

بررسی ارتعاشات غیر خطی بعد از کمانش ناشی از بار حرارتی و تحلیل پایداری نانو ورق گرافن دو لایه

غلامعلی ورزندیان، سیما ضیایی*، مهرداد فرید، عباس نیک نژاد

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت:

بازنگری:

پذیرش:

ارائه آنلاین:

کلمات کلیدی:

نانو ورق گرافن دولایه

بعد از کمانش حرارتی

مدل ورق غیرمحل

روش مقیاس‌های زمانی چندگانه

خلاصه: در این تحقیق رفتار ارتعاش بعد از کمانش یک نانو ورق گرافن دولایه تحت بار حرارتی بررسی شده است. بدین منظور، نانو ورق گرافن به صورت یک ورق اورتوتروپیک غیر کلاسیک مدل شده است که در آن اثر مقیاس کوچک لحاظ شده است. فرمول بندی مسئله بر اساس تئوری ورق کیرشهف انجام شده که فرضیات غیر خطی فون کارمن در روابط کرنش - جابجایی در نظر گرفته شده است و از تئوری الاستیسیته غیر محلی ایرینگن برای اعمال اثر اندازه بهره گرفته شده است. اثرات حرارتی، نیروهای واندروالس بین لایه‌های و کایرالیته نیز در نظر گرفته شده و خواص مواد وابسته به دما فرض شده است. به کمک روش مقیاس‌های زمانی چندگانه یک پاسخ نیمه تحلیلی به دست آمده است. اثر تغییر مقیاس کوچک بر فرکانس‌های طبیعی، جابجایی و منحنی پاسخ بررسی و نتایج عددی با استفاده از مدل نانو ورق غیر محلی استخراج شده است. نتایج عددی با نتایج تحقیقات مشابه مقایسه شده است. تأثیر پارامترهای مختلف بر ارتعاشات بعد از کمانش نانو ورق گرافن دولایه در محیط حرارتی از جمله پارامتر مقیاس، ابعاد، و بار حرارتی ارائه شده است. پایداری مودهای ارتعاشی حول یک وضعیت کمانشی بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که پارامتر مقیاس و تغییر دما نقش مهمی در رفتار ارتعاش غیر خطی نانوساختارهای کمانش کرده دارند.

۱- مقدمه

[۹] تئوری الاستیسیته غیر محلی را بر پایه تئوری غیر محلی ایرینگن برای ارتعاشات نانو ورق ارائه کرده‌اند. ورزندیان و ضیایی [۱۰] بر اساس تئوری غیر محلی، یک روش تحلیلی جهت حل ارتعاشات آزاد غیر خطی نانو ورق نازک مستطیلی با شرایط مرزی مختلف به کمک توابع بیضوی ژاکوبی پیشنهاد کرده‌اند.

در زمینه ارتعاشات بعد از کمانش ورق‌های مقیاس بزرگ تحقیقات محدودی انجام شده است [۱۱ و ۱۲]. انصاری و غلامی [۱۳] ارتعاشات آزاد خطی و بعد از کمانش یک نانو ورق مستطیلی را با استفاده از مدل مرتبه سه تغییر شکل برشی و بر اساس تئوری الاستیسیته سطوح گورتین - مورداد مورد بررسی قرار داده و نشان داده‌اند که اثرات سطحی دارای اهمیت هستند. تحلیل کمانش و بعد از کمانش نانو ورق‌های پیزوالکتریک توسط چن و همکاران [۱۴] انجام شده و تأثیر افزایش حرارت یکنواخت، ولتاژ الکتریکی و پارامتر مقیاس بر رفتار استاتیکی نانو ورق مورد بررسی قرار گرفته است. استخراج معادلات فون کارمن اصلاح شده با در نظر گرفتن کشش سطحی و الاستیسیته سطوح توسط یو و همکاران [۱۵] انجام شده و تأثیر

در عصر امروز تحلیل دقیق رفتار مکانیکی به منظور طراحی و افزایش قابلیت اعتماد نانو ایزارها امری ضروری است [۱ و ۲]. ارتعاشات نانو سازه‌ها مانند نانو ورق‌ها از اهمیتی فوق‌العاده برخوردار است چرا که خواص دینامیکی سیستم با تعیین روابط دامنه - فرکانس و مودهای ارتعاشی حاصل می‌گردد. در این راستا تئوری‌ها و روش‌های متعددی جهت توضیح پارامتر مقیاس بر رفتار ارتعاشی نانو ورق‌ها توسعه داده شده است [۴ و ۶]. از این میان تئوری غیر محلی ایرینگن [۷] از بقیه مشهورتر و کاربردی‌تر است. وی در سال ۱۹۸۳ با ارائه یک معادله دیفرانسیل جزئی انتگرالی تئوری ورق غیر محلی را معرفی کرد که مبنای بسیاری از پژوهش‌های چند دهه اخیر در حوزه نانو قرار گرفته است. در این تئوری رفتار ارتعاشی نانو ورق با استفاده از مدل‌های محیط پیوسته غیر محلی بررسی و توسعه داده شده است [۷ و ۸]. وی اثر مقیاس کوچک را با معرفی یک پارامتر جدید که آن را پارامتر مقیاس نامگذاری کرد، لحاظ نمود. پرادان و فادیکار

