

ارائه‌ی مدل ریاضی جدید بر پایه‌ی روش رگرسیونی جهت تخمین تمرکز تنش اطراف بریدگی بیضی شکل در صفحات کامپوزیتی تحت بار کششی

علی عباس‌نیا^{۱*}، عباس روحانی^۲، محمد جعفری^۱

^۱دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران
^۲دانشکده کشاورزی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت:
بازنگری:
پذیرش:
ارائه آنلاین:

کلمات کلیدی:

ضریب تمرکز تنش
بریدگی بیضی
رگرسیون خطی چندگانه
زاویه‌ی چرخش گشودگی
روش متغیر مختلط

خلاصه: در این مقاله سعی می‌شود تا به کمک روش رگرسیون خطی چندگانه، رابطه‌ی صریحی جهت تخمین ضریب تمرکز تنش صفحات حاوی بریدگی بیضی، بر حسب خواص مکانیکی و زاویه‌ی چرخش گشودگی ارائه گردد. ابتدا ضریب تمرکز تنش برای تعداد بیشماری از کامپوزیت‌ها به کمک روش حل تحلیلی بر پایه‌ی روش متغیر مختلط و با استفاده از مقادیر مختلف خواص مکانیکی کامپوزیت‌ها محاسبه شد. به کمک داده‌های به دست آمده و با استفاده از روش رگرسیون خطی چندگانه رابطه‌ی صریحی برای تخمین ضریب تمرکز تنش در صفحات نامحدود کامپوزیتی حاوی گشودگی بیضی تحت بار کششی ارائه گردید. توجه به اینکه عوامل متعددی بر تمرکز تنش اطراف گشودگی اثر گذار می‌باشد؛ حائز اهمیت است. از این رو با انتخاب صحیح این پارامترها می‌توان به میزان قابل توجهی تمرکز تنش را کاهش داد و باعث افزایش استحکام سازه شد. از جمله این عوامل می‌توان به زاویه‌ی چرخش گشودگی اشاره کرد که در این مقاله بررسی می‌گردد. رابطه‌ی ارائه شده علاوه بر سهولت استفاده، با حذف محاسبات سخت و پیچیده‌ی حل تحلیلی، در زمان صرفه جویی کرده و این امکان را برای طراح فراهم می‌آورد تا بتواند پارامترهای مدنظر جهت دست‌یابی به تنش مطلوب را به دست آورد. نتایج نشان داد که مدل رگرسیونی قادر به تخمین ضریب تمرکز تنش با خطای کمتر از یک درصد است.

۱- مقدمه

با وجود تحقیق‌های فراوان در زمینه‌ی تمرکز تنش توسط روش‌های مختلف عددی، تجربی و تحلیلی که خود اهمیت موضوع را آشکار می‌سازد؛ به دلیل کاربرد مسأله و ارائه راهکارهای ساده‌تر، پژوهش در این زمینه همچنان ادامه دارد. در این تحلیل از یک صفحه‌ی بی‌نهایت حاوی بریدگی مرکزی تحت کشش استفاده شده است.

امروزه اهمیت استفاده از کامپوزیت‌ها و کاربرد این مواد در صنایع گوناگون بر کسی پوشیده نیست. در بسیاری از موارد طراح برای ارائه‌ی یک طرح بهینه ناگزیر به ایجاد گشودگی در طرح است. وجود این ناپیوستگی‌های هندسی باعث ایجاد یک تنش موضعی شدید (تمرکز تنش) در سازه می‌گردند. هرچند وجود این بریدگی‌ها وزن سازه را کاهش می‌دهد اما تمرکز تنش ناشی از آن‌ها همواره باعث نگرانی طراح می‌گردد. تجربه نشان داده که در صفحات حاوی گشودگی، تنش واقعی شکست اساساً کمتر از استحکام کشش نهایی همان ماده بدون بریدگی است. برای رفع این نگرانی طراح بایستی توزیع تنش اطراف بریدگی را به‌درستی محاسبه کند. برای دستیابی به این هدف، او بایستی پارامترهای حاکم بر طراحی را به خوبی بشناسد و نحوه‌ی اثر گذاری آن‌ها را برای دستیابی به طراحی بهینه به‌درستی تحلیل کند.

۱-۱- مرور کارهای انجام شده

موشخیلشویلی [۱] با ارائه‌ی روش متغیر مختلط، فصل جدیدی برای حل مسائل مقدار مرزی در الاستیسیته‌ی دو بعدی برای مواد الاستیک همسانگرد بوجود آورد. به‌طوری که محققان بسیاری با بسط و توسعه‌ی روش متغیر مختلط تحلیل‌های متعددی در این زمینه انجام دادند. افرادی همچون ساوین [۲]، اشترو [۳]، لخنیتسکی [۴] و گلدول [۵] با استفاده از روش متغیر مختلط موشخیلشویلی مطالعاتی را انجام دادند. ساوین توزیع تنش در صفحات نامحدود

* نویسنده‌دار مکاتبات: alii.abbasnia@gmail.com

پارامترهای مختلف مؤثر بر شدت تنش شامل زاویه بار، زاویه الیاف، زاویه چرخش بریدگی و اثر انحنای گوشه بریدگی را بررسی کردند. بررسی تأثیر شعاع انحنای گوشه‌ی بریدگی در تحلیل تنش صفحات با بریدگی مرکزی و تحت کشش توسط جعفری و رضایی پزند [۱۳] صورت پذیرفت. آن‌ها با استفاده از بسط روش حل تحلیلی لخنیتسکی حل خود را ارائه دادند و در نهایت برای بررسی درستی نتایج خود از اجزای محدود استفاده کردند.

