



تحلیل ارتعاش آزاد پنل‌های دوانحنایه ساندویچی مرکب با ضخامت متغیر

مصطفی لیوانی^{۱*} کرامت ملک‌زاده‌فرد^۲

^۱ دانشکده هوافضا، دانشگاه هوایی شهید ستاری، تهران، ایران
^۲ مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷-۰۹-۱۷
بازنگری: ۱۳۹۸-۰۲-۰۲
پذیرش: ۱۳۹۸-۰۲-۱۵
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸-۰۲-۲۰

کلمات کلیدی:

پنل‌های ساندویچی دوانحنایه
تئوری مرتبه بالا
ضخامت متغیر
ارتعاش آزاد
اصل همیلتون

خلاصه: در این پژوهش، ارتعاشات آزاد پنل‌های ساندویچی دوانحنایه با ضخامت متغیر با استفاده از تئوری مرتبه بالای جدید مطالعه می‌شود. برای اولین بار، بدلیل در نظر گرفتن شعاع‌های انحنای متفاوت برای رویه‌ها، ضخامت هسته متغیر و تابعی از مختصات درون صفحه‌ای می‌باشد. به علاوه، در مدل جدید ارائه شده در این پژوهش، شرایط پیوستگی تنش برشی عرضی، تنش نرمال عرضی و گرادینان تنش نرمال عرضی در فصل مشترک رویه‌ها با هسته، هم‌چنین شرایط صفر بودن تنش‌های برشی عرضی روی سطوح خارجی رویه‌ها ارضا می‌شود. معادلات بر مبنای تئوری مرتبه بالای پنل‌های ساندویچی ارتقا یافته استخراج گردید، به طوری که تابعی مرتبه دوم برای مؤلفه‌ی عرضی جابجایی رویه‌ها و تابعی درجه سه برای مؤلفه‌های جابجایی درون صفحه‌ای رویه‌ها و همه‌ی مؤلفه‌های جابجایی هسته در نظر گرفته شد. معادلات حاکم و شرایط مرزی بر مبنای اصل همیلتون به دست آمدند. اثرات لایه‌چینی‌های مختلف، نسبت طول به عرض پنل، تغییر خواص مواد رویه‌ها، نسبت ضخامت‌های رویه‌ها و جنس‌های مختلف مواد رویه‌ها روی ارتعاشات آزاد پنل‌های ساندویچی دوانحنایه با ضخامت متغیر بررسی شد. نتایج حاصل از تئوری حاضر با نتایج موجود در مراجع اعتبارسنجی شده است.

۱- مقدمه

امروزه استفاده از سازه‌های سبک و مقاوم که دارای نسبت سفتی به وزن و استحکام به وزن بالایی هستند، در مصارف مهندسی بسیار رایج و متداول شده است. از جمله کاربردهای این نوع سازه‌ها می‌توان به بدنه اجسام پرنده مانند هواپیماها، موشک‌ها و فضاپیماها، بدنه کشتی‌ها، قطارها و خودروها، سقف‌ها، دیواره‌ها، تیرهای ساختمانی، ستون‌ها و پل‌ها و مصارف عمده دیگر نام برد. از جدیدترین و رایج‌ترین سازه‌های مستحکم و سبک مهندسی، تیرها و ورق‌های ساندویچی می‌باشند [۱]. یک سازه ساندویچی اعم از تیر یا ورق، متشکل از دو رویه‌ی نازک و مستحکم است که یک هسته‌ی نرم، انعطاف‌پذیر و نسبتاً ضخیم را در بر گرفته‌اند. کاربرد اصلی پنل‌های ساندویچی، سطوح بال و دم هواپیما، بالک و بدنه موشک می‌باشد که می‌توان این سطوح را در حالت کلی با یک پنل دوانحنایه مدل کرد. از طرفی، پنل ساندویچی دوانحنایه در حالت‌های خاص می‌تواند به شکل کروی، استوانه‌ای و یا ورق تخت نیز باشد. در نتیجه این مقاله می‌تواند طیف

وسعی از سازه‌های مورد استفاده در صنایع هوایی را تحت پوشش خود قرار دهد.

با توجه به این موضوع که در این مقاله هدف این است که نتایج حاصله برای طیف وسیعی از هندسه سازه‌ها کاربرد داشته باشد، در ابتدا کارهای جدید انجام شده بر روی پنل‌های ساندویچی و انحنادار مورد بررسی قرار می‌گیرد.

ژن و وانجی^۱ [۲] با به کارگیری تئوری تک لایه معادل مرتبه بالا به مطالعه خمش صفحات ساندویچی کامپوزیتی تحت نیروهای حرارتی و مکانیکی پرداخت. آن‌ها در استخراج معادلات، شرایط پیوستگی تنش‌های برشی عرضی در فصل مشترک هسته با رویه‌ها و شرایط صفر بودن تنش‌های برشی عرضی روی سطوح خارجی را ارضا کردند. بیگلری و جعفری [۳] به بررسی ارتعاشات آزاد صفحات ساندویچی دوانحنایه با هسته‌ی انعطاف‌پذیر بر اساس تئوری اصلاح شده لایه مجزا پرداختند. آن‌ها از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول، تنش عرضی خطی و تنش برشی یکنواخت در راستای ضخامت هسته

1 Wanji&Zhen

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: m.livani@ssau.ac.ir



رویه‌ها صرف‌نظر کردند. یاسین و کاپوریا^۸ [۱۱] با استفاده از المان چهارگوشه‌ای چهارگره‌ای و تئوری زیگ‌زاگ، به تحلیل استاتیکی و ارتعاش آزاد ورق‌های دوانحنایه نازک ساندویچی مرکب پرداختند. در تئوری آنها، از تنش‌های نرمال عرضی صرف‌نظر شده است. قوانول و فلاح‌زاده [۱۲] تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های دوانحنایه نازک ارتوتروپیک با شرایط مرزی ساده را مورد مطالعه قرار دادند. معادلات آنها بر اساس تئوری خطی ورق‌های نازک نوویلف^۹ به دست آمده‌اند. ماتوری^{۱۰} و همکاران [۱۳] در سال ۲۰۱۴، تحلیل استاتیکی و ارتعاش آزاد صفحات ساندویچی تخت را با ارائه تئوری لایه مجزا انجام دادند. وانگ و شی^{۱۱} [۱۴] تحلیل استاتیکی پنل‌های ساندویچی کامپوزیتی را انجام دادند. تئوری ارائه شده توسط آنها از چندجمله‌ای درجه سه برای کرنش‌های برشی عرضی و تابعی خطی برای کرنش‌های محوری عرضی استفاده می‌کرد. تئوری آنها همچنین شرایط پیوستگی جابجایی‌ها و تنش‌های نرمال عرضی در فصل مشترک رویه‌ها با هسته را ارضا می‌کرد. تورنابن^{۱۲} و همکاران [۱۵] تحلیل استاتیکی پنل‌های دوانحنایه مرکب را با استفاده از تئوری تک لایه معادل مرتبه بالای دوبعدی انجام دادند. لیوانی و همکاران [۱۶] تحلیل فلاتر پنل‌های ساندویچی دوانحنایه با ضخامت متغیر تحت بارگذاری آیرودرومکانیکی مطالعه کردند. در مدل ارائه شده توسط آنها، شرایط پیوستگی تنش برشی عرضی، تنش نرمال عرضی و گرادیان تنش نرمال عرضی در فصل مشترک رویه‌ها با هسته، همچنین شرایط صفر بودن تنش‌های برشی عرضی روی سطوح خارجی رویه‌ها ارضا شد. شوشتری و منتشلو [۱۷] ارتعاشات آزاد غیرخطی ورق مستطیل شکل مدرج تابعی با خواص مگنتو-الکترو-الاستیک با شرایط مرزی ساده بر اساس تئوری برشی مرتبه سوم مورد مطالعه قرار دادند.

در این مقاله تحلیل ارتعاشات آزاد پنل‌های ساندویچی دوانحنایه با ضخامت متغیر با استفاده از تئوری بهبودیافته مرتبه بالای پنل‌های ساندویچی انجام می‌شود. معادلات حاکم بر مبنای اصل همیلتون استخراج می‌گردند. با توجه پیشینه تحقیقی، در این مقاله ارتعاش آزاد مدل ارائه شده توسط لیوانی و همکاران [۱۶] مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

در استخراج معادلات حاکم استفاده کردند. گیونتا^۱ و همکاران [۴] به بررسی رفتار پوسته‌های دوانحنایه چندلایه با استفاده از تئوری‌های مختلف کلاسیک، زیگ‌زاگ، مرتبه بالا و چندلایه پرداختند. پوسته‌ها تحت بارگذاری گسترده و متمرکز قرار داشته‌اند. اکتیم و سوآرز^۲ [۵] روشی تحلیلی برای تحلیل خمش صفحات دوانحنایه مرکب چندلایه مستطیل شکل با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالا ارائه دادند و اثر شرایط مرزی، انحنا، چندلایه بودن، جنس مواد، ضخامت و بارهای مختلف را بررسی کردند. گاتو^۳ [۶] با استفاده از تئوری کیرشهف، اثر قیود صفحه‌ای مختلف روی لبه‌های پوسته دوانحنایه همسانگرد نازک مستطیل شکل را بر فرکانس طبیعی بررسی کرده است. علی‌جانی و همکاران [۷] ارتعاشات غیرخطی اجباری پوسته‌های دوانحنایه مدرج تابعی^۴ را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از تئوری غیرخطی دونل برای پوسته نازک استفاده کردند و اثر نسبت حجمی و نرم یا سفت شدن پوسته بر فرکانس تحریک را هم در نزدیکی فرکانس اصلی و هم در نزدیکی دو برابر فرکانس اصلی مورد بحث و بررسی قرار دادند. ملک‌زاده‌فرد و همکاران [۸] تحلیل کماتش پنل‌های ساندویچی با هسته دارای انعطاف‌پذیری عرضی که دارای جرم متصله است را با استفاده از نرم‌افزارهای المان محدود تحلیل نمودند. آن‌ها از یک مدل المان محدود سه‌بعدی برای مطالعه اثر جرم متصله روی کماتش بهره بردند و از المان‌های ورق برای رویه‌ها و المان‌های سه‌بعدی برای هسته استفاده کردند. ویولا^۵ و همکاران [۹] به تحلیل دینامیکی صفحات دوانحنایه مرکب چندلایه ضخیم با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالای دوبعدی پرداختند. آن‌ها مقایسه‌ای میان تئوری‌های مختلف شامل تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول و تئوری‌های تغییرشکل برشی مرتبه بالاتر انجام داده‌اند. هی^۶ و همکاران [۱۰] تحلیل خمش پنل‌های ساندویچی برای هندسه‌های مختلف هسته شامل هسته راه‌راه^۷، لانه‌زنبوری و X شکل انجام دادند. آن‌ها از تئوری‌های کلاسیک و تغییرشکل برشی مرتبه اول برای رویه‌ها و هسته بهره بردند و از کرنش‌های برشی عرضی در

- 1 Giunta
- 2 Oktem & Soares
- 3 Qatu
- 4 Functionally Graded
- 5 Viola
- 6 He
- 7 Corrugated

- 8 Yasin & Kapuria
- 9 Novozhilov
- 10 Maturi
- 11 Wang & Shi
- 12 Tornabene

با توجه به هندسه مورد بررسی، رابطه‌ی مربوط به ضخامت هسته که شامل قسمت ثابت h_c که ضخامت مرکز هسته است و قسمت متغیر ناشی از متفاوت بودن شعاع‌های انحنا‌ی رویه‌های بالایی و پایینی است، از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است:

$$h_c(x, y) = \frac{h_c^0}{2} + \frac{1}{2} \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{R_{xb}} - \frac{1}{R_{xt}} \right) + \frac{1}{2} \left(y - \frac{b}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{R_{yb}} - \frac{1}{R_{yt}} \right). \quad (3)$$

۲-۲- میدان جابجایی رویه‌ها و هسته

تعامل اثرات هسته با رویه‌ها و رفتار انعطاف‌پذیر هسته میانی، باعث پیچیدگی مطالعه رفتار دینامیکی سازه‌های ساندویچی می‌گردد. لذا با توجه به این که تئوری‌های متداول قادر به پیش‌بینی اثرات تغییر شکل‌های دقیق در راستای ضخامت‌های رویه‌ها و هسته نمی‌باشند، ارائه مدل تحلیلی مرتبه بالا که قادر به لحاظ کردن اثرات انعطاف‌پذیری هسته باشد، ضروری است. به همین منظور در این مطالعه مدل مرتبه بالای پنل‌های ساندویچی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این تئوری بر خلاف تئوری‌های متداول، هیچ محدودیتی بر میدان جابجایی هسته و رویه‌ها اعمال نمی‌گردد و اثرات مرتبه بالا پس از حل مسأله ظاهر می‌گردند. در این تئوری برای رویه‌ها از تئوری مرتبه سوم که در مدل دوم فروستینگ برای هسته استفاده شده، بکار گرفته می‌شود [۱۸]. جابجایی‌های u ، v و w رویه‌ها در راستای محورهای x ، y و z به صورت روابط زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} u_i(x, y, z_i, t) &= u_{0i}(x, y, t) + u_{1i}(x, y, t)z_i + \\ &u_{2i}(x, y, t)z_i^2 + u_{3i}(x, y, t)z_i^3, \\ v_i(x, y, z_i, t) &= v_{0i}(x, y, t) + v_{1i}(x, y, t)z_i + \\ &v_{2i}(x, y, t)z_i^2 + v_{3i}(x, y, t)z_i^3, \\ w_i(x, y, z_i, t) &= w_{0i}(x, y, t) + w_{1i}(x, y, t)z_i + \\ &w_{2i}(x, y, t)z_i^2 \quad ; \quad (i=t, b) \end{aligned} \quad (4)$$

جایی که اندیس‌های t و b به ترتیب نشان‌دهنده‌ی رویه بالایی و رویه پایینی است. همچنین $u_{.i}$ ، u_{vi} ، u_{ti} و $u_{\tau i}$ ($i=t, b$) مجهولات جابجایی درون صفحه‌ای صفحه میانی رویه‌ها در جهت محور x ، $v_{.i}$ ، v_{vi} ، v_{ti} و $v_{\tau i}$ ($i=t, b$) مجهولات جابجایی درون صفحه‌ای صفحه میانی رویه‌ها در راستای محور y ، و $w_{.i}$ ،

در این پژوهش، برای هسته از همان تئوری مرتبه سوم که در مدل دوم فروستینگ برای هسته استفاده شده، به کار گرفته می‌شود، با این تفاوت که در مدل دوم فروستینگ، جابجایی عرضی w هسته، تابعی درجه دو از مختصه عرضی z است، اما در تئوری حاضر از مدل درجه سه استفاده شده است. با این تغییر می‌توان رفتار هسته انعطاف‌پذیر با ضخامت متغیر را با دقت بالاتری پیش‌بینی کرد:

$$\begin{aligned} u_c(x, y, z_c, t) &= u_{0c}(x, y, t) + u_{1c}(x, y, t)z_c + \\ &u_{2c}(x, y, t)z_c^2 + u_{3c}(x, y, t)z_c^3, \\ v_c(x, y, z_c, t) &= v_{0c}(x, y, t) + v_{1c}(x, y, t)z_c + \\ &v_{2c}(x, y, t)z_c^2 + v_{3c}(x, y, t)z_c^3, \\ w_c(x, y, z_c, t) &= w_{0c}(x, y, t) + w_{1c}(x, y, t)z_c + \\ &w_{2c}(x, y, t)z_c^2 + w_{3c}(x, y, t)z_c^3. \end{aligned} \quad (5)$$

جایی که اندیس c نشان‌دهنده‌ی هسته است. همچنین u_{jc} و v_{jc} بترتیب مجهولات جابجایی صفحه‌ای صفحه میانی هسته در راستای محورهای x و y ، و w_{jc} مجهولات جابجایی عرضی صفحه میانی هسته در راستای محور z می‌باشند ($j=0, 1, 2, 3$).

