



## Reconstruction of Electrical Tomography Images based on Parameter Estimation Method in Inverse Heat Transfer

S. Abbasian<sup>1</sup>, R. Maddahian<sup>1\*</sup>, F. Kowsary<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Faculty of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

<sup>2</sup> School of Mechanical Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

**ABSTRACT:** Electrical tomography is a non-invasive method that is used to visualize the internal structure of an object by applying voltage or current and using an image reconstruction algorithm. One of the main drawbacks of this method is the low-quality of produced images caused by the proposed image reconstruction algorithms. In this research, the idea of image reconstruction by solving the heat conduction equations instead of solving electrical equations is used and the thermal conductivity distribution is calculated. For this purpose, the temperature of the active surface is changed and the generated heat flux between the active and other surfaces is measured. The Levenberg-Marquardt algorithm is employed to estimate the geometric parameters of the unknown objects. Three different test cases are selected and showed that the proposed algorithm has the ability to estimate unknown shapes. The results of sensitivity analysis show that with increasing the value of noise, the shape estimation error increases, but the shape has a good agreement with the original geometry. Also, results of choosing different combinations of active surfaces to create thermal flux show that in addition to the effectiveness of active surfaces in increasing the accuracy of shape estimation, the unknown geometry can be estimated using two thermal flux measurements.

### Review History:

Received: 2018-12-26

Revised: 2019-02-13

Accepted: 2019-05-05

Available Online: 2019-05-16

### Keywords:

Electrical tomography

Image reconstruction

Inverse heat transfer

Levenberg-Marquardt algorithm

Parameter estimation

## 1. INTRODUCTION

After the discovery of x-rays, physicians and treatment centers turned to the use of this method for imaging from inside the body and diagnosis of diseases. This method is called tomography which is used to determine the internal structure of objects. The electrical tomography method is popular due to being non-invasive and contactless. Electrical tomography is one of the methods used to identify the internal structure of objects. Contrary to methods which employ the transmitting signals or radiating rays for imaging, this technique examines the internal tissue of the body by using the difference of electrical properties in the material. Compared to the X-ray method, the electrical technique has several advantages such as low cost, eliminating harmful radiation, and etc. Besides these advantages, the method also has some drawbacks such as low quality and low resolution.

The main components of an electrical tomography system include mounted sensors on the external surface of the test object, a processor and a data acquisition system. The schematic of an electrical tomography system is shown in Fig. 1.

In this system, by applying the electrical voltage or current to the mounted electrodes on the external wall of the object,

the distribution of permittivity inside the object is calculated to determine its structure.

One of the factors that affect the quality of produced images in the tomography method is the reconstruction algorithms. Previous investigations introduced and categorized the image reconstruction algorithms into two groups of iterative methods (Landweber method, Newton-Raphson method) and non-iterative methods (linear back projection, singular value decomposition, Tikhonov method [1-3]). The reconstructed images by previous algorithms have low quality and accuracy.

The inverse heat transfer problems belong to the category of inverse problems. The inverse heat transfer algorithms not only determine the unknown boundary conditions but also estimate the physical properties [4, 5] and the geometrical shape of objects [6, 7]. Therefore, the inverse heat transfer problem is applicable to the electrical tomography system in order to estimate the distribution of thermal conductivity and to identify the internal structure of the body. The governing equations of electrical capacitance tomography are similar to heat conduction. Therefore, instead of solving the electrical equations, the governing equations of heat conduction are used.

In this paper, an image reconstruction algorithm based

\*Corresponding author's email: maddahian@modares.ac.ir



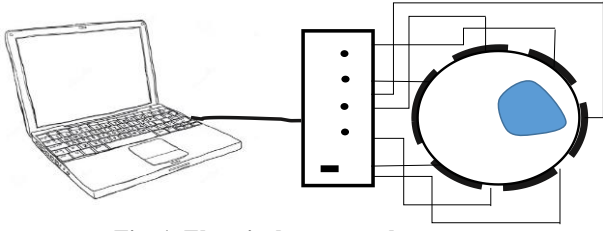


Fig. 1. Electrical tomography system

on inverse heat transfer problems is presented to identify the internal structure of the objects. For this purpose, the image reconstruction process using the Levenberg-Marquardt algorithm and the method of changing the physical properties are implemented in the unstructured mesh.

2. METHODOLOGY

The Levenberg-Marquardt algorithm is a parameter estimation method and based on the reduction of the difference between the measured and estimated thermal heat flux according to Eq. (1).

$$S = \sum_{i=1}^M [Y_i - Q_i(P)]^2 \tag{1}$$

where  $Y$  and  $Q$  are the exact and estimated heat flux vectors. The Levenberg-Marquardt equation for estimating unknown parameters vector ( $P$ ) is presented in Eq. (2).

$$P^{h+1} = P^h + (X^T X + \mu \dot{U})^{-1} X^T (Y - Q(P^h)) \tag{2}$$

where  $X$  is the sensitivity matrix. In the iterative algorithm, the unknown parameters which include the coordinates of the area center ( $x_c, y_c$ ) and the distance of the control points from the center of the object ( $R_i$ ) are estimated in each iteration in order to determine the shape.

3. IMAGE RECONSTRUCTION ALGORITHM

Steps for reconstructing the images are as follows:

1. Choosing a circle in the center of the domain as an initial guess.
2. Estimation of new parameters  $P^{new}$  using Eq. (2).
3. Drawing the initial shape using a spline passing through the new control points [8].
4. Smooth the initial geometry in step 3 using a smoothing algorithm to prevent the formation of a curve with sharp edges [9].
5. Changing the physical properties of computational cells inside the curve
6. Changing the temperature of the active surfaces and calculating the thermal heat flux passing through the surfaces and the determine  $S(P^{h+1})$ .

The steps of the introduced algorithm continue until the convergence is achieved.

The winding number  $\omega$  is used to determine the points inside the curve and change the thermal conductivity

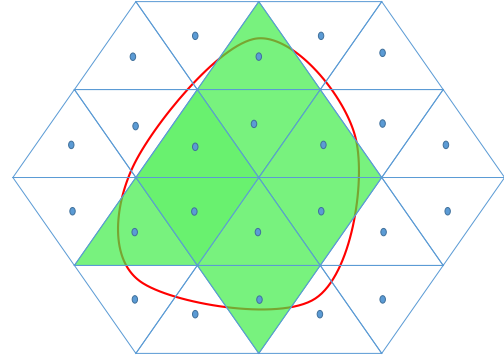


Fig. 2. Changing thermal conductivity of computational cells inside the curve

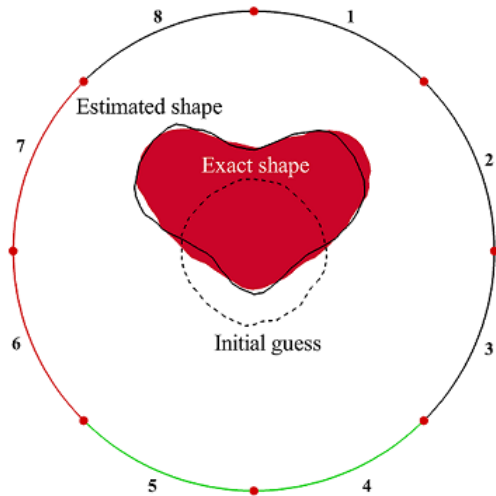


Fig. 3. Results of the presented image reconstruction algorithm for considered geometry

according to Eq. (3).

$$\omega(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\psi} d\theta = \oint_{\psi} \frac{(\psi_x(t) - x_0)\psi'_y(t) - (\psi_y(t) - y_0)\psi'_x(t)}{(\psi_x(t) - x_0)^2 + (\psi_y(t) - y_0)^2} dt \tag{3}$$

Fig. 2 shows the schematic of changing the thermal conductivity and estimating the unknown geometry.

4. RESULTS AND DISCUSSION

In order to evaluate the accuracy of the algorithm, several test cases are considered. One of the test cases is shown in Fig. 3. To create thermal heat flux inside the object, first the temperature of the surfaces 4 and 5 and then the surfaces 6 and 7 is changed. The image reconstruction results show that the geometrical shape is estimated after 10 iterations and with the maximum error of 4%.

Due to the sensitivity of inverse problems to input

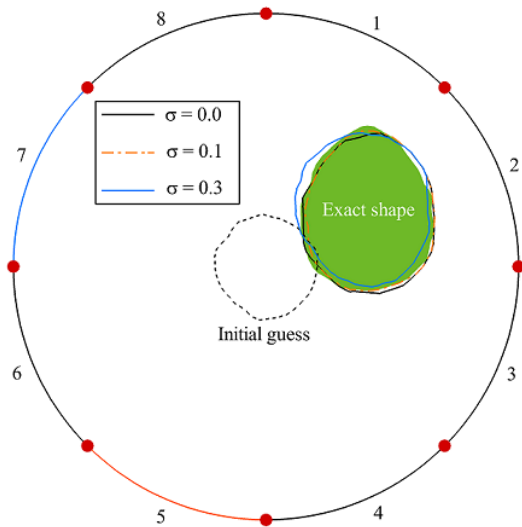


Fig. 4. Results of sensitivity analysis

parameters, the second geometry is considered to examine the effect of the input errors in the shape estimation. The geometry shown in Fig. 4 is considered. Two surfaces 5 and 7 are activated sequentially with different temperatures. The measurements are changed by adding random errors with an amplitude of 10 % and 30 %. The results of the geometric shape estimation show that increasing the measurement error, in addition to increments the image reconstruction error, leads to an increase in the number of iterations.

## 5. CONCLUSIONS

In this paper, an image reconstruction algorithm for the electrical tomography system based on the Levenberg-Marquardt algorithm is presented. For this purpose, the method of changing physical properties is used to identify the geometric shape of the unknown object. Therefore, after estimating the geometric shape in each iteration, the winding number is used to change the thermal conductivity of the computational cells inside the closed curve. The results show that the proposed algorithm is applicable in the tomography

system in order to identify the internal structure of the object. Furthermore, the results of the sensitivity analysis show that despite increasing the image reconstruction error due to increasing the noise in the measurements; the unknown shape can be estimated with little deviation from the exact one.