جعفری و مشیری اول [۱۴] توزیع تنش حول بریدگی شبه مستطیلی در چندلایه‌های کامپوزیتی متقارن تحت بارگذاری درون صفحه‌ای را تحلیل کردند. آن‌ها با بررسی حل تحلیلی لخنیتسکی تأثیر پارامترهای مختلفی همچون نسبت طول به عرض بریدگی، زاویه چرخش بریدگی، شعاع انحنای گوشه بریدگی، نوع چیدمان لایه‌ها و زاویه اعمال بار را بررسی کردند. ایشان نشان دادند که با نرم‌تر شدن گوشه‌های بریدگی و همچنین با انتخاب زاویه چرخش بریدگی مناسب می‌توان تمرکز تنش را کاهش داد. جعفری و قندی ورنوسفادرانی [۱۵] حلی شبه تحلیلی برای ضریب تمرکز تنش در صفحات همسانگرد حاوی دو بریدگی شبه مستطیلی ارائه دادند. آن‌ها با بسط توابع تنش موشخیلشویلی و روش تکرار شونده‌ی شوارتز، توزیع تنش در صفحه‌ی حاوی دو بریدگی شبه مستطیلی را بررسی کردند. آن‌ها تأثیر پارامترهای مختلفی همچون محل قرارگیری دو بریدگی نسبت به هم، شعاع انحنای گوشه‌های دو بریدگی و نسبت ابعاد بریدگی‌ها بر ضریب تمرکز تنش را مطالعه کردند. منصوری و شبیانی [۱۶] پارامترهای بهینه به منظور کاهش ضریب تمرکز تنش حول بریدگی در صفحات کامپوزیتی تحت کشش ارائه دادند.

بررسی تأثیر شعاع انحنای گوشه بریدگی بر تمرکز تنش ناشی از شار حرارتی توسط جعفری و نظری [۱۱] صورت پذیرفت. آن‌ها بر پایه‌ی تئوری ترموالاستیسیته دوبعدی حالت پایدار میدان تنش را در اطراف بریدگی‌های مختلف در یک صفحه‌ی نامحدود همسانگرد مورد بررسی قرار دادند. در این مطالعه صفحه در بینهایت تحت جریان حرارتی یکنواخت است و مرز بریدگی مرکزی عایق است. مشیری اول و جعفری [۱۷] با استفاده از روش متغیر مختلط لخنیتسکی تأثیر پارامترهای مختلف بر توزیع تنش چندلایه‌های متقارن حاوی بریدگی مثلثی را بررسی کردند. آن‌ها نتایج را با نتایج اجزای محدود مقایسه کردند. عباس‌نیا و همکاران [۱۸] یک معادله‌ی جدید جهت

همسانگرد (حاوی بریدگی‌های مختلف) و غیر همسانگرد (فقط بریدگی‌های دایره‌ای و بیضوی) تحت کشش را تحلیل کرد. اشترو روش موشخیلشویلی را به مسائل الاستیسیته‌ی دو بعدی مواد غیر همسانگرد توسعه داد. لخنیتسکی نیز توزیع تنش را برای صفحات نامحدود ناهمسانگرد حاوی بریدگی دایره‌ای و بیضوی محاسبه کرد. انتگرال‌های متفاوتی جهت محاسبه‌ی توابع تنش نیاز است؛ گلدول با بسط روش متغیر مختلط موشخیلشویلی توانست این انتگرال‌ها را بررسی کند.

توزیع تنش اطراف بریدگی مربعی در یک صفحه‌ی ناهمسانگرد تحت کشش توسط قاضی اسمر و تونی جابور [۶] بررسی شد. آن‌ها به کمک روش لخنیتسکی تأثیر شعاع انحنای گوشه‌ی بریدگی و زاویه بار را بر روی تمرکز تنش بررسی کردند. رضایی پزند و جعفری [۷] یک روش تحلیلی ساده برای تجزیه و تحلیل تنش در صفحات کامپوزیتی حاوی بریدگی‌های غیر دایره‌ای ارائه کردند. آن‌ها نتایج خود را با اجزای محدود مقایسه کردند. تمرکز تنش صفحات حاوی بریدگی مستطیلی نیز توسط یانگ و همکاران [۸] مورد بررسی قرار گرفت. آن‌ها صفحه را تحت بارگذاری دو محوری قرار دادند.

رضایی پزند و جعفری [۹] با استفاده از حل لخنیتسکی توزیع تنش در صفحات کامپوزیتی حاوی بریدگی شبه مربعی تحت کشش یکنواخت را تحلیل کردند. آن‌ها نشان دادند در صفحات کامپوزیتی حاوی بریدگی شبه مربعی می‌توان توزیع تنش را با انتخاب مناسب پارامترهای زاویه‌ی الیاف، زاویه‌ی بارگذاری، خواص مواد به شکل قابل توجهی کاهش داد. هافنباخ و همکاران [۱۰] میدان تنش و جابه‌جایی حول گشودگی بیضوی را در صفحه‌ی ناهمسانگرد محاسبه کردند. آن‌ها نتایج خود را با اجزای محدود مقایسه کردند. ایشان در پژوهش خود میزان تمرکز تنش را برای زوایای الیاف و زوایای بار متفاوت ارائه کردند.

جعفری و رضایی پزند [۱۱] با بسط حل تحلیلی لخنیتسکی تأثیر پارامترهای مختلف بر توزیع تنش حول بریدگی در صفحات ناهمسانگرد تحت کشش را بررسی کردند. آن‌ها پارامترهای بهینه جهت دستیابی به کمترین ضریب تمرکز تنش را معرفی کرده و نشان دادند با انتخاب پارامترهای مناسب می‌توان به تمرکز تنشی کمتر از بریدگی دایره‌ای دست یافت. آن‌ها در مقاله‌ی دیگری توزیع تنش صفحات ناهمسانگرد با بریدگی مثلثی را بررسی کردند [۱۲]. آن‌ها

برای تحلیل رگرسیونی مجموعه‌ای از داده‌ها مورد نیاز است. این مجموعه داده بایستی جامع و کافی باشد. عباس‌نیا و همکاران [۱۸] نشان دادند که با استفاده از خصوصیات مکانیکی ۱۰۳ ماده مختلف با خواص مکانیکی متفاوت می‌توان تخمین دقیقی برای ضریب تمرکز تنش در صفحات حاوی گشودگی دایره‌ای به دست آورد. آن‌ها به دلیل نیاز به داده‌های بیشتر جهت دستیابی به تقریب مناسب، از روابط محاسبه خواص مکانیکی ماده مرکب به کمک درصدهای حجمی مختلف الیاف و ماتریس و خواص مکانیکی آن‌ها با به کارگیری قانون اختلاط استفاده کردند. از این‌رو در این پژوهش نیز از همین مواد استفاده می‌گردد که برخی از خواص مکانیکی آن‌ها در جدول ۱ ارائه شده است [۱۸ و ۱۹].