۲-۳- روابط کرنش-جابجایی

روابط سینماتیک رویه‌ها برای پنل ساندویچی دوانحنایه با ملاحظات مربوط به پنل دوانحنایه و با فرض اینکه $1 \approx (1 + z/R_{xi})$ و $1 \approx (1 + z/R_{yi})$ بخاطر نازک بودن رویه‌ها به صورت زیر می‌باشد [۱۹]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xxi} &= \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{w_i}{R_{xi}}, \quad \varepsilon_{yyi} = \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{w_i}{R_{yi}}, \\ \varepsilon_{zzi} &= \frac{\partial w_i}{\partial z_i}, \quad \gamma_{xyi} = 2\varepsilon_{xyi} = \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x}, \\ \gamma_{xzi} &= 2\varepsilon_{xzi} = \frac{\partial u_i}{\partial z_i} + \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} - \frac{u_i}{R_{xi}} \right), \\ \gamma_{yzi} &= 2\varepsilon_{yzi} = \frac{\partial v_i}{\partial z_i} + \left(\frac{\partial w_i}{\partial y} - \frac{v_i}{R_{yi}} \right); \quad i=t, b. \end{aligned} \quad (6)$$

جایی که ε_{xxi} ، ε_{yyi} و ε_{zzi} ($i=t, b$) بترتیب کرنش‌های محوری رویه‌ها در راستای محورهای x ، y و z ، γ_{xyi} ($i=t, b$)

$$\gamma_{xzc} = 2\varepsilon_{xzc} = \frac{\partial u_c}{\partial z} + \frac{1}{(1+z_c/R_{xc})} \left(\frac{\partial w_c}{\partial x} - \frac{u_c}{R_{xc}} \right),$$

$$\gamma_{yzc} = 2\varepsilon_{yzc} = \frac{\partial v_c}{\partial z} + \frac{1}{(1+z_c/R_{yc})} \left(\frac{\partial w_c}{\partial y} - \frac{v_c}{R_{yc}} \right).$$

جایی که ε_{xxc} ، ε_{yyc} و ε_{zzc} بترتیب کرنش‌های محوری هسته در راستای محورهای X، Y و Z، کرنش برشی درون صفحه‌ای هسته، γ_{xzc} و γ_{yzc} کرنش‌های برشی عرضی هسته می‌باشند. با قراردادی رابطه‌ی (۵) در رابطه‌ی (۹)، روابط کرنش-جابجایی هسته به صورت زیر در می‌آیند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xxc} &= \frac{1}{(1+z_c/R_{xc})} (\varepsilon_{xxc}^0 + z_c \varepsilon_{xxc}^I + z_c^2 \varepsilon_{xxc}^{II} + z_c^3 \varepsilon_{xxc}^{III}), \\ \varepsilon_{yyc} &= \frac{1}{(1+z_c/R_{yc})} (\varepsilon_{yyc}^0 + z_c \varepsilon_{yyc}^I + z_c^2 \varepsilon_{yyc}^{II} + z_c^3 \varepsilon_{yyc}^{III}), \\ \varepsilon_{zzc} &= \varepsilon_{zzc}^0 + z_c \varepsilon_{zzc}^I + z_c^2 \varepsilon_{zzc}^{II}, \\ \gamma_{xyc} &= \frac{1}{(1+z_c/R_{yc})} (u_{0c,y} + u_{1c,y} z_c + u_{2c,y} z_c^2 + u_{3c,y} z_c^3) + \\ &\frac{1}{(1+z_c/R_{xc})} (v_{0c,x} + v_{1c,x} z_c + v_{2c,x} z_c^2 + v_{3c,x} z_c^3), \quad (10) \\ \gamma_{xzc} &= 2\varepsilon_{xzc} = u_{1c} + 2u_{2c} z_c + 3u_{3c} z_c^2 + \\ &\frac{1}{(1+z_c/R_{xc})} (\gamma_{xzc}^0 + z_c \gamma_{xzc}^I + z_c^2 \gamma_{xzc}^{II} + z_c^3 \gamma_{xzc}^{III}), \\ \gamma_{yzc} &= 2\varepsilon_{yzc} = v_{1c} + 2v_{2c} z_c + 3v_{3c} z_c^2 + \\ &\frac{1}{(1+z_c/R_{yc})} (\gamma_{yzc}^0 + z_c \gamma_{yzc}^I + z_c^2 \gamma_{yzc}^{II} + z_c^3 \gamma_{yzc}^{III}). \end{aligned}$$

جایی که:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xxc}^0 &= u_{0c,x} + \frac{w_{0c}}{R_{xc}}, \varepsilon_{xxc}^I = u_{1c,x} + \frac{w_{1c}}{R_{xc}}, \\ \varepsilon_{xxc}^{II} &= u_{2c,x} + \frac{w_{2c}}{R_{xc}}, \varepsilon_{xxc}^{III} = u_{3c,x} + \frac{w_{3c}}{R_{xc}}, \\ \varepsilon_{yyc}^0 &= v_{0c,y} + \frac{w_{0c}}{R_{yc}}, \varepsilon_{yyc}^I = v_{1c,y} + \frac{w_{1c}}{R_{yc}}, \\ \varepsilon_{yyc}^{II} &= v_{2c,y} + \frac{w_{2c}}{R_{yc}}, \varepsilon_{yyc}^{III} = v_{3c,y} + \frac{w_{3c}}{R_{yc}}, \\ \varepsilon_{zzc}^0 &= w_{1c}, \varepsilon_{zzc}^I = 2w_{2c}, \varepsilon_{zzc}^{II} = 3w_{3c}, \\ \gamma_{xzc}^0 &= w_{0c,x} - \frac{u_{0c}}{R_{xc}}, \gamma_{xzc}^I = w_{1c,x} - \frac{u_{1c}}{R_{xc}}, \end{aligned} \quad (11)$$

(۴) در رابطه‌ی (۶) داریم:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xxi} &= \varepsilon_{xxi}^0 + z_i \varepsilon_{xxi}^I + z_i^2 \varepsilon_{xxi}^{II} + z_i^3 \varepsilon_{xxi}^{III}, \varepsilon_{yyi} = \\ \varepsilon_{yyi}^0 &+ z_i \varepsilon_{yyi}^I + z_i^2 \varepsilon_{yyi}^{II} + z_i^3 \varepsilon_{yyi}^{III}, \varepsilon_{zzi} = \varepsilon_{zzi}^0 + z_i \varepsilon_{zzi}^I, \\ \gamma_{xyi} &= 2\varepsilon_{xyi} = \gamma_{xyi}^0 + z_i \gamma_{xyi}^I + z_i^2 \gamma_{xyi}^{II} + z_i^3 \gamma_{xyi}^{III}, \gamma_{xzi} = \\ 2\varepsilon_{xzi} &= \gamma_{xzi}^0 + z_i \gamma_{xzi}^I + z_i^2 \gamma_{xzi}^{II} + z_i^3 \gamma_{xzi}^{III}, \\ \gamma_{yzi} &= 2\varepsilon_{yzi} = \gamma_{yzi}^0 + z_i \gamma_{yzi}^I + z_i^2 \gamma_{yzi}^{II} + z_i^3 \gamma_{yzi}^{III}. \end{aligned} \quad (7)$$

جایی که:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xxi}^0 &= u_{0i,x} + \frac{w_{0i}}{R_{xi}}, \varepsilon_{xxi}^I = u_{1i,x} + \frac{w_{1i}}{R_{xi}}, \varepsilon_{xxi}^{II} = u_{2i,x} + \frac{w_{2i}}{R_{xi}}, \varepsilon_{xxi}^{III} = u_{3i,x}, \\ \varepsilon_{yyi}^0 &= v_{0i,y} + \frac{w_{0i}}{R_{yi}}, \varepsilon_{yyi}^I = v_{1i,y} + \frac{w_{1i}}{R_{yi}}, \varepsilon_{yyi}^{II} = \\ v_{2i,y} &+ \frac{w_{2i}}{R_{yi}}, \varepsilon_{yyi}^{III} = v_{3i,y}, \varepsilon_{zzi}^0 = w_{1i}, \varepsilon_{zzi}^I = 2w_{2i}, \\ \gamma_{xyi}^0 &= u_{0i,y} + v_{0i,x}, \gamma_{xyi}^I = u_{1i,y} + v_{1i,x}, \gamma_{xyi}^{II} = \\ u_{2i,y} &+ v_{2i,x}, \gamma_{xyi}^{III} = u_{3i,y} + v_{3i,x}, \\ \gamma_{xzi}^0 &= u_{1i} + w_{0i,x} - \frac{u_{0i}}{R_{xi}}, \gamma_{xzi}^I = \\ 2u_{2i} &+ w_{1i,x} - \frac{u_{1i}}{R_{xi}}, \gamma_{xzi}^{II} = 3u_{3i} + w_{2i,x} - \frac{u_{2i}}{R_{xi}}, \quad (8) \\ \gamma_{xzi}^{III} &= -\frac{u_{3i}}{R_{xi}}, \gamma_{yzi}^0 = v_{1i} + w_{0i,y} - \frac{v_{0i}}{R_{yi}}, \gamma_{yzi}^I = \\ 2v_{2i} &+ w_{1i,y} - \frac{v_{1i}}{R_{yi}}, \gamma_{yzi}^{II} = 3v_{3i} + w_{2i,y} - \frac{v_{2i}}{R_{yi}}, \\ \gamma_{yzi}^{III} &= -\frac{v_{3i}}{R_{yi}}. \end{aligned}$$

روابط سینماتیک هسته برای پنل ساندویچی دوانحنایه با ملاحظات مربوط به پنل دوانحنایه، به صورت زیر می‌باشد [۲۰]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xxc} &= \frac{1}{(1+z_c/R_{xc})} \left[\frac{\partial u_c}{\partial x} + \frac{w_c}{R_{xc}} \right], \varepsilon_{yyc} = \\ \frac{1}{(1+z_c/R_{yc})} &\left[\frac{\partial v_c}{\partial y} + \frac{w_c}{R_{yc}} \right], \varepsilon_{zzc} = \frac{\partial w_c}{\partial z}, \\ \gamma_{xyc} &= 2\varepsilon_{xyc} = \frac{1}{(1+z_c/R_{yc})} \frac{\partial u_c}{\partial y} + \frac{1}{(1+z_c/R_{xc})} \frac{\partial v_c}{\partial x}, \end{aligned} \quad (9)$$

Q_{mn} ($m, n = 3, 5, 6$) ثوابت سفتی عرضی می‌باشند.

۲-۵- شرایط سازگاری جابجایی‌ها و تنش‌ها

در این مقاله، شرایط پیوستگی جابجایی‌ها، تنش برشی عرضی، تنش نرمال عرضی و گرادیان آن در فصل مشترک رویه‌ها با هسته، همچنین شرایط صفر بودن تنش‌های برشی عرضی روی سطوح خارجی رویه‌ها ارضا می‌شود.

در این مقاله رویه‌ها به صورت ایده‌آل به هسته چسبیده‌اند. به عبارت دیگر، شرایط پیوستگی جابجایی‌ها در فصل مشترک هسته و رویه‌ها برقرار است و به صورت رابطه‌ی زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} u_t(z_t = z_t^l(x, y)) &= u_c(z_c = z_c^u(x, y)), \\ u_b(z_b = z_b^u(x, y)) &= u_c(z_c = z_c^l(x, y)), \\ v_t(z_t = z_t^l(x, y)) &= v_c(z_c = z_c^u(x, y)), \\ v_b(z_b = z_b^u(x, y)) &= v_c(z_c = z_c^l(x, y)), \\ w_t(z_t = z_t^l(x, y)) &= w_c(z_c = z_c^u(x, y)), \\ w_b(z_b = z_b^u(x, y)) &= w_c(z_c = z_c^l(x, y)). \end{aligned} \quad (14)$$

تنش‌های برشی عرضی در سطح بالایی رویه بالایی و سطح پایینی رویه پایینی باید صفر باشد:

$$\begin{aligned} \tau_{xz_t}(z_t = z_t^u(x, y)) &= 0, \tau_{yz_t}(z_t = z_t^u(x, y)) = 0, \\ \tau_{xz_b}(z_b = z_b^l(x, y)) &= 0, \tau_{yz_b}(z_b = z_b^l(x, y)) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

اولین شرط پیوستگی تنش‌ها، برابر بودن تنش برشی عرضی در سطح پایینی رویه بالایی با سطح بالایی هسته و همچنین برابر بودن تنش برشی عرضی در سطح بالایی رویه پایینی با سطح پایینی هسته است:

$$\begin{aligned} \tau_{xz_t}(z_t = z_t^l(x, y)) &= \tau_{xz_c}(z_c = z_c^u(x, y)), \\ \tau_{yz_t}(z_t = z_t^l(x, y)) &= \tau_{yz_c}(z_c = z_c^u(x, y)), \\ \tau_{xz_b}(z_b = z_b^u(x, y)) &= \tau_{xz_c}(z_c = z_c^l(x, y)), \\ \tau_{yz_b}(z_b = z_b^u(x, y)) &= \tau_{yz_c}(z_c = z_c^l(x, y)). \end{aligned} \quad (16)$$

دومین شرط پیوستگی تنش‌ها، برابر بودن تنش نرمال عرضی در سطح پایینی رویه بالایی با سطح بالایی هسته و همچنین برابر بودن تنش نرمال عرضی در سطح بالایی رویه پایینی با سطح پایینی هسته است:

$$\gamma_{xz_c}^{II} = w_{2c,x} - \frac{u_{2c}}{R_{xc}}, \gamma_{xz_c}^{III} = w_{3c,x} - \frac{u_{3c}}{R_{xc}},$$

$$\gamma_{yz_c}^0 = w_{0c,y} - \frac{v_{0c}}{R_{yc}}, \gamma_{yz_c}^I = w_{1c,y} - \frac{v_{1c}}{R_{yc}},$$

$$\gamma_{yz_c}^{II} = w_{2c,y} - \frac{v_{2c}}{R_{yc}}, \gamma_{yz_c}^{III} = w_{3c,y} - \frac{v_{3c}}{R_{yc}}.$$

۲-۴- روابط تنش-کرنش

در این مقاله فرض بر این است که هر کدام از رویه‌ها از پنل مرکب چندلایه با ضخامت یکنواخت ساخته شده‌اند. روابط تنش-کرنش کاهش‌یافته برای لایه k ام به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۹]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{14} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{24} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & \bar{Q}_{34} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{14} & \bar{Q}_{24} & \bar{Q}_{34} & \bar{Q}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} & \bar{Q}_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{56} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)}. \quad (12)$$

جایی که σ_{xx} ، σ_{yy} و σ_{zz} تنش‌های محوری در راستای محورهای مختصات اصلی (x, y, z) ، τ_{xy} تنش برشی درون صفحه‌ای، τ_{xz} و τ_{yz} تنش‌های برشی عرضی، ε_{xx} ، ε_{yy} و ε_{zz} کرنش‌های محوری در راستای محورهای مختصات اصلی (x, y, z) ، γ_{xy} کرنش برشی درون صفحه‌ای، و γ_{yz} و γ_{xz} کرنش‌های برشی عرضی می‌باشند. همچنین در رابطه‌ی (۱۲)، \bar{Q}_{mn} ($m, n = 1, 2, 4$) ثوابت سفتی کاهش‌یافته درون صفحه‌ای و \bar{Q}_{mn} ($m, n = 3, 5, 6$) ثوابت سفتی کاهش‌یافته عرضی لایه k ام می‌باشند.