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: ziaee@yu.ac.ir

تنش‌های سطحی بر رفتار بعد از کمانش و فرکانس ارتعاشات آزاد نانو ورق بررسی گردیده است. غلامی و همکاران [۱۶] تأثیر عوامل محیطی مغناطیس، رطوبت و حرارت بر رفتار خمش، کمانش و ارتعاش نانو ورق مستطیلی را با در نظر گرفتن تأثیر اینرسی دورانی و تنش‌های برشی برای نانو ورق با تکیه گاه ساده بررسی نموده‌اند. ستوده و همکاران [۱۱] ارتعاشات آزاد غیرخطی ورق گرافن ارتوتروپیک را با استفاده از تئوری ورق غیرمحلی میندین بررسی نموده و با استفاده از روش مربع سازی دیفرانسیل، معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی را به دستگاه معادلات مقدار ویژه جبری غیرخطی کاهش داده و برای حالات مختلف شرایط مرزی پاسخ خود را ارائه کرده‌اند. با مراجعه به نتایج مقاله اخیر و مقالات مشابه دیگر بر پایه تئوری غیرمحلی ارینگن ملاحظه می‌گردد که بر خلاف تئوری تنش کوپل اصلاح شده، پارامتر مقیاس در فرمول بندی ارینگن فرکانس طبیعی را کاهش می‌دهد و ظاهراً یک ناهمگونی بین نتایج این دو تئوری دیده می‌شود که جای بررسی دارد. لازم به ذکر است که در مورد تئوری ارینگن، نتایج تحلیل با شبیه سازی‌های دینامیک مولکولی سازگاری و تطابق بهتری را نشان می‌دهد. [۱۷ و ۱۸] اثر انرژی سطحی بر رفتار غیرخطی بعد از کمانش نانو ورق توسط برادران وانگ [۲] ارائه شده و تأثیر پارامتر مقیاس مورد مطالعه قرار گرفته است. در زمینه ارتعاشات بعد از کمانش برخلاف نانو ورق ۲ بعدی، در مورد مدل یک بعدی نانوتیرها و نانولوله‌ها تحقیقات بیشتری انجام شده است. اخیراً شن و همکاران [۱۹] ارتعاشات بعد از کمانش حرارتی نانولوله‌های کربنی قرار گرفته بر بستر الاستیک را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی تیر مرتبه بالا بررسی نموده‌اند. لستاری و هاناگود [۲۰] با استفاده از توابع بیضوی ژاکوبی برخی حل‌های تحلیلی ارتعاشات تیر کمانش کرده را با شرایط مرزی مختلف ارائه کرده‌اند. بررسی رفتار بعد از کمانش نانوتیر با در نظر گرفتن همزمان دو اثر کشش سطحی و اثرات غیرمحلی توسط مایترا و بوز [۳] صورت گرفته و نتایج نشان می‌دهد که اثرات سطحی فرآیند کمانش را به تأخیر می‌اندازد؛ در حالی که، اثرات غیرمحلی ناپایداری را بیشتر می‌سازد. نانوتیرها و نانو ورق‌ها عموماً به فرم سازه‌های چند لایه یافت می‌شوند که در آن‌ها دو یا چند لایه تیر/ورق توسط برهم کنش و اندروالس به هم متصل شده‌اند. مدل‌سازی برهم کنش و اندروالس یک گام کلیدی در مدل‌سازی محیط پیوسته نانوتیرها/ورق‌ها می‌باشد و توسط افراد مختلفی بررسی شده است. [۲۱ و ۲۴] در میان این مدل‌ها مدل بنیادی نوع

وینکلر برای نیروهای واندروالس بیش از بقیه مورد استفاده قرار گرفته است. کیتایپورنچای و همکاران [۲۴ و ۲۵] مدل نیروهای واندروالس را جهت مطالعه رفتار ارتعاشی ورق‌های گرافن توسعه داده‌اند. آن‌ها ورق‌های گرافن را به صورت ورق‌های نازک چندلایه در نظر گرفته‌اند. رفتار بعد از کمانش ورق‌های گرافن چندلایه تحت فشار دو محوره غیر یکنواخت توسط فرج پور و همکاران [۲۶] ارائه گردیده و اثر پارامترهای مختلف بر رفتار ورق گرافن چندلایه بررسی شده است. براتی [۲۷] تأثیر سه عامل محیطی مغناطیس، رطوبت و حرارت را بر رفتار ارتعاشی نانو ورق‌های دو لایه ساخته شده از مواد مدرج تابعی با لحاظ کردن اثرات غیرمحلی و گرادیان کرنش مورد بررسی قرار داده است. با بررسی دقیق مطالعات فوق و بسیاری مقالات مشابه دیگر در زمینه سازه‌ها و ساختارهای نانو مشخص می‌شود که در اکثر مطالعات، تأثیر کایرالیته در لایه‌ها منظور نشده و بنابراین خواص ماده در هر لایه یکسان فرض گردیده است. این در حالی است که خواص مواد نانومقیاس تابع اندازه و اثرات حرارتی می‌باشد [۱۷ و ۲۸] بنابراین، محاسبات مربوط به خواص ارتعاشی نانو ورق‌های گرافن بدون منظور نمودن اثرات فوق بعضاً غیرصحيح و یا دارای خطا خواهد بود.

