



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)

دوره چهل و شش، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۳، صفحه ۶۷ تا ۷۹  
Vol. 46, No. 2, winter 2014, pp. 67- 79



نشریه علمی - پژوهشی امیرکبیر (مهندسی مکانیک)  
Amirkabir Journal of Science & Research (Mechanical Engineering)  
(AJSR - ME)

## بررسی تاثیر مقیاس کوچک بر کمانش پیچشی نانولوله های ۲ تا ۵ جداره محصور در محیط الاستیک تحت بارگذاری محوری و میدان دمایی

سیما ضیایی<sup>۱\*</sup>، محسن اسدی پور<sup>۲</sup>

۱- استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه یاسوج  
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه یاسوج

(دریافت ۱۳۹۱/۲/۲۹، پذیرش ۱۳۹۲/۱۱/۲۰)

### چکیده

در این پژوهش با استفاده از مدل پوسته پیوسته غیر محلی کمانش پیچشی نانولوله های چند جداره (از ۲ تا ۵ جداره) محصور شده در محیط الاستیک تحت بارگذاری ترکیبی مورد مطالعه قرار گرفته و نتایج با مدل پوسته پیوسته کلاسیک مقایسه شده است. همچنین تاثیر افزایش تعداد لایه های نانو لوله در شرایط بارگذاری و هندسی مشابه با تنش بحرانی سنجیده شده است. نتایج نشان می دهند که اثرات غیر محلی بر مقدار تنش برشی بحرانی تاثیر می گذارد و میزان این تاثیر در نیم موج های طولی بزرگتر بیشتر است. همچنین نشان داده شده است که در مقابل بار محوری کششی میزان تنش برشی بحرانی نانو لوله به مراتب بزرگتر از بار محوری فشاری است. در ضمن وجود محیط الاستیک پیرامون نانولوله تاثیر مثبتی بر میزان تنش برشی بحرانی نانولوله ها دارد.

### کلمات کلیدی

نانولوله های چند جداره، اثر مقیاس کوچک، کمانش پیچشی، بار محوری، محیط الاستیک، میدان دمایی.

\* نویسنده مسئول و عهده دار مکاتبات Email: sima\_ziaee@yahoo.com

## ۱- مقدمه

کمانشی نانولوله‌های تک جداره و چند جداره تحت بارگذاری‌های ترکیبی بسیار معمول است [۱۳]-[۲۲].

پانتانو و همکاران [۱۳] از یک مدل پیوسته‌ی اجزاء محدود برای مدلسازی سازه و تغییرشکل نانولوله‌های تک جداره و چند جداره استفاده کرده‌اند. آن‌ها هر لوله را با المان‌های پیوسته مدل کردند و از خواص الاستیک و ضخامت مکانیکی ویژه‌ای برای شبیه‌سازی لوله‌ها براساس مدل پیوسته استفاده کرده‌اند. آن‌ها برای شبیه‌سازی نیروی و اندروالز بین لوله‌ها از المان‌های برهم کنش استفاده کردند. آن‌ها درستی شبیه‌سازی خود را با مقایسه تغییرشکل نانولوله‌های تک جداره با نتایج شبیه‌سازی مولکول دینامیکی نشان دادند.

هی و همکاران [۱۴] با استفاده از یک مدل دقیق‌تر برای مدل‌سازی نیروی و اندروالز و مدل پیوسته استوانه‌ای پیوسته به تحلیل یک نانولوله ۳ جداره تحت نیروی فشاری-محوری پرداخته‌اند. در این مطالعه اثر برهم کنش و اندروالز بین لایه‌های مختلف کربن نانولوله‌ها و اثر ابعادی آن‌ها بر برهم کنش و اندروالز بررسی شده است. در این مطالعه نشان داده شده است که بیشترین اثر برهم کنش و اندروالز از لایه‌های مجاور حاصل می‌شود و می‌توان از اثر برهم کنش و اندروالز لایه دور صرف‌نظر کرد. از سوی دیگر مشاهده شد که برهم کنش و اندروالز مستقیماً به شعاع لوله مخصوصاً وقتی که شعاع به اندازه کافی کوچک است ( $\gamma nm$ )، بستگی دارد. زمانی که شعاع نانولوله از  $40 nm$  بزرگتر است می‌توان ضرائب برهم کنش و اندروالز را به صورت مقادیر ثابت (یعنی مستقل از شعاع نانولوله) که برای هر دو لایه مختلف در یک نانولوله چند جداره متفاوت است در نظر گرفت.

قیان و همکاران [۱۵] به بررسی اثر تغییر انحناء لوله‌های داخلی و خارجی بر نیروی بین لایه‌ای و اندروالز در هر نقطه و تاثیر آن بر کمانش نانولوله‌های دو جداره تحت نیروی فشاری-محوری با قطر کمتر از  $0.7 nm$  پرداخته‌اند. آن‌ها از مدل پیوسته استوانه‌ای پیوسته کلاسیک برای شبیه‌سازی نانولوله‌ها استفاده کردند.

وانگ و همکاران [۱۶] کمانش پیچشی نانولوله‌های چند جداره را با استفاده از مدل پیوسته استوانه‌ای پیوسته کلاسیک مطالعه کرده‌اند آن‌ها بر اساس نسبت شعاع به ضخامت، نانولوله‌های چند جداره را در سه دسته نازک (که در آن‌ها نسبت درونی‌ترین شعاع داخلی به ضخامت از ۵ بزرگتر است)، ضخیم (که در آن‌ها نسبت درونی‌ترین شعاع داخلی به ضخامت حدود یک است) و نزدیک به چگال (که در آن‌ها نسبت درونی‌ترین شعاع به ضخامت از  $0.25$  کمتر است) مورد مطالعه قرار داده‌اند.

بعد از کشف نانولوله‌های کربنی توسط ایچیمیا دنیایی از تحقیقات برای تحلیل دقیق و مناسب سازه‌هایی با ابعاد نانو شکل گرفت. سازه‌های نانو بعدی خواص فیزیکی، مکانیکی، شیمیایی، الکترونیکی و الکتریکی خارق‌العاده‌ای را از خود نشان می‌دهند و این خواص برجسته نانولوله‌های کربنی منجر به پیدایش کاربردهای نوینی برای آن‌ها همچون نانو الکترونیک‌ها، نانواپزارها و نانوکامپوزیت‌ها شده است. یکی از مشخصه‌های منحصر به فرد نانولوله‌های کربنی قابلیت احیا شدن آن‌ها از کمانش الاستیک است که این امر قابلیت استفاده مکرر از نانولوله‌ها بدون بروز هرگونه آسیبی را فراهم می‌سازد [۱]. بنابراین بررسی کمانش و خمش نانولوله‌های کربنی تک جداره و چند جداره موضوع بسیاری از مطالعات آزمایشگاهی و تئوری است.

تاکنون تحقیقات بیشماری در خصوص تعیین نیروی کمانشی یا تنش بحرانی و چگونگی تاثیر گذاری نسبت ابعادی نانولوله‌ها، قطر و اثر کاپالیته بر کمانش نانولوله‌های کربنی صورت گرفته است. معمول‌ترین روش‌هایی که برای مدلسازی کمانش نانولوله‌های کربنی استفاده می‌شوند عبارتند از: (۱) دینامیک مولکولی [۲]-[۵] (۲) مکانیک سازه‌ای مولکولی [۱]، [۶]-[۸] و (۳) مکانیک محیط پیوسته.

اگر چه شبیه‌سازی توسط دینامیک مولکولی نتایج فراوانی برای فهم رفتار کمانشی نانولوله‌ها در اختیار می‌گذارد اما به دلیل حجم محاسبات بالای آن برای مدلسازی سیستم‌های اتمی بزرگ چندان مقرون به صرفه نیست. از سوی دیگر مشکلات حاکم بر مطالعات آزمایشگاهی و هزینه گزاف آن منجر به شکل‌گیری مدلسازی نانولوله‌ها بر پایه مکانیک محیط پیوسته گشته است. یاکوبسون [۹] با مقایسه یک مدل اتمی با یک مدل ساده پیوسته در شبیه‌سازی کمانش نانولوله تک جداره تحت فشار محوری نشان داد که مدل پیوسته قادر به پیش‌بینی تمام تغییرات الگوهای کمانشی حاصل از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی است. البته مدل پیوسته پیوسته موجود را به دلیل حضور نیروهای و اندروالز نمی‌توان مستقیماً برای بررسی رفتار مکانیکی نانولوله‌های چند جداره بکار برد.