در این مقاله فرض بر این است که هسته از ماده ارتوتروپیک ساخته شده باشد. روابط تنش-کرنش برای یک ماده ارتوتروپیک به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۹]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xxc} \\ \sigma_{yyc} \\ \sigma_{zzc} \\ \tau_{xyc} \\ \tau_{xzc} \\ \tau_{yzc} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xxc} \\ \varepsilon_{yyc} \\ \varepsilon_{zzc} \\ \gamma_{xyc} \\ \gamma_{xzc} \\ \gamma_{yzc} \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

جایی که Q_{mn} ($m, n = 1, 2, 4$) ثوابت سفتی درون صفحه‌ای و

$$\begin{cases} N_{yyc} \\ M_{yyc} \\ O_{yyc} \\ H_{yyc} \end{cases} = \int_{z_c^l}^{z_c^u} \sigma_{yyc} \left(1 + \frac{z_c}{R_{xc}} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ z_c \\ z_c^2 \\ z_c^3 \end{Bmatrix} dz_c,$$

$$\begin{cases} N_{zzc} \\ M_{zzc} \\ O_{zzc} \end{cases} = \int_{z_c^l}^{z_c^u} \sigma_{zzc} \begin{Bmatrix} 1 \\ z_c \\ z_c^2 \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z_c}{R_{xc}} \right) \left(1 + \frac{z_c}{R_{yc}} \right) dz_c,$$

$$\begin{cases} N_{xyc} \\ M_{xyc} \\ O_{xyc} \\ H_{xyc} \end{cases} = \int_{z_c^l}^{z_c^u} \tau_{xyc} \left(1 + \frac{z_c}{R_{xc}} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ z_c \\ z_c^2 \\ z_c^3 \end{Bmatrix} dz_c,$$

$$\begin{cases} N_{yxc} \\ M_{yxc} \\ O_{yxc} \\ H_{yxc} \end{cases} = \int_{z_c^l}^{z_c^u} \tau_{yxc} \left(1 + \frac{z_c}{R_{yc}} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ z_c \\ z_c^2 \\ z_c^3 \end{Bmatrix} dz_c,$$

$$\begin{cases} N_{xyc}^* \\ M_{xyc}^* \\ O_{xyc}^* \\ H_{xyc}^* \end{cases} = \int_{z_c^l}^{z_c^u} \tau_{xyc} \begin{Bmatrix} 1 \\ z_c \\ z_c^2 \\ z_c^3 \end{Bmatrix} dz_c,$$

$$\begin{cases} Q_{xzc} \\ S_{xzc} \\ T_{xzc} \end{cases} = \int_{z_c^l}^{z_c^u} \tau_{xzc} \left(1 + \frac{z_c}{R_{xc}} \right) \left(1 + \frac{z_c}{R_{yc}} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ z_c \\ z_c^2 \end{Bmatrix} dz_c,$$

$$\begin{cases} Q_{yzc} \\ S_{yzc} \\ T_{yzc} \end{cases} = \int_{z_c^l}^{z_c^u} \tau_{yzc} \left(1 + \frac{z_c}{R_{xc}} \right) \left(1 + \frac{z_c}{R_{yc}} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ z_c \\ z_c^2 \end{Bmatrix} dz_c,$$

$$\begin{cases} Q_{xzc}^* \\ S_{xzc}^* \\ T_{xzc}^* \\ V_{xzc}^* \end{cases} = \int_{z_c^l}^{z_c^u} \tau_{xzc} \left(1 + \frac{z_c}{R_{yc}} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ z_c \\ z_c^2 \\ z_c^3 \end{Bmatrix} dz_c,$$

$$\begin{cases} Q_{yzc}^* \\ S_{yzc}^* \\ T_{yzc}^* \\ V_{yzc}^* \end{cases} = \int_{z_c^l}^{z_c^u} \tau_{yzc} \left(1 + \frac{z_c}{R_{xc}} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ z_c \\ z_c^2 \\ z_c^3 \end{Bmatrix} dz_c.$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zzt}(z_t = z_t^l(x, y)) &= \sigma_{zzc}(z_c = z_c^u(x, y)), \\ \sigma_{zzb}(z_b = z_b^u(x, y)) &= \sigma_{zzc}(z_c = z_c^l(x, y)). \end{aligned} \quad (17)$$

سومین شرط پیوستگی تنش‌ها، برابر بودن گرادیان تنش نرمال عرضی در سطح پایینی رویه بالایی با سطح بالایی هسته و همچنین برابر بودن گرادیان تنش نرمال عرضی در سطح بالایی رویه پایینی با سطح پایینی هسته است:

$$\begin{aligned} \sigma_{zzt,z}(z_t = z_t^l(x, y)) &= \sigma_{zzc,z}(z_c = z_c^u(x, y)), \\ \sigma_{zzb,z}(z_b = z_b^u(x, y)) &= \sigma_{zzc,z}(z_c = z_c^l(x, y)) \end{aligned} \quad (18)$$

۶-۲- منته‌های تنش

منتجه‌های تنش بر واحد طول برای رویه‌های بالایی و پایینی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} N_{xxi} \\ M_{xxi} \\ O_{xxi} \\ H_{xxi} \end{cases} = \int_{z_i^l}^{z_i^u} \sigma_{xxi} \begin{Bmatrix} 1 \\ z_i \\ z_i^2 \\ z_i^3 \end{Bmatrix} dz_i, \quad \begin{cases} N_{yyi} \\ M_{yyi} \\ O_{yyi} \\ H_{yyi} \end{cases} =$$

$$\int_{z_i^l}^{z_i^u} \sigma_{yyi} \begin{Bmatrix} 1 \\ z_i \\ z_i^2 \\ z_i^3 \end{Bmatrix} dz_i, \quad \begin{cases} N_{zzi} \\ M_{zzi} \end{cases} = \int_{z_i^l}^{z_i^u} \sigma_{zzi} \begin{Bmatrix} 1 \\ z_i \end{Bmatrix} dz_i, \quad (19)$$

$$\begin{cases} N_{xyi} \\ M_{xyi} \\ O_{xyi} \\ H_{xyi} \end{cases} = \int_{z_i^l}^{z_i^u} \tau_{xyi} \begin{Bmatrix} 1 \\ z_i \\ z_i^2 \\ z_i^3 \end{Bmatrix} dz_i, \quad \begin{cases} Q_{xzi} \\ S_{xzi} \\ T_{xzi} \\ V_{xzi} \end{cases} =$$

$$\int_{z_i^l}^{z_i^u} \tau_{xzi} \begin{Bmatrix} 1 \\ z_i \\ z_i^2 \\ z_i^3 \end{Bmatrix} dz_i, \quad \begin{cases} Q_{yzi} \\ S_{yzi} \\ T_{yzi} \\ V_{yzi} \end{cases} = \int_{z_i^l}^{z_i^u} \tau_{yzi} \begin{Bmatrix} 1 \\ z_i \\ z_i^2 \\ z_i^3 \end{Bmatrix} dz_i; \quad (i=t, b)$$

هم‌چنین، منته‌های تنش بر واحد طول برای هسته عبارتند از:

$$\begin{cases} N_{xxc} \\ M_{xxc} \\ O_{xxc} \\ H_{xxc} \end{cases} = \int_{z_c^l}^{z_c^u} \sigma_{xxc} \left(1 + \frac{z_c}{R_{yc}} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ z_c \\ z_c^2 \\ z_c^3 \end{Bmatrix} dz_c,$$

۲-۷- معادلات حاکم

برای استخراج معادلات حاکم و شرایط مرزی از روش انرژی و اصل همیلتون استفاده می‌شود، بر اساس این اصل:

$$\int_0^t \delta L dt \equiv \int_0^t [\delta K - \delta U] dt = 0. \quad (21)$$

که در آن δK تغییرات انرژی جنبشی و δU تغییرات انرژی کرنشی می‌باشد. همچنین δ اپراتور تغییرات مرتبه اول است. رابطه‌ی مربوط به تغییرات انرژی جنبشی برای پنل ساندویچی دوانحنایه به صورت زیر می‌باشد:

$$\delta K = - \sum_{i=t,b} \left[\int_{A_i} \int_{z_i^c} \rho_i (\ddot{u}_i \delta u_i + \ddot{v}_i \delta v_i + \ddot{w}_i \delta w_i) dz_i dx dy \right] - \quad (22)$$

$$\int_{A_i} \int_{z_i^c} \rho_c (\ddot{u}_c \delta u_c + \ddot{v}_c \delta v_c + \ddot{w}_c \delta w_c) \left(1 + \frac{z_c}{R_{xc}} \right) \left(1 + \frac{z_c}{R_{yc}} \right) dz_c dx dy$$

رابطه‌ی مربوط به تغییرات انرژی کرنشی برای رویه‌های بالایی و پایینی و هسته به صورت زیر می‌باشد:

$$\delta U = \sum_{i=t,b} \left[\int \int \int \left(\begin{aligned} &\sigma_{xxi} \delta \varepsilon_{xxi} + \sigma_{yyi} \delta \varepsilon_{yyi} \\ &+ \sigma_{zxi} \delta \varepsilon_{zxi} + \tau_{xyi} \delta \gamma_{xyi} \\ &+ \tau_{xzi} \delta \gamma_{xzi} + \tau_{yzi} \delta \gamma_{yzi} \end{aligned} \right) dz_i dA \right] + \quad (23)$$

$$\int \int \left(\begin{aligned} &\sigma_{xxc} \delta \varepsilon_{xxc} + \sigma_{yyc} \delta \varepsilon_{yyc} + \\ &\sigma_{zxc} \delta \varepsilon_{zxc} + \tau_{xyc} \delta \gamma_{xyc} + \\ &\tau_{xzc} \delta \gamma_{xzc} + \tau_{yzc} \delta \gamma_{yzc} \end{aligned} \right) \left(1 + \frac{z_c}{R_{xc}} \right) \left(1 + \frac{z_c}{R_{yc}} \right) dz_c dA.$$

هم‌چنین می‌توان شش شرط پیوستگی جابجایی‌ها در فصل مشترک هر یک از رویه‌ها با هسته (رابطه‌ی (۱۴))، چهار شرط صفر شدن تنش‌های برشی عرضی در سطح خارجی رویه‌ها (رابطه‌ی (۱۵)) و هشت شرط پیوستگی تنش‌های نرمال و برشی عرضی و گرادبان تنش نرمال عرضی در مرز رویه‌ها با هسته (روابط (۱۶) الی (۱۸)) را نیز در رابطه‌ی (۲۳) جای داد. برای این منظور کافی است هر یک از این معادلات را در یک ضریب لاگرانژ منحصر به فرد ضرب کرد.

حال با قراردادی روابط مربوط به تغییرات انرژی جنبشی (رابطه‌ی (۲۲)) و تغییرات انرژی کرنشی (رابطه‌ی (۲۳)) در اصل همیلتون (رابطه‌ی (۲۱))، معادلات حرکت حاکم بر پنل‌های ساندویچی دوانحنایی در سیستم مختصات کارتزین (x, y, z) به دست می‌آیند:

$$\delta u_{0t} : I_{0t} \ddot{u}_{0t} + I_{1t} \ddot{u}_{1t} + I_{2t} \ddot{u}_{2t} + I_{3t} \ddot{u}_{3t} - N_{xx t,x} - N_{xy t,y} - \frac{Q_{xz t}}{R_{xt}} + \chi'_x - \frac{\chi'_{xz}}{R_{xt}} - \frac{\bar{Q}'_{55t} \chi'_{xz}}{R_{xt}} - \frac{\bar{Q}'_{56t} \chi'_{yz}}{R_{xt}} - \bar{Q}'_{13t} \chi'_{zz,x} - \bar{Q}'_{34t} \chi'_{zz,y} = 0.$$

$$\delta u_{1t} : I_{1t} \ddot{u}_{0t} + I_{2t} \ddot{u}_{1t} + I_{3t} \ddot{u}_{2t} - M_{xx t,x} - M_{xy t,y} + Q_{xz t} - \frac{S_{xz t}}{R_{xt}} + z'_t \chi'_{xz} + \chi'_{xz} - \frac{z''_t \chi'_{xz}}{R_{xt}} + \bar{Q}'_{55t} \chi'_{xz} - \frac{z'_t \bar{Q}'_{55t} \chi'_{xz}}{R_{xt}} + \bar{Q}'_{56t} \chi'_{yz} - \frac{z'_t \bar{Q}'_{56t} \chi'_{yz}}{R_{xt}} - \bar{Q}'_{13t} (z'_t \chi'_{zz})_{,x} - \bar{Q}'_{34t} (z'_t \chi'_{zz})_{,y} - \bar{Q}'_{13t} \chi'_{zz',x} - \bar{Q}'_{34t} \chi'_{zz',y} = 0.$$

$$\delta u_{2t} : I_{2t} \ddot{u}_{0t} + I_{3t} \ddot{u}_{1t} - O_{xx t,x} - O_{xy t,y} + 2S_{xz t} - \frac{T_{xz t}}{R_{xt}} + (z'_t)^2 \chi'_{xz} + 2z''_t \chi'_{xz} - \frac{(z''_t)^2 \chi'_{xz}}{R_{xt}} + 2z'_t \bar{Q}'_{55t} \chi'_{xz} - \frac{(z'_t)^2 \bar{Q}'_{55t} \chi'_{xz}}{R_{xt}} + 2z'_t \bar{Q}'_{56t} \chi'_{yz} - \frac{(z'_t)^2 \bar{Q}'_{56t} \chi'_{yz}}{R_{xt}} - \bar{Q}'_{13t} [(z'_t)^2 \chi'_{zz}]_{,x} - \bar{Q}'_{34t} [(z'_t)^2 \chi'_{zz}]_{,y} - 2\bar{Q}'_{13t} (\chi'_{zz} z'_t)_{,x} - 2\bar{Q}'_{34t} (\chi'_{zz} z'_t)_{,y} = 0.$$