در زمینه ارتعاشات غیرخطی نانوصفحات گرافن چندلایه تحقیقات محدودی انجام شده است. جمعه‌زاده و سعیدی [۲۹] با استفاده از روش توازن هارمونیک و با در نظر گرفتن تئوری ارینگن، ارتعاش دامنه بزرگ صفحات گرافن چندلایه را با در نظر گرفتن اثر کایرالیته بررسی نموده‌اند. تأثیر نیروهای واندروالس بر ارتعاشات آزاد غیرخطی صفحات گرافن چندلایه بررسی شده است. [۲۵ و ۳۰] شن و همکاران [۱۸] ارتعاشات عرضی نانوصفحات گرافن دو لایه را در محیط حرارتی بررسی و به کمک تکنیک اغتشاش دو مرحله‌ای، پاسخ غیرخطی را ارائه نموده‌اند.

با بررسی موارد کاربردهای نانوصفحات گرافن در صنایع مختلف مشخص می‌گردد که در برخی موارد کاربرد، امکان کمانش تحت بار حرارتی و سپس ارتعاش وجود دارد. از جمله این موارد می‌توان به نمایشگرهای لمسی انعطاف پذیر، نانو رزوناتورها و شناساگرهای بسیار حساس جرم اشاره کرد. از دیگر ریزساختارهایی که در آن‌ها از صفحات گرافن چندلایه استفاده شده و رخداد کمانش حرارتی و ارتعاش در آن‌ها وجود دارد، می‌توان به حسگرهای زیستی نانومکانیکی و انواع نانوحسگرها مانند نانوحسگرهای فشار و نیرو اشاره کرد. با توجه به

کیرشهف، میدان جابجایی وابسته به زمان برای ورق به فرم زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= u(x, y, t) \\ &+ u_0(x, y) - z \frac{\partial(w + w_0)}{\partial x} \\ V(x, y, z, t) &= v(x, y, t) \\ &+ v_0(x, y) - z \frac{\partial(w + w_0)}{\partial y} \\ W(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \\ &+ w_0(x, y) = W(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

که u ، v و w مؤلفه‌های جابجایی اولیه ناشی از کمانش در صفحه میانی ورق و u ، v و w مؤلفه‌های جابجایی یک نقطه مادی در صفحه میانی ورق یعنی موقعیت $(x, y, 0)$ ناشی از ارتعاشات ورق می‌باشند. همچنین حروف بزرگ بیانگر جابجایی کلی هر یک از مؤلفه‌ها می‌باشند.

مؤلفه‌های کرنش غیرخطی در کتب مرجع بیان شده است [۳۲]. در تحقیق حاضر این مؤلفه‌ها در صفحه میانی ورق عبارت است از:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2; \\ \varepsilon_{yy}^0 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial(u + u_0)}{\partial y} + \frac{\partial(v + v_0)}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial(w + w_0)}{\partial x} \frac{\partial(w + w_0)}{\partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

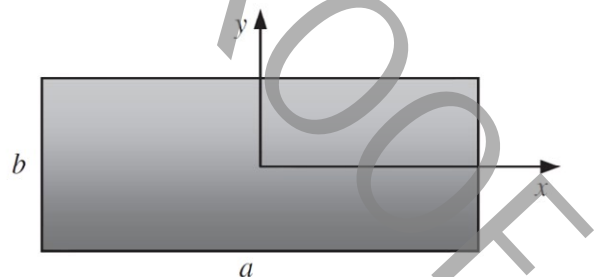
یک نانولوله کربنی تک دیواره را می‌توان به صورت یک ورق گرافن تک لایه دو بعدی تصور کرد که در داخل یک لوله غلتاننده (نورد) شده است. با توجه به جهت غلتانیده شدن ورق گرافن، نانولوله‌های کربن را می‌توان به دو گروه زیگزاگ و آرچر تقسیم بندی کرد. در نتیجه تفاوت در ساختار اتمی، برخی خواص مکانیکی و رفتار الاستیک این دو گروه با هم متفاوت است. به عنوان نمونه مطالعات انجام شده بر روی انواع مختلف زیگزاگ و آرچر نشان می‌دهد که ورق‌های با ساختار صندلی دارای فرکانس تشدید بزرگتری نسبت به ورق‌های با ساختار زیگزاگ و با ابعاد مشابه است که این موضوع بخصوص برای

مرور تحقیقات انجام شده فوق، با بررسی دقیق مقالات و پژوهش‌های انجام شده مشخص می‌گردد که علیرغم اینکه کارهای زیادی در زمینه تحلیل کمانش [۴۱ و ۴۲]، بعد از کمانش [۲۶ و ۴۰] و ارتعاشات ورق‌ها و نانو ورق‌ها [۲۱ و ۴۲] انجام شده، اما پژوهش‌های محدودی به ارتعاشات غیرخطی نانو ورق کمانش کرده پرداخته‌اند؛ همچنین، تحلیل ارتعاشات بعد از کمانش حرارتی در ورق‌های بزرگ مقیاس مورد توجه پژوهشگران بوده اما در مقیاس کوچک مانند نانوتیر و نانو ورق کمتر صورت گرفته است و حل تحلیلی یا نیمه تحلیلی برای ارتعاشات غیرخطی تاکنون گزارش نشده است و امکان پرداختن به این موضوع با توجه به اهمیت آن در رفتار نانو ساختارها وجود دارد. هدف از انجام این پژوهش بررسی ارتعاشات بعد از کمانش نانو ورق گرافن دو لایه تحت بار حرارتی با استفاده از تئوری غیرمحلی ارینگن می‌باشد. معادلات حاکم بر اساس تئوری ورق‌های نازک و از نوع غیرخطی فون کارمن محاسبه شده است. اثرات حرارتی بر فرمول بندی مسئله لحاظ شده و خواص مواد بر اساس ماده اورتوتروپیک و تابعی از حرارت در نظر گرفته شده است. همچنین تحلیل پایداری حول فرم کمانش کرده نانو ورق انجام شده و یک حل نیمه تحلیلی جهت ارتعاشات غیرخطی حول مودهای کمانشی به دست آمده است. در ادامه تأثیر پارامترهای مختلف مانند پارامتر مقیاس، کایرالیته و ... بر رفتار بعد از کمانش نانو ورق بررسی شده است.