در سال ۲۰۰۱ ریو [۱۰] یک مدل پیوسته الاستیک مضاعف را برای بررسی کمانش بی‌نهایت کوچک یک نانولوله دو جداره محصور در یک محیط الاستیک تحت بارگذاری محوری-فشاری ارائه کرد. این مدل توسط وانگ [۱۱، ۱۲] برای نانولوله‌های چند جداره بسط داده شد. امروزه استفاده از مکانیک محیط پیوسته در دو هیات محلی یا کلاسیک و غیر محلی برای مدلسازی رفتار

## ۲- مدل پوسته پیوسته غیر محلی

یک پوسته استوانه‌ای تحت بارگذاری ترکیبی مکانیکی و حرارتی  $T$  به شعاع  $R$ ، ضخامت  $h$ ، مدول الاستیک  $E$  و نسبت پواسون  $\nu$  را در نظر بگیرید. با برقراری معادلات تعادل بر اساس شکل (۱) می‌توان روابط زیر را نوشت:

$$N_{x,x} + \frac{1}{R} N_{\theta,\theta} = 0 \quad (1a)$$

$$N_{x,\theta,\theta} + \frac{1}{R} N_{\theta,\theta} + \frac{1}{R} Q_{\theta} = 0 \quad (1b)$$

$$\frac{1}{R} Q_{\theta,\theta} + Q_{x,x} - \frac{1}{R} N_{\theta} - N_x \beta_{x,x} - N_{x\theta} \beta_{\theta,x} - \frac{1}{R} N_{\theta,x} \beta_{x,\theta} - \frac{1}{R} N_{\theta} \beta_{\theta,\theta} = -P \quad (1c)$$

$$Q_{\theta} = \frac{1}{R} M_{\theta,\theta} + M_{x,\theta,x} \quad (1d)$$

$$Q_x = \frac{1}{R} M_{\theta,x,\theta} + M_{x,x} \quad (1e)$$

که در آن

$$\beta_x = -w_{,x}, \quad \beta_{\theta} = -\frac{1}{R} w_{,\theta} \quad (2)$$

بر اساس تئوری الاستیسیته غیر محلی ایرینگن، بیان تنش در یک نقطه مرجع  $X$  تابعی از میدان کرنش در هر نقطه از جسم پیوسته است یعنی:

$$(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \sigma = C_0 : \varepsilon \quad (3)$$

که در آن نماد "": معرف ضرب داخلی تنسورها با انقباض دوگانه است.  $C_0$  تنسور سفتی الاستیک در الاستیسیته ایزوتروپیک کلاسیک (محلی)،  $\nabla^2$  اپراتور لاپلاس،  $\sigma$  تنسور تنش غیر محلی،  $\varepsilon$  تنسور کرنش،  $e_0$  ثابت ماده و  $a$  مشخصه طول داخلی ماده است.  $e_0 a$  یک پارامتر مقیاس برای اثر مقیاس کوچک برشمرده می‌شود.

ژانگ و همکاران [۱۷] با استفاده از مدل پوسته پیوسته غیر محلی به بررسی کماتش نانولوله‌های چند جداره تحت فشار یکنواخت شعاعی خارجی پرداخته‌اند.

وانگ و همکاران [۱۸] با استفاده از پوسته استوانه‌ای پیوسته کلاسیک به مدل سازی کماتش پیچشی نانولوله‌های چند جداره تحت بارگذاری محوری و محصور در یک محیط الاستیک پرداخته‌اند. آن‌ها برای مدل سازی تنش برشی ناشی از بارگذاری پیچشی از این فرض استفاده کردند که تنش برشی در تمام لایه‌ها با هم برابر است. آن‌ها مطالعات خود را در سه گروه نانولوله‌های نازک، ضخیم و نزدیک به چگال انجام داده‌اند.

اکسیاهو و قیانگ [۱۹] با استفاده از مدل پوسته الاستیک پیوسته کلاسیک به مدل سازی کماتش ناشی از بارگذاری محوری-فشاری نانولوله‌های دو جداره پرداخته‌اند و تاثیر تغییرات حرارتی را بر این پدیده بررسی کرده‌اند. آن‌ها نشان داده‌اند که نیروی کماتش محوری نانولوله دو جداره تحت بارهای حرارتی به شماره موج حالت‌های کماتش محوری بستگی دارد. همچنین آن‌ها نشان داده‌اند که در دمای اتاق و دمای پایین تنش محوری بحرانی برای کماتش بسیار کوچک نانولوله دو جداره با افزایش مقدار تغییر دما، افزایش می‌یابد. در حالیکه در دمای بالا تنش بحرانی محوری کماتش بسیار کوچک نانولوله دو جداره با افزایش مقدار تغییر دما کاهش می‌یابد.

سان و لیو [۲۰] با استفاده از مدل پوسته استوانه‌ای پیوسته کلاسیک به بررسی کماتش پیچشی نانولوله‌های چند جداره تحت فشار شعاعی و بارگذاری محوری پرداخته‌اند. آن‌ها برای مدل سازی تنش برشی از این فرض استفاده کرده‌اند که زاویه پیچش تمام نانولوله‌ها با هم برابر هستند.

یان و همکاران [۲۱] و هاوو و همکاران [۲۲] به ترتیب تاثیر تغییر پارامتر مقیاس کوچک را بر کماتش محوری نانولوله‌های سه جداره در میدان حرارتی و کماتش پیچشی نانولوله‌های چند جداره در میدان حرارتی بررسی کرده‌اند. آن‌ها از مدل پوسته استوانه‌ای پیوسته غیر محلی استفاده کرده‌اند.

در این پژوهش با استفاده معادلات پوسته غیر محلی به مدل سازی رفتار کماتش نانولوله‌های چند جداره از ۲ تا ۵ جداره تحت بارگذاری ترکیبی محصور در محیط الاستیک پرداخته شده است.

$$N_x - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\theta) - \frac{E \alpha_1 T}{1-\nu} = N_{xM} + N_{xT} \quad (7a)$$

$$N_\theta - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 N_\theta}{R^2 \partial \theta^2} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_x) - \frac{E \alpha_2 T}{1-\nu} = N_{\theta M} + N_{\theta T} \quad (7b)$$

$$N_{x\theta} - (e_0 a)^2 \left( \frac{\partial^2 N_{x\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_{x\theta}}{R^2 \partial \theta^2} \right) = \frac{E}{1-\nu^2} (1-\nu) \varepsilon_{x\theta} \quad (7c)$$

$$M_x - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \frac{E \alpha_1}{1-\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T z dz \quad (7d)$$

$$M_\theta - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M_\theta}{R^2 \partial \theta^2} = -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \frac{E \alpha_2}{1-\nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T z dz \quad (7e)$$

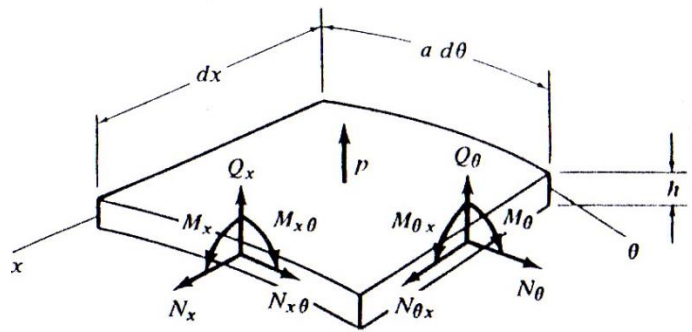
$$M_{x\theta} - (e_0 a)^2 \left( \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{R^2 \partial \theta^2} \right) = -\frac{E h^3}{12(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} \right) \quad (7f)$$

حال با جایگزین کردن معادلات 7d-7f در معادلات 1e-1d و جایگزین کردن حاصل در معادله 1c و با فرض آنکه در پوسته های فوق العاده نازک رابطه  $M_{x\theta} = M_{\theta x}$  و  $N_{x\theta} = N_{\theta x}$  برقرار است و با فرض آنکه پارامتر  $e_0 a$  در محدوده صفر تا ۱ تغییر می کند [۲۱] می توان به معادله ۸ دست یافت:

$$D(\nabla_R^4 w + (e_0 a)^2 H) + \frac{1}{R} N_\theta = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2}{R} N_{x\theta} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{N_\theta}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + P \quad (8)$$

$$H = \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 w}{R^6 \partial \theta^6} + \frac{2-\nu}{R^2} \left( \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial \theta^2} + \frac{\partial^6 w}{R^2 \partial \theta^4 \partial x^2} \right) \quad (9a)$$

$$\nabla_R^4 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{R^2 \partial \theta^2} \right)^2 \quad (9b)$$



