



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دوره چهل و شش، شماره ۱، تابستان ۱۳۹۳، صفحه ۶۷ تا ۷۷
Vol. 46, No. 1, Summer 2014, pp. 67- 77



نشریه علمی - پژوهشی امیرکبیر (مهندسی مکانیک)
Amirkabir Journal of Science & Research (Mechanical Engineering)
(AJSR - ME)

مدل سازی عددی جریان‌های دو فازي تراکم پذیر با مدل دوسیالی هیپربولیک دو فشاری

محمد رضا انصاری^۱، عبدالحسین دارمی زاده^{۲*}

۱- دانشیار، دانشکده فنی مهندسی، گروه تبدیل انرژی، دانشگاه تربیت مدرس
۲- دکتری مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی، گروه تبدیل انرژی، دانشگاه تربیت مدرس

(دریافت ۱۳۹۰/۱۱/۲۴، پذیرش ۱۳۹۱/۹/۱۳)

چکیده

مدل سازی عددی جریان‌های دو فازي تراکم پذیر یکی از موضوعات چالش برانگیز و مهم در مسائل کاربردی و تحقیقاتی به شمار می‌رود. در این مسائل اثرات متقابل شاک که به عنوان یک ناپیوستگی در خواص سیال به حساب می‌آید با فصل مشترک دو فاز به عنوان یک ناپیوستگی دیگر، سبب بروز مشکلاتی در حل عددی و تسخیر دقیق ناپایداری‌های فصل مشترک می‌شود. هدف از این پژوهش تسخیر دقیق فصل مشترک و مطالعه تأثیرات متقابل شاک و فصل مشترک در جریان‌های دو فازي گاز-گاز و گاز-مایع است. بدین منظور از حل گر ریمان HLLC و روش حل عددی گودونوف برای مدل دو سیالی هیپربولیک دو فشاری استفاده و کد نویسی به صورت دوبعدی و با دقت مرتبه دو انجام شد. مسائل یک و دوبعدی متنوع دو فازي مانند لوله ضربه تراکمی و انبساطی، برخورد شاک و حباب R22 در هوا، مسئله انفجار زیر آب و اثرات متقابل برخورد شاک هیپرسونیک با ماخ ۶ با یک ستون استوانه‌ای آب شبیه سازی شد. نتایج عددی بدست آمده برابری خوبی با نتایج تجربی و نتایج قبلی بدست آمده توسط محققین با روش‌های عددی زمان بر و مدل‌های پیچیده دیگر دارد.

کلمات کلیدی

جریان‌های دو فازي، مدل دو سیالی هیپربولیک، تراکم پذیر، موج شاک، روش عددی گودونوف، فصل مشترک.

* نویسنده مسئول و عهده دار مکاتبات
Email: a.darami@modares.ac.ir

۱- مقدمه

موضوع شبیه سازی عددی جریان‌های چند فازی یا چند جزئی یکی از موضوعات چالش برانگیز، با کاربردهای کلیدی در صنعت و پدیده‌های طبیعی است. از جمله این کاربردها می‌توان به فیزیک انفجار، فیزیک نجوم، سیستم‌های احتراق و دینامیک حباب، دتونیشن مواد با انرژی بالا، سامانه‌های خشک کن مافوق صوت و در صنایع پزشکی در متلاشی نمودن سلول‌های سرطانی نام برد. مدل‌های عددی ارائه شده در تحقیقات قبلی از نظر پیچیدگی و میزان دقت مراتب مختلفی دارند. به طور عمومی آن‌ها را از نظر نحوه مدل سازی فصل مشترک به دو دسته می‌توان تقسیم بندی کرد. دسته اول روش‌هایی هستند که فصل مشترک را به صورت تیز مدل می‌نمایند که به اختصار با عنوان روش‌های SIM^1 خوانده می‌شوند، روش‌های فصل مشترک تیز، همان طور که از نامشان پیداست بر فرض تیز بودن فصل مشترک استوار هستند. در این روش تلاش ویژه و جداگانه‌ای، غیر از حل معادلات میدان جریان، برای یافتن و اصلاح فصل مشترک به صورت صریح نیاز است. از جمله این روش‌ها، می‌توان به دسته‌های عمومی روش‌های لاگرانژی [۵-۷] و ALE^2 [۸-۹] اشاره نمود.

نقطه ضعف کلی این روش‌ها پیچیدگی بالا، زمان محاسباتی بالا و عدم توانایی دینامیکی در ایجاد فصول مشترکی که از قبل نبوده‌اند، است [۱۰]. نکته آخر یعنی ایجاد فصول مشترک جدید در جریان‌های کاویتاسیون اهمیت بالایی دارد. در حالت شرایط فصول مشترک پیچیده این مدل‌ها بعضاً دچار نفوذ و خطای عددی بالایی می‌شوند و توسعه آن‌ها به حالات چند بعدی با مشکل همراه است. از جمله تحقیقات دیگر می‌توان به کارهای انجام شده با روش‌های مرتبه بالا برای مدل‌سازی جریان‌های چند جزئی ارائه شده در مرجع [۱۱] اشاره کرد. اگر چه این روش‌ها از تولید نوسان اضافی جلوگیری می‌نمایند لیکن از نظر بقای جرم هر جز دچار مشکل می‌شوند [۱۲] و [۱۳]. اخیراً چانگ و لیو [۱۴] یک مدل جریان لایه‌ای را توسعه داده‌اند که توانایی خوبی در مدل‌سازی جریان‌های تراکم پذیر گاز-مایع دارد ولی روش آن‌ها از نظر کاربردی پیچیدگی بالایی دارد. دسته دوم که مد نظر اصلی این مقاله هستند روش‌های فصل مشترک انتشاری یا DIM^3 هستند. در این دسته از روش‌های عددی، فصل مشترک به صورت یک ناحیه نفوذ عددی مدل می‌شود که شبیه تسخیر یک عدم پیوستگی در دینامیک گاز است [۱۰]. در واقع می‌توان گفت که این فصول مشترک انتشاری نوعی مخلوط‌های مصنوعی هستند که به واسطه نفوذ عددی ایجاد می‌شوند. از جمله کارهای انجام شده با مدل‌های بر اساس معادلات اویلر می‌توان به مراجع [۱۱-۱۷] اشاره نمود. این

روش‌ها محدود به مدل‌های فیزیکی آسان و معادلات حالات ساده است و از نظر انرژی داخلی و دما در فصل مشترک دچار کمی دقت می‌شوند. مدل‌های دیگر بر اساس معادلات مدل‌های دو سیالی است. فواید کاربرد مدل‌های دو سیالی عبارتند از:

- نسبت به تمامی روش‌های گفته شده، از انعطاف پذیری و قابلیت بالاتری در کاربرد معادلات حالت مختلف برخوردار است، همچنین از نظر مخلوط چند فاز، انرژی کل، جرم و ممنتوم پایستار هستند. این امر سبب محاسبه دقیق انرژی‌های داخلی و دما در فصل مشترک می‌شود.