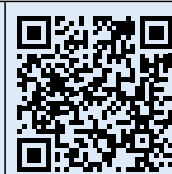
## REFERENCES

- [1] W. Yang, L. Peng, Image reconstruction algorithms for electrical capacitance tomography, *Measurement science and technology*, 14(1) (2002) R1.
- [2] Z. Cui, Q. Wang, Q. Xue, W. Fan, L. Zhang, Z. Cao, B. Sun, H. Wang, W. Yang, A review on image reconstruction algorithms for electrical capacitance/resistance tomography, *Sensor Review*, 36(4) (2016) 429-445.
- [3] K. Li, S. Cong, A review of image reconstruction algorithms in electrical capacitance tomography, in: *Advanced Computational Intelligence (ICACI), 2018 Tenth International Conference on, IEEE, 2018*, pp. 128-133.
- [4] C.-H. Huang, Y. Jan-Yuan, An inverse problem in simultaneously measuring temperature-dependent thermal conductivity and heat capacity, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38(18) (1995) 3433-3441.
- [5] Y. Zhou, X.-x. Hu, Two methods for estimation of temperature-dependent thermal conductivity based on constant element approximation, *International Journal of Thermal Sciences*, 135 (2019) 104-116.
- [6] M. Siavashi, F. Kowsary, E. Abbasi-Shavazi, Detection of flaws in a two-dimensional body through measurement of surface temperatures and use of conjugate gradient method, *Computational Mechanics*, 46(4) (2010) 597-607.
- [7] M. Darroudi, F. Kowsary, Detection and Accurate Estimation of Geometrical Parameters of Defects on the Internal Surface of Pipes Using Inverse Heat Conduction Method, *Modares Mechanical Engineering*, 18(4), (2018) 211-222. (in Persian)
- [8] R.H. Bartels, J.C. Beatty, B.A. Barsky, An introduction to splines for use in computer graphics and geometric modeling, Morgan Kaufmann, 1995.
- [9] M.B. Haddadi, R. Maddahian, A new algorithm for image reconstruction of electrical capacitance tomography based on inverse heat conduction problems, *IEEE Sensors Journal*, 16(6) (2016) 1786-1794.

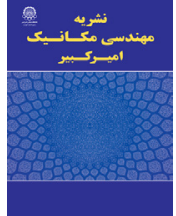
### HOW TO CITE THIS ARTICLE

S. Abbasian, R. Maddahian, F. Kowsary, Reconstruction of Electrical Tomography Images based on Parameter Estimation Method in Inverse Heat Transfer, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 53(Special Issue 1) (2021) 121-124.

DOI: 10.22060/mej.2019.15516.6144







## بازسازی تصاویر توموگرافی الکتریکی بر اساس روش تخمین پارامتر در انتقال حرارت معکوس

سامان عباسیان<sup>۱</sup>، رضا مداحیان<sup>۱\*</sup>، فرشاد کوثری<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

<sup>۲</sup> دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷-۱۰-۰۵

بازنگری: ۱۳۹۷-۱۱-۲۴

پذیرش: ۱۳۹۸-۰۲-۱۵

ارائه آنلاین: ۱۳۹۸-۰۲-۲۶

### کلمات کلیدی:

توموگرافی الکتریکی

بازسازی تصویر

انتقال حرارت معکوس

الگوریتم لونبرگ-مارکوارت

تخمین پارامتر

**خلاصه:** توموگرافی الکتریکی روشی غیرتماسی است که با اعمال ولتاژ یا جریان الکتریکی به هر سنسور و استفاده از یک الگوریتم بازسازی تصویر، ساختار داخلی جسم را شناسایی می‌کند. یکی از علل اصلی کیفیت پایین تصاویر تولیدی در این روش الگوریتم‌های بازسازی تصویر بکارگرفته شده است. در این مقاله، از ایده بازسازی تصویر با استفاده از حل معادلات انتقال حرارت رسانشی به جای حل معادلات الکتریکی برای محاسبه توزیع رسانایی حرارتی استفاده شده است. بدین منظور با تغییر دمای سطح فعال، شارهای حرارتی عبوری از هر سطح توسط سنسور محاسبه می‌شود، همچنین از الگوریتم لونبرگ - مارکوارت برای تخمین پارامترهای هندسی جسم مجهول و بازسازی تصویر در توموگرافی الکتریکی استفاده شده است. با انتخاب سه مسأله برای بررسی قابلیت الگوریتم نشان داده شد که این الگوریتم قادر به شناسایی هندسه مجهول است. همچنین با انجام آنالیز حساسیت نشان داده شد که با افزایش میزان اغتشاش، خطای ایجاد شده در تخمین شکل هندسی افزایش می‌یابد اما همچنان روش به ازای میزان اغتشاش اندازه‌گیری ۳۰ درصد، در تخمین هندسه موفق عمل می‌کند. همچنین نتایج حاصل از انتخاب ترکیب‌های متفاوت از سطوح فعال نشان داد که علاوه بر مؤثر بودن سطوح فعال در افزایش دقت تخمین شکل، هندسه مجهول به ازای دو مرتبه اندازه‌گیری شار حرارتی قابل تخمین است.

### ۱- مقدمه

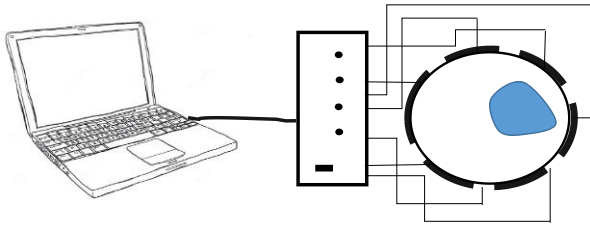
افزایش یافته است. از این رو، به دلیل عدم امکان بازرسی و تشخیص عیوب برخی فرآیندها نظیر اختلاط، رسوب و ته‌نشینی ذرات جامد در خطوط انتقال سیالات حاوی فاز جامد، وجود مانع داخل لوله‌ها، وجود ترک و حفره داخل اجسام صلب، روش‌های توموگرافی در صنعت نیز بکار گرفته شده است [۱-۳].

توموگرافی الکتریکی یکی از روش‌هایی است که به منظور شناسایی ساختار داخلی اجسام مورد استفاده قرار می‌گیرد. این روش برخلاف سایر روش‌ها که با ارسال و دریافت سیگنال یا تابش اشعه و دریافت بازتاب آن تصویر داخل بدن را ایجاد می‌کنند، با استفاده از اختلاف خواص الکتریکی مواد، بافت داخلی بدن را تشخیص می‌دهد.

پس از کشف اشعه ایکس، پزشکان و مراکز درمانی به استفاده از این روش برای تصویربرداری از داخل بدن و تشخیص بیماری‌ها روی آوردند. این روش که به دلیل غیرتماسی بودن و عدم نفوذ به جسم سعی در تشخیص ساختار داخلی اجسام دارد، توموگرافی یا معادل فارسی آن برش‌نگاری گفته می‌شود. امروزه علاوه بر روش اشعه ایکس، از روش‌هایی مانند مافوق صوت، تشدید مغناطیسی به منظور تصویربرداری از داخل بدن استفاده می‌شود. با گذشت زمان و توسعه مراکز صنعتی نیاز به کنترل فرآیندها و ماشین آلات صنعتی

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: maddahian@modares.ac.ir





شکل ۱. شماتیک سیستم توموگرافی الکتریکی  
Fig. 1. Schematic of an electrical tomography system

استفاده از سیستم پیشنهاد شده نشان داد که الگوریتم‌های تکراری قابلیت تشخیص چند جسم را دارند. سونگ و همکاران [۱۴]، سیستم توموگرافی خازنی به منظور اندازه‌گیری سطح مایعات طراحی کردند و با حذف کابل اتصال سنسور به سیستم داده‌برداری خطای ناشی از این کابل را حذف کردند. سیستم طراحی شده قابلیت اتصال به خطوط انتقال مختلف با سایزهای متفاوت را داشته و تعداد سنسورها با قطر لوله قابل تغییر است. نتایج نشان داد که این سیستم قابلیت بازسازی تصویر جریان‌های چندفازی را دارد. محمد و همکاران [۱۵]، یک سیستم توموگرافی با سنسورهای قابل جداسازی به منظور شناسایی جریان آب و نفت طراحی کردند. نتایج نشان داد که این سیستم قابلیت استفاده به عنوان یک ابزار اندازه‌گیری جریان را دارد.

عملکرد یک سیستم توموگرافی الکتریکی خازنی با اعمال ولتاژ الکتریکی به هر سنسور آغاز می‌شود و با ایجاد میدان الکتریکی در داخل جسم طبق رابطه (۱) بین هر جفت الکتروود جریان الکتریکی ایجاد می‌شود:

$$\nabla \cdot (\epsilon(r, \theta) \nabla \phi(r, \theta)) = 0 \quad (1)$$

که  $\nabla \phi$  میدان توزیع پتانسیل الکتریکی در مختصات استوانه‌ای  $r$  و  $\theta$  است و در صورت مشخص بودن ضریب گذردهی  $\epsilon$ ، از رابطه (۱) شار الکتریکی به منظور محاسبه ظرفیت الکتریکی طبق رابطه (۲) محاسبه می‌شود:

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\iint \epsilon(r, \theta) \nabla \phi(r, \theta) d\Gamma}{V} \quad (2)$$

که در این رابطه  $C$  معرف ظرفیت الکتریکی و  $V$  معرف ولتاژ الکتریکی و  $q$  معرف شار الکتریکی است. اما از آنجا که در سیستم توموگرافی الکتریکی، هدف محاسبه توزیع ضریب گذردهی برای

این روش در مقایسه با روش اشعه ایکس، دارای سیستمی ساده و ارزان است و همچنین با استفاده از جریان و ولتاژ الکتریکی، اشعه‌های مضر را حذف کرده است اما در کنار این مزایا دارای کیفیت و وضوح پایین تصاویر تولید شده است [۴]. مسائل پزشکی بسیاری مانند لخته شدن خون در ریه وجود دارد که به دلیل متفاوت بودن ضریب رسانایی الکتریکی برای بافت بدن، خون و هوا با استفاده از روش توموگرافی الکتریکی قابل تشخیص است [۵]. از دیگر بیماری‌های قابل شناسایی در روش توموگرافی الکتریکی می‌توان به سرطان سینه و مشکلات ریوی اشاره کرد [۶-۸]. مانند سایر روش‌های توموگرافی، این روش نیز علاوه بر کاربردهای پزشکی در فرآیندهای صنعتی مانند فرآیندهای جریان چندفازی، بازرسی غیرمخرب اجزا ماشین‌آلات صنعتی، شناسایی منبع آلودگی در زمین نیز استفاده می‌شود. در این روش امکان تصویربرداری از فرآیندهای صنعتی حین اجرای فرآیند و هم در مواقعی که سیستم از خط خارج است، وجود دارد [۹-۱۱]. بطور کلی اجزای اصلی یک سیستم توموگرافی الکتریکی مطابق شکل ۱ شامل سنسور، پردازنده و یک سیستم داده‌برداری به منظور تبادل اطلاعات بین سنسورهای نصب شده بر روی دیوار خارجی جسم و پردازنده است. در این سیستم با اعمال ولتاژ یا جریان الکتریکی به الکتروودهای نصب شده بر روی دیوار خارجی جسم مورد نظر توزیع رسانایی الکتریکی داخل جسم محاسبه می‌شود. اطلاعات دریافتی از سنسورها پس از جمع‌آوری توسط سیستم داده‌برداری به پردازنده جهت بازسازی تصویر و نمایش ارسال می‌شود.