شکل (۱): المان پوسته استوانه ای

بر اساس معادله ۳ می توان معادلات حاکمه بر نانولوله های کربنی را به صورت زیر نوشت [۲۱]:

$$\sigma_x - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\theta) - \frac{E \alpha_1 T}{1-\nu} \quad (4a)$$

$$\sigma_\theta - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{R^2 \partial \theta^2} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_x) - \frac{E \alpha_2 T}{1-\nu} \quad (4b)$$

$$\sigma_{x\theta} - (e_0 a)^2 \left( \frac{\partial^2 \sigma_{x\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{x\theta}}{R^2 \partial \theta^2} \right) = \frac{E}{1-\nu^2} (1-\nu) \varepsilon_{x\theta} \quad (4c)$$

که در آن مقادیر کرنش عبارتند از:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (5a)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{1}{2R^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} - \frac{w}{R} \quad (5b)$$

$$\varepsilon_{x\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{R \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{R \partial \theta} - z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} \right) \quad (5c)$$

که در آن  $u, v, w$  به ترتیب معرف جابجایی در راستای محوری، محیطی و شعاعی است.

حال با توجه به روابط حاکم بر نیروهای حاصل و گشتاورهای حاصل در واحد طول:

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz, N_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta dz, N_{x\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{x\theta} dz \quad (6a)$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_x dz, M_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_\theta dz, M_{x\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{x\theta} dz \quad (6b)$$

و استفاده از روابط ۵ می توان به روابط زیر رسید:

$$H^{01} = \frac{\partial^6(w^0 + w^1)}{\partial x^6} + \frac{\partial^6(w^0 + w^1)}{R^6 \partial \theta^6} + \frac{2-\nu}{R^2} \times \left( \frac{\partial^6(w^0 + w^1)}{\partial x^4 \partial \theta^2} + \frac{\partial^6(w^0 + w^1)}{R^2 \partial \theta^4 \partial x^2} \right) \quad (14)$$

که با توجه به معادله ۱۱ و با فرض قابل اغماض بودن چرخش‌های قبل از کمانش یعنی  $\left(\frac{\partial w^0}{\partial x}\right)$  و  $\left(\frac{\partial w^0}{R \partial \theta}\right)$  و با صرف نظر از مقادیر کوچک مرتبه بالا ناشی از تغییر شکل بعد از کمانش یعنی  $\left(N_x^1 \frac{\partial^2 w^1}{\partial x^2}\right)$ ،  $\left(\frac{N_\theta^1}{R^2} \frac{\partial^2 w^1}{\partial \theta^2}\right)$  و  $\left(N_{x\theta}^1 \frac{\partial^2 w^1}{\partial x \partial \theta}\right)$  می‌توان به معادله ۱۵ دست یافت:

$$D(\nabla_R^4 w^1 + (e_0 a)^2 H^1) + \frac{1}{R} N_\theta^1 = N_x^0 \frac{\partial^2 w^1}{\partial x^2} + \frac{2}{R} N_{x\theta}^0 \frac{\partial^2 w^1}{\partial x \partial \theta} + \frac{N_\theta^0}{R^2} \frac{\partial^2 w^1}{\partial \theta^2} + P^1 \quad (15)$$

که در آن:

$$H^1 = \frac{\partial^6 w^1}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 w^1}{R^6 \partial \theta^6} + \frac{2-\nu}{R^2} \left( \frac{\partial^6 w^1}{\partial x^4 \partial \theta^2} + \frac{\partial^6 w^1}{R^2 \partial \theta^4 \partial x^2} \right) \quad (16)$$

با تعریف تابع تنش  $\phi(x, \theta)$  به صورت زیر:

$$N_x^1 = \frac{\partial^2 \phi}{R^2 \partial \theta^2}, N_{x\theta}^1 = -\frac{\partial^2 \phi}{R \partial x \partial \theta}, N_\theta^1 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (17)$$

که شرط سازگاری را به صورت زیر ارضاء می‌کند:

$$\nabla^4 \phi = \frac{Eh}{R} \frac{\partial^2 w^1}{\partial x^2} \quad (18)$$

می‌توان معادله حاکم بر کمانش (معادله ۱۵) را به صورت معادله ۱۹ نوشت:

$$D(\nabla_R^8 w^1 + (e_0 a)^2 \nabla_R^4 H^1) + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w^1}{\partial x^2} \right) = N_x^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\nabla_R^4 w^1) + \frac{2}{R} N_{x\theta}^0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} (\nabla_R^4 w^1) + \frac{N_\theta^0}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\nabla_R^4 w^1) + \nabla_R^4 P^1 \quad (19)$$

در معادله ۱۹ عبارت D به سختی خمشی معروف است. اگر چه در بسیاری از کاربرها فرض شده است که می‌توان از این فرمول برای تعیین سختی خمشی نانولوله‌های کربنی تک جداره و چند جداره استفاده کرد اما مطالعات اکسیاهو و قیانگ [۲۳] نشان داده است که برای استفاده از مدل پوسته برای تحلیل نانو لوله‌ها باید مقادیر سختی خمشی، مدول الاستیک و ضخامت لایه‌ها به یک شیوه موثر تعریف گردد [۱۳]. ریو [۲۴] پیشنهاد

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (9c)$$

در هیات بعد از کمانش می‌توان روابط زیر را نوشت:

$$N_x = N_x^0 + N_x^1 \quad (10a)$$

$$N_\theta = N_\theta^0 + N_\theta^1 \quad (10b)$$

$$N_{x\theta} = N_{x\theta}^0 + N_{x\theta}^1 \quad (10c)$$

$$w(x, \theta) = w^0(x, \theta) + w^1(x, \theta) \quad (10d)$$

$$P(x, \theta) = P^0(x, \theta) + P^1(x, \theta) \quad (10e)$$

که در آن بالا نویسی "0" معرف حالت قبل از کمانش و بالانویسی "1" معرف حالت بعد از کمانش است.

براساس معادله شماره ۸ می‌توان رابطه زیر را برای هیات قبل از کمانش نوشت:

$$D(\nabla_R^4 w^0 + (e_0 a)^2 H^0) + \frac{1}{R} N_\theta^0 = N_x^0 \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + \frac{2}{R} N_{x\theta}^0 \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial \theta} + \frac{N_\theta^0}{R^2} \frac{\partial^2 w^0}{\partial \theta^2} + P \quad (11)$$

که در آن:

$$H^0 = \frac{\partial^6 w^0}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 w^0}{R^6 \partial \theta^6} + \frac{2-\nu}{R^2} \left( \frac{\partial^6 w^0}{\partial x^4 \partial \theta^2} + \frac{\partial^6 w^0}{R^2 \partial \theta^4 \partial x^2} \right) \quad (12)$$

معادله ۱۱ بعد از کمانش به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$D(\nabla_R^4 (w^0 + w^1) + (e_0 a)^2 H^{01}) + \frac{1}{R} (N_\theta^0 + N_\theta^1) = (N_x^0 + N_x^1) \frac{\partial^2 (w^0 + w^1)}{\partial x^2} + \frac{2}{R} (N_{x\theta}^0 + N_{x\theta}^1) \frac{\partial^2 (w^0 + w^1)}{\partial x \partial \theta} + \frac{(N_\theta^0 + N_\theta^1)}{R^2} \frac{\partial^2 (w^0 + w^1)}{\partial \theta^2} + P^0 + P^1 \quad (13)$$

که در آن:

که در آن  $K$  ثابت فنر نوع وینکلر است و براساس خواص ماده تشکیل‌دهنده محیط الاستیک و شعاع لوله خارجی تعیین می‌شود.