- این مدل‌ها توانایی ایجاد فصول مشترک جدید را دارند. به عنوان مثال، مدل سازی تولید حفره‌های گازی در مایعی که در شرایط اولیه میدان حل فاقد فصل مشترک بوده، مانند جریان کاویتاسیون را امکان پذیر می‌سازند.

- در این روش‌ها از یک الگوریتم و استراتژی یکسان برای حل عددی کل میدان جریان دو فاز استفاده می‌شود و نیازی به انجام فرایند خاص برای تسخیر یا اصلاح فصل مشترک نیست.

- در این روش‌ها نیازی به استفاده از شبکه محاسباتی پیچیده نیست و اغلب یک شبکه با سازمان ساده کفایت می‌نماید.

- مدت زمان حل مسئله با این مدل‌ها کمتر از روش‌های دیگر است.

کامل‌ترین مدل در این زمینه مدل هفت معادله‌ای است که توسط ساورل و آبرگال [۱۸] معرفی شده است. این مدل دارای دو سرعت و دو فشار مجزا بوده و هنگامی که اختلاف سرعت دو فاز مد نظر است کارایی بیشتری دارد لیکن در زمینه شبیه سازی جریان‌های دو فاز با فصل مشترک دچار نفوذ اضافی می‌شود. کاربرد این مدل به دلیل وجود جمله‌های ناپایستار در معادلات ممنتوم و انرژی و معادله انتقال کسر حجمی مشکل بوده و با چالش روبرو است. در زمینه مدل‌سازی با این مدل تلاش‌های وسیعی انجام شده است [۱۹-۲۳]. مدل مناسب دیگر برای شبیه سازی، مدل شش معادله‌ای تک سرعتی می‌باشد. این مدل با فرض زمان صفر برای آسایش سرعت بدست می‌آید و توسط مرجع [۲۴] برای نخستین بار معرفی شد. تفاوت این مدل با مدل هفت معادله‌ای آن است که به دلیل تعداد معادلات کمتر و همچنین دارا بودن یک سرعت واحد برای مخلوط دو فاز، نفوذ کمتری دارد. در کار حاضر با استفاده از روش عددی گودونوف و مدل دو سیالی هیپربولیک دو فشاری شش معادله‌ای کد دوبعدی دو فاز با دقت مرتبه دو زمانی و مکانی نوشته شد. هدف از این کار تسخیر دقیق فصل مشترک بین فازهای گاز-گاز و گاز-مایع در جریان‌های دو فاز تراکم پذیر با وجود شاک است.

۲- مدل دو سیالی شش معادله‌ای دو فشاری

مدل شش معادله‌ای تک سرعتی دو فشاری از مدل هفت معادله‌ای در حالت حد مجانبی زمان صفر آسایش سرعت مشتق می‌شود [۲۴] و [۲۵]. این مدل شامل دو معادله بقای جرم، یک معادله بقای ممنتوم، دو معادله بقای انرژی داخلی، یک معادله ارزیابی کسر حجمی و یک معادله بقای انرژی کل است. معادلات این مدل عبارتند از:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \alpha = \mu (P_l - P_r) \quad (1-f)$$

$$\frac{\partial (\alpha \rho_l)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_l \alpha \bar{u}) = 0 \quad (1-b)$$

$$\frac{\partial (\alpha_r \rho_r)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_r \alpha_r \bar{u}) = 0 \quad (1-c)$$

$$\frac{\partial (\rho \bar{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v} \otimes \bar{u}) + \nabla P = 0 \quad (1-d)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_l \rho_l e_l}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_l \rho_l e_l \bar{u}) + \alpha_l P_l \nabla \cdot \bar{u} \\ = -P_l \mu (P_l - P_r) \end{aligned} \quad (1-e)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_r \rho_r e_r}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_r \rho_r e_r \bar{u}) + \alpha_r P_r \nabla \cdot \bar{u} \\ = +P_r \mu (P_l - P_r) \end{aligned} \quad (1-g)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \bar{u} + P \bar{u}) = 0 \quad (1-z)$$

که در آن E, e, P, u, ρ, α به ترتیب عبارتند از کسر حجمی، چگالی، سرعت و فشار و انرژی داخلی و انرژی کل است. P_i فشار فصل مشترک است. چگالی از طریق رابطه $\rho = (\alpha_l \rho_l + \alpha_r \rho_r)$ بدست می‌آید. در کار حاضر از معادله حالت استیفند گاز^۴ استفاده شده است. برای فشار مایع و گاز از معادله حالت استیفند گاز و معادله حالت گاز ایده آل به صورت رابطه (۲) استفاده شده است:

$$P_l = (\gamma_l - 1) \rho_l e_l - \gamma_l P_{\infty, l}, \quad P_g = (\gamma_g - 1) \rho_g e_g \quad (2)$$

به طوری که به عنوان مثال برای هوا و آب مقادیر ثابت به صورت:

$$\gamma_g = 1/4, \quad \gamma_l = 1/8, \quad P_{\infty, g} = 0, \quad P_{\infty, l} = 6 \times 10^8$$

برای این مدل سرعت صوت مخلوط بر اساس رابطه (۳) تعریف می‌شود:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma \cdot (P + P_{\infty})}{\rho}}$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} = \sum_i \frac{\alpha_i}{\gamma_i - 1}$$

$$\frac{\gamma \cdot P_{\infty}}{\gamma - 1} = \sum_i \frac{\alpha_i \gamma_i P_{i \infty}}{\gamma_i - 1} \quad (3)$$

۳- روش حل عددی

بخشی از معادلات (۱) که به صورت پایستار هستند به صورت رابطه (۴) با استفاده از روش معمول گودونوف گسسته- سازی می‌شوند [۲۵]:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{f}(U^*(u_j^n, u_{j+1}^n)) - \mathbf{f}(U^*(u_{j-1}^n, u_j^n))] \quad (4)$$

که در این نوشتار:

$$U = \left(\alpha_l \rho_l \quad \alpha_r \rho_r \quad \rho u \quad \rho e + \frac{1}{\gamma} \rho u^2 \right)^T$$

$$\mathbf{f} = \left(\alpha_l \rho_l u \quad \alpha_r \rho_r u \quad \rho u^2 + \alpha_l P_l + \alpha_r P_r \quad u \left(\rho e + \frac{1}{\gamma} \rho u^2 + \alpha_l P_l + \alpha_r P_r \right) \right)^T$$

است. معادلات کسر حجمی و انرژی داخلی به صورت زیر جداسازی می‌شوند:

$$\alpha_{lj}^{n+1} = \alpha_{lj}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(u \alpha_l)_{j+\frac{1}{2}}^* - (u \alpha_l)_{j-\frac{1}{2}}^* - \alpha_{lj} \cdot (u_{j+\frac{1}{2}}^* - u_{j-\frac{1}{2}}^*)] \quad (5)$$

$$(\alpha \rho e)_{k,j}^{n+1} = (\alpha \rho e)_{k,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(\alpha \rho e u)_{k,j+\frac{1}{2}}^* - (\alpha \rho e u)_{k,j-\frac{1}{2}}^* - (\alpha P)_{k,j}^n \cdot (u_{k,j+\frac{1}{2}}^* - u_{k,j-\frac{1}{2}}^*)] \quad (6)$$

برای دستیابی به دقت مرتبه ۲ از روش MUSCL [۲۱] استفاده به عمل آمد؛ و برای ارتقا به حالت دوبعدی روش جداسازی ابعادی و حجم محدود با شبکه با سازمان مربعی به کار برده شد.