کیفیت پایین تصاویر را که یکی از نقاط ضعف سیستم‌های توموگرافی الکتریکی است می‌توان با طراحی بهینه سیستم داده‌برداری به منظور کاهش خطا، بهبود بخشید. بدین منظور در سال‌های اخیر، تحقیقات بسیاری به منظور افزایش کیفیت تصاویر تولید شده در روش توموگرافی انجام شده است. به عنوان نمونه، یانگ [۱۲]، پارامترهای فیزیکی مؤثر در سیستم توموگرافی از قبیل تعداد و اندازه سنسورها، شکل سنسور را بررسی کرد و نشان داد که تعداد و مکان قرارگیری سنسورها در یک سیستم توموگرافی حائز اهمیت است. از طرفی محدودیت در اندازه الکتروود نیز وجود دارد. کائو و همکاران [۱۳]، به منظور ساده‌سازی عملیات داده‌برداری، یک سیستم توموگرافی خازنی طراحی کردند و تمامی مراحل ارسال و دریافت داده با یک سیستم کنترلی جدید بررسی کردند. نتایج بازسازی تصویر به‌دست آمده با

تشخیص جسم مجهول است عکس رابطه (۲) برقرار است.

$$\varepsilon = f^{-1}(C) \quad (3)$$

لذا برای محاسبه توزیع ضریب گذردهی الکتریکی، تک تک سنسورها با ولتاژ الکتریکی تحریک می‌شوند و سپس ظرفیت الکتریکی بین هر جفت سنسور منحصر بفرد اندازه‌گیری و به منظور بازسازی تصویر به پردازنده ارسال می‌شود. به طور مثال در یک سیستم با ۸ سنسور، ظرفیت الکتریکی بین دو الکتروود ۱ و ۴ برابر با ظرفیت الکتریکی بین دو الکتروود ۴ و ۱ است و تنها یک بار محاسبه شده و ظرفیت الکتریکی برای یک الکتروود به تنهایی محاسبه نمی‌شود. لذا تعداد اندازه‌گیری‌هایی که در یک سیستم توموگرافی استاندارد با  $M$  سنسور انجام می‌گیرد، از رابطه (۴) محاسبه می‌شود [۱۶].

$$\text{تعداد اندازه‌گیری} = \frac{M(M-1)}{2} \quad (4)$$

که به عنوان مثال برای مثال برای یک سیستم توموگرافی با ۸ سنسور تعداد ۲۸ اندازه‌گیری خواهیم داشت.

با توجه به برقراری رابطه (۳) در یک سیستم توموگرافی الکتریکی، این مسائل جز مسائل معکوس مهندسی به حساب می‌آیند. مسائل معکوس، دسته‌ای از مسائل هستند که با هدف تعیین علت پاسخ یک مسئله انجام می‌شوند. به عبارت دیگر، مسائلی که در آن جواب مشخص و هدف تعیین صورت مسئله است. بکارگیری این روش‌ها با مشکلاتی همراه است که مشکل اصلی را می‌توان به حساس بودن این مسائل به اندک تغییرات ورودی در مسئله مربوط دانست. در علوم ریاضی این مسائل به دلیل عدم وجود، یکتایی و پایداری جواب تحت تأثیر کوچکترین تغییر در ورودی مسئله، جزء مسائل بدرفتار محسوب می‌شوند [۱۷]. از این‌رو، در پردازنده از الگوریتم‌هایی که برای محاسبه توزیع ضریب گذردهی الکتریکی و شناسایی ساختار داخلی جسم ارایه شده است، استفاده می‌شود. این الگوریتم‌ها تحت عنوان الگوریتم‌های بازسازی تصویر شناخته می‌شوند. لذا یکی دیگر از عواملی که در کیفیت تصاویر تولیدی در توموگرافی تأثیرگذار است، مربوط به الگوریتم‌هایی است که برای پردازش و بازسازی تصویر به کار برده می‌شود. در سال‌های گذشته تحقیقات بسیاری بر روی این الگوریتم‌ها انجام شده است. محققین مختلفی سعی بر معرفی و دسته‌بندی الگوریتم‌های بازسازی تصویر به دو دسته روش‌های

تکراری (روش لندوبر، روش نیوتن-رافسون) و روش‌های غیرتکراری (روش جایگذاری خطی، روش تجزیه منفرد، روش تیخونوف) کرده‌اند [۲۰-۱۸]. پنگ و همکاران [۲۱]، با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی نظیر روش تیخونوف و لندوبر و مقایسه آن با روش جایگذاری خطی، کیفیت تصاویر تولید شده را بررسی کردند و نتایج نشان داد که روش‌های بهینه‌سازی دارای کیفیت تصویر بهتری هستند. جانگ و همکاران [۲۲]، از روش لندوبر اصلاح شده به منظور بهبود کیفیت تصاویر پردازش شده و افزایش سرعت همگرایی استفاده کردند. نتایج نشان داد که این روش دارای خطای کمتری نسبت به روش مرسوم لندوبر است. یان و همکاران [۲۳]، از ترکیب دو الگوریتم لندوبر و تیخونوف به منظور بازسازی تصویر استفاده کردند بدین صورت که نتایج اولیه از روش لندوبر به عنوان ورودی روش تیخونوف استفاده شد. نتایج نشان داد که این روش علاوه بر بهبود کیفیت تصاویر تولیدی، باعث افزایش سرعت همگرایی و کاهش محاسبات می‌شود. الگوریتم‌های بازسازی تصویر ارائه شده به منظور حل مسأله معکوس الکتریکی هستند که علاوه بر کیفیت پایین تصاویر، دارای دقت بازسازی تصویر پایینی هستند. همچنین شاخه‌ای دیگر از مسائل معکوس مربوط به مسائل انتقال حرارت معکوس است که علاوه بر نوع شرط مرزی، مشخصاتی نظیر خواص فیزیکی ماده [۲۴ و ۲۵]، منبع حرارتی [۲۶]، مرز هندسی جسم [۲۷ و ۲۸]، شکل هندسی اجسام [۲۹ و ۳۰] تخمین زده می‌شود. از آنجا که مسائل توموگرافی جزء مسائل تشخیص ساختار داخلی جسم است لذا یکی دیگر از کاربردهای مسائل انتقال حرارت معکوس را می‌توان در سیستم‌های توموگرافی عنوان کرد که با حل معادلات حاکم بر انتقال حرارت به جای حل معادلات الکتریکی حاکم بر سیستم‌های توموگرافی، ساختار داخلی شناسایی می‌شود. از این‌رو، حدادی و مداحیان [۳۱]، با مقایسه معادله حاکم بر سیستم توموگرافی الکتریکی و معادله حاکم بر رسانش حرارتی، یک الگوریتم بازسازی تصویر در سیستم توموگرافی الکتریکی به منظور تشخیص شکل دقیق جسم مجهول و افزایش دقت بازسازی تصویر ارائه کردند. به طوری که در این تحقیق از شبکه متحرک منحنی‌الخط به منظور تخمین شکل هندسی جسم مجهول استفاده شد و نتایج نشان داد که هندسه جسم مجهول توسط الگوریتم لونبرگ-مارکوارت در تعداد تکرار کمتری نسبت به روش گرادیان مزدوج تخمین زده شد. روش پیشنهادی

نیز با محاسبه توزیع رسانایی حرارتی به دلیل منحصربفرد بودن آن برای هر ماده، می‌توان ساختار داخلی جسم را شناسایی کرد. در این صورت عکس رابطه (۶) برقرار است و می‌توان از مسائل رسانش حرارتی معکوس برای محاسبه خواص ترموفیزیکی ماده استفاده کرد. عملکرد الگوریتم لونیبرگ-مارکوارت که جزء روش‌های تخمین پارامتر است براساس کاهش اختلاف مقادیر اندازه‌گیری شده و مقادیر تخمین زده شده، است. در این تحقیق تابع هدف، اختلاف بین مقادیر شار حرارتی اندازه‌گیری شده و شار حرارتی تخمین زده شده است که طبق رابطه (۷) بیان می‌شود. معادله روش لونیبرگ-مارکوارت برای تخمین پارامترهای مجهول طبق رابطه (۸) ارائه شده است. در مسأله حاضر، پارامترهای مجهول شامل پارامترهای هندسی برای تشخیص مکان و شکل هندسی جسم است.

$$S = \sum_{i=1}^M [Y_i - Q_i(P)]^2 \quad (7)$$

$Y$  بردار شار حرارتی دقیق و  $Q$  بردار شار حرارتی به ازای بردار مجهولات  $P$  تخمین زده شده در تکرار  $h$  است.

$$P^{h+1} = P^h + (X^T X + \mu \Omega)^{-1} X^T (Y - Q(P^h)) \quad (8)$$

که در آن  $X$  ماتریس حساسیت و مؤلفه‌های آن مشتق بردار شار حرارتی اندازه‌گیری شده نسبت به تغییر پارامتر مجهول است،  $\Omega$  ماتریس قطری محاسبه شده از ماتریس حساسیت و  $\mu$  پارامتر تنظیم که برای تکرار اول ۰/۰۰۱ انتخاب شده است و در هر تکرار مقدار آن تغییر می‌کند.

به منظور کمینه کردن رابطه (۷) نیاز است که از تابع هدف نسبت به پارامترهای مجهول طبق رابطه (۹) مشتق گرفته شود:

$$\frac{\partial S}{\partial P} = -2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^M \frac{\partial Q_i}{\partial P_j} [Y_i - Q_i] = 0 \quad (9)$$

در رابطه (۹)  $n$  بیانگر تعداد پارامترهای مجهول و  $M$  تعداد سنسور است. و ترم  $\frac{\partial Q_i}{\partial P_j}$  ماتریس حساسیت<sup>۲</sup> است. که برای محاسبه مؤلفه‌های ماتریس حساسیت که معرف ضرایب حساسیت هستند از روش تفاضل محدود مطابق رابطه (۱۰) استفاده شده است که در این

دارای محدودیت‌هایی در زمینه شکل‌های هندسی پیچیده و همچنین اشکال هندسی نامشخص بوده است.