۲-۲-۲-۲- حل تحلیلی

با توجه به تئوری الاستیسیته لختیستی در اجسام ناهمسانگرد، می‌توان محاسبه‌ی تابع تنش را محدود به محاسبه‌ی ضرایب نامشخصی دانست. این ضرایب نامعلوم با توجه به شرایط مرزی حول بریدگی محاسبه می‌شوند. افرادی همانند ساوین [۲] و لختیستی [۴] تابع تنش در صفحات نامحدود ناهمسانگرد دارای بریدگی بیضی و دایره‌ای را محاسبه کرده‌اند. در روابط ارائه شده برای محاسبه‌ی ضریب تمرکز تنش، زاویه‌ی چرخش بریدگی به عنوان پارامتر مؤثر بر تمرکز تنش به چشم نمی‌خورد. لذا در این مقاله علاوه بر شکل ساده (رابطه‌ی چند جمله‌ای) نسبت به سایر روابط موجود، ضریب تمرکز تنش بر حسب خواص مکانیکی و زاویه‌ی چرخش بریدگی ارائه می‌گردد. در ادامه به روند محاسبه تنش پرداخته می‌شود [۱۸]. از تنش‌های به دست آمده جهت تحلیل رگرسیونی استفاده می‌گردد.

تخمین ضریب تمرکز تنش بریدگی دایره‌ای در ورق ارتوتروپیک را ارائه دادند. آن‌ها با استفاده از روش رگرسیون موفق به ارائه‌ی رابطه‌ی صریح جهت محاسبه‌ی ضریب تمرکز تنش حول بریدگی دایره‌ای در صفحات ارتوتروپیک تحت کشش شدند. آن‌ها نشان دادند که مدل پیشنهادیشان قادر به پیش بینی ضریب تمرکز تنش با حداکثر خطای ۱ درصد است.

اگرچه پژوهش‌های فراوانی در زمینه توزیع تنش حول بریدگی در مواد مختلف صورت گرفته است اما در هیچ یک از مقالات مشابه رابطه صریحی برای محاسبه‌ی ضریب تمرکز تنش بر حسب خواص مکانیکی، شعاع انحنای گوشه بریدگی و زاویه چرخش بریدگی در صفحات کامپوزیتی نامحدود تحت بار کششی ارائه نشده است. با توجه به سادگی رابطه ارائه شده در این مقاله (معادله‌ی چند جمله‌ای) به جای انجام پروسه سخت و پیچیده‌ی حل تحلیلی، به سادگی می‌توان مقادیر تنش در صفحات حاوی بریدگی بیضی را با استفاده از خواص مکانیکی ماده در زاویه چرخش بریدگی دلخواه به دست آورد.

۲- مواد و روش‌ها

۲-۱-۱-۲- مشخصات مواد

صفحات کامپوزیتی مورد مطالعه در این مقاله، صفحات حاوی گشودگی بیضی شکل، تحت بارگذاری محوری و نامحدود در نظر گرفته شده‌اند. گشودگی در مرکز صفحه واقع است (شکل ۱). همانطور که در شکل ۱ دیده می‌شود مشخصات محلی و عمومی مورد استفاده در این مقاله به تصویر کشیده شده است. تحلیل مسأله با فرض تنش صفحه‌ای صورت گرفته و رفتار صفحات در ناحیه الاستیک خطی بررسی شده است.

جدول ۱: خواص مکانیکی مواد [18 و 19]

Table 1. Mechanical properties of materials [18, 19]

نام ماده	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
ای-شیشه/اپوکسی	۳۹/۰	۸/۶	۳/۸	۰/۲۸
اس-شیشه/اپوکسی	۴۳/۰	۸/۹	۴/۵	۰/۲۷
شیشه با الیاف بافته شده/اپوکسی	۲۹/۷	۲۹/۷	۵/۳	۰/۱۷
کولار/اپوکسی	۸۷/۰	۵/۵	۲/۲	۰/۳۴
کربن/اپوکسی	۱۴۲/۰	۱۰/۳	۷/۲	۰/۲۷
کربن/اپیک	۱۳۱/۰	۸/۷	۵/۰	۰/۲۸

نشان داده شده است.

$$R_{ij} = S_{ij} \quad i, j = (1, 2, 6) \quad (5)$$

که در این روابط R_{ij} اعضاء ماتریس نرمی هستند در حالت دو بعدی رابطه سازگاری بصورت رابطه‌ی (۶) بیان می‌شود:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (6)$$

رابطه تنش و کرنش برای ماتریس نرمی کاهش یافته بصورت معادله‌ی (۷) است:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= R_{11}\sigma_x + R_{12}\sigma_y + R_{16}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= R_{12}\sigma_x + R_{22}\sigma_y + R_{26}\tau_{xy} \\ \gamma_{xy} &= R_{16}\sigma_x + R_{26}\sigma_y + R_{66}\tau_{xy} \end{aligned} \quad (7)$$

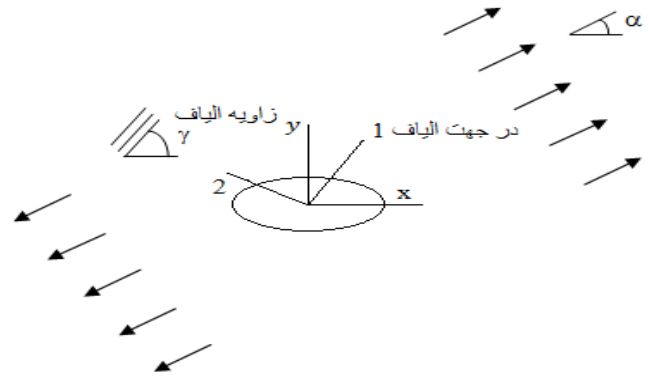
از طرفی برای ارضا شدن معادلات تعادل بایستی تابع تنش $F(x, y)$ به صورت زیر تعریف شود:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (8)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۸) در معادله‌ی سازگاری، معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم بر حسب تابع تنش F به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} R_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2R_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (2R_{12} + R_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \\ - 2R_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + R_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

در واقع معادله‌ی (۹)، معادله‌ی سازگاری برای ماده‌ی غیرهمسان‌گرد می‌باشد که $F(x, y)$ تابع تنش و R_{ij} اعضاء ماتریس نرمی کاهش یافته صفحه است که براساس فرض کرنش صفحه‌ای یا تنش صفحه‌ای بصورت تابعی از S_{ij} مطابق روابط (۴) و



شکل ۱: شماتیک ورق نامحدود دارای گشودگی بیضوی تحت کشش یک طرفه
Fig. 1. Schematic diagram of infinite plate with elliptical cutout under uniaxial tension

