirrors with size-dependency, squeeze film damping and van der Waals