۲- فرمول بندی مسئله

به منظور مدل سازی نانو ورق مطابق شکل ۱، یک مستطیل با ابعاد $a \times b$ در نظر گرفته شده و مبدأ مختصات در نقطه میانی مستطیل قرار داده شده است.

اگر u ، v و w مؤلفه‌های بردار جابجایی نقاط در صفحه میانی ورق به ترتیب در جهت‌های x ، y و z در نظر گرفته شوند، بر اساس فرضیات



شکل ۱: هندسه نانو ورق گرافن

Fig. 1. Geometry of Graphene nanoplate

صندلی) خوانده می‌شود و برای $\theta = 90^\circ$ ، نوع ورق زیگزاگ خواهد بود.

استخراج معادلات حرکت ورق‌ها و نانو ورق‌های دو بعدی در مراجع مختلف بررسی شده است [۳۲ و ۳۳] راجو و همکاران [۳۴] با محاسبه نسبت پریود نوسانات غیرخطی به نوسانات خطی $\frac{T_x}{T}$ با و بدون در نظر گرفتن اثرات اینرسی و مقایسه نتایج نشان داده‌اند که اثرات درون صفحه همواره تأثیر غیرخطی را کاهش داده و اینرسی درون صفحه‌ای اثر بسیار ناچیزی بر ارتعاشات دامنه بزرگ ورق نازک خواهد گذاشت؛ بنابراین، با صرف نظر نمودن از گشتاور اینرسی مرتبه یک ورق نازک، در نظر گرفتن مشخصات ورق گرافن و مدل نمودن آن به صورت یک ورق اورتوتروپ، افزودن تأثیر نیروهای واندروالس بین دولایه [۲۵] و ساده سازی برای i امین لایه، معادله حرکت اولیه در جهت x به فرم زیر حاصل می‌شود:

$$D_1 \left(\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_0^i}{\partial x^4} \right) + D_2 \left(\frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w_0^i}{\partial y^4} \right) + 2D_3 \left(\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0^i}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = (1 - \mu^2 \nabla^2) \times \left(I_2 \left(\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_i}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + \sum_{j=1}^N c_{ij} \left((w_i + w_0^i) - (w_j + w_0^j) \right) + \sum_{j=1}^N e_{ij} \left((w_i + w_0^i) - (w_j + w_0^j) \right)^3 + N_{xx}^i \frac{\partial^2 (w_i + w_0^i)}{\partial x^2} + N_{yy}^i \frac{\partial^2 (w_i + w_0^i)}{\partial y^2} + 2N_{xy}^i \frac{\partial^2 (w_i + w_0^i)}{\partial x \partial y} \right) \quad (6)$$

ورق‌های کوچکتر بیشتر خود را نشان می‌دهد. به منظور وارد نمودن اثرات کایرالیته بر فرمول بندی کلی مسئله، نیروها و گشتاورهای حرارتی ناشی از شرایط دمایی به شکل زیر تعریف می‌شوند: [۱۸]

$$\begin{bmatrix} N_{xx}^T & M_{xx}^T \\ N_{yy}^T & M_{yy}^T \\ N_{xy}^T & M_{xy}^T \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} A_{xx}(T) \\ A_{yy}(T) \\ A_{xy}(T) \end{bmatrix} (1, z) \theta dz \quad (3)$$

و: [۳۱]

$$\begin{bmatrix} A_{xx}(T) \\ A_{yy}(T) \\ A_{xy}(T) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} & \bar{E}_{13} \\ \bar{E}_{21} & \bar{E}_{22} & \bar{E}_{23} \\ \bar{E}_{31} & \bar{E}_{32} & \bar{E}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^2 & s^2 \\ s^2 & c^2 \\ 2cs & -2cs \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1(T) \\ \alpha_2(T) \end{bmatrix} \quad (4)$$

که \bar{E}_{ij} ثابت‌های الاستیک تبدیل یافته بوده و با روابط زیر تعریف می‌شوند: [31]

$$\begin{bmatrix} \bar{E}_{11} \\ \bar{E}_{12} \\ \bar{E}_{22} \\ \bar{E}_{13} \\ \bar{E}_{23} \\ \bar{E}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & 2c^2s^2 & s^4 & 4c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^4 + s^4 & c^2s^2 & -4c^2s^2 \\ s^4 & 2c^2s^2 & c^4 & 4c^2s^2 \\ c^3s & cs^3 - c^3s & -cs^3 & -2cs(c^2 - s^2) \\ cs^3 & c^3s - cs^3 & -c^3s & 2cs(c^2 - s^2) \\ c^2s^2 & -2c^2s^2 & c^2s^2 & (c^2 - s^2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{bmatrix} \quad (5)$$

در این رابطه $c = \cos \theta$ ، $s = \sin \theta$ زاویه انحراف نسبت به محور x ورق است. هنگامی که $\theta = 0^\circ$ ، نوع ورق گرافن آرمچر (یا

در رابطه بالا اولین رابطه، معادله سازگاری و رابطه دوم معادله تعادل در جهت z است. با توجه به معادلات بالا ملاحظه می‌شود که برای یک نانو ورق گرافن N لایه، دستگاهی شامل $2N$ معادله دیفرانسیل غیرخطی که با یکدیگر کوپل شده‌اند حاصل می‌گردد.