شار درون سلول با استفاده از روش حل ریمن^۵ HLLC با

رابطه (۷) تقریب زده می‌شود:

۳-۱-آسایش فشار

برای آسایش فشار لحظه‌ای در معادلات (۱) باید دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱۴) حل شود.

دلیل نیاز به آسایش فشار آنست که در جریان‌های دو فازی در فصل مشترک دو فاز باید تعادل فشاری برقرار باشد. یعنی $P_g=P_l$ بایستی برقرار باشد. این موضوع در مورد مخلوط‌های دو فازی نیز صدق می‌نماید. اگر از تعدیل فشار استفاده نشود چون از دو معادله حالت جداگانه برای مایع و گاز استفاده به عمل می‌آید بنابراین تعادل فشاری در حل عددی حاصل نمی‌شود و کد در بیشتر مسائل سریعاً واگرا می‌شود. عامل μ در جملات راست معادلات فوق‌الذکر برای نخستین مرتبه توسط ساورل و آبگرا [۱۸] معرفی گردید و از این عامل تحت عنوان "لزجت تراکم دینامیکی" نام برده شد. در حال حاضر از این عامل در اکثر مراجع تحت عنوان ضریب آسایش فشار ذکر می‌شود. دقیق‌ترین جواب‌ها به ازای آسایش فشار لحظه‌ای حاصل می‌شود. یعنی μ به سمت بی نهایت میل نماید. با این فرض که $\mu \rightarrow \infty$ میل می‌کند [۱۸] و با ترکیب معادلات بقای جرم و معادلات کسر حجمی می‌توان معادلات انرژی داخلی را به صورت رابطه (۱۵) بازنویسی نمود.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = \mu(P_1 - P_2) \\ \frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \alpha_1 \rho_1 e_1}{\partial t} = \mu P_l \cdot (P_2 - P_1) \\ \frac{\partial \alpha_2 \rho_2 e_2}{\partial t} = -\mu P_l \cdot (P_2 - P_1) \\ \frac{\partial (\rho E + \Delta \rho E^v)}{\partial t} = 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

$$\frac{\partial e_k + P_l}{\partial t} \frac{\partial v_k}{\partial t} = 0, \quad k = 1, 2 \quad (15)$$

با انتگرال‌گیری از این معادله، تقریب ذیل حاصل می‌شود:

$$e_k^* (P^*, v_k^*) - e_k^0 (P_k^0, v_k^0) + \bar{P}_l (v_k^* - v_k^0) = 0 \quad (16)$$

در این نوشتار اندیس‌های « ۰ » و « * » بیانگر حالات قبل و بعد از فرایند آسایش فشار هستند [۲۵]. معادله فوق سه مجهول P^* و حجم‌های مخصوص v^1* و v^2* دارد. با استفاده از

$$F_{j+\frac{1}{2}}^{HLLC} = \begin{cases} f(U_L) & 0 \leq S_L \\ f(U_L^*) = f(U_L) + S_L(U_L^* - U_L) & SL \leq 0 \leq S^* \\ f(U_R^*) = f(U_R) + S_R(U_R^* - U_R) & S^* \leq 0 \leq S_R \\ f(U_R) & 0 \geq S_R \end{cases} \quad (7)$$

سرعت موج‌ها طبق روابط (۸) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} S_R &= \max(u_L + c_L, u_R + c_R) \\ S_L &= \min(u_L - c_L, u_R - c_R) \end{aligned} \quad (8)$$

سرعت موج میانی از طریق رابطه (۹) تعیین می‌شود:

$$S^* = \frac{(\rho u^2 + P)_L - (\rho u^2 + P)_R - S_L(\rho u)_L + S_R(\rho u)_R}{(\rho u)_L - (\rho u)_R - S_L \rho_L + S_R \rho_R} \quad (9)$$

که $P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$ و $\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2$ است. با تبعیت از ساورل [۲۵] شرایط میانی به کمک روابط شاک بدست می‌آیند. بر این اساس خواهیم داشت:

$$(\alpha_k \rho_k)_L^* = (\alpha_k \rho_k)_L \frac{S_L - u_L}{S_L - S^*} \quad (10)$$

با استفاده از معادله حالت استیفند گاز، فشار فازهای مختلف در حالت میانی از طریق رابطه (۱۱) محاسبه می‌شود:

$$P_k^* = (P_k + P_{\infty, k}) \frac{(\gamma_k - 1)\rho_k - (\gamma_k + 1)\rho_k^*}{(\gamma_k - 1)\rho_k^* - (\gamma_k + 1)\rho_k} - P_{\infty, k} \quad (11)$$

با استفاده از اطلاعات فوق، بقیه عوامل عبارتند از:

$$\begin{aligned} \rho_L^* &= \sum_k (\alpha_k \rho_k)_L^* \\ \rho_R^* &= \sum_k (\alpha_k \rho_k)_R^* \\ (\rho_k)_L^* &= (\rho_k)_L \frac{S_L - u_L}{S_L - S^*} \\ (\rho_k)_R^* &= (\rho_k)_R \frac{S_L - u_L}{S_L - S^*} \end{aligned} \quad (12)$$

انرژی داخلی فازهای مختلف با استفاده از معادله حالت ۲ بدست می‌آید:

$$e_{kL}^* = e_{kL}^*(P_{kL}^*, \rho_{kL}^*) \quad (13)$$

۴- نتایج و بحث و بررسی

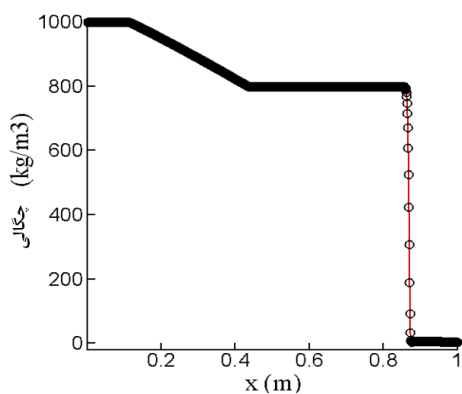
در این بخش برای بررسی درستی کد ابتدا مسئله استاندارد دو فازی لوله ضربه تراکمی با دو سیال مجزای خالص گاز- مایع شبیه سازی شد. در ادامه سه مسئله مختلف جریان دو فازی تراکم پذیر ارائه می‌شود. این سه مسئله شامل الف- شبیه سازی اصابت موج ضربه‌ای با ماخ ۱/۲۲ با یک حباب R22، ب- شبیه سازی انفجار زیر سطحی و ج- برخورد شاک قوی با ستون آب است.