#### ۴- بارگذاری

بر اساس معادله تعادلی ۱۱ می‌توان نوشت:

$$N_{\theta}^0 = -P^0 R \quad (22)$$

بنابراین در لایه‌های داخلی و لایه خارجی مقدار نیروی غشایی محیطی به ترتیب عبارت است از:

$$N_{\theta}^0 = -P_i^{0V} R_i \quad (23a)$$

$$N_{\theta 5}^0 = -(P_5^{0V} + P_5^{0W}) R_5 \quad (23b)$$

که در آن  $P_i^{0V}$ ،  $P_5^{0V}$  و  $P_5^{0W}$  به ترتیب معرف نیروی واندروالز اعمال شده به لایه‌های داخلی و خارجی و فشار ناشی از محیط الاستیک بر لوله خارجی است. از آنجاییکه تغییر در فضای بین لوله‌ها ناشی از فشار محوری ناچیز و قابل صرف‌نظر است می‌توان از نیروی واندروالز بین لوله‌های ناشی از بارگذاری محوری قبل از کمانش صرف‌نظر کرد [۲۵]. به دلیلی مشابه می‌توان از نیروی فشار بین لوله خارجی و محیط الاستیک نیز صرف‌نظر نمود لذا می‌توان نوشت:

$$N_{\theta}^0 = -\frac{Eh\alpha_2 T}{1-\nu} \quad i = 1, 2, \dots, 5 \quad (24)$$

کرنش و تنش محوری دارای پراکندگی یکنواخت بر سطح مقطع هستند بنابراین می‌توان نوشت:

$$N_{xi}^0 = N_x^0 - \frac{Eh\alpha_1 T}{1-\nu} \quad i = 1, 2, \dots, 5 \quad (25)$$

گشتاور پیچشی خارجی اعمال شده به نانولوله را می‌توان با رابطه ۲۶ نشان داد:

$$T = \sum_{i=1}^{i=5} T_i \quad (26)$$

اگر فرض شود که نیروی برشی غشایی در لایه‌ها با هم مساوی هستند [۱۸] یعنی:

کرده است که برای استفاده از مدل پوسته برای تحلیل نانولوله‌های کربنی از مقدار موثر سختی خمشی استفاده شود که ضرورتاً تابعی از پارامترهای ماده و ضخامت نیست. لذا در معادله ۱۶ با تغییر رابطه  $D$  به  $De$  که معرف سختی موثر خمشی پوسته است می‌توان از این معادله برای بررسی کمانش ناشی از بارگذاری ترکیبی نانولوله‌های کربنی استفاده کرد.

#### ۳- نیروی واندروالز بین نانولوله‌های مجاور

نیروهای واندروالز بین هر دو اتم کربن را می‌توان براساس مدل لنارد جونز بیان کرد. براساس روش پیشنهاد شده توسط ریو [۲۴] فشار واندروالز اعمال شده بر هر اتم از یک لوله را می‌توان با اضافه کردن تمام نیروهای بین اتم و تمام اتم‌های سایر لوله‌ها بدست آورد. فشار شعاعی خالص  $p_i$  که بر لوله  $i$ ام یک نانولوله چند جداره اعمال می‌شود از جمع کردن فشار خارجی  $P_{i(i+1)}$  که از لوله  $i+1$ ام بر لوله  $i$ ام اعمال می‌شود و فشار داخلی  $P_{i(i-1)}$  که از لوله  $i-1$ ام بر لوله  $i$ ام وارد می‌شود بدست می‌آید [۲۲]. از آنجایی که نیروهای بین دو لوله مجاور مساوی و مختلف جهت هستند بنابراین بین فشار  $P_{i(i+1)}$  و  $P_{(i+1)i}$  رابطه ۲۰ برقرار است:

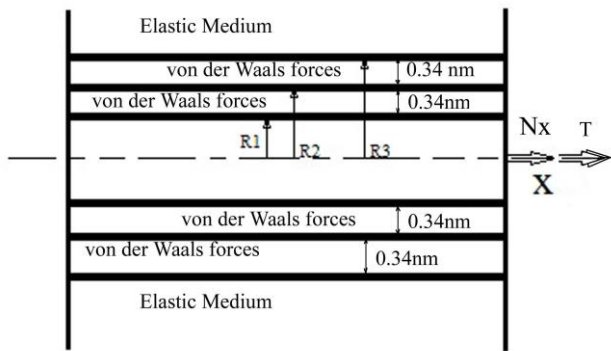
$$R_i P_{(i+1)i} = -R_{i+1} P_{i(i+1)} \quad i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (20)$$

که در آن  $R_i$  و  $R_{i+1}$  معرف شعاع لوله شماره  $i$  و  $i+1$  است. از سوی دیگر براساس مدل لناردجونز فشار ناشی از نیروی واندروالز در هر نقطه روی نانولوله تابعی از فاصله آن نقطه از لوله مجاورش در آن نقطه است. می‌توان از یک تحلیل خطی شده برای شبیه‌سازی نیروی عکس‌العمل واندروالز بین لوله‌های مجاور استفاده کرد [۱۶]، [۱۸]–[۲۰]. با فرض هم‌مرکز بودن نانولوله‌ها قبل از بارگذاری و این مهم که فاصله لایه‌ها برابر با  $0.34nm$ ، یعنی مساوی با کوچکترین فاصله تعادلی است می‌توان از نیروی واندروالز بین لوله‌های تغییر شکل نداده صرف‌نظر کرد و این نیرو حاصل از کمانش را برای یک نانولوله ۵ جداره به صورت زیر تقریب زد:

$$P_1 = C(w_2^1 - w_1^1) \quad (21a)$$

$$P_i = C \left( w_{i+1}^1 - w_i^1 - \frac{R_{i-1}}{R_i} (w_i^1 - w_{i-1}^1) \right) \quad i = 2, 3, 4 \quad (21b)$$

$$P_5 = -C \frac{R_4}{R_5} (w_5^1 - w_4^1) - K w_5^1 \quad (21c)$$



شکل (۲): مدل مکانیکی یک نانولوله ۳ جداره

### ۵- شرایط مرزی

فرض شده است که نانولوله های کربنی آنقدر بلند هستند که اثرات انتهایی تاثیر چندانی بر مقادیر بحرانی گشتاور نداشته باشد. بنابراین فرض زیر را می توان نوشت:

$$w_i^1 = M_i \sin\left(\frac{m\pi}{L}x - n\theta\right), i=1, \dots, 5 \quad (31)$$

که در آن  $M_i$  ثابت های حقیقی،  $m$  و  $n$  اعداد صحیح مثبت هستند که به ترتیب معرف عدد نیم موج در راستای محوری و محیطی هر یک از لوله ها هستند. با جایگزین کردن معادله ۳۱ در معادلات ۲۹، یک دسته معادله همگن به دست می آید که جواب غیر بدیهی آن براساس صفر شدن دترمینان ضرائب ( $|A|$ ) تعیین می شود یعنی:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} = 0, n=2,3,4,5 \quad (32)$$

### ۶- اعتبارسنجی مدل

برای اعتبار سنجی مدل پیشنهادی از نتایج موجود بهره گرفته شده است. سان و لیو [۲۶] با بهره گیری از مدل پیوسته پیوسته یک رابطه ریاضی برای تعیین نیروی برشی غشایی بحرانی نانولوله های کربنی دو جداره محصور در محیط الاستیک پیشنهاد داده است. در شکل (۳) نیروی برشی غشایی نانولوله های کربنی دو جداره حاصل از مدل پیشنهادی و مدل سان و لیو [۲۶] به ازاء مقادیر مختلف ( $m, n$ ) نشان داده شده است.

$$N_{x\theta 1}^0 = N_{x\theta 2}^0 = \dots = N_{x\theta 5}^0 = \frac{T_1}{2\pi(R_1)^2} = \dots = \frac{T_5}{2\pi(R_5)^2} \quad (27)$$