$$\delta u_{3t} : I_{3t} \ddot{u}_{0t} - H_{xx t,x} - H_{xy t,y} + 3T_{xz t} - \frac{V_{xz t}}{R_{xt}} + (z'_t)^3 \chi'_{xz} + 3(z''_t)^2 \chi'_{xz} - \frac{(z''_t)^3 \chi'_{xz}}{R_{xt}} + 3(z'_t)^2 \bar{Q}'_{55t} \chi'_{xz} - \frac{(z'_t)^3 \bar{Q}'_{55t} \chi'_{xz}}{R_{xt}} + 3(z'_t)^2 \bar{Q}'_{56t} \chi'_{yz} - \frac{(z'_t)^3 \bar{Q}'_{56t} \chi'_{yz}}{R_{xt}} - \bar{Q}'_{13t} [(z'_t)^3 \chi'_{zz}]_{,x} - \bar{Q}'_{34t} [(z'_t)^3 \chi'_{zz}]_{,y} - 3\bar{Q}'_{13t} [\chi'_{zz} (z'_t)^2]_{,x} - 3\bar{Q}'_{34t} [\chi'_{zz} (z'_t)^2]_{,y} = 0$$

$$\delta v_{0t} : I_{0t} \ddot{v}_{0t} + I_{1t} \ddot{v}_{1t} + I_{2t} \ddot{v}_{2t} + I_{3t} \ddot{v}_{3t} - N_{yy t,y} - N_{xy t,x} - \frac{Q_{yz t}}{R_{yt}} + \chi'_y - \frac{\chi'_{yz}}{R_{yt}} - \frac{\bar{Q}'_{56t} \chi'_{xz}}{R_{yt}} - \frac{\bar{Q}'_{66t} \chi'_{yz}}{R_{yt}} - \bar{Q}'_{23t} \chi'_{zz,y} - \bar{Q}'_{34t} \chi'_{zz,x} = 0.$$

$$\delta v_{1t} : I_{1t} \ddot{v}_{0t} + I_{2t} \ddot{v}_{1t} + I_{3t} \ddot{v}_{2t} - M_{yy t,y} - M_{xy t,x} + Q_{yz t} - \frac{S_{yz t}}{R_{yt}} + z'_t \chi'_{yz} + \chi'_{yz} - \frac{z''_t \chi'_{yz}}{R_{yt}} + \bar{Q}'_{56t} \chi'_{xz} - \frac{z'_t \bar{Q}'_{56t} \chi'_{xz}}{R_{yt}} + \bar{Q}'_{66t} \chi'_{yz} - \frac{z'_t \bar{Q}'_{66t} \chi'_{yz}}{R_{yt}} - \bar{Q}'_{23t} (z'_t \chi'_{zz})_{,y} - \bar{Q}'_{34t} (z'_t \chi'_{zz})_{,x} - \bar{Q}'_{23t} \chi'_{zz',y} - \bar{Q}'_{34t} \chi'_{zz',x} = 0.$$

$$\delta v_{2t} : I_{2t} \ddot{v}_{0t} + I_{3t} \ddot{v}_{1t} - O_{yyt,y} - O_{xyt,x} + 2S_{yzt} - \frac{T_{yzt}}{R_{yt}} + (z_t^l)^2 \chi_{yz}' + 2z_t^u \chi_{yz}' - \frac{(z_t^u)^2 \chi_{yz}'}{R_{yt}} + 2z_t^l \bar{Q}_{56t}^l \chi_{xz}' - \frac{(z_t^l)^2 \bar{Q}_{56t}^l \chi_{xz}'}{R_{yt}} + 2z_t^l \bar{Q}_{66t}^l \chi_{yz}' - \frac{(z_t^l)^2 \bar{Q}_{66t}^l \chi_{yz}'}{R_{yt}} - \bar{Q}_{23t}^l \left[(z_t^l)^2 \chi_{zz}' \right]_{,y} - \bar{Q}_{34t}^l \left[(z_t^l)^2 \chi_{zz}' \right]_{,x} - 2\bar{Q}_{23t}^l (\chi_{zz}' z_t^l)_{,y} - 2\bar{Q}_{34t}^l (\chi_{zz}' z_t^l)_{,x} = 0.$$

$$\delta v_{3t} : I_{3t} \ddot{v}_{0t} - H_{yyt,y} - H_{xyt,x} + 3T_{yzt} - \frac{V_{yzt}}{R_{yt}} + (z_t^l)^3 \chi_{yz}' + 3(z_t^u)^2 \chi_{yz}' - \frac{(z_t^u)^3 \chi_{yz}'}{R_{yt}} + 3(z_t^l)^2 \bar{Q}_{56t}^l \chi_{xz}' - \frac{(z_t^l)^2 \bar{Q}_{56t}^l \chi_{xz}'}{R_{yt}} + 3(z_t^l)^2 \bar{Q}_{66t}^l \chi_{yz}' - \frac{(z_t^l)^2 \bar{Q}_{66t}^l \chi_{yz}'}{R_{yt}} - \bar{Q}_{23t}^l \left[(z_t^l)^3 \chi_{zz}' \right]_{,y} - \bar{Q}_{34t}^l \left[(z_t^l)^3 \chi_{zz}' \right]_{,x} - 3\bar{Q}_{23t}^l \left[\chi_{zz}' (z_t^l)^2 \right]_{,y} - 3\bar{Q}_{34t}^l \left[\chi_{zz}' (z_t^l)^2 \right]_{,x} = 0.$$

$$\delta w_{0t} : I_{0t} \ddot{w}_{0t} + I_{1t} \ddot{w}_{1t} + I_{2t} \ddot{w}_{2t} + \frac{N_{xxt}}{R_{xt}} - (N_{xxt} w_{0t,x})_{,x} - (M_{xxt} w_{1t,x})_{,x} + \frac{N_{yyt}}{R_{yt}} - (N_{yyt} w_{0t,y})_{,y} - (M_{yyt} w_{1t,y})_{,y} - Q_{xzt,x} - Q_{yzt,y} + \chi_z' - \chi_{xz,x} - \chi_{yz,y} - (\bar{Q}_{55t}^l \chi_{xz}')_{,x} - \bar{Q}_{56t}^l \chi_{xz,y} - (\bar{Q}_{56t}^l \chi_{yz}')_{,x} - \bar{Q}_{66t}^l \chi_{yz,y} + \frac{\bar{Q}_{13t}^l \chi_{zz}'}{R_{xt}} + \frac{\bar{Q}_{23t}^l \chi_{zz}'}{R_{yt}} = 0.$$

$$\delta w_{1t} : I_{1t} \ddot{w}_{0t} + I_{2t} \ddot{w}_{1t} + I_{3t} \ddot{w}_{2t} + \frac{M_{yyt}}{R_{yt}} - (M_{yyt} w_{0t,y})_{,y} + N_{zzt} - S_{xzt,x} - S_{yzt,y} + \frac{M_{xxt}}{R_{xt}} - (M_{xxt} w_{0t,x})_{,x} + z_t^l \chi_{xz}' - (z_t^u \chi_{xz}')_{,x} - (z_t^u \chi_{yz}')_{,y} - \bar{Q}_{55t}^l (z_t^l \chi_{xz}')_{,x} - \bar{Q}_{56t}^l [z_t^l \chi_{xz}']_{,y} - \bar{Q}_{56t}^l (z_t^l \chi_{yz}')_{,x} - \bar{Q}_{66t}^l (z_t^l \chi_{yz}')_{,y} + \frac{z_t^l \bar{Q}_{13t}^l \chi_{zz}'}{R_{xt}} + \frac{z_t^l \bar{Q}_{23t}^l \chi_{zz}'}{R_{yt}} + \bar{Q}_{33t}^l \chi_{zz}' + \frac{\bar{Q}_{13t}^l \chi_{zz}'}{R_{xt}} + \frac{\bar{Q}_{23t}^l \chi_{zz}'}{R_{yt}} = 0.$$

$$\delta w_{2t} : I_{2t} \ddot{w}_{0t} + I_{3t} \ddot{w}_{1t} + \frac{O_{yyt}}{R_{yt}} + 2M_{zzt} - T_{xzt,x} - T_{yzt,y} + \frac{O_{xxt}}{R_{xt}} + (z_t^l)^2 \chi_{xz}' - \left[(z_t^u)^2 \chi_{xz}' \right]_{,x} - \left[(z_t^u)^2 \chi_{yz}' \right]_{,y} - \bar{Q}_{56t}^l \left[(z_t^l)^2 \chi_{xz}' \right]_{,y} - \bar{Q}_{56t}^l \left[(z_t^l)^2 \chi_{yz}' \right]_{,x} - \bar{Q}_{66t}^l \left[(z_t^l)^2 \chi_{yz}' \right]_{,y} - \bar{Q}_{55t}^l \left[(z_t^l)^2 \chi_{xz}' \right]_{,x} + \frac{(z_t^l)^2 \bar{Q}_{13t}^l \chi_{zz}'}{R_{xt}} + \frac{(z_t^l)^2 \bar{Q}_{23t}^l \chi_{zz}'}{R_{yt}} + 2z_t^l \bar{Q}_{33t}^l \chi_{zz}' + \frac{2\bar{Q}_{13t}^l \chi_{zz}' z_t^l}{R_{xt}} + \frac{2z_t^l \bar{Q}_{23t}^l \chi_{zz}'}{R_{yt}} - 3\bar{Q}_{23t}^l \left[\chi_{zz}' (z_t^l)^2 w_{1t,y} \right]_{,y} + 2\bar{Q}_{33t}^l \chi_{zz}' = 0.$$

$$\delta u_{0b} : I_{0b} \ddot{u}_{0b} + I_{1b} \ddot{u}_{1b} + I_{2b} \ddot{u}_{2b} + I_{3b} \ddot{u}_{3b} - N_{xxb,x} - N_{xyb,y} - \frac{Q_{xzb}}{R_{xb}} + \chi_x^{bc} - \frac{\chi_{xz}^b}{R_{xb}} - \frac{\bar{Q}_{55b}^u \chi_{xz}^{bc}}{R_{xb}} - \frac{\bar{Q}_{56b}^u \chi_{yz}^{bc}}{R_{xb}} - \bar{Q}_{13b}^u \chi_{zz,x}^{bc} - \bar{Q}_{34b}^u \chi_{zz,y}^{bc} = 0$$

$$\delta u_{1b} : I_{1b} \ddot{u}_{0b} + I_{2b} \ddot{u}_{1b} + I_{3b} \ddot{u}_{2b} - M_{xxb,x} - M_{xyb,y} + Q_{xzb} - \frac{S_{xzb}}{R_{xb}} + \chi_x^b - \frac{z_b^l \chi_{xz}^b}{R_{xb}} + z_b^u \chi_x^{bc} + \bar{Q}_{55b}^u \chi_{xz}^{bc} - \frac{z_b^u \bar{Q}_{55b}^u \chi_{xz}^{bc}}{R_{xb}} + \bar{Q}_{56b}^u \chi_{yz}^{bc} - \frac{z_b^u \bar{Q}_{56b}^u \chi_{yz}^{bc}}{R_{xb}} - \bar{Q}_{13b}^u (z_b^u \chi_{zz}^{bc})_{,x} - \bar{Q}_{34b}^u (z_b^u \chi_{zz}^{bc})_{,y} - \bar{Q}_{13b}^u \chi_{zz',x}^{bc} - \bar{Q}_{34b}^u \chi_{zz',y}^{bc} = 0.$$

$$\delta u_{2b} : I_{2b} \ddot{u}_{0b} + I_{3b} \ddot{u}_{1b} - O_{xxb,x} - O_{xyb,y} + 2S_{xzb} - \frac{T_{xzb}}{R_{xb}} + (z_b^u)^2 \chi_x^{bc} + 2z_b^l \chi_{xz}^b - \frac{(z_b^l)^2 \chi_{xz}^b}{R_{xb}} + 2z_b^u \bar{Q}_{55b}^u \chi_{xz}^{bc} - \frac{(z_b^u)^2 \bar{Q}_{55b}^u \chi_{xz}^{bc}}{R_{xb}} + 2z_b^u \bar{Q}_{56b}^u \chi_{yz}^{bc} - \frac{(z_b^u)^2 \bar{Q}_{56b}^u \chi_{yz}^{bc}}{R_{xb}} - \bar{Q}_{13b}^u \left[(z_b^u)^2 \chi_{zz}^{bc} \right]_{,x} - \bar{Q}_{34b}^u \left[\chi_{zz}^{bc} (z_b^u)^2 \right]_{,y} - 2\bar{Q}_{13b}^u (\chi_{zz}^{bc} z_b^u)_{,x} - 2\bar{Q}_{34b}^u (\chi_{zz}^{bc} z_b^u)_{,y} = 0.$$

$$\delta u_{3b} : I_{3b} \ddot{u}_{0b} - H_{xxb,x} - \frac{V_{xzb}}{R_{xb}} + 3T_{xzb} - H_{xyb,y} + (z_b^u)^3 \chi_x^{bc} + 3(z_b^l)^2 \chi_{xz}^b - \frac{(z_b^l)^3 \chi_{xz}^b}{R_{xb}} + 3(z_b^u)^2 \bar{Q}_{55b}^u \chi_{xz}^{bc} - \frac{(z_b^u)^2 \bar{Q}_{55b}^u \chi_{xz}^{bc}}{R_{xb}} + 3(z_b^u)^2 \bar{Q}_{56b}^u \chi_{yz}^{bc} - \frac{(z_b^u)^2 \bar{Q}_{56b}^u \chi_{yz}^{bc}}{R_{xb}} - \bar{Q}_{13b}^u \left[(z_b^u)^3 \chi_{zz}^{bc} \right]_{,x} - \bar{Q}_{34b}^u \left[\chi_{zz}^{bc} (z_b^u)^3 \right]_{,y} - 3\bar{Q}_{13b}^u \left[\chi_{zz}' (z_b^u)^2 \right]_{,x} - 3\bar{Q}_{34b}^u \left[\chi_{zz}' (z_b^u)^2 \right]_{,y} = 0$$

$$\delta v_{0b} : I_{0b} \ddot{v}_{0b} + I_{1b} \ddot{v}_{1b} + I_{2b} \ddot{v}_{2b} + I_{3b} \ddot{v}_{3b} - N_{yyb,y} - N_{xyb,x} - \frac{Q_{yzb}}{R_{yb}} + \chi_y^{bc} - \frac{\chi_{yz}^b}{R_{yb}} - \frac{\bar{Q}_{56b}^u \chi_{xz}^{bc}}{R_{yb}} - \frac{\bar{Q}_{66b}^u \chi_{yz}^{bc}}{R_{yb}} - \bar{Q}_{23b}^u \chi_{zz,y}^{bc} - \bar{Q}_{34b}^u \chi_{zz,x}^{bc} = 0.$$