۴-۱- لوله ضربه هوا- آب

این مسئله شامل یک لوله ضربه که سمت چپ آن با مایع فشار بالا و سمت راست آن با هوا پر شده است می‌باشد. این مسئله تست دارای حل دقیق است. هر سیال توسط معادله حالت استیفند-گاز مشخص می‌شود. شرایط اولیه این مسئله طبق جدول (۱) قابل بیان است. در سمت چپ و راست شرط مرزی دیواره اعمال شد. نتایج عددی در شکل (۱) ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج عددی تطابق عالی با حل دقیق مسئله [۲۵] دارد و روش عددی قادر بوده که موج‌های ضربه‌ای و انبساطی را به صورت دقیق و بدون نفوذ تسخیر نماید.

جدول (۱): شرایط اولیه مسئله شاک- تیوب

| متغیر | $X < 0.7$ | | $X > 0.7$ | |
|-----------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | هوا | آب | هوا | آب |
| ρ (kg/m ³) | ۱ | ۱۰۰۰ | ۱ | ۱۰۰۰ |
| u (m/s) | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| P (Pa) | ۱۰ ^۵ | ۱۰ ^۵ | ۱۰ ^۵ | ۱۰ ^۵ |
| α | ۰.۶ | ۰.۶ | ۰.۶ | ۰.۶ |



معادله حالت استیفند گاز می‌توان معادله (۱۶) را به صورت رابطه (۱۷) بازنویسی نمود.

$$v_k^*(P^*) = v_k^0 \frac{P_k^0 + \gamma_k \cdot P_{\infty,k} + (\gamma_k - 1) \cdot \bar{P}_l}{P^* + \gamma_k \cdot P_{\infty,k} + (\gamma_k - 1) \cdot \bar{P}} \quad (17)$$

معادله کسر حجمی از $\sum_k \alpha_k^* = 1$ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\sum_k (\alpha \rho)_k^* v_k^* = 1 \quad (18)$$

با توجه به آنکه $(\alpha \rho)_k^* = (\alpha \rho)_k^0$ می‌توان رابطه (۱۸) را به صورت رابطه (۱۸) نوشت:

$$\sum_k (\alpha \rho)_k^0 \cdot v_k^* = 1 \quad (19)$$

معادله (۱۹) از طریق روش تکرار نیوتن رافسون حل می‌شود و بدین وسیله مقدار فشار پس از فرایند آسایش فشار بدست می‌آید. فشار نهایی اصلاح شده لازم است از طریق رابطه (۲۰) مجدداً محاسبه شود:

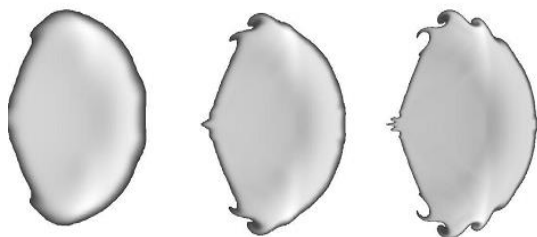
$$P = \frac{\rho e - \sum \frac{\alpha_k \gamma_k P_{\infty,k}}{\gamma_k - 1}}{\sum \frac{\alpha_k}{\gamma_k - 1}} \quad (20)$$

الگوریتم یک بعدی حل عددی گودونوف و روش HLLC با

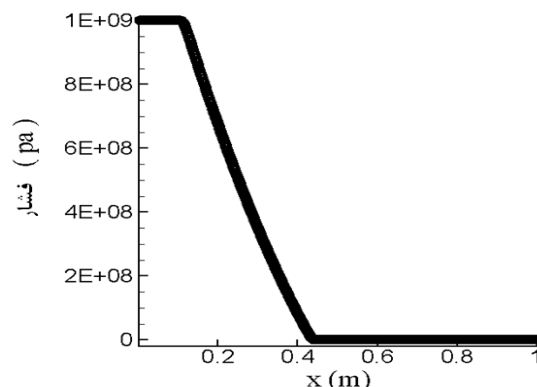
دقت مرتبه ۱ به شرح زیر خلاصه می‌شود:

- در هر مرز سلول محاسباتی، شار عددی پایستار f با کمک روش حل گر ریمن HLLC در روابط (۷) تا (۱۳)، تقریب زده می‌شود.
- با استفاده از روش گودونوف که شکل گسسته سازی شده آن در رابطه (۴) نشان داده شده است، مقادیر پایستار محاسبه می‌شوند.
- کسر حجمی نیز با استفاده از رابطه گسسته سازی شده (۵) محاسبه می‌شود.
- پس از محاسبه کسر حجمی تمامی متغیرهای اولیه مانند چگالی فازها، سرعت و انرژی بدست می‌آید.
- فشار مخلوط با استفاده از رویه آسایش فشار (۱۹) محاسبه شود.
- پس از بدست آوردن فشار با استفاده از رابطه (۱۹) فشار مخلوط دو فازی با کمک رابطه (۲۰) محاسبه و سپس بقیه پارامترها دوباره محاسبه شوند.
- رفتن به مرحله اول در گام زمان بعدی.

سلول $M+1$ برابر مقادیر سلول M جایگذاری می‌شود. در شکل (۳) تأثیر تعداد شبکه بر شکل فصل مشترک آورده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود شکل کلی فصل مشترک به ازای هر سه تعداد مش یکسان است ولی به ازای تعداد شبکه بیشتر جزئیات ناپایداری در فصل مشترک بیشتر می‌شود. به ازای تعداد شبکه بیشتر ناپایداری کلون-هلمهلتز در فصل مشترک به صورت واضح‌تری دیده می‌شود. در شکل (۴) تصویر نتایج عددی از نوع شلرین مربوط به توالی زمانی اثر متقابل شاک و حباب نشان داده شده است. در این شکل نتایج عددی با نتایج تجربی مقایسه شده‌اند که بیانگر دقت بالای حل و هم‌خوانی خوب جواب‌ها با نتایج عددی است. در شکل (۵) تغییرات کسر حجمی در میدان حل نشان داده شده است. ناپایداری کلون-هلمهلتز در سطح فصل مشترک، به دلیل اختلاف چگالی و سرعت در فصل مشترک رخ می‌دهد. در شکل (۶) تصویر توزیع فشار حاصل از نتایج عددی ارائه شده است. در اثر اصابت شاک به حباب یک میدان توزیع فشاری پیچیده حاصل از انعکاس امواج برخوردی به دیواره‌های جامد و تداخل آن‌ها با همدیگر و با فصل مشترک حباب با هوا ایجاد می‌شود. در زمان‌های اولیه تمرکز فشار به سمت داخل حباب است و پس از عبور کامل شاک از حباب فشار در میدان پخش می‌شود.