حال اگر فرض شود که می توان بین نیروی محوری-فشاری و نیروی برشی رابطه ای به صورت زیر نوشت:

$$N_{xi}^0 = \gamma N_{x\theta i}^0 \quad i=1, \dots, 5 \quad (28)$$

بدین ترتیب با استفاده از معادله ۱۹ معادلات حاکم بر مساله عبارتند از:

$$D_e \left( \nabla_R^8 w_1^1 + (e_0 a)^2 \nabla_R^4 H_1^1 \right) + \frac{Eh}{R_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w_1^1}{\partial x^2} \right) = \quad (29a)$$

$$\left( \gamma \frac{T_1}{2\pi R_1^2} - \frac{Eh\alpha_1 T}{1-\nu} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\nabla_R^4 w_1^1) + \frac{2}{R_1} \frac{T_1}{2\pi R_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} (\nabla_R^4 w_1^1) - \frac{1}{R_1^2} \left( \frac{Eh\alpha_2 T}{1-\nu} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\nabla_R^4 w_1^1) + CV_R^4 (w_2^1 - w_1^1)$$

$$D_e \left( \nabla_R^8 w_i^1 + (e_0 a)^2 \nabla_R^4 H_i^1 \right) + \frac{Eh}{R_i^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w_i^1}{\partial x^2} \right) = \quad (29b)$$

$$\left( \gamma \frac{T_i}{2\pi R_i^2} - \frac{Eh\alpha_1 T}{1-\nu} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\nabla_R^4 w_i^1) + \frac{2}{R_i} \frac{T_i}{2\pi R_i^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} (\nabla_R^4 w_i^1) - \frac{1}{R_i^2} \left( \frac{Eh\alpha_2 T}{1-\nu} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\nabla_R^4 w_i^1) + C \frac{R_{i-1}}{R_i} \nabla_R^4 w_{i-1}^1 - C \left( 1 + \frac{R_{i-1}}{R_i} \right) \nabla_R^4 w_i^1 + CV_R^4 w_{i+1}^1, i=2,3,4$$

$$D_e \left( \nabla_R^8 w_5^1 + (e_0 a)^2 \nabla_R^4 H_5^1 \right) + \frac{Eh}{R_5^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w_5^1}{\partial x^2} \right) = \quad (29c)$$

$$\left( \gamma \frac{T_5}{2\pi R_5^2} - \frac{Eh\alpha_1 T}{1-\nu} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\nabla_R^4 w_5^1) + \frac{2}{R_5} \frac{T_5}{2\pi R_5^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} (\nabla_R^4 w_5^1) - \frac{1}{R_5^2} \left( \frac{Eh\alpha_2 T}{1-\nu} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\nabla_R^4 w_5^1) + C \frac{R_4}{R_5} (\nabla_R^4 w_4^1 - \nabla_R^4 w_5^1) - KV_R^4 w_5^1$$

که در آن:

$$H_i^1 = \frac{\partial^6 w_i^1}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 w_i^1}{R_i^6 \partial \theta^6} + \frac{2-\nu}{R_i^2} \left( \frac{\partial^6 w_i^1}{\partial x^4 \partial \theta^2} + \frac{\partial^6 w_i^1}{R_i^2 \partial \theta^4 \partial x^2} \right) \quad (30)$$

$$i=1,2,\dots,5$$

به طور مشابه می توان معادلات حاکم بر کمانش نانولوله های دو تا چهار جداره را نیز تحت بارگذاری ترکیبی نوشت. در شکل (۲) مدل مکانیکی از یک نانولوله ۳ جداره محصور در یک محیط الاستیک نشان داده شده است.

۷- نتایج

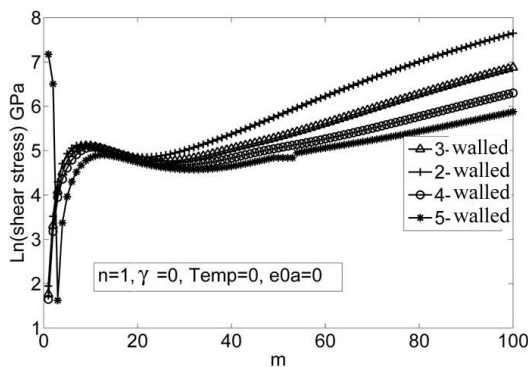
در محاسبات انجام شده مقادیر زیر مورد استفاده قرار گرفته- اند [۱۹]:

$$\nu = 0.34, De = 0.85eV, Eh = \frac{360J}{m^2}, C = 9.918667 \times \frac{10^{19}N}{m^3}, h = 0.34$$

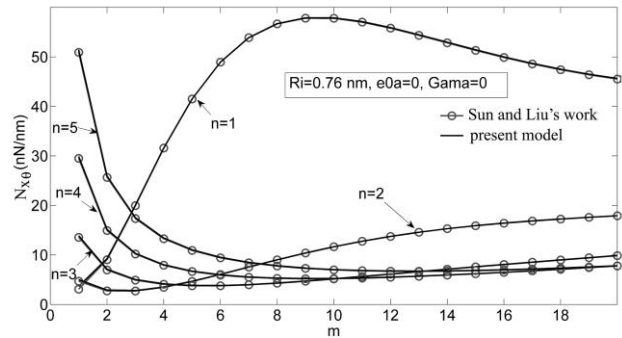
و برای دمای بالا مقادیر  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  عبارتند از:

$$\alpha_1 = 1.1 \times 10^{-6}, \alpha_2 = 0.8 \times 10^{-6}$$

در شکل (۴) تاثیر افزایش تعداد لایه‌های نانولوله کربنی بر تنش برشی بحرانی به ازاء هر زوج نیم موج ( $m, l$ ) آورده شده است. همانگونه که دیده می‌شود به ازاء افزایش تعداد لایه‌ها از میزان تنش برشی بحرانی کاسته می‌شود. در این شکل طول نانولوله ضریبی از قطر خارجی آن در نظر گرفته شده است. در شکل (۵) تاثیر افزایش نیم موج  $n$  و تعداد لایه‌ها بر تنش بحرانی نانولوله‌ها نشان داده شده است. همانگونه که دیده می‌شود با افزایش  $n$  به ازاء  $m > 5$  از میزان تنش برشی بحرانی کاسته می‌شود.



شکل (۴): تاثیر تعداد لایه‌ها بر تنش برشی بحرانی نانولوله به ازاء هر زوج نیم موج ( $m, l$ )



شکل (۵): رابطه نیروی برشی غشایی و شماره موج نانولوله‌های دو جداره (مقایسه با نتایج [۲۶])

از سوی دیگر در جدول (۱) نسبت نیروی برشی غشایی بحرانی پیش‌بینی شده توسط سان و لیو [۲۶] و مدل پیشنهادی به همراه حالت کماتش نظیر آن، به ازاء چند شعاع داخلی فهرست شده است. همانگونه که دیده می‌شود توافق خوبی میان نتایج دیده می‌شود.

جدول (۱): مقایسه نیروی برشی غشایی بحرانی با نتایج موجود در [۲۶]

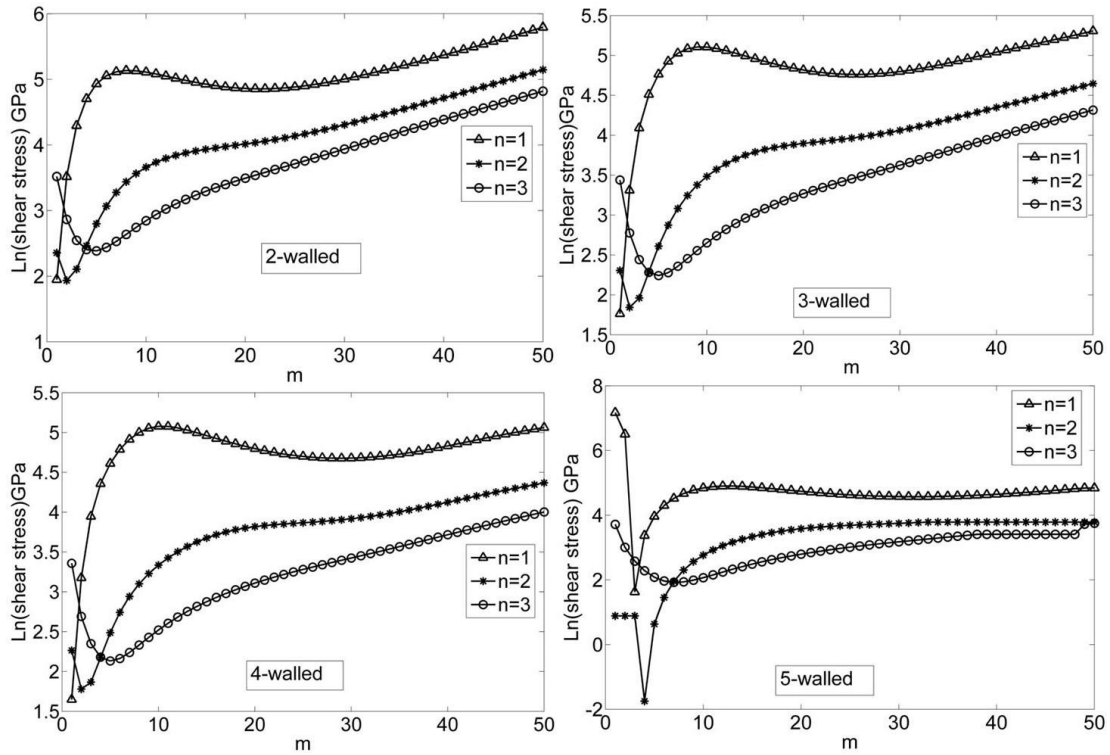
$R_i$ (nm)	$\frac{N_{x0}([26])}{N_{x0}(present)}$	(m,n)
۰/۷۶	۰/۹۷	(۲,۳)
۱/۷۶	۰/۹۱۱	(۲,۲)
۲/۷۱۲	۰/۹۷۴	(۷,۴)
۳/۶۶۳	۰/۹۷۹۴	(۹,۵)

به طور مشابه نتایج حاصل از کماتش پیچشی نانولوله‌های ۵ جداره با نتایج موجود در مراجع [۱۶] و [۱۸] به ازاء شرایط یکسان هندسی و بارگذاری با هم مقایسه شده‌اند و نتایج حاصل توافق خوبی را با هم نشان می‌دهند (جدول (۲)).