$$\delta v_{1b} : I_{1b} \ddot{v}_{0b} + I_{2b} \ddot{v}_{1b} + I_{3b} \ddot{v}_{2b} - M_{yyb,y} - M_{xyb,x} + Q_{yzb} - \frac{S_{yzb}}{R_{yb}} + z_b^u \chi_y^{bc} + \chi_y^b - \frac{z_b^l \chi_{yz}^b}{R_{yb}} + \bar{Q}_{56b}^u \chi_{xz}^{bc} - \frac{z_b^u \bar{Q}_{56b}^u \chi_{xz}^{bc}}{R_{yb}} +$$

$$\bar{Q}_{66b}^u \chi_{yz}^{bc} - \frac{z_b^u \bar{Q}_{66b}^u \chi_{yz}^{bc}}{R_{yb}} - \bar{Q}_{23b}^u (z_b^u \chi_{zz}^{bc})_{,y} - \bar{Q}_{34b}^u (\chi_{zz}^{bc} z_b^u)_{,x} - \bar{Q}_{23b}^u \chi_{zz',y}^{bc} - \bar{Q}_{34b}^u \chi_{zz',x}^{bc} = 0.$$

$$\delta v_{2b} : I_{2b} \ddot{v}_{0b} + I_{3b} \ddot{v}_{1b} - O_{yyb,y} - O_{xyb,x} + 2S_{yzb} - \frac{T_{yzb}}{R_{yb}} + (z_b^u)^2 \chi_{yz}^{bc} + 2z_b^l \chi_{yz}^{bc} - \frac{(z_b^l)^2 \chi_{yz}^{bc}}{R_{yb}} + 2z_b^u \bar{Q}_{56b}^u \chi_{xz}^{bc} - \frac{(z_b^u)^2 \bar{Q}_{56b}^u \chi_{xz}^{bc}}{R_{yb}} \\ + 2z_b^u \bar{Q}_{66b}^u \chi_{yz}^{bc} - \frac{(z_b^u)^2 \bar{Q}_{66b}^u \chi_{yz}^{bc}}{R_{yb}} - \bar{Q}_{23b}^u \left[(z_b^u)^2 \chi_{zz}^{bc} \right]_{,y} - \bar{Q}_{34b}^u \left[\chi_{zz}^{bc} (z_b^u)^2 \right]_{,x} - 2\bar{Q}_{23b}^u (\chi_{zz}^{bc} z_b^u)_{,y} - 2\bar{Q}_{34b}^u (\chi_{zz}^{bc} z_b^u)_{,x} = 0.$$

$$\delta v_{3b} : I_{3b} \ddot{v}_{0b} + I_{4b} \ddot{v}_{1b} - H_{yyb,y} - H_{xyb,x} + 3T_{yzb} - \frac{V_{yzb}}{R_{yb}} + (z_b^u)^3 \chi_{yz}^{bc} + 3(z_b^l)^2 \chi_{yz}^{bc} - \frac{(z_b^l)^3 \chi_{yz}^{bc}}{R_{yb}} + 3(z_b^u)^2 \bar{Q}_{56b}^u \chi_{xz}^{bc} - \frac{(z_b^u)^3 \bar{Q}_{56b}^u \chi_{xz}^{bc}}{R_{yb}} \\ + 3(z_b^u)^2 \bar{Q}_{66b}^u \chi_{yz}^{bc} - \frac{(z_b^u)^3 \bar{Q}_{66b}^u \chi_{yz}^{bc}}{R_{yb}} - \bar{Q}_{23b}^u \left[(z_b^u)^3 \chi_{zz}^{bc} \right]_{,y} - \bar{Q}_{34b}^u \left[(z_b^u)^3 \chi_{zz}^{bc} \right]_{,x} - 3\bar{Q}_{23b}^u \left[\chi_{zz}^{bc} (z_b^u)^2 \right]_{,y} - 3\bar{Q}_{34b}^u \left[\chi_{zz}^{bc} (z_b^u)^2 \right]_{,x} = 0.$$

$$\delta w_{0b} : I_{0b} \ddot{w}_{0b} + I_{1b} \ddot{w}_{1b} + I_{2b} \ddot{w}_{2b} + \frac{N_{xxb}}{R_{xb}} - (N_{xxb} w_{0b,x})_{,x} - (M_{xxb} w_{1b,x})_{,x} + \frac{N_{yyb}}{R_{yb}} - (N_{yyb} w_{0b,y})_{,y} - (M_{yyb} w_{1b,y})_{,y} - Q_{xz b,x} \\ - Q_{yz b,y} + \chi_z^{bc} - \chi_{xz,x} - \chi_{yz,y} - \bar{Q}_{55b}^u \chi_{xz,x} - \bar{Q}_{56b}^u \chi_{xz,y} - \bar{Q}_{56b}^u \chi_{yz,x} - \bar{Q}_{66b}^u \chi_{yz,y} + \frac{\bar{Q}_{13b}^u \chi_{zz}^{bc}}{R_{xb}} + \frac{\bar{Q}_{23b}^u \chi_{zz}^{bc}}{R_{yb}} = 0$$

$$\delta w_{1b} : I_{1b} \ddot{w}_{0b} + I_{2b} \ddot{w}_{1b} + I_{3b} \ddot{w}_{2b} + \frac{M_{yyb}}{R_{yb}} - (M_{yyb} w_{0b,y})_{,y} + N_{zzb} - S_{xz b,x} - S_{yz b,y} + \frac{M_{xxb}}{R_{xb}} - (M_{xxb} w_{0b,x})_{,x} + z_b^u \chi_z^{bc} - (z_b^l \chi_{xz})_{,x} - (z_b^l \chi_{yz})_{,y} \\ - \bar{Q}_{55b}^u (z_b^u \chi_{xz})_{,x} - \bar{Q}_{56b}^u (z_b^u \chi_{xz})_{,y} - \bar{Q}_{56b}^u (z_b^u \chi_{yz})_{,x} - \bar{Q}_{66b}^u [z_b^u \chi_{yz}]_{,y} + \frac{z_b^u \bar{Q}_{13b}^u \chi_{zz}^{bc}}{R_{xb}} + \frac{z_b^u \bar{Q}_{23b}^u \chi_{zz}^{bc}}{R_{yb}} + \bar{Q}_{33b}^u \chi_{zz}^{bc} + \frac{\bar{Q}_{13b}^u \chi_{zz}^{bc}}{R_{xb}} + \frac{\bar{Q}_{23b}^u \chi_{zz}^{bc}}{R_{yb}} = 0.$$

$$\delta w_{2b} : I_{2b} \ddot{w}_{0b} + I_{3b} \ddot{w}_{1b} + \frac{O_{yyb}}{R_{yb}} + 2M_{zzb} - T_{xz b,x} - T_{yz b,y} + \frac{O_{xxb}}{R_{xb}} + (z_b^u)^2 \chi_z^{bc} - \left[(z_b^l)^2 \chi_{xz} \right]_{,x} - \left[(z_b^l)^2 \chi_{yz} \right]_{,y} \\ - \bar{Q}_{56b}^u \left[(z_b^u)^2 \chi_{xz} \right]_{,y} - \bar{Q}_{56b}^u \left[(z_b^u)^2 \chi_{yz} \right]_{,x} - \bar{Q}_{66b}^u \left[(z_b^u)^2 \chi_{yz} \right]_{,y} - \bar{Q}_{55b}^u \left[(z_b^u)^2 \chi_{xz} \right]_{,x} + \frac{(z_b^u)^2 \bar{Q}_{13b}^u \chi_{zz}^{bc}}{R_{xb}} + \frac{(z_b^u)^2 \bar{Q}_{23b}^u \chi_{zz}^{bc}}{R_{yb}} \\ + 2\bar{Q}_{33b}^u \chi_{zz}^{bc} z_b^u + \frac{2\bar{Q}_{13b}^u \chi_{zz}^{bc} z_b^u}{R_{xb}} + \frac{2\bar{Q}_{23b}^u \chi_{zz}^{bc} z_b^u}{R_{yb}} + 2\bar{Q}_{33b}^u \chi_{zz}^{bc} = 0.$$

$$\delta u_{0c} : I_{0c} \ddot{u}_{0c} + I_{1c} \ddot{u}_{1c} + I_{2c} \ddot{u}_{2c} + I_{3c} \ddot{u}_{3c} - N_{xxc,x} - N_{xyc,y} - \frac{Q_{xzc}^*}{R_{xc}} - \chi_x^{lc} - \chi_x^{bc} + \frac{Q_{55c} \chi_{xz}^{lc}}{R_{xc} + z_c^u} + \frac{Q_{55c} \chi_{xz}^{bc}}{R_{xc} + z_c^l} \\ + Q_{13c} \left[\frac{\chi_{zz}^{lc}}{(1 + z_c^u/R_{xc})} \right]_{,x} + Q_{13c} \left[\frac{\chi_{zz}^{bc}}{(1 + z_c^l/R_{xc})} \right]_{,x} - Q_{13c} \left[\frac{\chi_{zz}^{lc}}{R_{xc} (1 + z_c^u/R_{xc})^2} \right]_{,x} - Q_{13c} \left[\frac{\chi_{zz}^{bc}}{R_{xc} (1 + z_c^l/R_{xc})^2} \right]_{,x} = 0.$$

$$\delta u_{1c} : I_{1c} \ddot{u}_{0c} + I_{2c} \ddot{u}_{1c} + I_{3c} \ddot{u}_{2c} - M_{xxc,x} - M_{xyc,y} + Q_{xzc} - \frac{S_{xzc}^*}{R_{xc}} - z_c^u \chi_x^{lc} - z_c^l \chi_x^{bc} - Q_{55c} \chi_{xz}^{lc} + \frac{Q_{55c} z_c^u \chi_{xz}^{lc}}{R_{xc} + z_c^u} - Q_{55c} \chi_{xz}^{bc} + \frac{z_c^l Q_{55c} \chi_{xz}^{bc}}{R_{xc} + z_c^l} \\ + Q_{13c} \left[\frac{z_c^u \chi_{zz}^{lc}}{(1 + z_c^u/R_{xc})} \right]_{,x} + Q_{13c} \left[\frac{\chi_{zz}^{bc} z_c^l}{(1 + z_c^l/R_{xc})} \right]_{,x} - Q_{13c} \left[\frac{z_c^u \chi_{zz}^{lc}}{R_{xc} (1 + z_c^u/R_{xc})^2} \right]_{,x} + Q_{13c} \left[\frac{\chi_{zz}^{lc}}{(1 + z_c^u/R_{xc})} \right]_{,x} \\ - Q_{13c} \left[\frac{\chi_{zz}^{bc} z_c^l}{R_{xc} (1 + z_c^l/R_{xc})^2} \right]_{,x} + Q_{13c} \left[\frac{\chi_{zz}^{bc}}{(1 + z_c^l/R_{xc})} \right]_{,x} = 0.$$

$$\delta u_{2c} : I_{2c} \ddot{u}_{0c} + I_{3c} \ddot{u}_{1c} - O_{xxc,x} - O_{xyc,y} + 2S_{xzc} - \frac{T_{xzc}^*}{R_{xc}} - (z_c^u)^2 \chi_x^{lc} - (z_c^l)^2 \chi_x^{bc} - 2z_c^u Q_{55c} \chi_{xz}^{lc} + \frac{(z_c^u)^2 Q_{55c} \chi_{xz}^{lc}}{R_{xc} + z_c^u} - 2z_c^l Q_{55c} \chi_{xz}^{bc} \\ + \frac{(z_c^l)^2 Q_{55c} \chi_{xz}^{bc}}{R_{xc} + z_c^l} + Q_{13c} \left[\frac{(z_c^u)^2 \chi_{zz}^{lc}}{(1 + z_c^u/R_{xc})} \right]_{,x} + Q_{13c} \left[\frac{(z_c^l)^2 \chi_{zz}^{bc}}{(1 + z_c^l/R_{xc})} \right]_{,x} - Q_{13c} \left[\frac{(z_c^u)^2 \chi_{zz}^{lc}}{R_{xc} (1 + z_c^u/R_{xc})^2} \right]_{,x} + 2Q_{13c} \left[\frac{z_c^u \chi_{zz}^{lc}}{(1 + z_c^u/R_{xc})} \right]_{,x} \\ - Q_{13c} \left[\frac{\chi_{zz}^{bc} (z_c^l)^2}{R_{xc} (1 + z_c^l/R_{xc})^2} \right]_{,x} + 2Q_{13c} \left[\frac{\chi_{zz}^{bc} z_c^l}{(1 + z_c^l/R_{xc})} \right]_{,x} = 0.$$

$$\delta u_{3c} : I_{3c} \ddot{u}_{0c} - H_{xxc,x} - H_{xyc,y} + 3T_{xzc} - \frac{V_{xzc}^*}{R_{xc}} - (z_c^u)^3 \chi_x^{lc} - (z_c^l)^3 \chi_x^{bc} - 3(z_c^u)^2 Q_{55c} \chi_{xz}^{lc} + \frac{(z_c^u)^3 Q_{55c} \chi_{xz}^{lc}}{R_{xc} + z_c^u} - 3(z_c^l)^2 Q_{55c} \chi_{xz}^{bc}$$

$$+ \frac{(z_c^l)^3 Q_{55c} \chi_{xz}^{bc}}{R_{xc} + z_c^l} + Q_{13c} \left[\frac{(z_c^u)^3 \chi_{zz}^{l'c}}{(1+z_c^u/R_{xc})} \right]_{,x} + Q_{13c} \left[\frac{(z_c^l)^3 \chi_{zz}^{bc}}{(1+z_c^l/R_{xc})} \right]_{,x} - Q_{13c} \left[\frac{(z_c^u)^3 \chi_{zz'}^{l'c}}{R_{xc} (1+z_c^u/R_{xc})^2} \right]_{,x} + 3Q_{13c} \left[\frac{(z_c^u)^2 \chi_{zz'}^{l'c}}{(1+z_c^u/R_{xc})} \right]_{,x} - Q_{13c} \left[\frac{\chi_{zz'}^{bc} (z_c^l)^3}{R_{xc} (1+z_c^l/R_{xc})^2} \right]_{,x} + 3Q_{13c} \left[\frac{\chi_{zz'}^{bc} (z_c^l)^2}{(1+z_c^l/R_{xc})} \right]_{,x} = 0.$$