حل دقیق معادلات حاکم بر بعد از کمانش معمولاً سخت و یا غیر ممکن است. به همین دلیل روش‌های عددی مثل گالرکین و ریتز برای حل تقریبی این نوع مسائل استفاده می‌شوند. روش گالرکین نسبت به روش ریتز عمومی‌تر است زیرا به فانکشنال درجه ۲ یا اصل کار مجازی نیازی ندارد. اگر معادلات حاکم از اصل حساب تغییرات قابل استخراج باشد، روش گالرکین به روش ریتز کاهش پیدا کرده و یک مجموعه از معادلات جبری خطی که توسط روش ریتز تولید شده حاصل می‌گردد. [۳۲] گاهی اوقات روش گالرکین ترجیح داده می‌شود زیرا کار با معادلات دیفرانسیل حاکم راحتتر از فانکشنال انرژی است. علاوه بر این، ارضاء اصل تغییرات و فرمول بندی مسئله بر این اساس دارای مشکلاتی خواهد بود اما مجموعه معادلات دیفرانسیل حاکم همواره در دسترس می‌باشد. لذا کاربرد روش گالرکین نسبت به روش ریتز عمومی‌تر و ساده‌تر است و نیازی به اصول تغییراتی ندارد. لذا در کار حاضر از روش گالرکین استفاده خواهد شد. برای مسائل غیر زمان‌مند نتیجه حاصل از اعمال روش گالرکین یک دسته معادلات جبری غیرخطی خواهد بود.

بکارگیری روش گالرکین، نیازمند یک فرم مجاز جابجایی عمودی سازگار با شرایط مرزی است. بررسی کاربردهای نانو ورق‌های گرافن نشان می‌دهد که آن‌ها به طور گسترده در ابزارها و سنسورهای بسیار حساس مانند رزوناتورها و آشکارکننده‌های جرم به کار رفته و معمولاً به صورت تکیه‌گاه ثابت نصب می‌شوند [۳۷ و ۳۸] و در پژوهش حاضر نیز این نوع تکیه‌گاه مورد بررسی قرار گرفته است. با در نظر گرفتن شرایط مرزی تکیه‌گاه ثابت در ۴ گوشه نانو ورق، یک فرم مجاز جابجایی عمودی عبارت است از: [۱۰]

$$w_0^i(x, y) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n w_{0kl}^i \cos\left(\frac{(2k-1)\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{(2l-1)\pi y}{b}\right) \quad (9)$$

که مشخصات اندیس‌ها به شرح زیر می‌باشد:

i : شماره لایه نانو ورق

k, l : اندیس‌های مکرر

که D_i ها سفتی‌های خمشی، μ پارامتر مقیاس غیرمحملی، I_2 ممان اینرسی جرم، N_{ij} ها نیروهای داخلی و c_{ij} و e_{ij} به ترتیب ضریب قسمت خطی و غیرخطی نیروی واندروالس هستند.

۲-۱- مسئله بعد از کمانش

با توجه به اینکه کمانش ورق یک مسئله استاتیکی است، جهت محاسبه جابجایی اولیه ناشی از بعد از کمانش، با قرار دادن مشتقات کمیت‌ها نسبت به زمان برابر با صفر در معادلات حرکت، حل مسئله دنبال می‌شود؛ در این حالت، با تعریف تابع تنش ایری Φ به صورت:

$$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (7)$$

و لحاظ کردن معادله سازگاری [۳۲]، معادلات حاکم بر بعد از کمانش نانو ورق گرافن چندلایه برای i امین لایه به شکل زیر به دست خواهد آمد:

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) \left(\frac{1}{E_1} \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial y^4} + \frac{1}{E_2} \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial x^4} + \left(\frac{2\nu_{12}}{E_1} + \frac{1}{G_{12}} \right) \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w_0^i}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_0^i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0^i}{\partial y^2},$$

$$D_1 \frac{\partial^4 w_0^i}{\partial x^4} + D_2 \frac{\partial^4 w_0^i}{\partial y^4} +$$

$$2D_3 \frac{\partial^4 w_0^i}{\partial x^2 \partial y^2}$$

$$+ \frac{\partial^2 M_{xx}^T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}^T}{\partial y^2} +$$

$$(\mu^2 \nabla^2 - 1) \times$$

$$\left[\sum_{j=1}^N c_{ij} (w_0^i - w_0^j) + \sum_{j=1}^N e_{ij} (w_0^i - w_0^j)^3 + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_0^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0^i}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0^i}{\partial x \partial y} \right] = 0$$

m : درجه آزادی در راستای محور x

n : درجه آزادی در راستای محور y

و تابع پایه عبارت است از

$$f_{kl} = \cos^2 \left(\frac{(2k-1)\pi x}{a} \right) \quad (13)$$

$$\cos^2 \left(\frac{(2l-1)\pi y}{b} \right)$$

رابطه (۱۲) دستگاهی متشکل از $m \times n$ معادله جبری غیرخطی است. با اعمال روش نیوتن رافسون چند متغیره، مؤلفه‌های جابجایی و نیز تابع تنش ایری برای هر لایه به دست می‌آید. (معادله جبری استخراج شده از رابطه (۱۲) در پیوست ۲ آمده است).