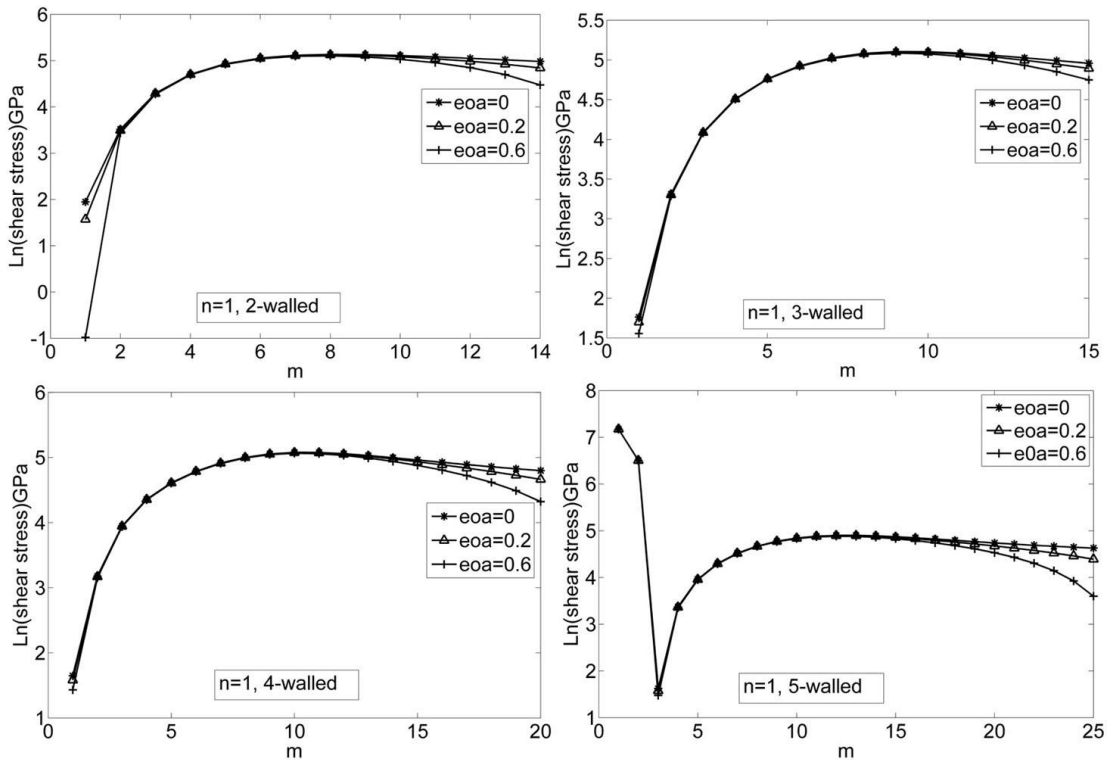
جدول (۲): مقایسه نیروی برشی غشایی بحرانی نانولوله ۵ جداره تحت بار محوری

$\frac{N_{x0}([18])}{N_{x0}(present)}$	$\frac{N_{x0}([16])}{N_{x0}(present)}$
۰/۹۶۷ ( $\gamma = 0.02$ )	0/97 ( $\gamma = 0$ )
۰/۹۶۴ ( $\gamma = -0.02$ )	-----

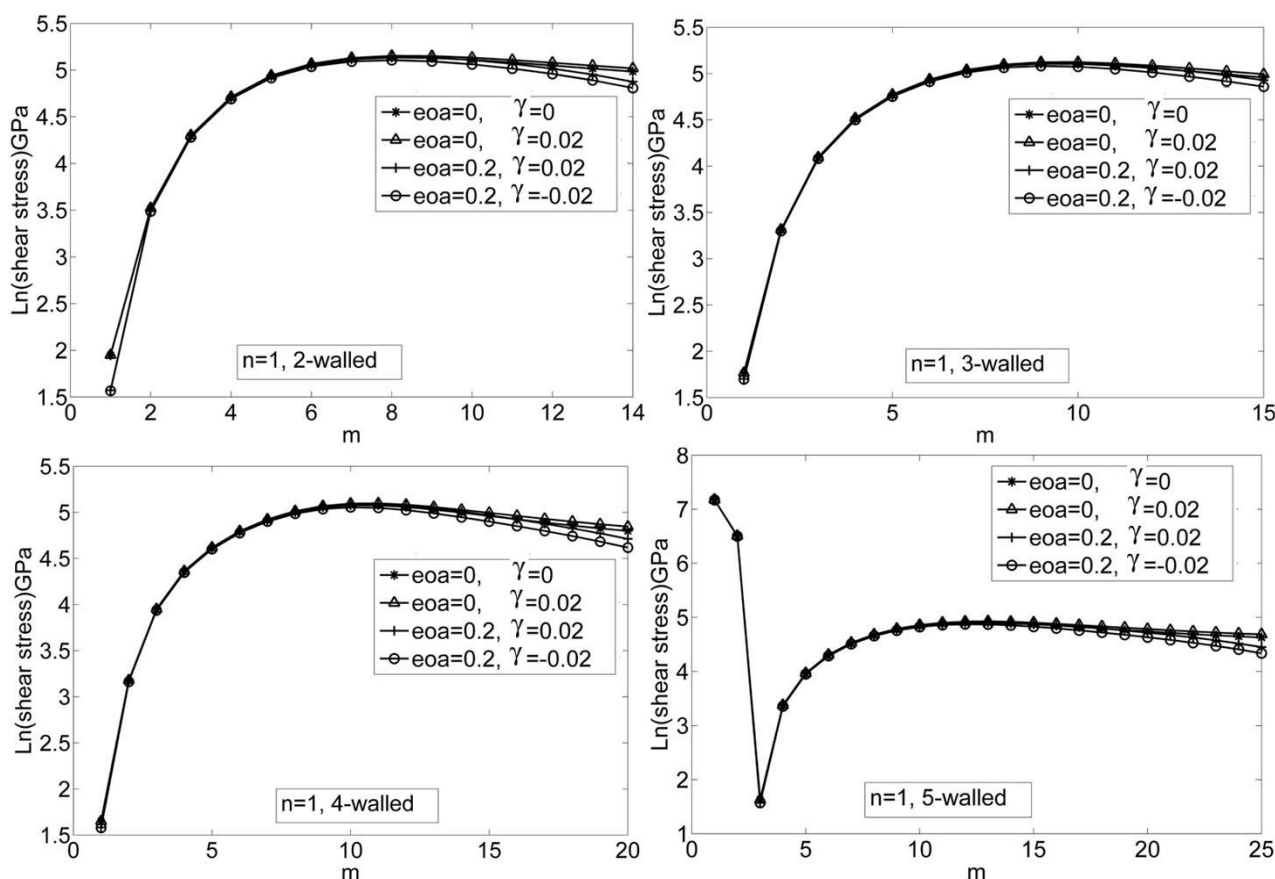




شکل (۵): تاثیر افزایش نیم موج  $n$  بر تنش برشی بحرانی



شکل (۶): تاثیر مقیاس کوچک بر تنش برشی بحرانی



شکل (۷): تاثیر نیروی کششی / فشاری و مقیاس کوچک بر تنش برشی بحرانی، (گاما معرف ضریب تنش محوری نسبت به تنش برشی است)

در شکل (۶) تاثیر مقیاس کوچک بر تنش برشی بحرانی به ازاء افزایش تعداد لایه‌ها و هر زوج نیم موج  $(m, l)$  آورده شده است. همانگونه که دیده می‌شود بیشترین میزان اثرات مقیاس کوچک در  $m > 10$  دیده می‌شود، گرچه در نانولوله دو جداره میزان این اثر در  $m = 1$  نیز قابل ملاحظه است.