به دلیل فیزیکی بودن روش شبکه متحرک در تخمین شکل هندسی جسم مجهول، مشکلات بیشتری در حین بازسازی تصویر وجود دارد. از طرفی یکنواختی شبکه در تخمین شکل هندسی تأثیرگذار است. بنابراین در این مقاله، یک الگوریتم بازسازی تصویر بر مبنای مسائل انتقال حرارت معکوس برای شناسایی ساختار داخلی جسم ارائه شده است. بدین منظور، فرآیند بازسازی تصویر با استفاده از الگوریتم لونیبرگ-مارکوارت و روش تغییر خواص ترموفیزیکی در شبکه بی‌سازمان انجام شده است که برخلاف روش شبکه متحرک باعث عدم وابستگی فرآیند بازسازی تصویر به شبکه‌بندی مسأله می‌شود. لذا روش پیشنهاد شده دارای محدوده عملکرد بیشتری نسبت به سایر روش‌های مشابه است. بنابراین، پس از معرفی معادلات حاکم و ارایه الگوریتم لونیبرگ-مارکوارت، ۳ نمونه مسأله به منظور بررسی عملکرد الگوریتم در سیستم توموگرافی ارائه می‌شود. سپس با آنالیز حساسیت و بررسی اثر سطوح فعال، میزان حساسیت روش به وجود خطای اندازه‌گیری در مسأله و تأثیر سطوح فعال بر تخمین شکل جسم مجهول بررسی می‌شود. در انتها نیز در مورد مسائل نمونه بحث و نتیجه‌گیری می‌شود.

## ۲- معادلات حاکم

مقایسه معادله حاکم بر سیستم توموگرافی، رابطه (۱)، و معادله حاکم بر رسانش حرارتی، رابطه (۵)، نشان می‌دهد که هر دو معادله از قانون پواسون<sup>۱</sup> پیروی می‌کنند. بنابراین می‌توان با تغییر دمای هر سطح از استوانه، بین هر جفت سطح طبق رابطه (۶) شار حرارتی ایجاد کرد.

$$\nabla \cdot (k(r, \theta) \nabla T(r, \theta)) = 0 \quad (5)$$

$$Q = \iint_T -k(r, \theta) \nabla T(r, \theta) d\Gamma \quad (6)$$

که در آن  $T$  دما و  $k$  توزیع رسانایی حرارتی است. همانطور که در سیستم توموگرافی الکتریکی هدف محاسبه توزیع ضریب گذردهی الکتریکی به منظور شناسایی ساختار داخلی جسم است، در این روش



هندسی همانطور که در ادامه توضیح داده شده است، انجام می‌شود.

### ۳-۱- الگوریتم بازسازی تصویر

الگوریتم در نظر گرفته شده برای بازسازی تصاویر به شرح زیر است:

۱. تعیین یک حدس اولیه برای جسم مجهول. در این تحقیق حدس اولیه یک دایره بوده که در مرکز مقطع استوانه قرار گرفته است.
  ۲. شبیه‌سازی مسئله و محاسبه تابع هدف طبق رابطه (۸)
  ۳. محاسبه ماتریس حساسیت  $X$  و سپس محاسبه ماتریس قطری  $\Omega$
  ۴. تخمین پارامترهای مجهول  $P^{new}$  با استفاده از رابطه (۷)
  ۵. تشکیل شکل هندسی با استفاده از منحنی هموار<sup>۱</sup> [۳۳]
  ۶. هموارسازی هندسه تشکیل شده در مرحله ۵ با استفاده از الگوریتم هموارسازی<sup>۲</sup>
  ۷. محاسبه شارهای حرارتی به ازای شکل هندسی تخمین زده شده و محاسبه  $S(P^{h+1})$
  ۸. اگر  $S(P^{h+1}) \geq S(P^h)$  باشد مقدار  $\mu^h$  با  $10\mu^h$  جایگزین می‌شود. بازگشت به مرحله ۴ و تخمین پارامترهای جدید.
  ۹. اگر  $S(P^{h+1}) \leq S(P^h)$  باشد مقدار  $\mu^h$  با  $0.1\mu^h$  جایگزین می‌شود و مقدار  $P^{h+1}$  قبول می‌شود.
  ۱۰. اگر معیار همگرایی برقرار باشد محاسبات به اتمام می‌رسد در غیر این صورت با  $P^{h+1}$  به مرحله ۳ بازگشته و عمل تخمین پارامتر تکرار می‌شود.
- این روند تا برقراری معیار همگرایی ادامه می‌یابد.

### ۳-۲- الگوریتم هموارسازی

- در طی روند حل، به منظور جلوگیری از تشکیل منحنی‌هایی غیر هموار شامل نقاط نوک‌تیز یا هندسه با حجم منفی نظیر شکل ۲، از یک الگوریتم هموارسازی استفاده می‌شود [۳۴]. مراحل هموارسازی منحنی اولیه در ادامه توضیح داده شده است.
۱. با عبور منحنی بسته از نقاط کنترلی، هندسه تخمین زده شده تشکیل می‌شود (منحنی خط چین در شکل ۳).

صورت هر پارامتر به مقدار کوچک  $\nu$  تغییر کرده و سپس مسأله مستقیم برای محاسبه شارهای حرارتی ناشی از تغییر پارامتر حل می‌شود. در مسائل غیر خطی به دلیل وابستگی ضرایب حساسیت به پارامترهای مجهول، نیاز به خطی‌سازی شارهای تخمین زده شده حول پارامتر مجهول است که با استفاده از بسط سری تیلور طبق رابطه (۱۱) بیان می‌شود:

$$\frac{\partial Q}{\partial P} = \frac{Q(P+\nu) - Q(P)}{\nu} \quad (10)$$

$$Q(P) = Q(P^h) + \frac{\partial Q}{\partial P}(P - P^h) \quad (11)$$

حال با جایگذاری رابطه (۱۱) در رابطه (۹) و افزودن پارامتر تنظیم، معادله (۷) حاصل می‌شود. از آنجایی که الگوریتم لوبنبرگ-مارکوارت جزء روش‌های تکراری محسوب می‌شود بنابراین برای یک معیار همگرایی  $\epsilon$  طبق رابطه (۱۲) بیان می‌شود.

$$S < \epsilon \quad (12)$$

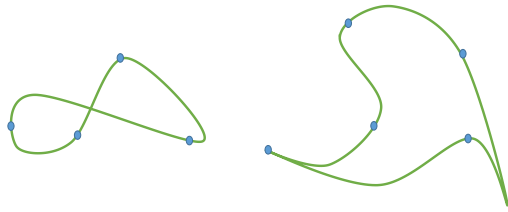
### ۳- روش بازسازی تصویر

از آنجا که الگوریتم لوبنبرگ-مارکوارت جز مسائل تکراری در حوزه تخمین پارامتر محسوب می‌شود، بنابراین در هر تکرار پارامترهای در نظر گرفته شده در بردار مجهولات به منظور بازسازی تصویر و تعیین شکل هندسی، تخمین زده می‌شود. از این رو، به هر یک از هندسه‌های مجهول تعدادی پارامتر اختصاص داده شده است که علاوه بر مختصات مرکز سطح  $(x_c, y_c)$  که برای هر هندسه در نظر گرفته شده است،  $R$  فاصله نقاط کنترلی از مرکز سطح نیز به عنوان پارامتر مسأله انتخاب شده است که تعداد این نقاط برای هر هندسه متفاوت است. بردار مجهولات طبق رابطه (۱۳) در نظر گرفته شده است.

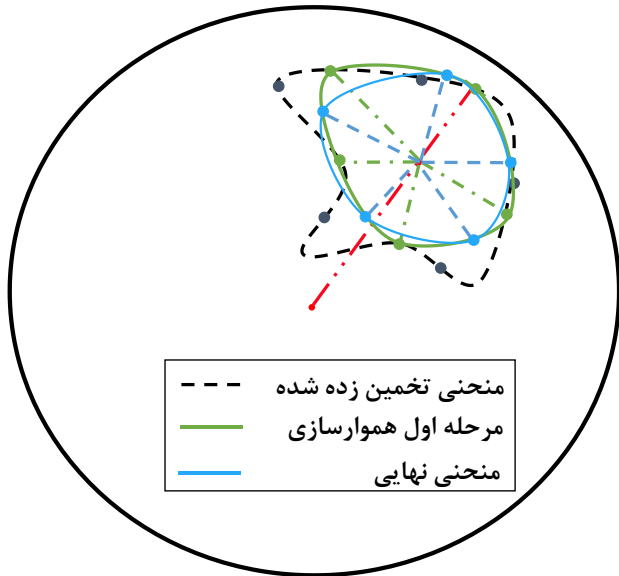
$$P = [x_c, y_c, R_1, R_2, R_3, \dots, R_i], \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

برای شبیه‌سازی مسأله، ابتدا با در نظر گرفتن یک هندسه دقیق برای جسم مجهول، مسأله مستقیم به منظور اندازه‌گیری شارهای حرارتی دقیق حل می‌شود. برای بازسازی تصویر، مسأله معکوس برای تخمین پارامترهای مجهول [۳۲] و تخمین شکل

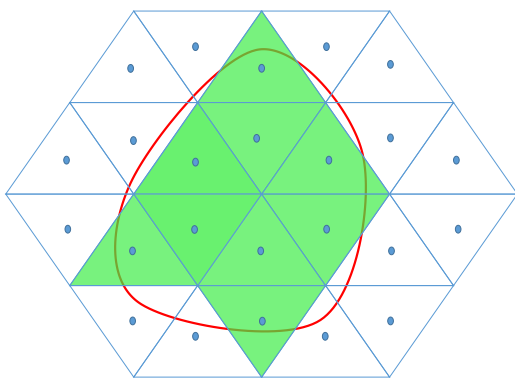
1 Parametric Spline  
2 Smoothing Method



شکل ۲. منحنی‌های غیرقابل قبول در طی فرآیند تخمین هندسه جدید  
Fig. 2. The unacceptable curves during the process of geometry estimation



شکل ۳. روند هموارسازی هندسه تخمین زده شده در طی فرآیند بازسازی تصویر  
Fig. 3. The smoothing process of estimated geometry during image reconstruction



شکل ۴. نحوه تغییر ضریب رسانایی حرارتی شبکه‌های داخل منحنی عبوری از نقاط کنترلی  
Fig. 4. The schematic of changing thermal conductivity of computational cells inside the curve passing through the control points

۲. برای مرحله اول هموارسازی، با عبور خطی از مرکز مقطع استوانه تا مرکز سطح منحنی اولیه و امتداد آن تا نقطه برخورد با مرکز منحنی اولیه، اولین نقطه جدید ایجاد می‌شود.

۳. سایر نقاط به اندازه یک زاویه مشخص و یکسان نسبت به نقطه اولیه بر روی منحنی تخمین زده شده در مرحله ۱ مشخص می‌شوند.

۴. منحنی هموار شده مرحله دوم با استفاده از نقاط تعیین شده در مرحله ۳ مشخص می‌شود (منحنی سبز رنگ در شکل ۳).