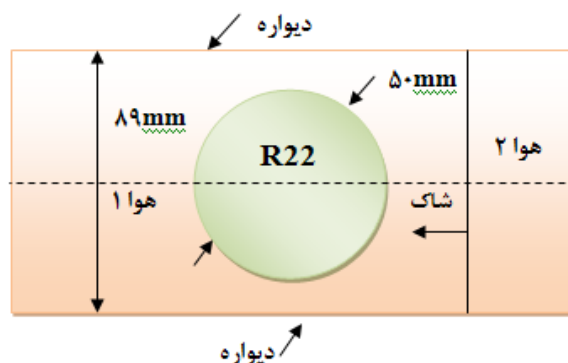
شکل (۳): آزمون اثر تعداد شبکه بر میدان حل، چپ: 200×100 ، وسط: 400×200 و راست: 800×400 .



شکل (۱): نتایج لوله ضربه گاز-مایع. مقایسه نتایج عددی (دایره O) با نتایج حل دقیق (خط پر) [۱۰] و [۲۵] - تعداد مش ۱۰۰۰.

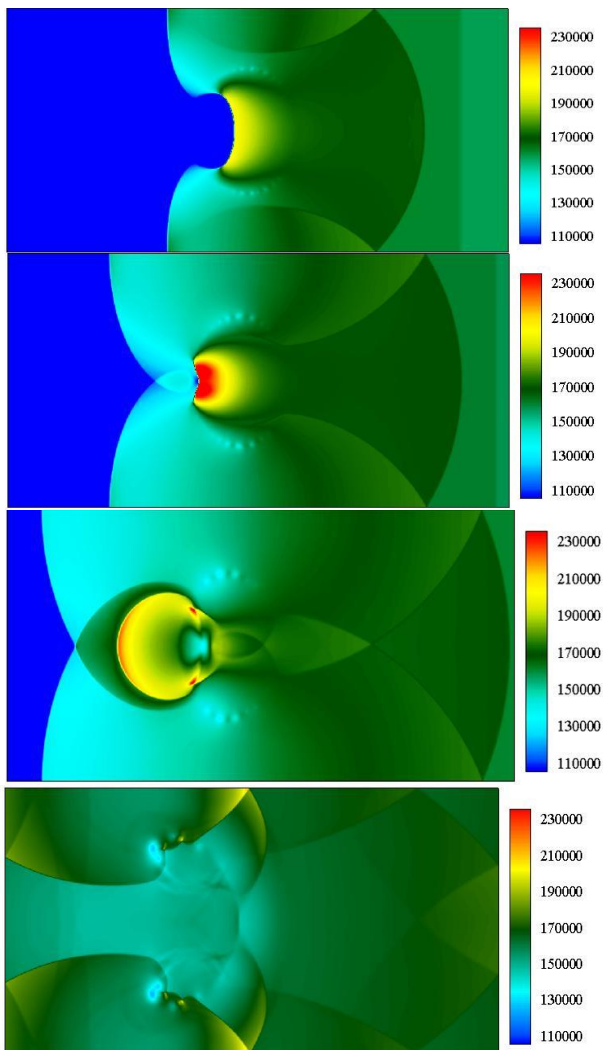
۴-۲- اثرات متقابل دو بعدی شاک و حباب هوا- R22

در این قسمت، مسئله معروف اثرات متقابل شاک و حباب R22 را مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج تجربی این مسئله توسط مرجع [۲۶] انجام شده است و یک آزمون عالی جهت بررسی میزان دقت نتایج عددی به حساب می‌آید. در این مسئله یک شاک صفحه‌ای با ماخ $M_S = 1/22$ در هوا حرکت نموده و با یک حباب استوانه‌ای R22 برخورد می‌نماید.

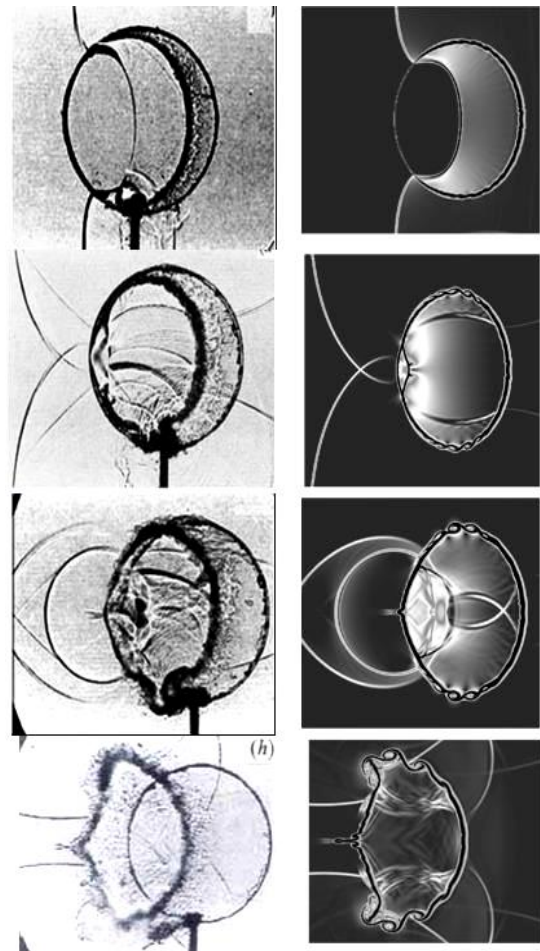


شکل (۲): شکل نمادین از شرایط اولیه و مشخصات هندسی میدان حل اثرات متقابل شاک و حباب R22 در هوا

در حالت تجربی حباب‌ها توسط باد کردن سیلندرهایی که دیواره آن از ممبران بسیار نازک از جنس نیتروسولولز است ساخته شده‌اند. پس از اصابت شاک به حباب ساختار یک بعدی شاک به هم خورده و حباب نیز حالت مدور خود را از دست می‌دهد. تصاویر جالبی از توالی زمانی و گذر شاک از حباب توسط مرجع [۲۶] گرفته شده است. در شکل (۳) نمای میدان حل این مسئله نشان داده شده است. در بالا و پایین میدان محاسباتی شرط مرزی دیواره و در سمت چپ و راست آن شرط مرزی ساده غیر انعکاسی قرار داده شد. در این شرط مرزی با فرض آنکه میدان حل دارای M سلول باشد، مقادیر مجهول



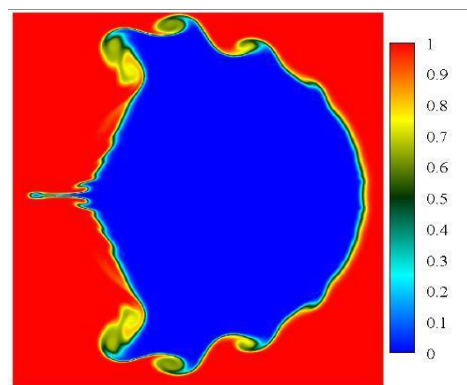
شکل (۶): توزیع فشار اثرات متقابل شاک با ماخ $1/22$ و حباب R_{22} در هوا. به ترتیب از بالا به پایین: ۱۱۵، ۱۸۷، ۲۴۷، ۴۱۷ میکرو ثانیه.