۲-۲- تحلیل ارتعاشات غیرخطی

به منظور استخراج معادله ارتعاشات غیرخطی بعد از کمانش، با حذف جابجایی‌های استاتیکی از معادله اولیه (۶) و تفاضل معادله بعد از کمانش (۸) به کمک رابطه (۷) از معادله حاصل شده و با وجود نیروهای گسترده میراگر ناشی از عوامل محیطی با ضریب میرایی C_1 نتیجه می‌شود:

$$D_1 \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + D_2 \frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^2 \partial y^2} =$$

$$\left(I_2 \left(\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_i}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + \sum_{j=1}^N c_{ij} (w_i - w_j) + \sum_{j=1}^N e_{ij} \begin{bmatrix} (\sqrt{3}(w'_0 - w'_0))^2 \\ (w_i - w_j) + 3(w'_0 - w'_0) \\ (w_i - w_j)^2 + (w_i - w_j)^3 \end{bmatrix} + N_{xx}^i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + N_{yy}^i \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} + 2N_{xy}^i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} + C_1 \frac{\partial w_i}{\partial t} \right) \quad (14)$$

با توجه به شرایط مرزی تکیه گاه ثابت، یک فرم مجاز جابجایی جانبی عبارت است از: [۱۰]

$$w_i(x, y, t) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n w_i^k(t) \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2, \quad \theta_1 = \frac{(2k-1)\pi x}{a}, \quad \theta_2 = \frac{(2l-1)\pi y}{b} \quad (15)$$

همچنین توزیع حرارت به صورت یکنواخت فرض می‌گردد.

جابجاری رابطه (۹) در معادله سازگاری نتیجه می‌دهد:

$$\Phi_i = (w_{0kl}^i)^2 [A_1 \cos 2\theta_1 \cos 2\theta_2 + A_2 \cos 2\theta_1 + A_3 \cos 2\theta_2 + A_4 \cos 4\theta_1 + A_5 \cos 4\theta_2 + A_6 \cos 2\theta_1 \cos 4\theta_2 + A_7 \cos 4\theta_1 \cos 2\theta_2] - \frac{1}{2} (N_{yy}^T x^2 + N_{xx}^T y^2) \quad (10)$$

$$\theta_1 = \frac{(2k-1)\pi x}{a},$$

$$\theta_2 = \frac{(2l-1)\pi y}{b}$$

که A_i ها مقادیر ثابتی بوده و با محاسبه سمت چپ معادله سازگاری و مقایسه ضرایب سمت چپ و راست معادله مذکور قابل محاسبه می‌باشند. فرمول گالرکین عبارت است از: [۳۲]

$$\int_0^b \int_0^a \Gamma_{mn} [u_i, \Psi_i(x, y)] \Psi_j(x, y) dx dy = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (11)$$

که Γ_m سمت چپ معادله حرکت، u_i نشان دهنده مؤلفه‌های جابجایی و Ψ تابع پایه است. با اعمال روش گالرکین بر معادله حرکت در جهت Z نتیجه می‌شود:

$$\int_0^b \int_0^a \left[D_1 \frac{\partial^4 w_0^i}{\partial x^4} + D_2 \frac{\partial^4 w_0^i}{\partial y^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w_0^i}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xx}^T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}^T}{\partial y^2} + (\mu^2 \nabla^2 - 1) \times \left[\sum_{j=1}^N c_{ij} (w_0^i - w_0^j) + \sum_{j=1}^N e_{ij} (w_0^i - w_0^j)^3 + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_0^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0^i}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0^i}{\partial x \partial y} \right] \right] f_{kl} dx dy = 0 \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} m_i^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_i^2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & m_i^M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_i^1 \\ \ddot{y}_i^2 \\ \dots \\ \ddot{y}_i^M \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_i^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_i^2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & c_i^M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_i^1 \\ \dot{y}_i^2 \\ \dots \\ \dot{y}_i^M \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_i^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_i^2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & k_i^M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i^1 \\ y_i^2 \\ \dots \\ y_i^M \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (19)$$

حل معادله زام عبارت است از:

$$y_i^j = A_i^j e^{\frac{-c_i^j}{2m_i^j} t} e^{i\omega_j^d t} + cc, \quad \omega_j^d = \frac{\sqrt{4k_i^j m_i^j - (c_i^j)^2}}{2m_i^j} \quad (20)$$

$$x_i^r = \sum_{s=1}^{2j} p_{rs} y_i^s$$

که منظور از c مزدوج مختلط جملات قبلی است و p_{rs} مؤلفه‌های ماتریس مودال می‌باشد.