۵. مرکز سطح منحنی هموار ایجاد شده در مرحله ۴ تعیین می‌شود.

۶. برای مرحله دوم هموارسازی، از مرکز سطح منحنی ثانویه خطی با زاویه صفر تا برخورد با مرکز منحنی و تشکیل اولین نقطه ادامه می‌یابد.

۷. سایر نقاط به اندازه یک زاویه مشخص و یکسان نسبت به نقطه اولیه بر روی منحنی تخمین زده شده در مرحله ۴ مشخص می‌شوند.

۸. منحنی هموار شده نهایی با استفاده از نقاط تعیین شده در مرحله ۷ مشخص می‌شود (منحنی آبی رنگ در شکل ۳).

مراحل هموارسازی منحنی اولیه عبوری از نقاط کنترلی تخمین زده شده در شکل ۳ آمده است.

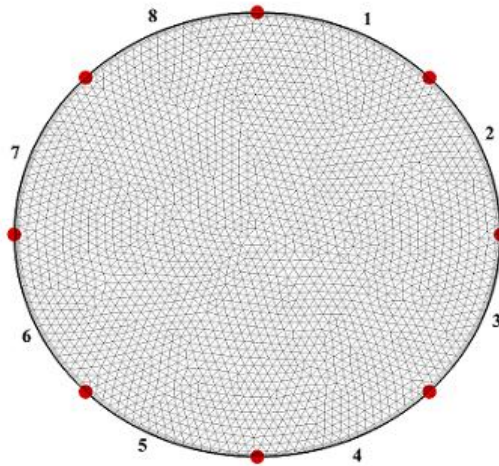
به منظور تغییر رسانایی حرارتی هندسه تشکیل شده به کمک منحنی هموار عبوری از نقاط کنترلی از عدد واین‌دینگ<sup>۱</sup>  $\omega$  مطابق رابطه (۱۴) که برای مشخص کردن نقاط داخل منحنی است [۳۵]، استفاده می‌شود. در رابطه (۱۴) نقاط داخل منحنی هموار مشخص شده و با تغییر ضریب رسانایی حرارتی به ضریبی متفاوت با ضریب رسانایی حرارتی نقاط بیرون منحنی، هندسه با ماده‌ای متفاوت ایجاد می‌شود. شکل ۴ نحوه تغییر ضریب رسانایی حرارتی برای ایجاد ماده را نشان می‌دهد.

$$\omega(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\psi} d\theta = \oint_{\psi} \frac{(\psi_y(t) - y_0)\psi'_x(t) - (\psi_x(t) - x_0)\psi'_y(t)}{(\psi_x(t) - x_0)^2 + (\psi_y(t) - y_0)^2} dt \quad (14)$$

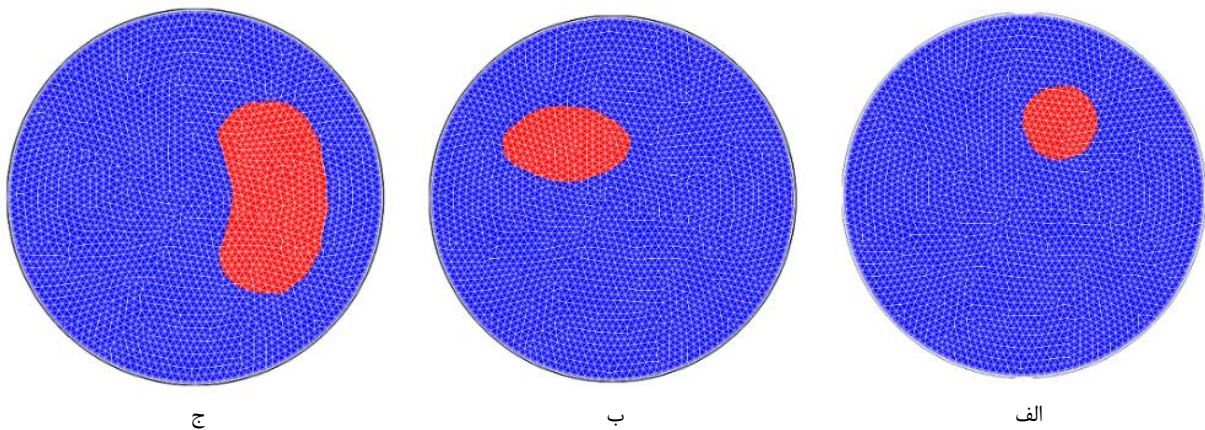
که  $\psi_x$  و  $\psi_y$  به ترتیب معرف منحنی هموار بر حسب  $x$  و  $y$  است.  $(x_0, y_0)$  مختصات نقطه مورد نظر که در اینجا مرکز هر حجم کنترل محاسباتی است.

همانطور که در شکل ۴ نشان داده شده است هندسه ایجاد شده با روش تغییر رسانایی حرارتی بر منحنی هموار منطبق نیست. برای

1 Winding Number



شکل ۵. هندسه و شبکه‌بندی در نظر گرفته شده برای بازسازی تصویر  
 Fig. 5. The geometry and considered mesh for image reconstruction



شکل ۶. نمونه مسائل در نظر گرفته شده برای بازسازی تصویر (الف هندسه ۱) (ب هندسه ۲) (ج هندسه ۳)  
 Fig. 6. Considered test cases for image reconstruction a) geometry No. 1 b) geometry No. 2 c) geometry No. 3

با توجه به نیاز به تخمین اشکال هندسی مختلف و به منظور حفظ کلیت مسئله، از شبکه‌بندی بی‌سازمان<sup>۲</sup> برای حل عددی ناحیه داخلی مسئله حاضر استفاده شده است. با تغییر شرط مرزی روی دیواره و فعال کردن قطاع مورد نظر با دمای  $310\text{K}$ ، حل مسئله تا رسیدن به شرایط دائم ادامه می‌یابد و به دلیل اختلاف دمای ایجاد شده بین سطح فعال و سایر سطوح، شار حرارتی روی مرزهای هندسه ایجاد می‌شود. برای تشکیل هندسه‌های مجهول نشان داده شده در شکل ۶ و همچنین سایر هندسه‌های در نظر گرفته شده در این مقاله از روش رسم منحنی هموار استفاده شده است. جسم مجهول دارای رسانایی حرارتی  $0.1\text{K.m/W}$  است. مشخصات هندسی مسائل نمونه و تعداد پارامترهای در نظر گرفته شده برای هر مسئله در جدول ۱ آورده شده است.

رفع این مشکل بایستی مسئله در تعداد شبکه بالا حل شود. روش معرفی شده در این مقاله بدون استفاده از شبکه متحرک و با استفاده از تغییر ضریب رسانایی حرارتی مطابق با شکل تشکیل شده، هندسه مجهول را شناسایی می‌کند.

#### ۴- معرفی مسئله

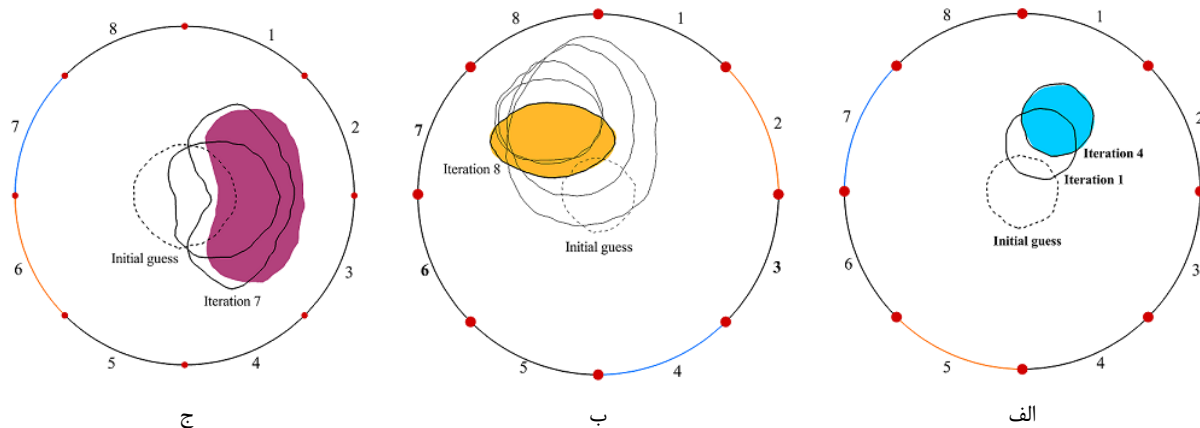
به منظور شبیه‌سازی مسئله توموگرافی، مقطعی از استوانه با رسانایی حرارتی به  $1\text{K.m/W}$  به قطر  $20$  سانتی‌متر که دارای  $8$  قطاع به طول یکسان با دمای ثابت  $300\text{K}$  است، مطابق شکل ۵ در نظر گرفته شده است. به منظور محاسبه دقیق شار حرارتی در نزدیکی سطوح استوانه از شبکه باسازمان<sup>۱</sup> عمود بر سطح استفاده شده است.

2 Unstructured Grid

1 Structured Grid

جدول ۱. پارامترهای هندسی در نظر گرفته شده برای مسائل نمونه  
Table 1. The geometrical parameters of considered test cases

| مسئله نمونه | مرکز سطح $(x,y)$   | مساحت $(m^2)$ | تعداد پارامتر |
|-------------|--------------------|---------------|---------------|
| هندسه ۱     | $(0/0.2, 0/0.4)$   | $0/0.126$     | ۲             |
| هندسه ۲     | $(-0/0.25, 0/0.3)$ | $0/0.22$      | ۶             |
| هندسه ۳     | $(0/0.31, 0)$      | $0/0.05$      | ۱۰            |



شکل ۷. نتایج الگوریتم بازسازی تصویر برای تخمین الف) هندسه (ب) هندسه ۲ ج) هندسه ۳  
Fig. 7. The results of image reconstruction algorithms for estimating a) geometry No. 1 b) geometry No. 2 c) geometry No. 3

در نظر گرفته شده است. هندسه ۱ که یک هندسه دایروی است به منظور تخمین موقعیت جسم با فرض این که شکل جسم مشخص است و فقط مکان قرارگیری جسم مجهول است در نظر گرفته شده است. بدین منظور جسم در موقعیت  $(0/0, 0.2/0.4)$  قرار داده شد. با تغییر دمای دو سطح ۵ و ۷، مسئله مستقیم برای محاسبه بردار شار حرارتی دقیق حل شد. برای تخمین موقعیت هندسه ۱، مسئله معکوس با انتخاب یک حدس اولیه در مرکز مقطع استوانه حل شد. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که موقعیت جسم مجهول در ۴ تکرار تخمین زده شده است. روند تغییرات در شکل ۷-الف نشان داده شده است.