مطابق تعمیم قانون هوک در حالت سه بعدی می‌توان هر مؤلفه تنش را به تمام مؤلفه‌های تغییر شکل نسبی و هر مؤلفه تغییر شکل نسبی را به تمام مؤلفه‌های تنش مربوط ساخت (روابط (۱) و (۲)):

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad (1)$$

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad (2)$$

$[C]$ و $[S]$ به ترتیب تانسورهای نرمی یا انعطاف پذیری و سفتی ماده هستند؛ که ارتباط بین این دو پارامتر در رابطه‌ی (۳) مشاهده می‌شود:

$$[C] = [S]^{-1} \quad (3)$$

در ادامه کار دو حالت کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای را در نظر می‌گیریم. برای حالت کرنش صفحه‌ای ($\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$) اعضاء ماتریس نرمی کاهش یافته R_{ij} بصورت رابطه‌ی (۴) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} R_{11} &= (S_{11}S_{33} - S_{13}^2) / S_{33} \\ R_{12} &= (S_{12}S_{33} - S_{13}S_{23}) / S_{33} \\ R_{16} &= (S_{16}S_{33} - S_{13}S_{36}) / S_{33} \\ R_{22} &= (S_{22}S_{33} - S_{23}^2) / S_{33} \\ R_{26} &= (S_{26}S_{33} - S_{23}S_{36}) / S_{33} \\ R_{66} &= (S_{66}S_{33} - S_{36}^2) / S_{33} \end{aligned} \quad (4)$$

و برای حالت تنش صفحه‌ای ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$) در رابطه‌ی (۵)

۲-۳-۳-۲- تحلیل رگرسیونی و استخراج مدل

در قسمت قبل بیان شد که تنش‌ها در دستگاه مختصات قطبی محاسبه شدند. بنابراین تنها تنش محیطی باقی می‌ماند. در صورتی که اگر از دستگاه مختصات دکارتی استفاده شود؛ هر سه تنش σ_x و σ_y و τ_{xy} در مرز گشودگی وجود خواهند داشت که در این صورت باید از تنش معادل فون میسز استفاده کرد. نتیجه هر دو روش به یک جواب منتهی می‌شود اما به دلیل سهولت از دستگاه مختصات قطبی استفاده شده است. از اینرو ضریب تمرکز تنش به صورت بیشترین تنش محیطی اطراف گشودگی ($\sigma_{\theta max}$) به تنش اعمالی (σ_0) تعریف می‌شود. میزان تنش اعمالی در مرز ورق Pa ۱ می‌باشد. با علم به اینکه ضریب تمرکز تنش در صفحات حاوی گشودگی بیضوی تابعی از خواص مکانیکی (E_1 ، E_2 ، G_{12} و ν_{12}) و زاویه‌ی چرخش بریدگی (β) می‌باشد؛ جهت بی‌بعد سازی متغیرها نیز از ترکیبات مختلف E_1 ، E_2 و G_{12} استفاده شده است که در نهایت شش گزینه به عنوان متغیرهای مستقل مدل رگرسیونی خطی چندگانه استفاده شد.

به کمک این طرح آماری کلیه ضرایب مدل رگرسیون و اثرات متقابل فاکتورها قابل برآورد هستند [۱۸]. بنابراین مدل‌های رگرسیونی (رابطه‌ی (۱۵)) که برای تخمین ضریب تمرکز تنش مورد استفاده قرار گرفتند به ترتیب عبارتند از: مدل خطی^۲ (رابطه‌ی (۱۶))، مدل با اثرات متقابل^۳ (رابطه‌ی (۱۷))، مدل درجه دوم^۴ (رابطه‌ی (۱۸)) و مدل درجه دوم کاهش یافته^۵ (رابطه‌ی (۱۹)).

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=2}^l \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^m \beta_{ii} x_i^2 + \varepsilon \quad (15)$$

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + \varepsilon \quad (16)$$

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{14} x_1 x_4 + b_{23} x_2 x_3 + b_{24} x_2 x_4 + b_{34} x_3 x_4 + \varepsilon \quad (17)^3$$

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_{12} x_1 x_2$$

(۵) قابل محاسبه می‌باشند. لخنیتسکی نشان داده است که معادله‌ی (۹) به کمک چهار اپراتور مشتق خطی مرتبه‌ی اول D_k به صورت رابطه‌ی (۱۰) ساده می‌شود:

$$D_1 D_2 D_3 D_4 F = 0 \quad (10)$$

$$D_k = \frac{\partial}{\partial y} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x}, k = 1, 2, 3, 4$$

μ_a ریشه‌های معادله‌ی مشخصه‌ی معادله‌ی (۱۱) می‌باشد.

$$R_{11} \mu^4 - 2R_{16} \mu^3 + (2R_{12} + R_{66}) \mu^2 + 2R_{26} \mu + R_{22} = 0 \quad (11)$$

معادله‌ی (۱۱) در حالت کلی چهار ریشه‌ی موهومی دارد. لخنیتسکی اثبات کرد که این معادله‌ی مشخصه دارای ریشه‌های دو به دو مزدوج به صورت رابطه‌ی (۱۲) می‌باشند:

$$\mu_{1,2} = \alpha_1 \pm i \beta_1 \quad (12)$$

$$\mu_{3,4} = \alpha_2 \pm i \beta_2$$

با توجه به ریشه‌های معادله مشخصه، بیان کلی تابع تنش F به صورت رابطه‌ی (۱۳) خواهد بود:

$$F(x, y) = 2 \operatorname{Re}[f_1(z_1) + f_2(z_2)] \quad (13)$$

f_1 و f_2 توابع دلخواه از متغیر مختلط $z_k = x + \mu_k y$ برای $k=1, 2$ می‌باشند. با به‌کارگیری این رویکرد، مسأله به تعیین دو تابع f_1 و f_2 به گونه‌ای که شرایط مرزی لبه‌ی بریدگی را ارضا کند؛ محدود می‌شود. بنابراین تنش‌ها از رابطه‌ی (۱۴) تعیین می‌شوند.