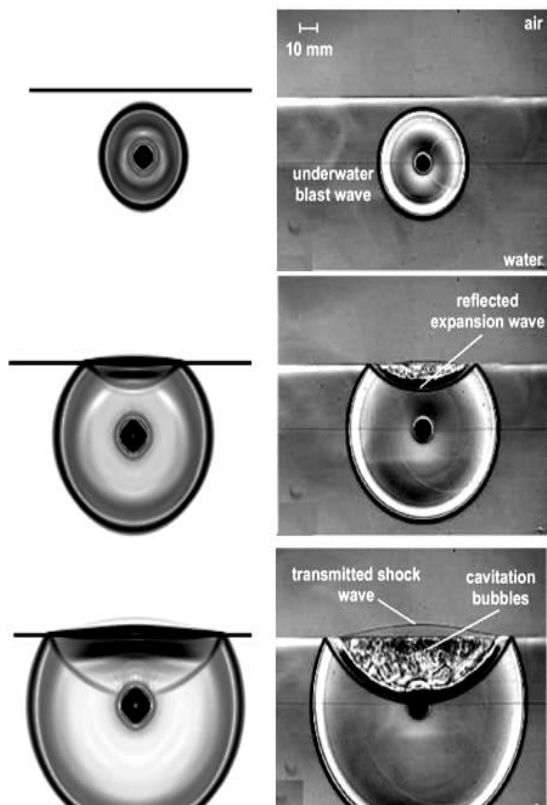
شکل (۴): اثرات متقابل شاک و حباب R_{22} در هوا. سمت چپ: نتایج تجربی به صورت تصاویر سایه‌ای [۲۶]. سمت راست: نتایج عددی به صورت تصاویر از نوع شلرین به ترتیب از بالا به پایین ۱۱۵، ۱۸۷، ۲۴۷، ۴۱۷ میکرو ثانیه.

۴-۳- انفجار زیر سطحی ماده منفجره AgN_3

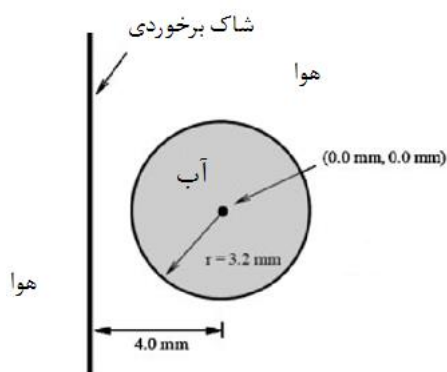
در این قسمت یک مسئله دوبعدی انفجار زیر سطحی در نظر گرفته شد. این پدیده توسط مرجع [۲۷] به صورت تجربی مطالعه شد. در این مسئله انفجار ۱۰ میلی گرم AgN_3 به صورت یک هسته کروی با قطر ۱ سانتی متر مدل سازی شد که از آن انرژی $25/5 J/m$ آزاد می‌شود. فشار حاصل از انفجار بر اساس نتایج تجربی مرجع [۲۷] معادل 10^9 pa است. دامنه محاسباتی شامل یک میدان مربعی به ابعاد $0.35 \times 0.35 m^2$ است. در زمان $t=0$ سطح آزاد افقی آب در موقعیت $y=0.175$ قرار دارد. ماده منفجره در عمق 0.125 متر زیر سطح آزاد قرار دارد. شرط مرزی کف شامل دیواره جامد و شرایط مرزی بالایی، چپ و راست به صورت غیر انعکاسی در نظر گرفته شد. تعداد مش استفاده شده برای تحلیل 300×300 است. در شکل (۷)



شکل (۵): تصویری از توپولوژی فصل مشترک (توزیع کسر حجمی) در زمان ۴۲۲ میکرو ثانیه ناپایداری کلون هلمهلتز به وضوح در فصل مشترک در اثر برخورد شاک با حباب R_{22} دیده می‌شود.



شکل (۷): انفجار زیر آب، گرادیان چگالی به صورت تصاویر شلرین سمت چپ نتایج عددی کار حاضر، سمت راست نتایج تجربی مرجع [۲۷]، به ترتیب از بالا به پایین ۱۴ و ۲۸ و ۴۲ میکرو ثانیه.



ماخ شاک برخوردی مساوی ۶ است. عدد کورانت بکار گرفته شده در محاسبات مسئله حاضر مساوی ۰/۸ است. نتایج عددی محاسبه شده در شرایط گذرا در شکل (۹) نمایش داده شده است. در زمان ۵ μSEC همان طور که به طور واضح دیده می شود سرعت شاک در هوا از سرعت شاک در آب بیشتر است که این امر به دلیل بیشتر بودن سرعت صوت در آب نسبت به هوا است. در این مرحله الگوی جریان شاک انعکاسی شبیه شاک انعکاسی از یک استوانه جامد است. در شکل (۹-ب) دیده می شود که جریان ناپایدار شده و ضخامت فصل مشترک به سرعت افزایش می یابد. پس از حرکت موج ضربه ای در درون قطره و برخورد به

مقایسه نتایج عددی در زمان های مختلف به صورت تصویر شلرین (گرادیان چگالی) با نتایج تجربی [۲۷] ارائه شده است. برابری خوبی بین نتایج شبیه سازی عددی و نتایج تجربی دیده می شود که بیانگر دقت و توانایی بالای مدل و روش عددی انتخابی در شبیه سازی این پدیده است. در این مسئله ابتدا یک موج شاک قوی به سطح آزاد اصابت می کند و سبب ایجاد امواج انبساطی انعکاسی پراتل-مایر می شود و مقداری از آن نیز به هوا عبور می کند. تنش ایجاد شده به واسطه شاک منعکس شده و امواج انبساطی از سطح آزاد سبب ایجاد یک ناحیه کاپیتاسیون در نزدیک سطح آزاد می شود که به نحو خوبی تسخیر شده است. مقایسه کیفی نتایج عددی با نتایج تصاویر آزمایشگاهی سایه ای بیانگر برابری خوب جواب ها است.