هندسه ۲ که به صورت بیضی در نظر گرفته شده است به منظور تخمین شکل هندسی جسم در موقعیت  $(-0/0, 0.25/0.3)$  قرار داده شده است. از ۶ پارامتر برای تخمین هندسه مجهول استفاده شده است که شامل مختصات مرکز سطح هندسه و فاصله چهار نقطه کنترلی از مرکز سطح هندسه است. بردار شار حرارتی دقیق به دلیل تغییر دمای دو سطح ۲ و ۴ که به صورت متوالی فعال شده‌اند، در

به منظور بررسی میزان دقت روش در تخمین موقعیت جسم مجهول از دو رابطه (۱۵) و (۱۶) که به ترتیب برای بررسی میزان دقت روش در تخمین مساحت و مرکز سطح جسم در مقطع استوانه است، استفاده شده است.

$$\% \text{ خطای مساحت} = \left| \frac{Area_{exact} - Area_{estimated}}{Area_{exact}} \right| \times 100 \quad (15)$$

$$\% \text{ خطای مرکز سطح} = \frac{\sqrt{(x_{exact} - x_{est})^2 + (y_{exact} - y_{est})^2}}{d_{circle}} \times 100 \quad (16)$$

که  $x$  و  $y$  مختصات مرکز سطح جسم مجهول داخل مقطع استوانه و  $d$  قطر استوانه است.

## ۵- نتایج

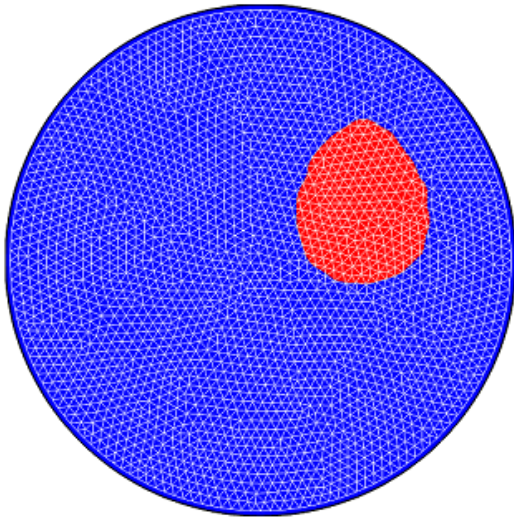
### ۵-۱- دقت تخمین هندسه

به منظور بررسی دقت الگوریتم در تخمین هندسه، ۳ مسئله نمونه

جدول ۲. دقت الگوریتم بازسازی تصویر در تخمین شکل هندسی مسائل نمونه

Table 2. The accuracy of the presented image reconstruction algorithm for estimating the geometric shape of test cases

| مسائل نمونه | شکل   | تکرار | مقدار تابع هدف        | خطای مساحت<br>(درصد) | خطای مرکز سطح<br>(درصد) |
|-------------|-------|-------|-----------------------|----------------------|-------------------------|
| هندسه ۱     | دایره | ۴     | $2/87 \times 10^{-8}$ | ۰/۰                  | ۱/۳۱                    |
| هندسه ۲     | بیضی  | ۸     | $1/98 \times 10^{-7}$ | ۱/۸۷                 | ۰/۰۸                    |
| هندسه ۳     | کلیوی | ۷     | $9/89 \times 10^{-8}$ | ۰/۶۶۴                | ۰/۵۲۲                   |



شکل ۸. مسأله نمونه در نظر گرفته شده برای آنالیز حساسیت  
Fig. 8. The considered test case for sensitivity analysis

سه انحراف معیار ۰/۱، ۰/۳، ۰/۰۳ برای بررسی تأثیر میزان خطا در مسأله بررسی شد. بدین منظور برای تخمین شکل هندسی دو سطح ۵ و ۷ به‌طور متوالی فعال شد و شارهای حرارتی گذرا از هر سطح توسط سنسور محاسبه شد. در ابتدا با انحراف معیار ۰/۰ یا به عبارتی بدون افزودن خطا در مسأله هندسه مجهول تخمین زده شد. نتایج بدست آمده نشان داد که شکل با دقت خوبی تخمین زده شده است. در ادامه آزمایش با انتخاب دو انحراف معیار ۰/۱ و ۰/۳ و افزایش خطای اندازه‌گیری فرآیند بازسازی تصویر انجام شد. نتایج بدست آمده در شکل ۹ نشان داده شده است. مطابق نتایج بدست آمده افزایش مقدار خطای ورودی در مسأله، باعث افزایش میزان خطا در پاسخ مسأله و تخمین شکل و همچنین تعداد تکرار تا همگرایی شده است. میزان خطای تخمین شکل به ازای سه انحراف معیار مشخص بر حسب تعداد تکرار در جدول ۳ نشان داده شده است. همچنین در شکل ۱۰ خطای مرکز سطح و خطای مساحت به‌دست

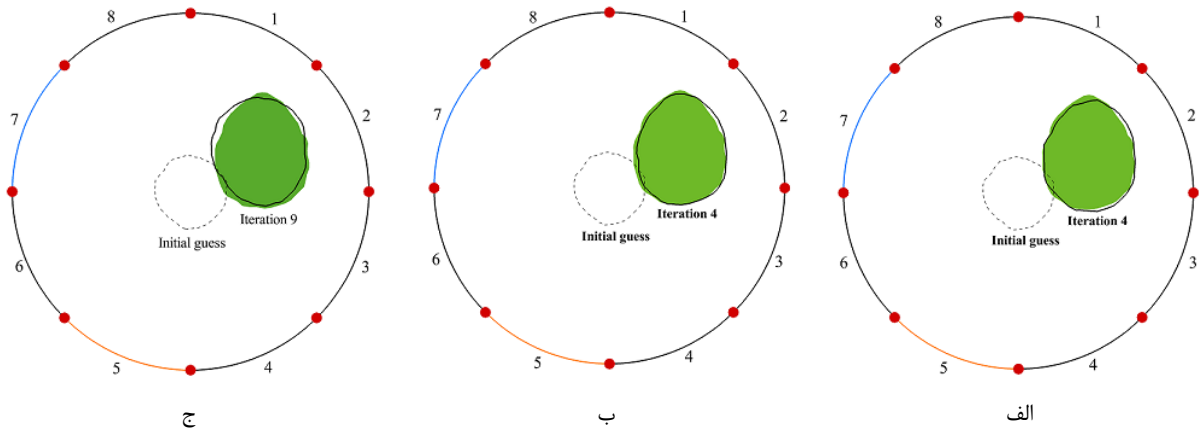
مقطع استوانه ایجاد می‌شود. روند حل مسأله معکوس با انتخاب یک حدس اولیه به شکل دایره در مرکز استوانه شروع می‌شود. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که موقعیت و شکل دقیق جسم مجهول در ۸ تکرار تخمین زده شده است. روند تغییرات هندسه در شکل ۷-ب نشان داده شده است.

مسأله نمونه ۳ با شکلی شبیه به کلیه نماد شکل‌های دارای سطوح محدب و مقعر نیز به منظور تخمین موقعیت و شکل هندسی جسم و همچنین بررسی توانایی الگوریتم در تخمین هندسه‌های بزرگتر از طول یک سطح انتخاب شده است. بدین منظور هندسه در موقعیت (۰/۰، ۰۳۱) قرار داده شد و دو سطح ۶ و ۷ به عنوان سطوح فعال انتخاب شدند. نتایج به‌دست آمده بیانگر قابلیت تخمین شکل توسط روش توموگرافی الکتریکی است و شکل نهایی در ۷ تکرار با دقت قابل قبولی شناسایی شد. دقت نتایج مربوط به ۳ هندسه بررسی شده در جدول ۲ آمده است. در شکل ۷ نتایج مربوط به تخمین هندسه برای هر سه مسأله نمونه نشان داده شده است. همانطور که در نتایج جدول ۲ مشخص است، ماکزیمم خطای تخمین هندسه کمتر از ۲ درصد است.

## ۲-۵- آنالیز حساسیت

به دلیل بدرفتار بودن مسأله و حساس بودن مسائل معکوس به خطاهای ورودی در مسأله، هندسه نشان داده شده در شکل ۸ برای بررسی تأثیر خطای ورودی در مسأله در نظر گرفته شده است. بدین منظور مطابق رابطه (۱۷) با ایجاد عدد تصادفی  $\eta$  و انتخاب انحراف معیار مناسب  $\sigma$ ، خطای ایجاد شده به مقادیر شار حرارتی مسأله مستقیم که مقادیر اندازه‌گیری شده دقیق هستند، افزوده شد.

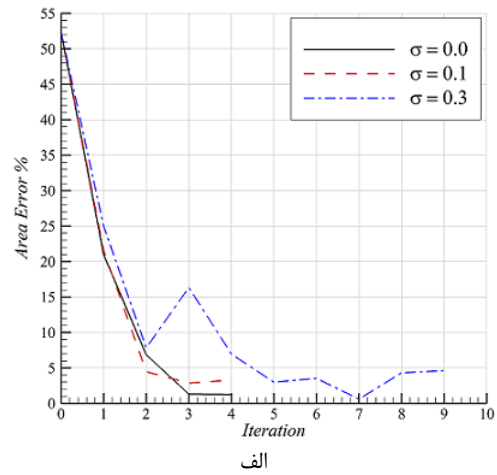
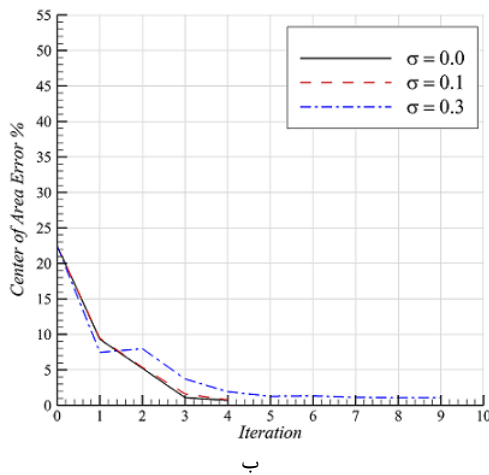
$$Y_{exact} = Y_{exact} + \eta\sigma \quad (17)$$



شکل ۹. نتایج آنالیز حساسیت روش به ازای الف) انحراف معیار ۰/۰، ب) انحراف معیار ۰/۱ و ج) انحراف معیار ۰/۳  
 Fig. 9. The results of sensitivity analysis of the method for a) standard deviation of 0, b) standard deviation of 0.1 and c) standard deviation of 0.3

جدول ۳. نتایج آنالیز حساسیت نسبت به تغییرات ورودی در مسأله  
 Table 3: The sensitivity analysis results for input errors