$$\sigma_x = 2 \operatorname{Re}[\mu_1^2 f_1''(z_1) + \mu_2^2 f_2''(z_2)] \quad (14)$$

$$\sigma_y = 2 \operatorname{Re}[f_1''(z_1) + f_2''(z_2)]$$

$$\tau_{xy} = -2 \operatorname{Re}[\mu_1 f_1''(z_1) + \mu_2 f_2''(z_2)]$$

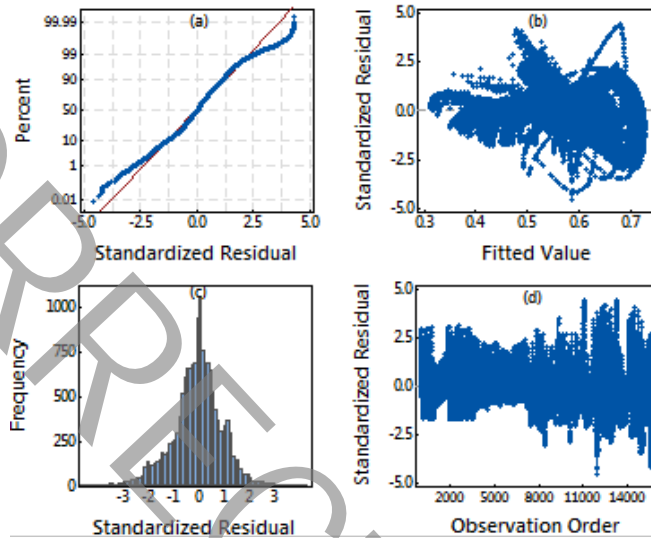
با توجه به مرز گشودگی بهتر است تا تنش‌های فوق در دستگاه مختصات قطبی ارائه شوند. چون در این دستگاه در مرز گشودگی تنش‌های برشی و شعاعی ($\tau_{r\theta} = \sigma_r = 0$) صفر خواهند بود و تنها تنش باقیمانده تنش محیطی (σ_θ) است.

- 1 Multiple Linear Regression
- 2 Linear
- 3 Two Factor Interaction (2FI)
- 4 Quadratic
- 5 Reduce Quadratic

جدول ۲: تجزیه واریانس مدل رگرسیونی

Table 2. Analysis of variance table for the regression model

متوسط مربعات	مجموع مربعات	درجه آزادی	منبع تغییرات
$MS_R = SS_R / p - 1$	$SS_R = \sum_{i=1}^m (\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$p - 1$	رگرسیون
$MS_E = SS_E / n - p$	$SS_E = \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2$	$n - p$	باقی مانده
-	$SS_T = \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2$	$n - 1$	کل



شکل ۲: نتایج ارزیابی اعتبار مدل رگرسیون خطی چندگانه

Fig. 2. The results of validation of the MLR regression model

۲-۴-۲- معیارهای ارزیابی عملکرد مدل

به منظور ارزیابی بهتر عملکرد مدل رگرسیون خطی چندگانه، داده‌ها به طور تصادفی به دو بخش کالیبراسیون و تست تقسیم شدند. با اختصاص ۸۰ درصد داده‌ها برای کالیبراسیون، ۲۰ درصد باقیمانده داده‌ها نیز برای تست در نظر گرفته شد. سپس برای داده‌های کالیبراسیون و تست معیارهایی همچون میانگین مربعات خطای مدل^۳، انحراف معیار خطای مدل^۴ و بازده مدل^۵ مورد ارزیابی قرار گرفتند. پس از آن برای دستیابی به مدل رگرسیونی جهت تخمین بهتر ضریب تمرکز تنش، انواع تبدیلات نظیر لگاریتم، رادیکال، معکوس و ... اعمال گردیدند و مدل مناسب استخراج شده است. لازم به ذکر است که انتخاب مدل مناسب با توجه به نمودار پراکندگی مقادیر پیش‌بینی شده در مقابل مقادیر واقعی حول نیمساز ربع اول انجام شده است [۱۸].

$$+ b_{13}x_1x_3 + b_{14}x_1x_4 + b_{23}x_2x_3 + b_{24}x_2x_4 + b_{34}x_3x_4 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{44}x_4^2 + \varepsilon \quad (18)$$

$$Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_{11}x_1^2 + i \quad (19)$$

که در آن‌ها، Y تنش محیطی x_1, σ_0 همان $x_2, \frac{E_2}{E_1}$ برابر $x_3, \frac{E_1}{G_{12}}$ نسبت پواسون x_4, ν_{12} زاویه‌ی چرخش بریدگی β و همچنین b_0 ، ضریب ثابت، b_i اثر خطی، b_{ij} اثرات درجه دوم، b_{ij} اثرات متقابل و ε خطای مدل می‌باشند.

در جدول ۲ تجزیه واریانس مدل رگرسیون خطی چندگانه گزارش شده است. واریانس کل مدل به دو عامل اصلی شامل مجموع مربعات رگرسیون^۱ و مجموع مربعات خطا^۲ تقسیم شده است.

- 3 Root Mean Square Error (RMSE)
- 4 Mean Absolute Percentage Error (MAPE)
- 5 Efficiency (EF)

- 1 sum of squared regression (SS_R)
- 2 sum of squared errors (SS_E)

معادله‌ای که ضریب تمرکز تنش را در صفحات حاوی بریدگی بیضوی محاسبه کند؛ استفاده شده است. همچنین ایشان [۱۸] نشان دادند که بهترین شکل مدل رگرسیون، درجه دوم می‌باشد. در ادامه به عیب شناسی مدل رگرسیون، تجزیه واریانس مدل، ارزیابی آماری مدل و قابلیت تعمیم پذیری مدل پرداخته می‌شود.

۳-۱-۱-۳- عیب شناسی مدل رگرسیون

عیب شناسی مدل رگرسیون درجه دوم انتخاب شده برای تخمین ضریب تمرکز تنش در مرحله‌ی کالیبراسیون در شکل ۲ نشان داده شده است. با توجه به نرمال بودن توزیع آماری خطاهای مدل رگرسیون (شکل ۲ (a) و (c))، توزیع یکنواخت و مستقل خطاها (شکل ۲ (b)) و همچنین عدم وجود خود همبستگی بین خطاهای مدل رگرسیونی (شکل ۲ (d)) مدل رگرسیونی اعتبار می‌یابد و می‌توان به نتایج مدل رگرسیونی درجه دوم پیشنهاد شده اعتماد کرد.

جهت تحلیل در پژوهش حاضر از نرم افزار متلب استفاده شده است. در ابتدا محاسبات جهت تحلیل تنش‌های مورد نیاز برای رگرسیون خطی چندگانه، با استفاده از مقادیر مختلف خواص مکانیکی و به کمک حلی تحلیلی برپایه روش متغیر مختلط با کد نویسی در نرم افزار متلب انجام شد. سپس تفکیک و تحلیل داده‌ها، استخراج مدل‌های رگرسیونی و همچنین ارزیابی مدل‌ها با استفاده از کد نویسی در نرم افزار متلب صورت پذیرفت تا در نهایت رابطه‌ای صریح برای ضریب تمرکز تنش برحسب خواص مکانیکی و زاویه‌ی چرخش بریدگی ارائه گردید.