۲-۳- حل به روش مقیاس‌های زمانی چندگانه

در این روش مؤلفه‌های جابجایی برای ورق دو لایه عبارتند از:

$$w_i^{kl} = \varepsilon w_{kl}^{i1}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 w_{kl}^{i2}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 w_{kl}^{i3}(T_0, T_1, T_2) + \dots, \quad i = 1, 2 \quad (21)$$

و یا در مختصات جدید:

$$y_{ji} = \varepsilon y_{ji}^1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 y_{ji}^2(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 y_{ji}^3(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (22)$$

جایگذاری و دسته بندی معادلات حرکت نتیجه می‌دهد:

$$O(\varepsilon^1):$$

با اعمال روش گالرکین بر معادلات (۱۴) پس از انتگرال گیری و ساده سازی برای ورق ۲ لایه، فرم اندیسی معادله حرکت به فرم زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} & C_{ikl}^{1M} \ddot{w}_i^{kl} + C_{ikl}^{2M} w_i^{kl} + C_{ikl}^{3M} w_j^{kl} + \\ & C_{ikl}^{4M} w_i^{kl} C_{j pq}^{5M} w_j^{pq} + C_{ikl}^{6M} w_i^{kl} C_{ipq}^{7M} w_i^{pq} + \\ & C_{jkl}^{8M} w_j^{kl} C_{j pq}^{9M} w_j^{pq} + \\ & C_{ikl}^{10M} w_i^{kl} C_{ipq}^{11M} w_i^{pq} C_{jrs}^{12M} w_j^{rs} + \\ & C_{ikl}^{13M} w_i^{kl} C_{j pq}^{14M} w_j^{pq} C_{jrs}^{15M} w_j^{rs} + \\ & C_{ikl}^{16M} w_i^{kl} C_{ipq}^{17M} w_i^{pq} C_{irs}^{18M} w_i^{rs} + \\ & C_{jkl}^{19M} w_j^{kl} C_{j pq}^{20M} w_j^{pq} C_{jrs}^{21M} w_j^{rs} + \\ & C_{ikl}^{22M} \dot{w}_i^{kl} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

که c_i^k ها مقادیر ثابت هستند. لازم به توضیح است که در رابطه بالا k, l, p, q, r, s اندیس‌های مکرر بوده و M به تعداد درجات آزادی یعنی $M = m \times n$ است. رابطه (۱۶) یک دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی کویپل مرتبه ۲ خطی با ضرایب ثابت است. جهت پرهیز از حل همزمان دستگاه معادلات سعی می‌شود که مسئله دی کوپل گردد. فرم ماتریسی معادلات (۱۶) عبارت است از:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + K^L X + K^N X = 0 \quad (17)$$

که M ، K^L و K^N به ترتیب ماتریس‌های جرم، سختی خطی و سختی غیرخطی معادل مجموعه هستند. با تغییر متغیر $X = P^T$ که P ماتریس مودال می‌باشد و پیش ضرب معادله در P^T ، فرم دی کوپل شده عبارت است از:

$$P^T M P \ddot{Y} + P^T C P \dot{Y} + P^T K^L P Y + P^T K^N P Y = 0 \quad (18)$$

برای قسمت همگن معادله (بخش خطی) می‌توان نوشت:

جهت حذف ترم سکولار بایستی: $\frac{\partial A_{ki}^1}{\partial T_1} = 0$ بنابراین حل (۲۷) عبارت است از:

$$y_{ki}^2 = \frac{(-c_{bq}^{1a} p_{ak} p_{qs} p_{bc}) A_{ki}^1 A_{ki}^1}{k_{(k)}^{(i)} - m_{(k)}^{(i)} (\omega_s + \omega_c)^2} e^{2i\omega_k T_0} + \frac{(-c_{bq}^{1a} p_{ak} p_{qs} p_{bc}) A_{ki}^1 \bar{A}_{ki}^1}{k_{(k)}^{(i)} - m_{(k)}^{(i)} (\omega_s - \omega_c)^2} + cc \quad (28)$$

با توجه به معادلات (۲۵) نتیجه می‌شود:

$$m_{(k)}^{(i)} \frac{\partial^2 y_{ki}^3}{\partial T_0^2} + c_{(k)}^{(i)} \frac{\partial y_{ki}^3}{\partial T_0} + k_{(k)}^{(i)} y_{ki}^3 = -m_{(k)}^{(i)} \left(2 \frac{\partial^2 y_{ki}^1}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2 y_{ki}^1}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial^2 y_{ki}^2}{\partial T_0 \partial T_1} \right) - c_{(k)}^{(i)} \left(\frac{\partial y_{ki}^1}{\partial T_2} + \frac{\partial y_{ki}^2}{\partial T_1} \right) - (c_{bq}^{1a} p_{ak} p_{qs} p_{bc}) (y_{si}^1 y_{ci}^2 + y_{si}^2 y_{ci}^1) + c_{bqr}^{2a} p_{ak} p_{qs} p_{rt} p_{bc} y_{si}^1 y_{ti}^1 y_{ci}^1 \quad (29)$$

اما $\frac{\partial y_{ki}^1}{\partial T_1} = 0$ و $\frac{\partial y_{ki}^1}{\partial T_1} = \frac{\partial A_{ki}^1}{\partial T_1} e^{-\frac{c_i^k}{\gamma m_i^k}} e^{i\omega_k^d T}$ جهت حذف ترم سکولار A_k را به فرم قطبی زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$A_k = \frac{1}{2} a_{(k)}(T_2) \exp(i\beta_{(k)}(T_2)) \quad (30)$$