$$\delta v_{0c} : I_{0c} \ddot{v}_{0c} + I_{1c} \ddot{v}_{1c} + I_{2c} \ddot{v}_{2c} + I_{3c} \ddot{v}_{3c} - N_{yy c,y} - N_{yx c,x} - \frac{Q_{yz c}^*}{R_{yc}} - \chi_y^{l'c} - \chi_y^{bc} + \frac{Q_{66c} \chi_{yz}^{l'c}}{R_{yc} + z_c^u} + \frac{Q_{66c} \chi_{yz}^{bc}}{R_{yc} + z_c^l} + Q_{23c} \left[\frac{\chi_{zz}^{l'c}}{(1+z_c^u/R_{yc})} \right]_{,y} + Q_{23c} \left[\frac{\chi_{zz}^{bc}}{(1+z_c^l/R_{yc})} \right]_{,y} - Q_{23c} \left[\frac{\chi_{zz'}^{l'c}}{R_{yc} (1+z_c^u/R_{yc})^2} \right]_{,y} - Q_{23c} \left[\frac{\chi_{zz'}^{bc}}{R_{yc} (1+z_c^l/R_{yc})^2} \right]_{,y} = 0.$$

$$\delta v_{1c} : I_{1c} \ddot{v}_{0c} + I_{2c} \ddot{v}_{1c} + I_{3c} \ddot{v}_{2c} - M_{yy c,y} - M_{yx c,x} + Q_{yz c} - \frac{S_{yz c}^*}{R_{yc}} - z_c^u \chi_y^{l'c} - z_c^l \chi_y^{bc} - Q_{66c} \chi_y^{l'c} + \frac{z_c^u Q_{66c} \chi_{yz}^{l'c}}{R_{yc} + z_c^u} - Q_{66c} \chi_y^{bc} + \frac{z_c^l Q_{66c} \chi_{yz}^{bc}}{R_{yc} + z_c^l} + Q_{23c} \left[\frac{\chi_{zz}^{l'c} z_c^u}{(1+z_c^u/R_{yc})} \right]_{,y} + Q_{23c} \left[\frac{\chi_{zz}^{bc} z_c^l}{(1+z_c^l/R_{yc})} \right]_{,y} - Q_{23c} \left[\frac{\chi_{zz'}^{l'c} z_c^u}{R_{yc} (1+z_c^u/R_{yc})^2} \right]_{,y} + Q_{23c} \left[\frac{\chi_{zz'}^{bc}}{(1+z_c^l/R_{yc})} \right]_{,y} - Q_{23c} \left[\frac{\chi_{zz'}^{bc} z_c^l}{R_{yc} (1+z_c^l/R_{yc})^2} \right]_{,y} + Q_{23c} \left[\frac{\chi_{zz'}^{bc}}{(1+z_c^l/R_{yc})} \right]_{,y} = 0.$$

$$\delta v_{2c} : I_{2c} \ddot{v}_{0c} + I_{3c} \ddot{v}_{1c} - O_{yy c,y} - O_{yx c,x} + 2S_{yz c} - \frac{T_{yz c}^*}{R_{yc}} - (z_c^u)^2 \chi_y^{l'c} - (z_c^l)^2 \chi_y^{bc} - 2z_c^u Q_{66c} \chi_y^{l'c} + \frac{(z_c^u)^2 Q_{66c} \chi_{yz}^{l'c}}{R_{yc} + z_c^u} - 2z_c^l Q_{66c} \chi_y^{bc} + \frac{(z_c^l)^2 Q_{66c} \chi_{yz}^{bc}}{R_{yc} + z_c^l} + Q_{23c} \left[\frac{\chi_{zz}^{l'c} (z_c^u)^2}{(1+z_c^u/R_{yc})} \right]_{,y} + Q_{23c} \left[\frac{\chi_{zz}^{bc} (z_c^l)^2}{(1+z_c^l/R_{yc})} \right]_{,y} - Q_{23c} \left[\frac{\chi_{zz'}^{l'c} (z_c^u)^2}{R_{yc} (1+z_c^u/R_{yc})^2} \right]_{,y} + 2Q_{23c} \left[\frac{\chi_{zz'}^{l'c} z_c^u}{(1+z_c^u/R_{yc})} \right]_{,y} - Q_{23c} \left[\frac{\chi_{zz'}^{bc} (z_c^l)^2}{R_{yc} (1+z_c^l/R_{yc})^2} \right]_{,y} + 2Q_{23c} \left[\frac{z_c^l \chi_{zz'}^{bc}}{(1+z_c^l/R_{yc})} \right]_{,y} = 0.$$

$$\delta v_{3c} : I_{3c} \ddot{v}_{0c} - H_{yy c,y} - H_{yx c,x} + 3T_{yz c} - \frac{V_{yz c}^*}{R_{yc}} - (z_c^u)^3 \chi_y^{l'c} - (z_c^l)^3 \chi_y^{bc} - 3(z_c^u)^2 Q_{66c} \chi_y^{l'c} + \frac{(z_c^u)^3 Q_{66c} \chi_{yz}^{l'c}}{R_{yc} + z_c^u} - 3(z_c^l)^2 Q_{66c} \chi_y^{bc} + \frac{(z_c^l)^3 Q_{66c} \chi_{yz}^{bc}}{R_{yc} + z_c^l} + Q_{23c} \left[\frac{\chi_{zz}^{l'c} (z_c^u)^3}{(1+z_c^u/R_{yc})} \right]_{,y} + Q_{23c} \left[\frac{\chi_{zz}^{bc} (z_c^l)^3}{(1+z_c^l/R_{yc})} \right]_{,y} - Q_{23c} \left[\frac{\chi_{zz'}^{l'c} (z_c^u)^3}{R_{yc} (1+z_c^u/R_{yc})^2} \right]_{,y} + 3Q_{23c} \left[\frac{\chi_{zz'}^{l'c} (z_c^u)^2}{(1+z_c^u/R_{yc})} \right]_{,y} - Q_{23c} \left[\frac{\chi_{zz'}^{bc} (z_c^l)^3}{R_{yc} (1+z_c^l/R_{yc})^2} \right]_{,y} + 3Q_{23c} \left[\frac{\chi_{zz'}^{bc} (z_c^l)^2}{(1+z_c^l/R_{yc})} \right]_{,y} = 0.$$

$$\delta w_{0c} : I_{0c} \ddot{w}_{0c} + I_{1c} \ddot{w}_{1c} + I_{2c} \ddot{w}_{2c} + I_{3c} \ddot{w}_{3c} + \frac{N_{xx c}}{R_{xc}} - (N_{xx c} w_{0c,x})_{,x} - (M_{xx c} w_{1c,x})_{,x} + \frac{N_{yy c}}{R_{yc}} - (N_{yy c} w_{0c,y})_{,y} - (M_{yy c} w_{1c,y})_{,y} - Q_{xz c,x}^* - Q_{yz c,y}^* - \chi_z^{l'c} - \chi_z^{bc} + Q_{55c} \left[\frac{\chi_{xz}^{l'c}}{(1+z_c^u/R_{xc})} \right]_{,x} + Q_{66c} \left[\frac{\chi_{yz}^{l'c}}{(1+z_c^u/R_{yc})} \right]_{,y} + Q_{55c} \left[\frac{\chi_{xz}^{bc}}{(1+z_c^l/R_{xc})} \right]_{,x} + Q_{66c} \left[\frac{\chi_{yz}^{bc}}{(1+z_c^l/R_{yc})} \right]_{,y} - \frac{Q_{13c} \chi_{zz}^{l'c}}{R_{xc} + z_c^u} - \frac{Q_{23c} \chi_{zz}^{l'c}}{R_{yc} + z_c^u} - \frac{Q_{13c} \chi_{zz}^{bc}}{R_{xc} + z_c^l} - \frac{Q_{23c} \chi_{zz}^{bc}}{R_{yc} + z_c^l} + \frac{Q_{13c} \chi_{zz'}^{l'c}}{R_{xc}^2 (1+z_c^u/R_{xc})^2} + \frac{Q_{23c} \chi_{zz'}^{l'c}}{R_{yc}^2 (1+z_c^u/R_{yc})^2} + \frac{Q_{13c} \chi_{zz'}^{bc}}{R_{xc}^2 (1+z_c^l/R_{xc})^2} + \frac{Q_{23c} \chi_{zz'}^{bc}}{R_{yc}^2 (1+z_c^l/R_{yc})^2} = 0.$$

$$\begin{aligned} \delta W_{1c} : & I_{1c} \ddot{W}_{0c} + I_{2c} \ddot{W}_{1c} + I_{3c} \ddot{W}_{2c} + \frac{M_{xxc}}{R_{xc}} - (M_{xxc} W_{0c,x})_{,x} + \frac{M_{yyc}}{R_{yc}} - (M_{yyc} W_{0c,y})_{,y} + N_{zxc} - S_{zxc,x}^* - S_{zxc,y}^* - z_c^u \chi_z^{t'c} - z_c^l \chi_z^{b'c} \\ & + Q_{55c} \left[\frac{z_c^u \chi_{xz}^{t'c}}{(1+z_c^u/R_{xc})} \right]_{,x} + Q_{66c} \left[\frac{z_c^u \chi_{yz}^{t'c}}{(1+z_c^u/R_{yc})} \right]_{,y} + Q_{55c} \left[\frac{z_c^l \chi_{xz}^{b'c}}{(1+z_c^l/R_{xc})} \right]_{,x} + Q_{66c} \left[\frac{z_c^l \chi_{yz}^{b'c}}{(1+z_c^l/R_{yc})} \right]_{,y} - \frac{z_c^u Q_{13c} \chi_{zz}^{t'c}}{R_{xc} + z_c^u} - \\ & \frac{Q_{23c} \chi_{zz}^{t'c} z_c^u}{R_{yc} + z_c^u} - Q_{33c} \chi_{zz}^{t'c} - \frac{Q_{13c} \chi_{zz}^{b'c} z_c^l}{R_{xc} + z_c^l} - \frac{Q_{23c} \chi_{zz}^{b'c} z_c^l}{R_{yc} + z_c^l} - Q_{33c} \chi_{zz}^{b'c} + \frac{z_c^u Q_{13c} \chi_{zz}^{t'c}}{R_{xc}^2 (1+z_c^u/R_{xc})^2} - \frac{Q_{13c} \chi_{zz}^{t'c}}{R_{xc} + z_c^u} + \frac{Q_{23c} z_c^u \chi_{zz}^{t'c}}{R_{yc}^2 (1+z_c^u/R_{yc})^2} - \\ & \frac{Q_{23c} \chi_{zz}^{t'c}}{R_{yc} + z_c^u} + \frac{Q_{13c} \chi_{zz}^{b'c} z_c^l}{R_{xc}^2 (1+z_c^l/R_{xc})^2} - \frac{Q_{13c} \chi_{zz}^{b'c}}{R_{xc} + z_c^l} + \frac{Q_{23c} \chi_{zz}^{b'c} z_c^l}{R_{yc}^2 (1+z_c^l/R_{yc})^2} - \frac{Q_{23c} \chi_{zz}^{b'c}}{R_{yc} + z_c^l} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta W_{2c} : & I_{2c} \ddot{W}_{0c} + I_{3c} \ddot{W}_{1c} + \frac{O_{xxc}}{R_{xc}} + \frac{O_{yyc}}{R_{yc}} + 2M_{zxc} - T_{zxc,x}^* - T_{zxc,y}^* - (z_c^u)^2 \chi_z^{t'c} - (z_c^l)^2 \chi_z^{b'c} + Q_{55c} \left[\frac{(z_c^u)^2 \chi_{xz}^{t'c}}{(1+z_c^u/R_{xc})} \right]_{,x} + \\ & Q_{66c} \left[\frac{(z_c^u)^2 \chi_{yz}^{t'c}}{(1+z_c^u/R_{yc})} \right]_{,y} + Q_{55c} \left[\frac{(z_c^l)^2 \chi_{xz}^{b'c}}{(1+z_c^l/R_{xc})} \right]_{,x} + Q_{66c} \left[\frac{(z_c^l)^2 \chi_{yz}^{b'c}}{(1+z_c^l/R_{yc})} \right]_{,y} - \frac{Q_{13c} \chi_{zz}^{b'c} (z_c^l)^2}{R_{xc} + z_c^l} - \frac{Q_{23c} \chi_{zz}^{t'c} (z_c^u)^2}{R_{yc} + z_c^u} - 2z_c^u Q_{33c} \chi_{zz}^{t'c} \\ & - \frac{Q_{13c} (z_c^u)^2 \chi_{zz}^{t'c}}{R_{xc} + z_c^u} - \frac{Q_{23c} \chi_{zz}^{b'c} (z_c^l)^2}{R_{yc} + z_c^l} - 2Q_{33c} \chi_{zz}^{b'c} z_c^l + \frac{Q_{13c} (z_c^u)^2 \chi_{zz}^{t'c}}{R_{xc}^2 (1+z_c^u/R_{xc})^2} - \frac{2Q_{13c} z_c^u \chi_{zz}^{t'c}}{R_{xc} + z_c^u} - \frac{Q_{23c} (z_c^u)^2 \chi_{zz}^{t'c}}{R_{yc}^2 (1+z_c^u/R_{yc})^2} - \frac{2Q_{23c} z_c^u \chi_{zz}^{t'c}}{R_{yc} + z_c^u} \\ & - 2Q_{33c} \chi_{zz}^{t'c} + \frac{Q_{13c} \chi_{zz}^{b'c} (z_c^l)^2}{R_{xc}^2 (1+z_c^l/R_{xc})^2} - \frac{2Q_{13c} \chi_{zz}^{b'c} z_c^l}{R_{xc} + z_c^l} + \frac{Q_{23c} \chi_{zz}^{b'c} (z_c^l)^2}{R_{yc}^2 (1+z_c^l/R_{yc})^2} - \frac{2Q_{23c} z_c^l \chi_{zz}^{b'c}}{R_{yc} + z_c^l} - 2Q_{33c} \chi_{zz}^{b'c} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta W_{3c} : & I_{3c} \ddot{W}_{0c} + \frac{H_{xxc}}{R_{xc}} + \frac{H_{yyc}}{R_{yc}} + 3O_{zxc} - V_{zxc,x}^* - V_{zxc,y}^* - (z_c^u)^3 \chi_z^{t'c} - (z_c^l)^3 \chi_z^{b'c} + Q_{55c} \left[\frac{(z_c^u)^3 \chi_{xz}^{t'c}}{(1+z_c^u/R_{xc})} \right]_{,x} + Q_{66c} \left[\frac{(z_c^u)^3 \chi_{yz}^{t'c}}{(1+z_c^u/R_{yc})} \right]_{,y} \\ & + Q_{55c} \left[\frac{(z_c^l)^3 \chi_{xz}^{b'c}}{(1+z_c^l/R_{xc})} \right]_{,x} + Q_{66c} \left[\frac{(z_c^l)^3 \chi_{yz}^{b'c}}{(1+z_c^l/R_{yc})} \right]_{,y} - \frac{Q_{13c} (z_c^u)^3 \chi_{zz}^{t'c}}{R_{xc} + z_c^u} - \frac{Q_{23c} \chi_{zz}^{t'c} (z_c^u)^3}{R_{yc} + z_c^u} - 3(z_c^u)^2 Q_{33c} \chi_{zz}^{t'c} - \frac{Q_{13c} \chi_{zz}^{b'c} (z_c^l)^3}{R_{xc} + z_c^l} \\ & - \frac{Q_{23c} \chi_{zz}^{b'c} (z_c^l)^3}{R_{yc} + z_c^l} - 3Q_{33c} \chi_{zz}^{b'c} (z_c^l)^2 + \frac{Q_{13c} \chi_{zz}^{t'c} (z_c^u)^3}{R_{xc}^2 (1+z_c^u/R_{xc})^2} - \frac{3Q_{13c} \chi_{zz}^{t'c} (z_c^u)^2}{R_{xc} + z_c^u} + \frac{Q_{23c} \chi_{zz}^{t'c} (z_c^u)^3}{R_{yc}^2 (1+z_c^u/R_{yc})^2} - \frac{3Q_{23c} \chi_{zz}^{t'c} (z_c^u)^2}{R_{yc} + z_c^u} \\ & 6Q_{33c} \chi_{zz}^{t'c} z_c^u + \frac{Q_{13c} \chi_{zz}^{b'c} (z_c^l)^3}{R_{xc}^2 (1+z_c^l/R_{xc})^2} - \frac{3Q_{13c} \chi_{zz}^{b'c} (z_c^l)^2}{R_{xc} + z_c^l} + \frac{Q_{23c} \chi_{zz}^{b'c} (z_c^l)^3}{R_{yc}^2 (1+z_c^l/R_{yc})^2} - \frac{3Q_{23c} \chi_{zz}^{b'c} (z_c^l)^2}{R_{yc} + z_c^l} - 6Q_{33c} \chi_{zz}^{b'c} z_c^l = 0. \end{aligned}$$