۳- نتایج و بحث

عباس‌نیا و همکاران [۱۸] در پژوهش خود نشان دادند که با انتخاب متغیرهای $\frac{E_1}{E_2}$ ، $\frac{E_1}{G_{12}}$ و V_{12} می‌توان به کمترین مقدار میانگین و انحراف معیار خطای مدل در تخمین ضریب تمرکز تنش دست یافت. ازینرو در این پژوهش نیز از متغیرهای ذکر شده به همراه متغیر زاویه چرخش β جهت دستیابی به

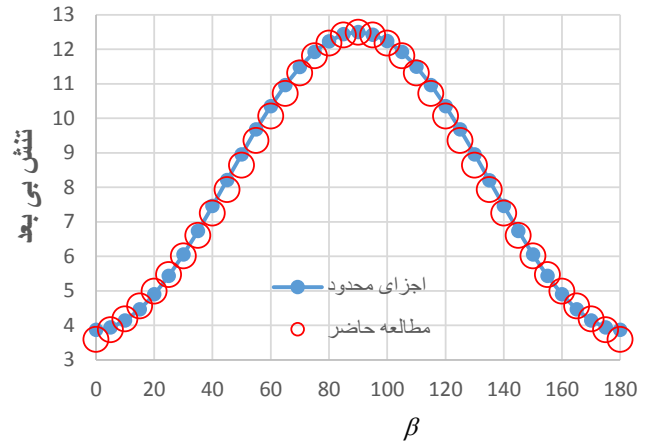
جدول ۳: نتیجه تجزیه واریانس مدل درجه دوم رگرسیون خطی چندگانه
Table 3. The result of the variance analysis of the quadratic MLR models

p-value	F-value	MS	SS	DF	
۰/۰۰	۳۴۸۱۱/۰	۱۰/۳۶	۱۴۴/۵۵	۱۴	مدل
۰/۰۰	۵۰۰۹۶/۵	۱۵/۰۳	۱۵/۰۳	۱	$x_1(\frac{E_1}{E_2})$
۰/۰۰	۵۵۰۱۶/۶	۱۶/۵۰	۱۶/۵۰	۱	$x_2(\frac{E_1}{G_{12}})$
۰/۰۵	۱۸۷/۴	۰/۰۶	۰/۰۶	۱	$x_3(V_{12})$
۰/۰۰	۱۲۰۳۹۷/۱	۳۶/۱۱	۳۶/۱۱	۱	$x_4(\sin(\beta))$
۰/۰۰	۴۴۹/۶	۰/۱۳	۰/۱۳	۱	x_1x_2
۰/۰۰	۲۰۸/۴	۰/۰۶	۰/۰۶	۱	x_1x_3
۰/۰۰	۳۷۴۶۱/۵	۱۱/۲۴	۱۱/۲۴	۱	$x_1x_2x_3$
۰/۰۰	۳/۸	۰/۰۰	۰/۰۰	۱	x_2x_3
۰/۰۰	۷۷۲/۱	۰/۲۳	۰/۲۳	۱	$x_1x_3x_4$
۰/۰۸	۱/۶	۰/۰۰	۰/۰۰	۱	$x_2x_3x_4$
۰/۰۰	۴۴۷۳/۳	۱/۳۴	۱/۳۴	۱	x_1^2
۰/۰۰	۸۳۲/۲	۰/۲۵	۰/۲۵	۱	x_2^2
۰/۰۰	۱۸۱/۸	۰/۰۵	۰/۰۵	۱	x_3^2
۰/۰۰	۲۱۱۸۴۸/۶	۶۳/۵۴	۶۳/۵۴	۱	x_4^2
		۰/۰۰	۴/۶۷	۱۵۵۶۹	خطا
		۰/۰۱	۱۴۹/۲۲		کل

یک و نزدیک به صفر است. بنابراین عملکرد مدل رگرسیون خطی چندگانه در مرحله‌ی تست نیز کاملاً قابل قبول است.

۳-۴-۳- ارزیابی پایداری و قابلیت تعمیم پذیری مدل رگرسیون
 برای نشان دادن ویژگی تعمیم پذیری مدل رگرسیون خطی چندگانه درصد مجموعه داده‌های کالیبراسیون، کاهش داده شده است. بنابراین از درصد‌های ۱۰۰ الی ۵۰ برای مجموعه داده‌های کالیبراسیون و الباقی برای مجموعه داده‌های تست استفاده شد. بدین طریق قابلیت تعمیم‌پذیری مدل در مقابل کاهش اندازه مجموعه داده‌های کالیبراسیون سنجیده شد. مقادیر میانگین و انحراف معیار خطای مدل برای ۱۰۰ مجموعه داده‌ی مختلف حاصل از روش k -fold در جدول ۴ نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، مقادیر میانگین خطاهای مدل با کاهش اندازه مجموعه داده‌های کالیبراسیون تا اندازه ۵۰ درصد نیز اختلاف زیادی با یکدیگر ندارند. با توجه به آنکه مقادیر ضریب رگرسیونی محاسبه شده وابسته به مجموعه داده‌های کالیبراسیون است، لذا از بین ۱۰۰ مجموعه بهترین مجموعه داده را که منجر به نتایج قابل قبول در هر دو مرحله کالیبراسیون و تست می‌شود؛ انتخاب شد. مقایسه‌ی این نتایج با مقادیر خطای مدل برای زمانی که همه داده‌ها برای کالیبراسیون استفاده می‌شوند، نشان می‌دهد که مدل رگرسیونی از قابلیت تعمیم پذیری خوبی برخوردار است و می‌توان به آن اطمینان کرد. همچنین به دلیل پایین بودن مقدار انحراف معیار خطاها، می‌توان بیان کرد که مدل از خاصیت پایداری پیش بینی خوبی برخوردار است.