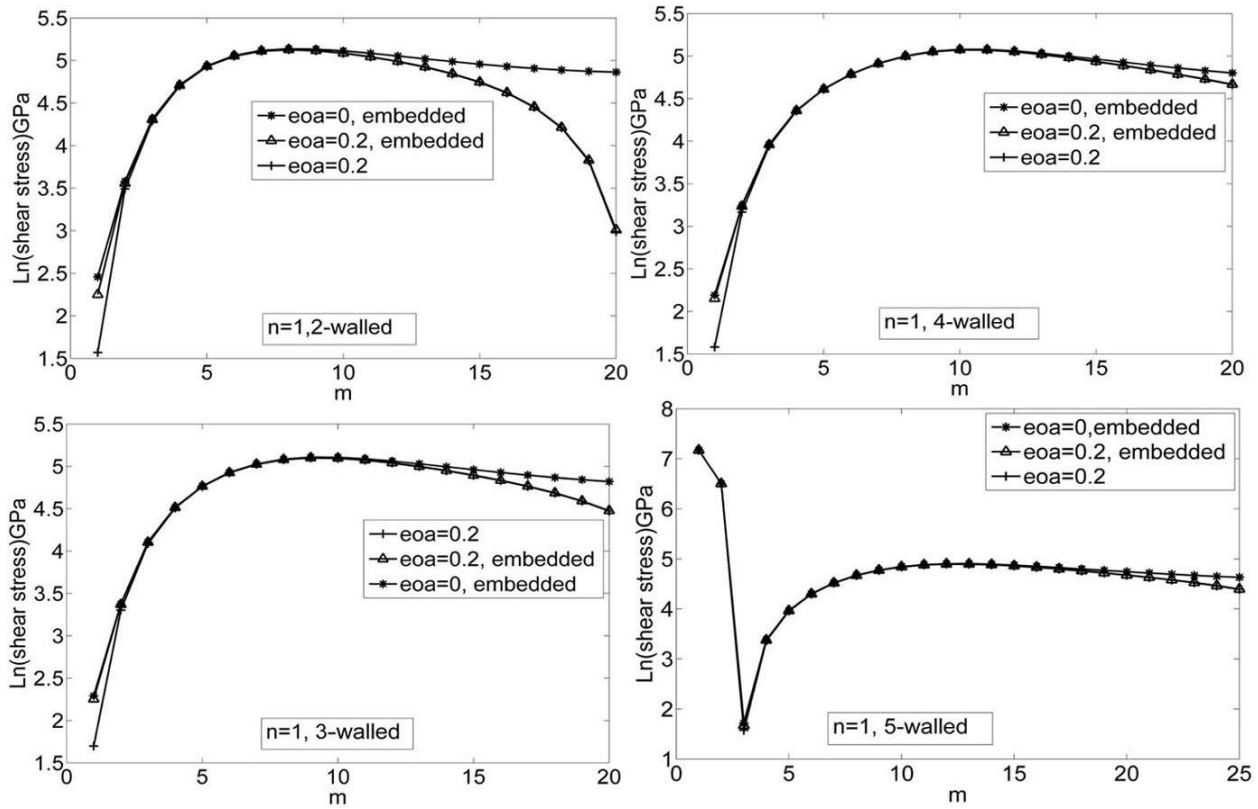
تاثیر منفی حضور نیروی فشاری محوری را کاهش داده و منجر به افزایش میزان تنش برشی بحرانی نانولوله می‌شود. جدول (۳) تاثیر پارامترهای مختلف مانند دما، وجود نیروی محوری و محیط الاستیک را به ازاء  $eoa = 0.2$  بر تنش برشی بحرانی نانولوله‌ها نشان می‌دهد. همانگونه که دیده می‌شود وجود محیط الاستیک و نیروی کششی محوری منجر به افزایش کمینه‌ترین تنش برشی بحرانی می‌شود و بالعکس وجود میدان دمایی و نیروی فشاری منجر به کاهش تنش برشی بحرانی می‌شود. جدول (۳) همچنین نشان می‌دهد که با افزایش تعداد لایه‌ها در شرایط بارگذاری یکسان، از میزان تنش برشی بحرانی کاسته می‌شود که این امر می‌تواند به دلیل افزایش طول نانولوله‌ها نیز باشد.

در جدول (۴) به ازاء شرایط بارگذاری ثابت، شعاع داخلی و طول نانولوله یکسان مجدداً تاثیر افزایش تعداد لایه‌ها بر تنش برشی بحرانی دیده شده است و همانگونه که دیده می‌شود با افزایش تعداد لایه‌ها میزان تنش برشی بحرانی نیز افزایش یافته است.

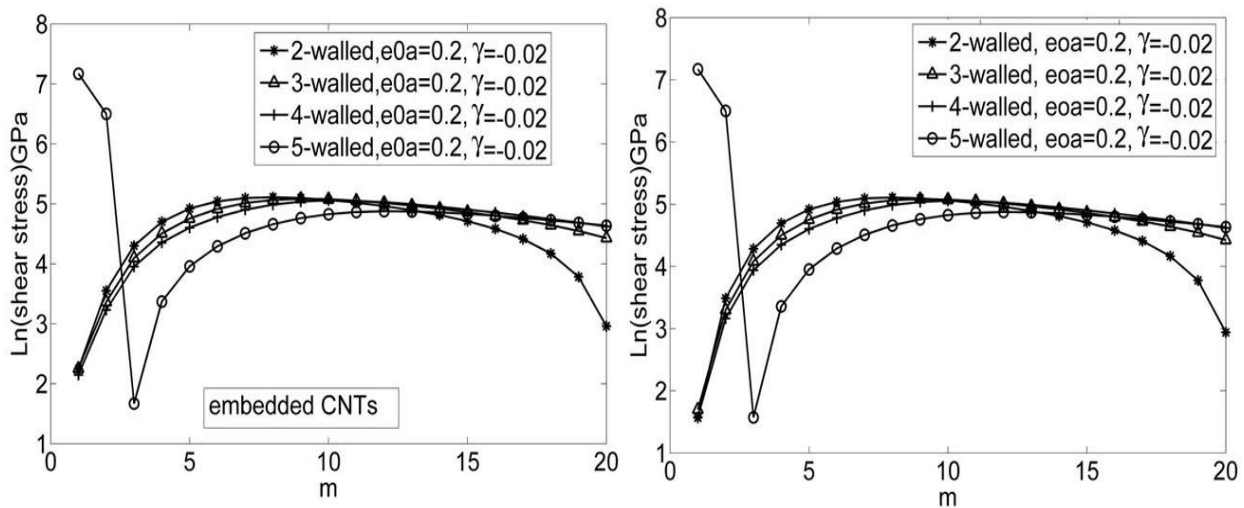
در شکل (۷) تاثیر وجود نیروی محوری (کششی یا فشاری) به انضمام تاثیر مقیاس کوچک بر تنش برشی بحرانی نشان داده شده است. همانگونه که انتظار می‌رود وجود نیروی کششی محوری بر میزان تنش برشی بحرانی می‌افزاید و به عکس وجود نیروی محوری فشاری از میزان تنش برشی بحرانی می‌کاهد. این تاثیر در  $m > 10$  محسوس‌تر است.

در شکل (۸) تاثیر محصور بودن نانولوله در محیط الاستیک بر میزان تنش برشی بحرانی بررسی شده است. همانگونه که دیده می‌شود وجود محیط الاستیک بر افزایش تنش برشی بحرانی نانولوله‌ها موثر است.

در شکل (۹) تاثیر همزمان محصور بودن نانولوله در محیط الاستیک و حضور نیروی فشاری محوری بر تنش برشی بحرانی دیده می‌شود. همانگونه که دیده می‌شود وجود محیط الاستیک



شکل (۸): تاثیر محیط الاستیک و مقیاس کوچک بر تنش برشی بحرانی



شکل (۹): تاثیر وجود یا نبود محیط الاستیک بر تنش برشی بحرانی در حضور نیروی فشاری محوری

Wang Yu; Wang Xiu-xi; Ni Xiang-gui; Wu Heng-au; "Simulation of the elastic response and the buckling modes of single-walled carbon nanotubes", Computational Materials Science, No.32, pp. 141- 146, 2005.