مرزی ساده (رابطه‌ی (۲۴)) بر مبنای سری فوریه دوگانه به صورت زیر فرض می‌شوند:

شرایط مرزی ساده اعمال شده در این تحقیق روی لبه‌های $x = 0, a$ و $y = 0, b$ به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{bmatrix} u_{ij}(x, y, t) \\ v_{ij}(x, y, t) \\ w_{ij}(x, y, t) \\ u_{ic}(x, y, t) \\ v_{ic}(x, y, t) \\ w_{ic}(x, y, t) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \begin{bmatrix} \bar{U}_{ij}^{mn}(t) \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \\ \bar{V}_{ij}^{mn}(t) \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \\ \bar{W}_{ij}^{mn}(t) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \\ \bar{U}_{ic}^{mn}(t) \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \\ \bar{V}_{ic}^{mn}(t) \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \\ \bar{W}_{ic}^{mn}(t) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} N_{xxt} = 0, M_{xxt} = 0, O_{xxt} = 0, H_{xxt} = 0, v_{0t} = \\ 0, v_{1t} = 0, v_{2t} = 0, v_{3t} = 0, w_{0t} = 0, w_{1t} = 0, w_{2t} = 0, \\ N_{xxb} = 0, M_{xxb} = 0, O_{xxb} = 0, H_{xxb} = 0, v_{0b} = 0, v_{1b} \\ = 0, v_{2b} = 0, v_{3b} = 0, w_{0b} = 0, w_{1b} = 0, w_{2b} = 0, \\ N_{xxc} = 0, M_{xxc} = 0, O_{xxc} = 0, H_{xxc} = 0, v_{0c} = 0, v_{1c} = \\ 0, v_{2c} = 0, v_{3c} = 0, w_{0c} = 0, w_{1c} = 0, w_{2c} = 0, w_{3c} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

۳- حل معادلات حاکم

میدان‌های جابجایی پنل مرکب ساندویچی دوانحنایه برای شرایط

($i=0,1,2,3$), ($l=0,1,2$), ($j=t,b$).

و برای ضرایب لاگرانژ به صورت زیر:

جایی که $\{\phi\}$ بردار شکل‌مادهای طبیعی و $\{\psi\}$ بردار توابع وزنی هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند
 $(i=0,1,2,3), (l=0,1,2), (j=t,b)$

$$\{\phi\}^T = \begin{Bmatrix} \bar{U}_{ij}^{mn} \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \\ \bar{V}_{ij}^{mn} \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y), \\ \bar{W}_{lj}^{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \bar{U}_{ic}^{mn} \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \\ \bar{V}_{ic}^{mn} \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y), \bar{W}_{ic}^{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \\ \bar{X}_{jc}^{mn} \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \bar{Y}_{jc}^{mn} \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y), \\ \bar{Z}_{jc}^{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \bar{XZ}_j^{mn} \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \\ \bar{YZ}_j^{mn} \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y), \bar{XZ}_{jc}^{mn} \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \\ \bar{YZ}_{jc}^{mn} \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y), \bar{ZZ}_{jc}^{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \\ \bar{ZZ}_{jc}^{mn} \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \end{Bmatrix}; \quad (28)$$

$$\{\psi\}^T = \begin{Bmatrix} \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \\ \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y), \\ \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \\ \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y), \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \\ \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y), \\ \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \\ \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y), \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \\ \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y), \\ \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \end{Bmatrix}.$$

با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (۲۷)، معادله حاکم به صورت زیر حاصل می‌شود $(i=0,1,2,3), (l=0,1,2), (j=t,b)$

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{0\}; \{X\}^T = \{\bar{U}_{ij}^{mn}, \bar{V}_{ij}^{mn}, \bar{W}_{lj}^{mn}, \bar{U}_{ic}^{mn}, \bar{V}_{ic}^{mn}, \bar{W}_{ic}^{mn}, \bar{X}_{jc}^{mn}, \bar{Y}_{jc}^{mn}, \bar{Z}_{jc}^{mn}, \bar{XZ}_j^{mn}, \bar{YZ}_j^{mn}, \bar{XZ}_{jc}^{mn}, \bar{ZZ}_{jc}^{mn}, \bar{ZZ}_{jc}^{mn}\} \quad (29)$$

جایی که $\{X\}$ بردار ثوابت شکل‌مود، $[K]$ ماتریس سفتی و $[M]$ ماتریس جرم می‌باشند. در نتیجه معادله مقدار ویژه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[K - \lambda_{mn} M]\{X\} = \{0\}. \quad (30)$$

جایی که $\lambda_{mn} = \omega_{mn}^2$ می‌باشد. کدنویسی معادلات و حل معادله مقادیر ویژه به دست آمده در نرم‌افزار MATLAB 2013R انجام شده است.

$$\begin{Bmatrix} \chi_x^{jc}(x, y, t) \\ \chi_y^{jc}(x, y, t) \\ \chi_z^{jc}(x, y, t) \\ \chi_{xz}^j(x, y, t) \\ \chi_{yz}^j(x, y, t) \\ \chi_{xz}^{jc}(x, y, t) \\ \chi_{yz}^{jc}(x, y, t) \\ \chi_{zz}^{jc}(x, y, t) \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \begin{Bmatrix} \bar{X}_{jc}^{mn}(t) \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \\ \bar{Y}_{jc}^{mn}(t) \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \\ \bar{Z}_{jc}^{mn}(t) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \\ \bar{XZ}_j^{mn}(t) \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \\ \bar{YZ}_j^{mn}(t) \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \\ \bar{XZ}_{jc}^{mn}(t) \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \\ \bar{YZ}_{jc}^{mn}(t) \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \\ \bar{ZZ}_{jc}^{mn}(t) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \\ \bar{ZZ}_{jc}^{mn}(t) \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \end{Bmatrix}, \quad (26)$$

$(j=t,b); \alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \beta_n = \frac{n\pi}{b}.$

جایی که $\chi_x^{jc}, \chi_y^{jc}, \chi_z^{jc}$ بترتیب ضرایب لاگرانژ مربوط به شرایط پیوستگی جابجایی‌ها در راستای محورهای x, y و z در فصل مشترک رویه بالایی با هسته، $\chi_x^{bc}, \chi_y^{bc}, \chi_z^{bc}$ بترتیب ضرایب لاگرانژ مربوط به شرایط پیوستگی جابجایی‌ها در راستای محورهای x, y و z در فصل مشترک رویه پایینی با هسته، $\chi_{xz}^t, \chi_{yz}^t, \chi_{xz}^b$ و χ_{yz}^b بترتیب ضرایب لاگرانژ مربوط به شرایط صفر شدن تنش‌های برشی عرضی در سطح خارجی رویه‌ها، $\chi_{xz}^{tc}, \chi_{yz}^{tc}, \chi_{xz}^{bc}$ و χ_{yz}^{bc} بترتیب ضرایب لاگرانژ مربوط به شرایط پیوستگی تنش‌های برشی عرضی در مرز رویه‌ها با هسته است، χ_{zz}^{tc} و χ_{zz}^{bc} بترتیب ضرایب لاگرانژ مربوط به شرایط پیوستگی تنش‌های نرمال در مرز رویه‌ها با هسته است و χ_{zz}^{tc} و χ_{zz}^{bc} بترتیب ضرایب لاگرانژ مربوط به شرایط پیوستگی گرادیان تنش نرمال عرضی در مرز رویه‌ها با هسته است. همچنین $\bar{U}_{ij}^{mn}, \bar{XZ}_j^{mn}, \bar{Z}_{jc}^{mn}, \bar{Y}_{jc}^{mn}, \bar{X}_{jc}^{mn}, \bar{W}_{ic}^{mn}, \bar{V}_{ic}^{mn}, \bar{U}_{ic}^{mn}, \bar{W}_{lj}^{mn}, \bar{V}_{ij}^{mn}, \bar{YZ}_j^{mn}, \bar{XZ}_{jc}^{mn}, \bar{ZZ}_{jc}^{mn}, \bar{YZ}_{jc}^{mn}, \bar{XZ}_{jc}^{mn}, \bar{ZZ}_{jc}^{mn}$ ، تعداد نیم موج‌ها در جهت x و n ، تعداد نیم موج‌ها در جهت y می‌باشند.

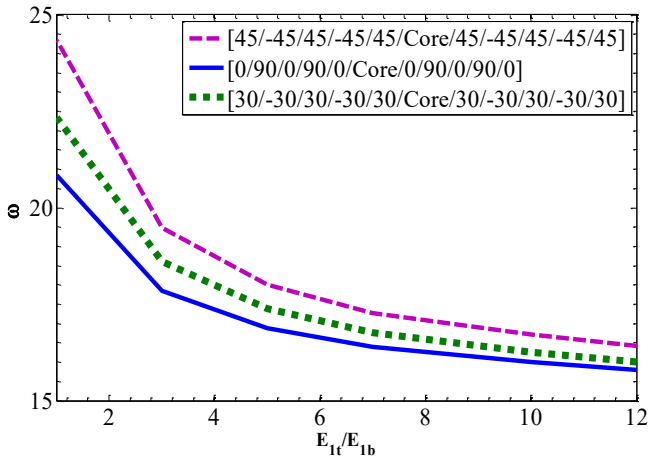
برای به دست آوردن معادلات حاکم بر تحلیل ارتعاش آزاد پنل‌های دوانحنایه ساندویچی مرکب با ضخامت متغیر از روش باقیمانده وزنی به شیوه توابع وزنی گالرکین استفاده می‌شود:

$$\int_0^a \int_0^b ([L]\{\phi\})\{\psi\} dx dy = \{0\}. \quad (27)$$

جدول ۲: خواص مواد به کار رفته در رویه‌ها و هسته پنل ساندویچی [۳]

Table 2. Material properties of a composite sandwich panel [3]

$E_1 = E_2 = E_3 = 6.89 \text{ MPa}, G_{12} = G_{13} = G_{23} = 3.45 \text{ MPa}, \nu = 0, \rho = 97 \text{ kg / m}^3.$	هسته
$E_1 = 131 \text{ GPa}, E_2 = E_3 = 10.34 \text{ GPa}, G_{12} = G_{13} = 6.895 \text{ GPa}, G_{23} = 6.205 \text{ GPa},$ $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.22, \nu_{23} = 0.49, \rho = 1627 \text{ kg / m}^3.$	رویه‌ها



شکل ۲: اثر نسبت مدول الاستیسیته رویه‌ها بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد
Fig. 2. The effect of elastic modulus ratio of the face sheets on the dimensionless fundamental natural frequency

جدول ۳: مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پنل ساندویچی مرکب دوانحنایه با لایه‌چینی متعامد

Table 3. Comparing dimensionless fundamental natural frequency of the doubly curved composite sandwich panel with Cross ply lay-up.

۰/۰/۱		۰/۱		h/a R/a
[۳] HSAPT	روش حاضر	[۳] HSAPT	روش حاضر	
۱۲۳/۶۳۳	۱۱۶/۸۱۹	۱۲/۳۱۶	۱۱/۲۰۵	۱
۶۵/۹۰۶	۶۲/۶۱۰	۶/۷۲۶	۵/۹۷۸	۲
۴۵/۲۷۴	۴۳/۲۵۵	۴/۷۳۷	۴/۴۸۶	۳
۳۴/۹۹۸	۳۱/۸۹۸	۳/۷۷۲	۳/۵۱۱	۴
۲۸/۹۶۷	۲۷/۶۴۸	۳/۲۲۲	۲/۹۶۹	۵
۱۷/۹۰۹	۱۷/۴۸۵	۲/۲۸۳	۲/۱۷۴	۱۰
۱۳/۸۰۰	۱۳/۴۸۰	۱/۹۷۸	۱/۷۷۸	۲۰

جدول ۴: مشخصات هندسی و خواص مواد بکار رفته در رویه‌ها و هسته پنل ساندویچی مرکب دوانحنایه

Table 4. Mechanical and geometrical properties of a doubly curved composite sandwich panel

$E_1 = E_2 = E_3 = 6.89 \text{ MPa}, G_{12} = G_{13} = G_{23} = 3.45 \text{ MPa}, \nu = 0.25, \rho = 130 \text{ kg / m}^3.$	هسته
$E_1 = 131 \text{ GPa}, E_2 = E_3 = 10.34 \text{ GPa}, G_{12} = G_{13} = 6.895 \text{ GPa}, G_{23} = 6.205 \text{ GPa},$ $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.22, \nu_{23} = 0.49, \rho = 1627 \text{ kg / m}^3.$	رویه‌ها
$h_c / h = 0.7, a = 10h, R_{xt} = R_{xb} = R_{yt} = R_{yb} = R = a.$	هندسه

طول به عرض پنل از یک تا سه)، فرکانس طبیعی بی‌بعد برای هر سه نوع لایه‌چینی نزدیک به هم است، ولی با افزایش بیشتر این نسبت، اختلاف بین نتایج لایه‌چینی‌های مختلف شدت افزایش پیدا می‌کند. برای نسبت طول به عرض پنل بزرگ‌تر از سه، فرکانس طبیعی بی‌بعد پنل با لایه‌چینی متعامد بر خلاف دو لایه‌چینی دیگر کاهش می‌یابد.