نتایج مطالعه‌ی حاضر با حل اجزای محدود برای ماده گرافیت/اپوکسی با خصوصیات مکانیکی $E_1 = 181$ ، $E_2 = 10/3$ ، $E_3 = 7/17$ ، $G_{12} = 0/28$ و $\nu_{12} = 0/28$ در زوایای چرخش گشودگی مقایسه شده که نتایج آن در قالب جدول ۵ گزارش شده است. علاوه بر آن برای تمامی زوایای چرخش گشودگی نیز مقایسه‌ی نتایج در شکل ۴ آورده شده است. اختلاف ناچیز مطالعه‌ی حاضر با حل اجزای محدود تأکیدی بر صحت رابطه‌ی ارائه شده در مقاله موجود می‌باشد. برای گشودگی بیضوی منحنی تنش بی‌بعد-زاویه‌ی چرخش گشودگی دارای دوره‌ی تناوب ۱۸۰ درجه می‌باشد. در یک تناوب، در زوایای صفر و ۱۸۰ درجه کمترین مقدار تنش بی‌بعد که در واقع همان تنش مطلوب می‌باشد اتفاق می‌افتد و در زاویه ۹۰ درجه، بیشترین مقدار تنش



شکل ۳: ارزیابی توافق مقادیر ضریب تمرکز تنش واقعی و پیش بینی شده توسط مدل رگرسیون خطی چندگانه (a) مرحله کالیبراسیون و (b) مرحله تست

Fig. 3. Validation of the values of the realistic and predicted stress concentration coefficient by the MLR model (a) Calibration step (b) Test step

۳-۲-۲- تجزیه واریانس مدل رگرسیون
 نتیجه‌ی تجزیه واریانس مدل درجه دوم رگرسیون در جدول ۳ آورده شده است. همانطور که مقادیر p -value نشان می‌دهد (۰/۰۰)، همه عامل‌های مدل که توسط روش رگرسیون گام به گام انتخاب شده‌اند در سطح معنی داری یک درصد معنی دار شده‌اند. بنابراین بهترین شکل مدل نیز بدین طریق انتخاب شد.

۳-۳-۳- ارزیابی آماری مدل رگرسیون
 به ترتیب برای مقایسه‌ی میانگین، واریانس و توزیع آماری از آزمون‌های آماری t -test، فیشر و کولموگروف-اسمیرنو در سطح معنی داری ۵ درصد استفاده شد. نتایج نشان می‌دهد که اختلاف بسیار ناچیزی بین ویژگی‌های آماری توصیفی مقادیر واقعی و پیش بینی شده در هر دو مرحله کالیبراسیون و تست وجود دارد. همچنین مقدار p -value نشان داد که در تمام موارد بزرگتر از ۰/۰۵ است لذا می‌توان بیان کرد که هر دو مجموعه داده‌ی واقعی و پیش‌بینی شده از تمرکز تنش گشودگی بیضوی مشابه یکدیگر هستند. بنابراین ضرایب مدل رگرسیونی به خوبی محاسبه شده‌اند. همانطور که در شکل ۳ نیز دیده می‌شود، در هر دو مرحله کالیبراسیون مدل و تست، مقدار ضریب همبستگی بین دو مجموعه داده‌ی واقعی و پیش بینی شده برابر با ۰/۹۸ شد. همچنین شیب و عرض از مبدأ خط رگرسیونی ما بین دو مجموعه داده تقریباً برابر با

جدول ۴: ارزیابی قابلیت تعمیم پذیری مدل درجه دوم رگرسیون خطی چندگانه
Table 4. Evaluation of the MLR quadratic model's generalizability

کل			تست			کالیبراسیون			
EF	MAPE	RMSE	EF	MAPE	RMSE	EF	MAPE	RMSE	
۰/۹۸	۳/۶۱	۰/۲۰	-	-	-	-	-	-	۱۰۰
۰/۹۸	۳/۶۱	۰/۲۲	۰/۹۸	۳/۷۸	۰/۲۳	۰/۹۸	۳/۵۹	۰/۲۲	۹۰
۰/۹۸	۳/۶۱	۰/۲۲	۰/۹۸	۳/۶۶	۰/۲۳	۰/۹۸	۳/۶۰	۰/۲۲	۸۰
۰/۹۸	۳/۶۱	۰/۲۰	۰/۹۸	۳/۵۹	۰/۱۹	۰/۹۸	۳/۶۲	۰/۲۰	۷۰
۰/۹۸	۳/۶۱	۰/۲۰	۰/۹۸	۳/۶۱	۰/۲۰	۰/۹۸	۳/۶۱	۰/۲۰	۶۰
۰/۹۸	۳/۶۱	۰/۲۰	۰/۹۸	۳/۶۱	۰/۲۰	۰/۹۸	۳/۶۱	۰/۲۰	۵۰

جدول ۵: مقایسه‌ی مقادیر تنش محاسبه شده در مطالعه‌ی حاضر و حل اجزای محدود در زوایای چرخش مختلف برای صفحه گرافیت/اپوکسی حاوی گشودگی بیضوی

Table 5. Comparison of the calculated stress values in the present study and the solving finite element at different angles of rotation for the graphite/epoxy graphite containing elliptical cutout

درصد خطا	حل اجزای محدود	مطالعه‌ی حاضر	β
۰/۶۲	۵/۴۳۶۳	۵/۴۶۹۴	۲۵
۰/۹۸	۱۱/۹۲۷۱	۱۱/۸۱۰۹	۷۵
۰/۲۰	۱۲/۴۳۵۹	۱۲/۴۱۱۰	۸۵
۰/۱۰۸	۱۲/۵۰۱۰	۱۲/۴۹۰۱	۹۰
۰/۴۸	۱۲/۲۳۹۳	۱۲/۱۸۰۹	۱۰۰
۰/۶۴	۴/۴۳۵۰	۵/۴۶۹۶	۱۵۵

بی‌بعد یا تنش نامطلوب رخ می‌دهد.

صفحه‌ی ارتوتروپیک دارای گشودگی بیضوی ارائه گردد. ارزیابی‌های صورت گرفته دقت مدل ریاضی ارائه شده را به اثبات رساند. این رابطه، برای صفحات نامحدود تحت کشش یک طرفه به دست آمده است که رابطه‌ای صریح بین ضریب تمرکز تنش با خواص مکانیکی ماده و زاویه چرخش بریدگی را ارائه داده است. علاوه بر آن برابری مقدار ضریب همبستگی بین دو مجموعه داده‌ی واقعی و پیش بینی شده در مراحل کالیبراسیون مدل و تست (برابر با ۰/۹۸) حل پیشنهادی ارائه شده را قابل اعتماد می‌سازد.