۴-۴- مسئله دوبعدی اثرات متقابل برخورد شاک و ستون آب

در این قسمت یک مسئله مشکل شامل برخورد یک موج شاک هایپرسونیک با ماخ ۶ و یک ستون آب استوانه ای مطالعه می شود. این مسئله در مرجع [۲۸] گفته شده است. شکل این مسئله در تصویر شماره (۹) نمایش داده شده است. در بالا و پایین میدان محاسباتی شرط مرزی دیواره و در سمت چپ و راست آن شرط مرزی ساده غیر انعکاسی قرار داده شد. نخست یک ستون آب با قطر ۶/۴ میلی متر در مرکز قرار دارد و موج شاک در هوا در موقعیت $x = -4 \text{ mm}$ به سمت آن حرکت می کند. شرایط اولیه به شرح ذیل است:

$$p = 1 \times 10^5, u_i = v_i = 0 \text{ m/sec}, T_i = 346/9^\circ \text{ K}$$

و شرایط اولیه پشت شاک عبارتند از:

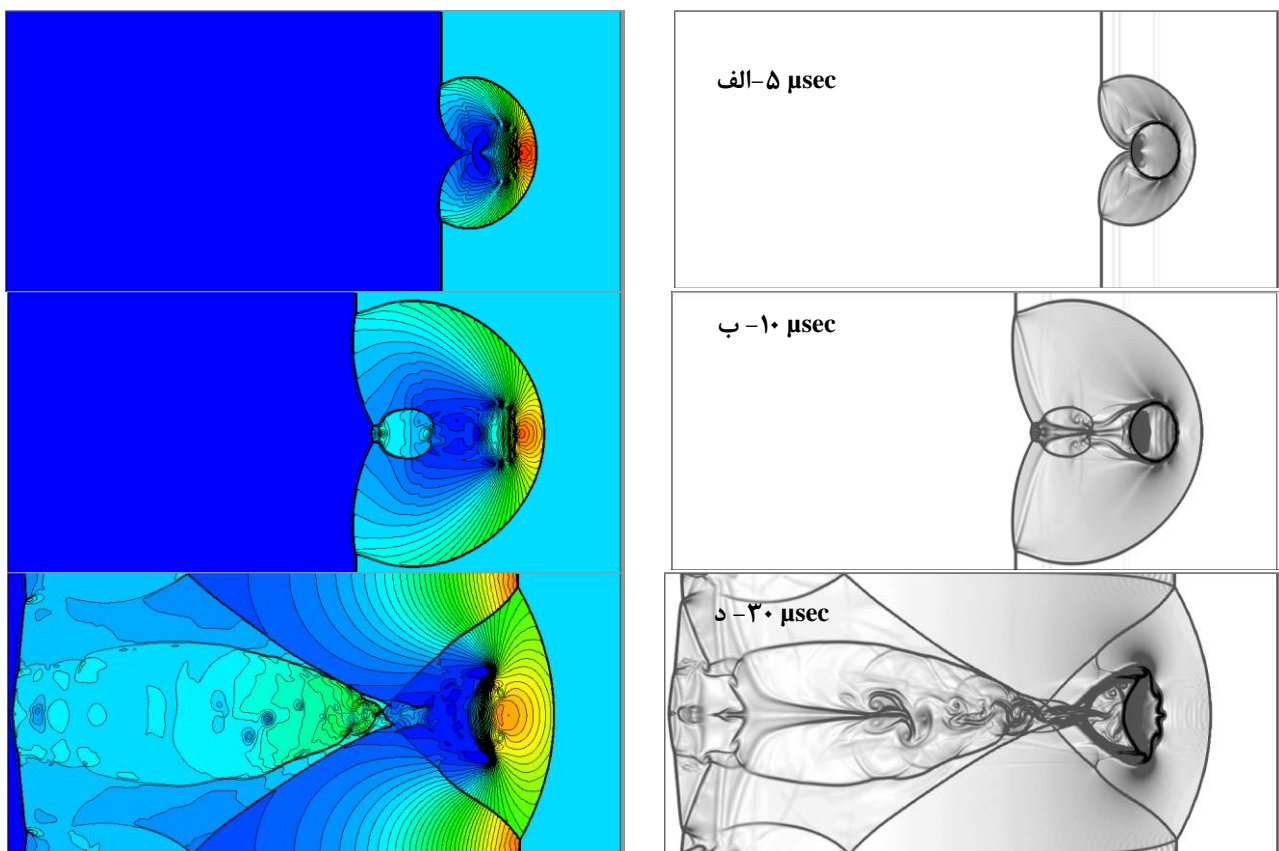
$$p = 4/18 \times 10^6 \text{ pa}, u_i = 1/1818 \times 10^2, v_i = 0 \text{ m/sec},$$

$$T_i = 2755^\circ \text{ K}$$

فشار حاصل می‌شود. این توزیع فشار به نحوی است که در مقیاس کوچکی از میدان حل نقاط پرفشار در کنار نواحی کم فشار خلا و کاویتاسیون پدیدار می‌شود که کد عددی حاضر به نحو خوبی از عهده تسخیر این میدان‌های فشاری بر آمده است. در زمان‌های بعدی یک ساختار بسیار پیچیده در ناحیه دنباله جریان پس از عبور شاک از ستون آب دیده می‌شود که در بر دارنده امواج انبساطی، امواج تراکمی، موج شاک و ناپایداری‌های فصل مشترک تماسی دو فاز است. همچنین یک ساختار جالب موج بین شاک خمیده شده و ابتدای ستون آب دیده می‌شود.

سمت دیگر آن یک سری امواج در درون قطره به سمت عقب منعکس می‌شوند و یک ناحیه کم فشار در حد فشار صفر ایجاد می‌نمایند. این پدیده در شکل (۹-ج) به صورت واضح قابل مشاهده است. این فشار پایین منجر به ایجاد یک ناحیه کاویتاسیون خلایی می‌شود. با گذر زمان کم کم به ضخامت فصل مشترک افزوده شده و ساختار پیچیده در فصل مشترک ایجاد می‌شود. این پیچیدگی موقعی که هوا، آب را از درون قطره به بیرون می‌کشد بیشتر می‌شود. این پدیده از زمان ۱۰ میکرو ثانیه به بعد قابل مشاهده است. به دلیل انعکاس‌های موج ضربه‌ای در درون قطره و تداخل امواج مختلف با همدیگر توزیع پیچیده‌ای از

شکل (۸): شکل نمادین از شرایط اولیه و مشخصات هندسی میدان حل اثرات متقابل شاک و ستون آب



شکل (۹): نتایج عددی مسئله اثرات متقابل شاک و ستون آب. سرعت شاک برخوردی $M=6$ است. سمت چپ: کنتورهای فشار، سمت راست: کانتورهای

گرادیان چگالی (تصاویر شلرین)

۵- جمع بندی و نتیجه‌گیری

شاک با استفاده از مدل شش معادله‌ای دو فشاری مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. کارایی روش عددی برای مسئله مهم جریان‌های چند جزیی با حضور شاک مطالعه شد. نتایج عددی دوبعدی بدست آمده دقیق بوده و بدون هرگونه نوسان می‌باشد و نفوذ پدیدار شده در فصل‌های مشترک بسیار اندک است و با

در این مقاله یک متدلوژی مناسب و کارا بر اساس روش عددی گودونوف و حل گر ریمن HLLC با دقت مرتبه ۲ برای شبیه سازی دوبعدی جریان‌های تراکم پذیر دو فازی با حضور

methods: An overview and some recent results.", J. Comput. Phys., 169(2):463–502, 2001.