Zhang Chen-Li and Shen Hui-Shen; "Buckling and postbuckling analysis of single-walled carbon nanotubes in thermal environments via molecular dynamics simulation", Carbon, No.44, pp. 2608- 2616, 2006.

Zhang H. W., Wang L., Wang J. B., "Computer simulation of buckling behavior of double-walled carbon nanotubes with abnormal interlayer distances", Computational Materials Science, No.39, pp. 664- 672, 2007.

Xin Hao, Han Qiang, Yao Xiaohu, "Buckling of defective single-walled and double-walled carbon nanotubes under axial compression by molecular dynamics simulation", Composites Science and Technology No. 68, pp. 1809- 1814, 2008.

Li C. Y., Chou T. W., "A structural mechanics approach for the analysis of carbon nanotubes", International Journal of Solids and Structures, No.40, pp. 2487- 2499, 2003.

Li C.Y., Chou T. W., "Elastic moduli of multi-walled carbon nanotubes and the effect of van der Waals forces", Composites Science and Technology., No. 63, pp. 1517- 1524, 2003.

Hu N., Nunoya K., Pan D., Okabe T., Fukunaga H., "Prediction of buckling characteristics of carbon nanotubes", International Journal of Solids and Structures, No. 44, pp. 6535- 6550, 2007.

Yakobson B.I., Brabec CJ, Bernholc J., "Nanomechanics of carbon tubes instability beyond linear response", Physical Review Letters, No. 76, pp. 2511- 2514, 1996.

Ru C.Q., "Axially compressed buckling of a double walled carbon nanotube embedded in an elastic medium", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, No. 49, pp. 1265- 1279, 2001.

Wang C.Y., Ru C.Q., Mioduchowski A., "Elastic buckling of multiwall carbon nanotubes under high pressure", Journal of Nanoscience and Nanotechnology, No. 3, pp. 199- 208, 2003.

Wang C.Y., Ru C.Q., Mioduchowski A., "Axially compressed buckling of pressured multiwall carbon nanotubes", International Journal of Solids and Structures, No. 40, pp. 3893- 3911, 2003.

Pantano A., Parks M. D., Boyce C. M., "Mechanics of deformation of single- and multi-wall carbon nanotubes", Journal of the

جدول (۳): تاثیر بارگذاری ترکیبی و تعداد لایه‌ها بر تنش برشی بحرانی به ازاء نیم موج  $n=1$  و  $R_{in}=0.76$  و  $L=12R_{out}$

تعداد لایه‌ها	دما (K)	$\gamma$	محصور در محیط الاستیک	کمترین تنش برشی در $n=1$
۲	-	-	-	۴/۸۰۱۵
۲	-	-	بله	۹/۴۸۷۹
۲	۲۵۰	-	-	۴/۰۴۸۳
۲	-	+۰/۰۲	-	۴/۸۱۲۱
۲	-	-۰/۰۲	-	۴/۷۹۰۹
۲	۲۵۰	-۰/۰۲	-	۴/۰۳۹۴
۲	۲۵۰	-۰/۰۲	بله	۸/۷۱۴۲
۳	۲۵۰	-۰/۰۲	بله	۸/۶۴۳۰
۴	۲۵۰	-۰/۰۲	بله	۷/۶۴۶۸
۵	۲۵۰	-۰/۰۲	بله	۴/۸۲۶۸

جدول (۴): تاثیر افزایش تعداد لایه‌ها بر تنش برشی بحرانی در طول یکسان  $(R_{in}=0.76)L=20R_{in}$

تعداد لایه‌ها	دما (K)	$\gamma$	محصور در محیط الاستیک	کمترین تنش برشی در $n=1$
۲	۲۵۰	-۰/۰۲	بله	۷/۲۸۶۶
۳	۲۵۰	-۰/۰۲	بله	۱۰/۰۳۶۹
۴	۲۵۰	-۰/۰۲	بله	۱۲/۴۰۵۱
۵	۲۵۰	-۰/۰۲	بله	۱۲/۹۶۱۷

## ۸- نتیجه‌گیری

در این پژوهش با استفاده از مدل پوسته پیوسته غیر محلی رفتار کمانش نانولوله‌های چند جداره (از ۲ تا ۵ جداره) تحت بارگذاری ترکیبی شبیه‌سازی شده است. نتایج نشان می‌دهند که تاثیر مقیاس کوچک با افزایش تعداد نیم‌موج‌های  $m$  افزایش می‌یابد گرچه در نانولوله دو جداره در نیم‌موج  $m=1$  نیز این تاثیر قابل ملاحظه است. در این پژوهش تاثیر حضور هم‌زمان محیط الاستیک محصورکننده نانولوله، نیروی فشاری محوری و میدان دمایی بر تنش برشی بحرانی دیده شده است. همچنین نشان داده شده است که نانولوله‌های هم‌طول با تعداد لایه‌های بیشتر تحمل تنش بحرانی بالاتری را دارند.

## ۹- مراجع

Li, C. Y. and Chou, T. W.; "Modeling of elastic buckling of carbon nanotubes by molecular structural mechanics approach", Mechanics of Materials, No.36, pp. 1047- 1055, 2004.

- 2128- 2139, 2008.
- Yan Y, Wang W. Q., Zhang L. X., “ Nonlocal [۲۱] effect on axially compressed buckling of triple-walled carbon nanotubes under temperature field”, Applied Mathematical Modelling, No. 34, pp. 3422- 3429, 2010.
- Hao M. J., Guo X. M., Wang Q., “Small-scale [۲۲] effect on torsional buckling of multi-walled carbon nanotubes”, European Journal of Mechanics A/ Solids, No.29, pp. 49- 55, 2010.
- Xiaohu Y. and Qiang H., “A continuum [۲۳] mechanics nonlinear postbuckling analysis for single-walled carbon nanotubes under torque”, European Journal of Mechanics A/Solids, No. 27, pp. 796- 807, 2008.
- Ru C. Q.,”Effective bending stiffness of carbon [۲۴] nanotubes”, Physical Review B, No. 62, pp. 9973- 9976, 2000.
- Xiaohu Y. , Qiang H., “Investigation of axially [۲۵] compressed buckling of a multi- walled carbon nanotube under temperature field”, Composites Science and Technology, No. 67, pp. 125- 134, 2007.
- Sun C., Liu K., “Dynamic torsional buckling of a [۲۶] double-walled carbon nanotube embedded in an medium”, European Journal of Mechanics A/Solids, No. 27, pp. 40- 49, 2008.
- Mechanics and Physics of Solids, No. 52, pp. 789- 821, 2004.
- He X. Q., Kitipornchai S., Wang C. M., Liew K. [۱۴] M., “Modeling of van der Waals force for infinitesimal deformation of multi-walled carbon nano-tubes treated as cylindrical shells”, International Journal of Solids and Structures, No. 42, pp. 6032- 6047, 2005.
- Qian H., Xu K.Y., Ru C. Q., “Curvature effects [۱۵] on axially compressed buckling of a small-diameter double-walled carbon nanotube”, International Journal of solids and structures, No. 42, pp. 5426- 5440, 2005.
- Wang X., Yang H. K., Dong K., “Torsional [۱۶] buckling of multi-walled carbon nanotubes”, Materials science and Engineering: A, No. 404, pp. 314- 322, 2005.
- Zhang Y. Q., Liu G. R., Han X., “Effect of small [۱۷] length scale on elastic buckling of multi-walled carbon nanotubes under radial pressure”, Physics Letter A, No. 349, pp. 370- 376, 2006.
- Wang X., Lu Guoxing, Lu Y. J., “Buckling of [۱۸] embedded multi-walled carbon nanotubes under combined torsion and axial loading”, International Journal of Solids and Structures, No. 44, pp. 336- 351, 2007.
- Xiaohu Y., Qiang H., “The thermal effect on [۱۹] axially compressed buckling of a double-walled carbon nanotube”, European Journal of Mechanics A/Solids, No. 26, pp. 298- 312, 2007.
- Sun C., Liu K., “Combined torsional buckling of [۲۰] multi-walled carbon nanotubes coupling with axial loading and radial pressures”, International Journal of Solids and Structures, No. 45, pp.