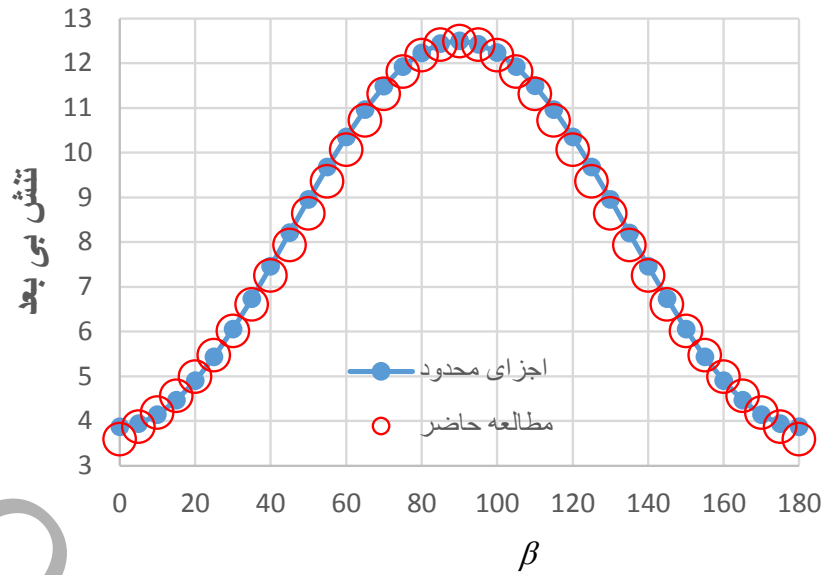
در گشودگی بیضوی در زوایای چرخش صفر و ۱۸۰ درجه تنش مطلوب رخ می‌دهد و در زاویه ۹۰ درجه نیز تنش نامطلوب. طراح برای دستیابی به طرح بهینه بایستی از تنش نامطلوب اجتناب کند. به کمک رابطه ارائه شده در این مقاله طراح می‌تواند با در نظر گرفتن محدودیت‌های طراحی تنش مطلوب در مواد ارتوتروپیک دارای گشودگی بیضوی، را محاسبه و نیاز خود را مرتفع سازد.

بنابراین نتایج نشان داد که می‌توان به مدل استخراج شده بر پایه روش رگرسیونی جهت تخمین ضریب تمرکز تنش گشودگی بیضوی بر حسب خواص مکانیکی ماده و زاویه چرخش گشودگی، اطمینان کرد (رابطه‌ی (۲۰)). در جدول ۶ ضرایب مدل نهایی جهت برآورد ضریب تمرکز تنش، ارائه شده است.

$$\ln\left(\frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_0}\right) = f(x) = \beta_0 + \sum_{i=1}^4 \beta_i x_i + \sum_{i,j=1}^4 \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^4 \beta_{ii} x_i^2 \quad (20)$$

۴- نتیجه گیری

در این پژوهش، با استفاده از یک روش حل تحلیلی بر پایه روش متغیر مختلط، توزیع تنش برای تعداد زیادی از صفحات ارتوتروپیک تحت تنش محوری، دارای گشودگی بیضوی محاسبه شد. سپس با استفاده از رگرسیون خطی چندگانه سعی شد تا رابطه‌ای صریح بین ضریب تمرکز تنش و خواص مکانیکی برای



شکل ۴: مقایسه‌ی تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی بر تمرکز تنش مطالعه‌ی حاضر و حل اجزای محدود در ماده گرافیت/اپوکسی حاوی گشودگی بیضوی

Fig. 4. Comparison of the effect of the cutout angle of rotation on the stress concentration of the present study and solving finite element in the graphite/epoxy material containing elliptical cutout

جدول ۶: ضرایب مدل نهایی رگرسیون

Table 6. Regression model final coefficients

مقدار	ضرایب	عامل
۰/۰۱۳۵۲	β_0	عرض از مبدأ
-۰/۷۰۸۸۷	β_1	$x_1 \left(\frac{E_2}{E_1} \right)$
۰/۰۱۱۱۳	β_2	$x_2 \left(\frac{E_1}{G_{12}} \right)$
۰/۱۵۱۴۰	β_3	$x_3 (v_{12})$
۰/۷۲۰۸۹	β_4	$x_4 (\sin(\beta))$
۰/۲۸۵۲۳	β_{11}	x_1^2
-۰/۰۰۰۰۵	β_{22}	x_2^2
-۰/۲۱۰۸۰	β_{33}	x_3^2
-۰/۰۱۳۲۰	β_{44}	x_4^2
۰/۰۱۵۳۵	β_{12}	$x_1 x_2$
۰/۳۱۷۱۰	β_{13}	$x_1 x_3$
۰/۱۵۹۳۴	β_{14}	$x_1 x_4$
۰/۰۰۴۴۱	β_{23}	$x_2 x_3$
-۰/۰۰۲۶۳	β_{24}	$x_2 x_4$
۰/۰۸۰۸۳	β_{34}	$x_3 x_4$

- concentration around the cutaway in composite sheets under tensile load, in: 16th International Conference of Aerospace of Iranian Associations, Iran, (2016) 3-5.
- [17] B. Moshiri Aval, M. Jafari, A study of the effect of various parameters on the stress distribution in symmetric laminates with a triangular hole, *Aerospace Mechanics Journal*, 13(1) (2017) 61-71. (in Persian)
- [18] A. Abbasnia, M. Jafari, A. Rohani, Estimation of stress concentration factor of circular hole in orthotropic plate using a new model based on regression method, *Modares Mechanical Engineering*, 18(5) (2018) 24-30. (in Persian)
- [19] I.M. Daniel, O. Ishai, I.M. Daniel, *Engineering mechanics of composite materials*, Oxford university press New York, (1994) 34-35.
- cutout bluntness on stress analysis of perforated plates subjected to uniaxial tensile load, *Journal of Solid and Fluid Mechanics*, 1(2) (2011) 27-35. (in Persian)
- [14] M. Jafari, B. Moshiri Aval, Stress analysis of symmetric composite laminates with quasi-rectangular hole subjected to in-plane loading, *Modares Mechanical Engineering*, 14(15) (2014) 395-404. (in Persian)
- [15] M. Jafari, I. Ghandi Varnosefaderani, A semi-analytical solution of stress concentration factor in the isotropic plates containing two quasi-rectangular cut outs, *Modares Mechanical Engineering*, 15(8) (2015) 341-350. (in Persian)
- [16] H. Mansouri, M. Sheibani, Analytical solution and use of optimal design parameters to reduce the stress