Unverdi, S. and Tryggvason, G., "A front tracking method for viscous incompressible flows", J. Comput. Phys., 100:25–37, 1992.

Terashima H., Tryggvason, G., "A front-tracking/ghost-fluid method for fluid interfaces in compressible flows", J. Comput. Phys., 228: 4012- 4037, 2009.

Terashima H., Tryggvason, G., "A front-tracking method with projected interface conditions for compressible multi-fluid flows", Computers & Fluids 39: 1804–1814, 2010.

Doneal, J., Huerta, A., Ponthot, J.P., and Rodriguez-Ferran, A., "Arbitrary Lagrangian -Eulerian Methods", In E. Stein, R. de Borst, and T. J. Hughes, editors, Encyclopedia of Computational Mechanics, chapter 14. John Wiley & Sons, 2004.

Anbarlooei, H.R, Mazaheri, K., "Moment of fluid interface reconstruction method in multi-material arbitrary Lagrangian Eulerian (MMALE) algorithms", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 198: 3782–3794, 2009.

Saurel, R. and Le Metayer, O., "A multiphase model for interfaces", shocks, detonation waves and cavitation. J. Fluid Mech., 431:239–271, 2001.

Johnsen, E., Colonius, T., "Implementation of WENO schemes in compressible multicomponent flow problems", J. Comput. Phys, 219: 715–732, 2006.

Kawai, S., Terashima, H., "A high-resolution scheme for compressible multicomponent flows With shock waves", Int. J. Numer. Meth. Fluids , 2010.

Johnsen E., "Spurious oscillations and conservation errors in interface-capturing schemes", Annual Research Briefs 2008, Center for Turbulence Research, NASA Ames and Stanford University, 115–126, 2008.

Chang, C- H., Liou, M.-S., "A robust and accurate approach to computing compressible multiphase flow: Stratified

نتایج تجربی و نتایج عددی قبلی با روش‌های عددی پیچیده هم‌خوانی دارد. از مزایای دیگر این روش عدم نیاز به CFL پایین برای بیشتر مسائل است که زمان محاسباتی را تا حد زیادی کاهش می‌دهد.

۶- فهرست علائم

| | |
|------------|----------------------------|
| u | سرعت محوری (m/s) |
| P | فشار (Pa) |
| E | انرژی درونی کل (J) |
| e | انرژی درونی (J/Kg) |
| t | زمان (s) |
| U | بردار پایستار |
| c | سرعت صوت (m/s) |
| S | سرعت موج (m/s) |
| f | شار عددی |
| v | حجم مخصوص |
| | علائم یونانی |
| α | کسر حجمی |
| ρ | چگالی (kg/m ³) |
| P_I | فشار فصل مشترک (Pa) |
| P_∞ | ثابت معادله حالت (Pa) |
| γ | ضریب گرمای ویژه |
| μ | ضریب آسایش فشار (1/s.Pa) |
| | زیر نویس |
| k | نوع فاز (مایع یا گاز) |
| | بالا نویس |
| * | حالت میانی بین دو موج |

۷- مراجع

- Scheffler, D and Zukas, J., "Practical aspects of numerical simulations of dynamic events: Material interfaces", Int. J. Impact Eng., 24(8):821–842, 2000. [۱]
- Pilliod, J. and Puckett, E., "Second-order accurate Volume-of-Fluid algorithms for tracking material interfaces", J. Comput. Phys., 199:465–502, 2004. [۲]
- Sethian, J.A., "Level Set Methods: Evolving Interfaces in Geometry", Fluid. Mechanics, Computer Vision and Material Science. Cambridge University Press, 1996. [۳]
- Osher, S., and Fedkiw, R., "Level set [۴]

for interfaces separating compressible fluids, cavitating flows and shocks in multiphase mixtures”, J. Comput. Phys., 228(5):1678– 1712, 2009.

Haas J.F., Sturtevant B., “Interaction of weak shock waves with cylindrical and spherical gas in homogeneity”, Journal of Fluid Mechanics 181:41- 76. [۲۶]

Kleine H., Tepper S., Takehara, K., Etoh T. G., Hiraki K., “Cavitation induced by low-speed underwater impact”, Int. J. Shock Waves vol. 19, pp. 895, 2009. [۲۷]

Niu. Y.-Y., Lin, Y.-C., Chang C.-H., “A further work on multi-phase two-fluid approach for compressible multiphase flows”, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 58:879- 896, 2008. [۲۸]

۸- زیر نویس‌ها

^۱ Sharp interface methods

^۲ Arbitrary Lagrangian Eulerian

^۳ diffuse interface method

^۴ Stiffened gas EOS.

^۵ Harten,Lax,Van Leer-contact

^۶ Dynamic compact viscosity

^۷ silver Azide

flow model and AUSM +-up scheme”, J. Comput. Phys. 225 : 840– 873, 2007.

Abgrall, R., “How to prevent pressure oscillations in multi-component flow calculations: A quasi conservative approach”, J. Comput. Phys., 125(1):150– 160, 1996. [۱۵]

Shyue, K.-M., “An efficient shock-capturing algorithm for compressible multi-component problems”, J. Comp. Phys., 142:208– 242, 1998. [۱۶]

Shyue, K.-M., “A high-resolution mapped grid algorithm for compressible multiphase flow problems”, J. Comput. Phys. 229: 8780– 8801, 2010. [۱۷]

Saurel, R., Abgrall, R., “A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows”, J. Comput. Phys., 150(2):425– 467, 1999. [۱۸]

Castro C. E., Toro E. F., “A Riemann solver and upwind methods for a two-phase flow model non-conservative form”, Int. J. Numer. Meth. Fluids 50:275– 307, 2006. [۱۹]

Munkejord, S. T., “Comparison of Roe-type methods for solving the two-fluid model with and without pressure relaxation”, Computers & Fluids 36:1061– 1080, 2007. [۲۰]

Munkejord, S. T., “A Numerical Study of Two-Fluid Models with Pressure and Velocity Relaxation”, Adv. Appl. Math. Mech., 2: 131- 159, 2010. [۲۱]

Tokareva S.A., Toro E.F., “HLLC-type Riemann solver for the Baer–Nunziato equations of compressible two-phase flow”, Journal of Computational Physics 229: 3573– 3604, 2010. [۲۲]

Dumbser M., Toro E.F., “A Simple Extension of the Osher Riemann Solver to Non-conservative Hyperbolic Systems”, J. Sci. Comput., DOI 10.1007/s10915-010-9400- 3, 2010. [۲۳]

Kapila, R. Menikoff, J. Bdzil, S. Son, and D. Stewart., “Two-phase modeling of DDT in granular materials: Reduced equations”, Phys. Fluid, 13:3002– 3024, 2001. [۲۴]

Saurel, R., Petitpas, F., and Berry, R. A., “Simple and efficient relaxation methods [۲۵]