۴-۴- بررسی اثر نسبت ضخامت‌های رویه‌ها بر روی فرکانس طبیعی پنل ساندویچی دوانحنایه با ضخامت متغیر

در این بخش اثر نسبت ضخامت‌های رویه بالایی به رویه پایینی (h_t/h_b) بر روی پاسخ ارتعاش آزاد پنل ساندویچی دوانحنایه با

مرکب ساندویچی دوانحنایه برای سه نوع لایه‌چینی مختلف متعامد $[0/90/0/90/0/0/90/0/90/0/0]$ ، لایه زاویه‌ای $[45/-45/45/-45/45/45/-45/45/-45/45]$ ، و $[45/0/90/0/90/0/90/0/90/0/90/0]$ ، بررسی می‌شود. مشخصات هندسی و خواص مواد به کار رفته در رویه‌ها و هسته پنل ساندویچی مرکب دوانحنایه در جدول ۴ آورده شده است. در شکل ۳، اثر نسبت طول به عرض پنل بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد پنل مرکب ساندویچی دوانحنایه نشان داده شده است. همانطور که شکل ۳ نشان می‌دهد با افزایش نسبت طول به عرض پنل از یک تا سه فرکانس طبیعی بی‌بعد به سرعت افزایش پیدا می‌کند. هم‌چنین شکل ۳ نشان می‌دهد که برای نسبت‌های پایین طول به عرض پنل (نسبت

فرکانس طبیعی بی‌بعد برای همه‌ی نسبت ضخامت‌های رویه‌ها است و دارای بهترین رفتار دینامیکی می‌باشد و پس از آن، پنل ساندویچی با رویه‌های آلومینیومی دارای رفتار دینامیکی بهتری نسبت به پنل ساندویچی با رویه‌های فولادی است.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، تحلیل ارتعاش آزاد پنل‌های دوانحنایه ساندویچی مرکب و همسانگرد با ضخامت متغیر با استفاده از تئوری مرتبه بالای پنل‌های ساندویچی ارتقا یافته انجام شد. می‌توان ادعا نمود که در این تحقیق یک تئوری جدید مرتبه بالا برای تحلیل ارتعاش آزاد پنل‌های ساندویچی دوانحنایه با ضخامت متغیر ارائه شده است.

پس از بررسی و جمع‌بندی نتایج عددی حاصل از تحلیل ارتعاش آزاد پنل‌های ساندویچی مرکب و همسانگرد با ضخامت متغیر، می‌توان موارد زیر را نتیجه‌گیری نمود:

- تئوری مرتبه بالای پنل‌های ساندویچی جدید مورد استفاده در این مقاله می‌تواند با دقت خوبی رفتار دینامیکی پنل‌های ساندویچی انحنادار را پیش‌بینی کند.

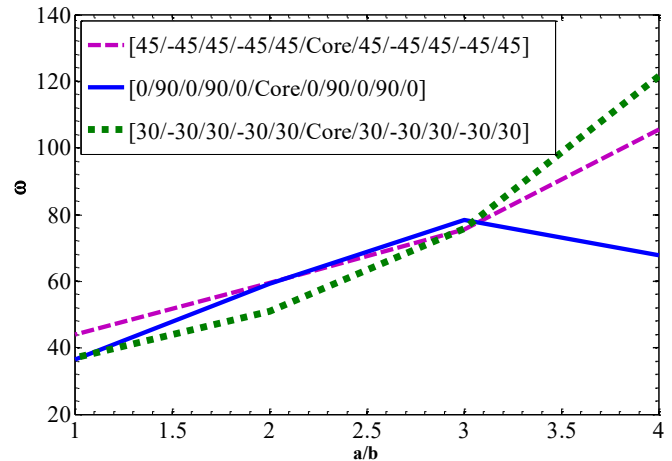
- با افزایش نسبت طول به عرض پنل دوانحنایه ساندویچی مرکب، فرکانس طبیعی بی‌بعد افزایش پیدا می‌کند.

- با افزایش نسبت ضخامت‌های رویه‌ها، فرکانس طبیعی بی‌بعد برای پنل ساندویچی با رویه‌های مرکب، آلومینیومی و فولادی تغییرات محسوسی ندارد. پنل ساندویچی با رویه‌های مرکب دارای بهترین رفتار دینامیکی می‌باشد و پس از آن، پنل ساندویچی با رویه‌های آلومینیومی دارای رفتار دینامیکی بهتری نسبت به پنل ساندویچی با رویه‌های فولادی است.

- با افزایش نسبت مدول الاستیسیته رویه‌ها، فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش می‌یابد و بیشینه نرخ کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد با افزایش نسبت مدول الاستیسیته رویه‌ها مربوط به پنل با لایه‌چینی زاویه‌ای می‌باشد.

- پنل ساندویچی مرکب دوانحنایه با لایه‌چینی زاویه‌ای برای همه‌ی نسبت‌های مدول الاستیسیته رویه‌ها، دارای بیشترین فرکانس طبیعی بی‌بعد و بهترین رفتار دینامیکی است.

به منظور کامل‌تر شدن و کاربردی‌تر شدن پژوهش حاضر، تحقیقات زیر پیشنهاد می‌شود:



شکل ۳: اثر نسبت طول به عرض پنل بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد
 Fig. 3. The effect of the panel length to width ratio on the dimensionless fundamental natural frequency

ضخامت متغیر با رویه‌های با جنس‌های مختلف مطالعه می‌شود. در این مثال سه پنل ساندویچی با رویه‌های بالایی و پایینی با جنس‌های مختلف آلومینیومی، فولادی و مرکب در نظر گرفته شده است. خواص مواد رویه‌ها و هسته مطابق جدول ۵ می‌باشد. همانطور که در ردیف آخر جدول ۵ مشاهده می‌شود با در نظر گرفتن شعاع انحنای منفی و مثبت برای رویه‌های بالایی و پایینی پنل ساندویچی، ضخامت هسته در هر نقطه متفاوت است.

در شکل ۴، اثر نسبت ضخامت‌های رویه‌ها بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد ($\omega = \bar{\omega} a^2 (\rho_t / E_{rt})^{1/2} / h$) پنل ساندویچی دوانحنایه با ضخامت متغیر با جنس‌های مختلف آلومینیومی، فولادی و مرکب نشان داده شده است. همانطور که شکل ۴ نشان می‌دهد با افزایش نسبت ضخامت‌های رویه‌ها برای هر سه نوع پنل، فرکانس طبیعی بی‌بعد تغییرات محسوسی ندارد. واضح است که با افزایش ضخامت رویه بالایی، سفتی پنل به نسبت افزایش وزن پنل، بیشتر افزایش می‌یابد و در نتیجه فرکانس طبیعی افزایش پیدا می‌کند، اما دلیل تغییرات ناچیز فرکانس طبیعی بی‌بعد را باید در نحوه بی‌بعدسازی جستجو کرد، چرا که با افزایش ضخامت رویه، ضخامت کل (h) نیز افزایش می‌یابد و با توجه به اینکه h در مخرج کسر بی‌بعدسازی قرار دارد، باعث کاهش فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌شود. در نتیجه فرکانس طبیعی بی‌بعد تغییرات محسوسی ندارد. هم‌چنین شکل ۴ نشان می‌دهد که پنل ساندویچی با رویه‌های مرکب دارای بیشترین

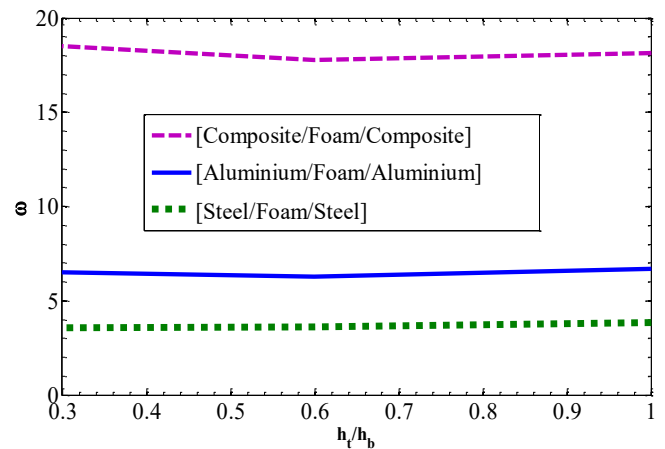
جدول ۵: مشخصات هندسی و خواص مواد به کار رفته در رویه‌ها و هسته پل ساندویچی دوانحنایه با ضخامت متغیر

Table 5. Mechanical and geometrical properties of a doubly curved composite sandwich panel with variable thickness

$E_1 = E_2 = E_3 = 6.89 \text{ MPa}, G_{12} = G_{13} = G_{23} = 3.45 \text{ MPa}, \nu = 0.25, \rho = 130 \text{ kg / m}^3$.	هسته
$E_1 = 131 \text{ GPa}, E_2 = E_3 = 10.34 \text{ GPa}, G_{12} = G_{13} = 6.895 \text{ GPa}, G_{23} = 6.205 \text{ GPa}, \nu_{12} = \nu_{13} = 0.22, \nu_{23} = 0.49, \rho = 1627 \text{ kg / m}^3$.	رویه مرکب
$E_1 = E_2 = E_3 = 70 \text{ GPa}, G_{12} = G_{13} = G_{23} = 26 \text{ GPa}, \nu = 0.3, \rho = 2700 \text{ kg / m}^3$.	رویه آلومینیومی
$E_1 = E_2 = E_3 = 210 \text{ GPa}, G_{12} = G_{13} = G_{23} = 77 \text{ GPa}, \nu = 0.3, \rho = 7800 \text{ kg / m}^3$.	رویه فولادی
$R_{x_t} = R_{y_t} = 4a, R_{x_b} = R_{y_b} = -4a$.	هندسه

Sandwich Panels, Pergamon, 1969, pp. 1-7.

- [2] W. Zhen, C. Wanji, A C0-type higher-order theory for bending analysis of laminated composite and sandwich plates, *Composite Structures*, 92(3) (2010) 653-661.
- [3] H. Biglari, A.A. Jafari, High-order free vibrations of doubly-curved sandwich panels with flexible core based on a refined three-layered theory, *Composite Structures*, 92(11) (2010) 2685-2694.
- [4] G. Giunta, F. Biscani, S. Belouettar, E. Carrera, Hierarchical modelling of doubly curved laminated composite shells under distributed and localised loadings, *Composites Part B: Engineering*, 42(4) (2011) 682-691.
- [5] A.S. Oktem, C. Guedes Soares, Boundary discontinuous Fourier solution for plates and doubly curved panels using a higher order theory, *Composites Part B: Engineering*, 42(4) (2011) 842-850.
- [6] M.S. Qatu, Effect of inplane edge constraints on natural frequencies of simply supported doubly curved shallow shells, *Thin-Walled Structures*, 49(7) (2011) 797-803.
- [7] F. Alijani, M. Amabili, K. Karagiozis, F. Bakhtiari-Nejad, Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells, *Journal of Sound and Vibration*, 330(7) (2011) 1432-1454.
- [8] K.M. Fard, A. Sayyidmousavi, Z. Fawaz, H. Bougherara, Finite element buckling analysis of laminated composite sandwich panels with



شکل ۴: اثر نسبت ضخامت‌های رویه‌ها بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد پل ساندویچی دوانحنایه با ضخامت متغیر

Fig. 4. The effect of the thickness ratio of the face sheets on the dimensionless fundamental natural frequency of the doubly curved composite sandwich panel

- تحلیل ضربه پل‌های مرکب ساندویچی دوانحنایه با استفاده از تئوری جدید.
- تحلیل کمانش و ضربه پل‌های مرکب ساندویچی مخروطی شکل با استفاده از تئوری جدید.
- تحلیل کمانش و ضربه پل‌های دوانحنایه ساخته شده از مواد هدفمند و مواد مرکب با لایه‌های فلزی با استفاده از تئوری جدید.
- تحلیل پس‌کمانش پل‌های ساندویچی با استفاده از تئوری جدید.
- بهینه‌سازی آیروداستیک پل‌های مرکب ساندویچی دوانحنایه.

مراجع

- [1] H.G. Allen, CHAPTER 1 - INTRODUCTION, in: H.G. Allen (Ed.) *Analysis and Design of Structural*

- 107 (2014) 675-697.
- [16] M. Livani, K. MalekzadehFard, S. Shokrollahi, Higher order flutter analysis of doubly curved sandwich panels with variable thicknesses under aerothermoelastic loading, *Structural Engineering and Mechanics*, 60(1) (2016) 1-19.
- [17] A. Shoshtari, R. Montashlo, Linear and Nonlinear free vibration of functionally graded magneto-electroelastic rectangular plate based on the third order shear deformation theory, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering (In Persian)*, 49(4) (2018) 743-758
- [18] Y. Frostig, O.T. Thomsen, High-order free vibrations of sandwich panels with a flexible core, *International Journal of Solids Structures*, 41 (2004) 1697-1724.
- [19] J.N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plate and Shells*, CRC Press, Texas, USA, 2006.
- [20] A. Sankar, S. Natarajan, T.B. Zineb, M. Ganapathi, Investigation of supersonic flutter of thick doubly curved sandwich panels with CNT reinforced facesheets using higher-order structural theory, *Composite Structures*, 127 (2015) 340-355.
- [21] L.R. Kumar, P.K. Datta, D.L. Prabhakara, Dynamic instability characteristics of doubly curved panels subjected to partially distributed follower edge loading with damping, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 218(1) (2004) 67-81.
- [22] H. Matsunaga, Vibration and stability of thick simply supported shallow shells subjected to in-plane stresses, *Journal of Sound and Vibration*, 225(1) (1999) 41-60.
- transversely flexible core carrying attached elastic strip, *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 14(6) (2012) 715-733.
- [9] E. Viola, F. Tornabene, N. Fantuzzi, General higher-order shear deformation theories for the free vibration analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels, *Composite Structures*, 95 (2013) 639-666.
- [10] L. He, Y.-S. Cheng, J. Liu, Precise bending stress analysis of corrugated-core, honeycomb-core and X-core sandwich panels, *Composite Structures*, 94(5) (2012) 1656-1668.
- [11] M. Yaqoob Yasin, S. Kapuria, An efficient layerwise finite element for shallow composite and sandwich shells, *Composite Structures*, 98 (2013) 202-214.
- [12] E. Ghavanloo, S.A. Fazelzadeh, Free vibration analysis of orthotropic doubly-curved shallow shells based on the gradient elasticity, *Composites Part B: Engineering*, 45(1) (2013) 1448-1457.
- [13] D.A. Maturi, A.J.M. Ferreira, A.M. Zenkour, D.S. Mashat, Analysis of sandwich plates with a new layerwise formulation, *Composites Part B: Engineering*, 56 (2014) 484-489.
- [14] X. Wang, G. Shi, A simple and accurate sandwich plate theory accounting for transverse normal strain and interfacial stress continuity, *Composite Structures*, 107 (2014) 620-628.
- [15] F. Tornabene, N. Fantuzzi, E. Viola, E. Carrera, Static analysis of doubly-curved anisotropic shells and panels using CUF approach, differential geometry and differential quadrature method, *Composite Structures*,