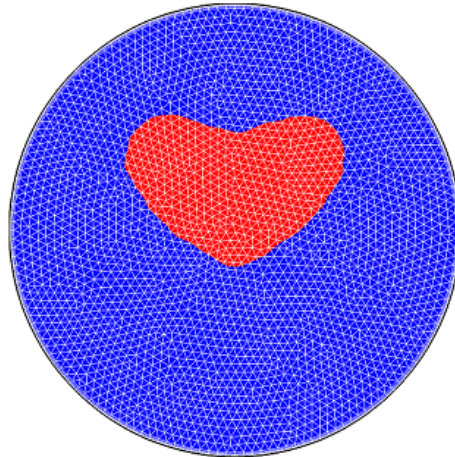
| خطای مرکز سطح (درصد) | خطای مساحت (درصد) | تابع هدف              | تکرار | انحراف معیار   |
|----------------------|-------------------|-----------------------|-------|----------------|
| ۰/۷۲۴                | ۱/۲۴              | $5/53 \times 10^{-7}$ | ۴     | $\sigma = 0/0$ |
| ۰/۷۶                 | ۳/۲۹              | $5/84 \times 10^{-7}$ | ۴     | $\sigma = 0/1$ |
| ۱/۰۸                 | ۴/۶۳              | $9/76 \times 10^{-7}$ | ۹     | $\sigma = 0/3$ |



شکل ۱۰. بررسی میزان خطای شکل تخمین زده شده به ازای ۳ انحراف معیار مشخص، الف) خطای مساحت، ب) خطای مرکز سطح  
 Fig. 10. Evaluating the shape estimation error for 3 standard deviations, a) the area error, b) the area center error

از ۹ تکرار خطای مساحت به ۴/۶۹ درصد افزایش یافته است. نتایج به دست آمده نشان داد که با افزایش مقدار خطای ورودی به مسأله، هندسه مجهول در تعداد تکرار بیشتری توسط الگوریتم به ازای شرایط یکسان تخمین زده شده است. از طرفی با وجود افزایش خطای حل به ازای افزایش خطای ورودی به مسأله، شکل نهایی

آمده به ازای میزان خطای اندازه‌گیری موجود در نشان داده شده است. که همانطور که مشخص است با افزایش خطای اندازه‌گیری تعداد تکرار تا تخمین شکل هندسی افزایش یافته است به طوری که به ازای ۱۰ درصد خطای اندازه‌گیری پس از ۴ تکرار ۳/۲۹ درصد خطای مساحت ایجاد شده است. در حالی که به ازای ۳۰ درصد خطای اندازه‌گیری پس



شکل ۱۱. مسأله نمونه در نظر گرفته شده برای بررسی تأثیر سطوح فعال  
**Fig. 11. The considered test case for investigating the effect of active surfaces**

جدول ۴. نتایج هندسه تخمین زده شده به ازای سنسورهای فعال مختلف  
**Table 4. The results of the estimated geometry for different active sensors**

| مسأله | تعداد سنسور فعال | نحوه فعال کردن | تکرار | خطای مساحت (درصد) | خطای مرکز سطح (درصد) |
|-------|------------------|----------------|-------|-------------------|----------------------|
| الف   | ۲                | ۳ - ۶          | ۹     | ۴/۵۷              | ۰/۸۶                 |
| ب     | ۴                | ۴ و ۵ - ۶ و ۷  | ۱۰    | ۳/۹۱              | ۰/۷                  |
| ج     | ۴                | ۳ و ۴ - ۶ و ۷  | ۱۲    | ۴/۶۵              | ۰/۲۱                 |

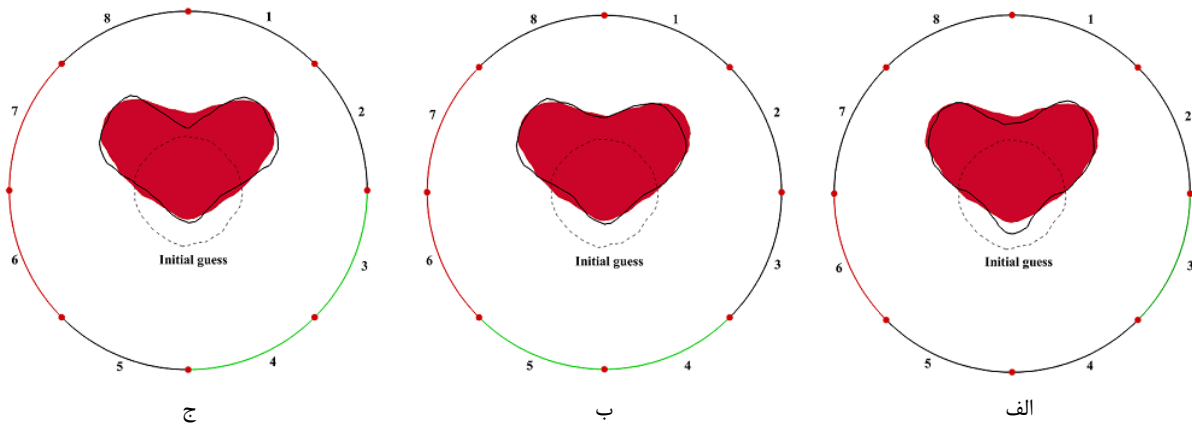
با حالت قبل یکسان باشد. به عبارت دیگر، یک بار دو سطح ۴ و ۵ به طور همزمان و بار دیگر دو سطح ۶ و ۷ به طور همزمان برای ایجاد شار حرارتی فعال شدند. هندسه تخمین زده شده در ۱۰ تکرار تخمین زده شد و بیشترین خطای ایجاد شده ۳/۹۱ درصد است. در آزمایش دیگر، چهار سطح ۳، ۴، ۶ و ۷ برای اعمال شار حرارتی با هدف تغییر سطوح فعال انتخاب شد. در این حالت، در ابتدا دو سطح ۳ و ۴ و سپس دو سطح ۶ و ۷ بطور متوالی فعال شدند. هندسه تخمین زده شده پس از ۱۲ تکرار با انحراف محسوسی نسبت به شکل دقیق و با خطای ۴/۶۵ درصد که نسبت به دو شکل قبل بیشتر است، تخمین زده شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که با افزایش تعداد سطوح فعال میزان اطلاعات دریافتی از هندسه مجهول افزایش می‌یابد به طوری که با افزایش تعداد سطح فعال از دو سطح به چهار سطح، شکل تخمین زده شده به هندسه مجهول نزدیک‌تر است. از این‌رو، برای انتخاب سطوح فعال بهتر است سطوحی انتخاب شود که اطلاعات بیشتری از هندسه مجهول دریافت شود که در مسأله حاضر سطوح دارای زاویه ۹۰ درجه انتخاب شده است. نتایج این آزمایش در جدول ۴ آورده شده است. همچنین هندسه‌های تخمین زده شده به

تخمین زده شده نزدیک به هندسه جسم مجهول است. ماکزیمم خطای روش به ازای انحراف معیار ۰/۳ کمتر از ۵ درصد است.

### ۳-۵- تأثیر انتخاب سطح فعال

در این بخش به بررسی تأثیر انتخاب سطح فعال برای تغییر دما و تخمین شکل جسم پرداخته شده است. بدین منظور هندسه مجهول نشان داده شده در شکل ۱۱ انتخاب شد و ترکیب سطوح مختلف برای تخمین شکل هندسی جسم مجهول در نظر گرفته شد. لازم به ذکر است که تعداد سطوح انتخاب شده در این بخش به صورتی بوده است که محاسبات شار حرارتی دو مرتبه و به صورت متوالی انجام شود.

برای تخمین شکل هندسی جسم مجهول در گام نخست شارهای حرارتی ایجاد شده توسط دو سطح ۳ و ۶ انتخاب شد. یعنی ابتدا سطح ۳ فعال و شارهای حرارتی گذرا از هر سطح محاسبه شد و سپس سطح ۶ فعال و شارهای حرارتی عبوری از تمامی سطوح محاسبه شد. هندسه مجهول در ۹ تکرار با بیشترین خطای ۴/۵۷ درصد تخمین زده شده است. در ادامه با افزایش تعداد سطوح فعال نسبت به حالت قبل، ۴ سطح ۴، ۵، ۶ و ۷ به گونه‌ای انتخاب شد که تعداد اندازه‌گیری



شکل ۱۲. نتایج الگوریتم بازسازی تصویر برای تخمین هندسه مجهول به ازای الف) دو سنسور ۳ و ۶ (ب) چهار سنسور ۴، ۵، ۶ و ۷ (ج) چهار سنسور ۳، ۴، ۶ و ۷

Fig. 12. The results of the image reconstruction algorithm for the estimation of unknown geometry for a) activated sensors 3 and 6 b) activated sensors 4, 5, 6 and 7 c) activated sensors 3, 4, 6 and 7.

مجهول ۵ انجام شد. سه ترکیب از سطوح مختلف به گونه‌ای انتخاب شد که تعداد دفعات ایجاد شار حرارتی یا به عبارتی تعداد اندازه‌گیری یکسان باشد. نتایج این آزمایش نشان داد که انتخاب سطوح فعال در میزان دقت مسأله و همچنین تعداد تکرار تا همگرایی تأثیرگذار است و بیشترین خطای ایجاد شده ۴/۶۵ درصد در ۱۲ تکرار صورت گرفته است. یکی دیگر از مزیت‌های این روش که می‌توان به آن اشاره کرد، تخمین شکل هندسه مجهول به ازای دو مرتبه اندازه‌گیری شار حرارتی است که بسیار کمتر از تعداد اندازه‌گیری مرسوم در یک سیستم توموگرافی الکتریکی است. لذا روش حاضر می‌تواند به عنوان جایگزینی برای روش‌های متداول بازسازی تصویر با قابلیت اطمینان بالا بکار گرفته شود.

### فهرست علائم

#### علائم انگلیسی

|     |  |
|-----|--|
| $C$ | ظرفیت الکتریکی                             |
| $d$ | قطر دایره (m)                              |
| $k$ | توزیع رسانایی حرارتی (W/m.K)               |
| $M$ | تعداد سنسور                                |
| $n$ | تعداد پارامتر مجهول                        |
| $P$ | بردار پارامترهای مجهول                     |
| $Q$ | بردار شار حرارتی تخمین زده شده ( $W/m^2$ ) |
| $q$ | شار الکتریکی                               |

ازای ترکیب سطوح مختلف در شکل ۱۲ نشان داده شده است.

### ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، از الگوریتم لونبرگ-مارکوارت برای بازسازی تصویر در روش توموگرافی الکتریکی استفاده شد. بدین منظور از سه هندسه مجهول با ضریب رسانایی حرارتی متفاوت در مقطع استوانه استفاده شد. مسأله مستقیم برای محاسبه شارهای حرارتی دقیق عبوری از هر سطح به دلیل اختلاف دمای سطح فعال با سایر سطوح استوانه حل شد. به منظور تخمین شکل هندسی، مسأله معکوس با استفاده از الگوریتم لونبرگ-مارکوارت برای تخمین پارامترهای هندسی مجهول حل شد. نتایج به‌دست آمده برای تخمین شکل مجهول، قابلیت این روش در تشخیص هندسه مجهول با استفاده از تغییر رسانایی حرارتی و بدون نیاز به استفاده از شبکه متحرک را نشان داد. به منظور انطباق شکل تخمین زده شده با منحنی هموار نیاز به تعداد شبکه بالا است که در زمان حل مستقیم مسئله موثر است. هندسه ۴ به منظور بررسی تأثیر وجود اغتشاش در مسأله بررسی شد. بدین منظور سه انحراف معیار مشخص برای اعمال خطای اندازه‌گیری در ورودی مسأله انتخاب شد. طبق نتایج به‌دست آمده، بیشترین خطای ایجاد شده در تخمین هندسه مجهول کمتر از ۵ درصد به ازای انحراف معیار ۰/۳ است که نشان‌دهنده توانایی الگوریتم در تخمین هندسه مجهول به ازای تغییرات و وجود خطا در ورودی مسأله است. آزمایش سوم نیز با هدف بررسی تأثیر سطوح فعال در تخمین شکل هندسه



- 22(5) (2011) 351-359.
- [3] F. Barthel, M. Bieberle, D. Hoppe, M. Banowski, U. Hampel, Velocity measurement for two-phase flows based on ultrafast X-ray tomography, *Flow Measurement and Instrumentation*, 46 (2015) 196-203.
- [4] A. Khana, Electrical impedance tomography, *Nihon Rinsho*, 49(4) (1991) 968-974. see also URL <https://pdfs.semanticscholar.org/7bfc/03763a57e435c656f0cb8926653060354f56.pdf>
- [5] M. Cheney, D. Isaacson, J.C. Newell, Electrical impedance tomography, *SIAM review*, 41(1) (1999) 85-101.
- [6] I. Frerichs, J. Hinz, P. Herrmann, G. Weisser, G. Hahn, M. Quintel, G. Hellige, Regional lung perfusion as determined by electrical impedance tomography in comparison with electron beam CT imaging, *IEEE transactions on medical imaging*, 21(6) (2002) 646-652.
- [7] Y. Zou, Z. Guo, A review of electrical impedance techniques for breast cancer detection, *Medical engineering & physics*, 25(2) (2003) 79-90.
- [8] M. Soleimani, O. Dorn, W.R. Lionheart, A narrowband level set method applied to EIT in brain for cryosurgery monitoring, *IEEE transactions on biomedical engineering*, 53(11) (2006) 2257-2264.
- [9] T. Dyakowski, L.F. Jeanmeure, A.J. Jaworski, Applications of electrical tomography for gas–solids and liquid–solids flows—a review, *Powder technology*, 112(3) (2000) 174-192.
- [10] I. Ismail, J. Gamio, S.A. Bukhari, W. Yang, Tomography for multi-phase flow measurement in the oil industry, *Flow Measurement and Instrumentation*, 16(2-3) (2005) 145-155.
- [11] M.G. Rasteiro, R.C. Silva, F.A. Garcia, P.M. Faia, Electrical Tomography: a review of configurations and applications to particulate processes, *KONA Powder and Particle Journal*, 29 (2011) 67-80.
- [12] W. Yang, Design of electrical capacitance tomography sensors, *Measurement science and technology*, 21(4) (2010) 042001.
- [13] H.Y. Cao, X.M. Duan, H.X. Wang, Design of electrical capacitance tomography hardware system, in: *Advanced*

|                               |       |
|-------------------------------|-------|
| فاصله نقاط کنترلی             | $R$   |
| مختصات استوانه‌ای             | $r$   |
| تابع هدف                      | $S$   |
| ولتاژ الکتریکی (v)            | $V$   |
| ماتریس حساسیت                 | $X$   |
| مختصه مرکز سطح هندسه          | $x_c$ |
| بردار شار حرارتی دقیق $W/m^2$ | $Y$   |
| مختصه مرکز سطح هندسه          | $y_c$ |

### علائم یونانی

|                            |               |
|----------------------------|---------------|
| سطح سنسور                  | $\Gamma$      |
| توزیع ضریب گذردهی الکتریکی | $\varepsilon$ |
| معیار همگرایی              | $\epsilon$    |
| عدد تصادفی                 | $\eta$        |
| مختصات استوانه‌ای          | $\theta$      |
| پارامتر تنظیم              | $\mu$         |
| مقدار عددی کوچک            | $\nu$         |
| انحراف معیار               | $\sigma$      |
| توزیع پتانسیل الکتریکی     | $\varphi$     |
| منحنی هموار                | $\psi$        |
| عدد وایندینگ               | $\omega$      |
| ماتریس واحد قطری           | $\Omega$      |

### زیرنویس

|               |     |
|---------------|-----|
| شماره پارامتر | $i$ |
| شماره سنسور   | $j$ |

### بالانویس

|             |     |
|-------------|-----|
| شماره تکرار | $h$ |
|-------------|-----|

### منابع

- [1] T.I.M. Arubi, H.C. Yeung, Gamma radiation methods in characterizing horizontal and vertical multiphase flow, in: *OTC Brasil, Offshore Technology Conference*, 2011.
- [2] R. Hoffmann, G.W. Johnson, Measuring phase distribution in high pressure three-phase flow using gamma densitometry, *Flow Measurement and Instrumentation*,

- for ECT Image Reconstruction, in: *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing, 2018, pp. 012178.
- [24] C.-H. Huang, Y. Jan-Yuan, An inverse problem in simultaneously measuring temperature-dependent thermal conductivity and heat capacity, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38(18) (1995) 3433-3441.
- [25] Y. Zhou, X.-x. Hu, Two methods for estimation of temperature-dependent thermal conductivity based on constant element approximation, *International Journal of Thermal Sciences*, 135 (2019) 104-116.
- [26] S. Shah, A.K. Parwani, Estimation of Time-Varying Heat Source for One-Dimensional Heat Conduction by Conjugate Gradient Method, in: *Innovations in Infrastructure*, Springer, 2019, pp. 329-339.
- [27] C.-H. Huang, B.-H. Chao, An inverse geometry problem in identifying irregular boundary configurations, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40(9) (1997) 2045-2053.
- [28] H.Fazeli, M.Mirzaei, A.Ashrafizadeh, Shape Design in Heat Conduction Problems via Finite element method, in: *The 17th Annual International Conference on Mechanical Engineering ISME 2009*, Tehran, Iran, 2009. (in Persian)
- [29] M. Siavashi, F. Kowsary, E. Abbasi-Shavazi, Detection of flaws in a two-dimensional body through measurement of surface temperatures and use of conjugate gradient method, *Computational Mechanics*, 46(4) (2010) 597-607.
- [30] M. Darroudi, F. Kowsary, Detection and Accurate Estimation of Geometrical Parameters of Defects on the Internal Surface of Pipes Using Inverse Heat Conduction Method, *Modares Mechanical Engineering*, 18(4), (2018) 211-222. (in Persian)
- [31] M.B. Haddadi, R. Maddahian, A new algorithm for image reconstruction of electrical capacitance tomography based on inverse heat conduction problems, *IEEE Sensors Journal*, 16(6) (2016) 1786-1794.
- [32] M.N. ozisik, H.R.B. Orlande, *Inverse Heat Transfer*, Taylor & Francis, New York, 2000.
- [33] R.H. Bartels, J.C. Beatty, B.A. Barsky, An introduction Materials Research, *Trans Tech Publ*, 2013, pp. 2311-2315.
- [14] C.K. Seonga, J. Puspanathana, R.A. Rahima, G.C. Loona, Y.S.-L. Susiavana, F.A. Phangb, M.H.F. Rahimanc, Hardware Development of Electrical Capacitance Tomography (ECT) System with Capacitance Sensor for Liquid Measurements, *Jurnal Teknologi*, 73(6) (2015).
- [15] E. Mohamad, R. Rahim, M. Rahiman, H. Ameran, S. Muji, O. Marwah, Measurement and analysis of water/oil multiphase flow using Electrical Capacitance Tomography sensor, *Flow Measurement and Instrumentation*, 47 (2016) 62-70.
- [16] K.J. Alme, S. Mylvaganam, Electrical capacitance tomography—sensor models, design, simulations, and experimental verification, *IEEE Sensors Journal*, 6(5) (2006) 1256-1266.
- [17] M.N. ozisik, *Heat Conduction*, Second ed., Wiley, New York, 1993.
- [18] W. Yang, L. Peng, Image reconstruction algorithms for electrical capacitance tomography, *Measurement science and technology*, 14(1) (2002) R1.
- [19] Z. Cui, Q. Wang, Q. Xue, W. Fan, L. Zhang, Z. Cao, B. Sun, H. Wang, W. Yang, A review on image reconstruction algorithms for electrical capacitance/resistance tomography, *Sensor Review*, 36(4) (2016) 429-445.
- [20] K. Li, S. Cong, A review of image reconstruction algorithms in electrical capacitance tomography, in: *Advanced Computational Intelligence (ICACI)*, 2018 Tenth International Conference on, IEEE, 2018, pp. 128-133.
- [21] L. Peng, H. Merkus, B. Scarlett, Using regularization methods for image reconstruction of electrical capacitance tomography, *Particle & Particle Systems Characterization: Measurement and Description of Particle Properties and Behavior in Powders and Other Disperse Systems*, 17(3) (2000) 96-104.
- [22] J. Jang, S. Lee, K. Kim, B. Choi, Modified iterative Landweber method in electrical capacitance tomography, *Measurement Science and Technology*, 17(7) (2006) 1909.
- [23] C. Yan, D. Zhang, G. Lu, J. Dong, An Improved Algorithm Based on Landweber-Tikhonov Alternating Iteration

- technology, Tehran, 2010. (in Persian)
- [35] J. Roe, Winding Around: The Winding Number in Topology, Geometry, and Analysis, American Mathematical Soc., 2015.
- to splines for use in computer graphics and geometric modeling, Morgan Kaufmann, 1995.
- [34] M.B. Haddadi, Tomography Based on Inverse Heat Conduction Problems, Sharif university of

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

S. Abbasian, R. Maddahian, F. Kowsary, Reconstruction of Electrical Tomography Images based on Parameter Estimation Method in Inverse Heat Transfer, Amirkabir J. Mech Eng., 53(Special Issue 1) (2021) 483-498.

DOI: 10.22060/mej.2019.15516.6144