که β_k و a_k توابعی حقیقی هستند. جایگذاری رابطه (۳۰) در رابطه (۲۹) و جداسازی قسمت‌های حقیقی و مختلط نتیجه می‌دهد:

$$\begin{cases} m_k \omega_k^d a_k' + \frac{1}{2} c_k a_k \beta_k' e^{-\frac{c_k}{2m_k}} = 0 \\ m_k a_k \omega_k^d \beta_k' + \frac{1}{2} c_k a_k' e^{-\frac{c_k}{2m_k}} - \frac{1}{4} (c_{bq}^{1a} p_{ai} p_{qs} p_{bc}) \times \frac{-c_m^{1r} p_{rk} p_{us} p_{tc}}{k_k - m_k (\omega_s + \omega_c)^2} a_k^3 - \frac{1}{4} (c_{bq}^{1a} p_{ak} p_{qs} p_{bc}) \frac{-c_m^{1r} p_{rk} p_{us} p_{tc}}{k_k - m_k (\omega_s - \omega_c)^2} a_k^3 = 0 \end{cases} \quad (31)$$

$$m_{(k)}^{(i)} \frac{\partial^2 y_{ki}^1}{\partial T_0^2} + c_{(k)}^{(i)} \frac{\partial y_{ki}^1}{\partial T_0} + k_{(k)}^{(i)} y_{ki}^1 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (23)$$

$$O(\varepsilon^2): 2m_{(k)}^{(i)} \frac{\partial^2 y_{ki}^1}{\partial T_0 \partial T_1} + m_{(k)}^{(i)} \frac{\partial^2 y_{ki}^2}{\partial T_0^2} + c_{(k)}^{(i)} \left(\frac{\partial y_{ki}^1}{\partial T_1} + \frac{\partial y_{ki}^2}{\partial T_0} \right) + k_{(k)}^{(i)} y_{ki}^2 + c_{bq}^{1a} p_{ak} p_{qs} p_{bc} y_{si}^1 y_{ci}^1 = 0 \quad (24)$$

$$O(\varepsilon^3): m_{(k)}^{(i)} \left(2 \frac{\partial^2 y_{ki}^1}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2 y_{ki}^1}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial^2 y_{ki}^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial^2 y_{ki}^3}{\partial T_0^2} \right) + c_{(k)}^{(i)} \left(\frac{\partial y_{ki}^1}{\partial T_2} + \frac{\partial y_{ki}^2}{\partial T_1} + \frac{\partial y_{ki}^3}{\partial T_0} \right) + k_{(k)}^{(i)} y_{ki}^3 + c_{bq}^{1a} p_{ak} p_{qs} p_{bc} (y_{si}^1 y_{ci}^2 + y_{si}^2 y_{ci}^1) + c_{bqr}^{2a} p_{ak} p_{qs} p_{rt} p_{bc} y_{si}^1 y_{ti}^1 y_{ci}^1 = 0 \quad (25)$$

حل معادله (۲۳) عبارت است از:

$$y_{ki}^1 = A_{ki}^1(T_1, T_2) e^{-\frac{c_i^k}{\gamma m_i^k}} e^{i\omega_k^d T_0} + cc, \quad \omega_k^d = \frac{\sqrt{4k_i^k m_i^k - (c_i^k)^2}}{2m_i^k}, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (26)$$

با توجه به معادلات (۲۴) می‌توان نوشت:

$$m_{(k)}^{(i)} \frac{\partial^2 y_{ki}^2}{\partial T_0^2} + c_{(k)}^{(i)} \frac{\partial y_{ki}^2}{\partial T_0} + k_{(k)}^{(i)} y_{ki}^2 = -2m_{(k)}^{(i)} i\omega_k \frac{\partial A_{ki}^1}{\partial T_1} e^{i\omega_k T_0} - c_{(k)}^{(i)} \frac{\partial A_{ki}^1}{\partial T_1} e^{-\frac{c_i^k}{\gamma m_i^k}} e^{i\omega_k^d T_0} - c_{bq}^{11a} p_{ak} p_{qs} p_{bc} \left(A_{si}^1 A_{ci}^1 e^{i(\omega_s + \omega_c) T_0} + A_{si}^1 \bar{A}_{ci}^1 e^{i(\omega_s - \omega_c) T_0} \right) + cc \quad (27)$$

$$y_k = \varepsilon \sqrt{\frac{c_1^k}{c_2^k + c_3^k \varepsilon^2 t}} \cos(\omega t + \gamma_{0k}) - \frac{1}{2} \frac{c_1^k \varepsilon^2}{c_2^k + c_3^k \varepsilon^2 t} (c_{1a}^k p_{aq} p_{ak} p_{qs} p_{bc}) \times \left(\frac{1}{2(k_k - m_k(\omega_s - \omega_c)^2)} + \frac{\cos(2\omega t + 2\gamma_{0k})}{(k_k - m_k(\omega_s + \omega_c)^2)} \right) + O(\varepsilon^3) \quad (38)$$

که

$$\omega = \omega_k^d = \frac{\sqrt{4k_i^k m_i^k - (c_i^k)^2}}{2m_i^k}, \quad (39)$$

$$\gamma_{0k} = c_4^k \ln(c_5^k \varepsilon^2 t + c_6^k) + \beta_{0k}$$

۳- نتایج

در این بخش، ابتدا جهت ارزیابی روش برخی نتایج با مراجع در دسترس مقایسه و سپس به نتایج حاصل از تحلیل غیرخطی به تفکیک و به صورت مشروح پرداخته شده است.

۳-۱- صحنه گذاری مسئله بعد از کمانش

در ابتدا به منظور بررسی نرخ همگرایی روش حاضر، نتایج حاصل از روش گالرکین جهت محاسبه بار کمانش حرارتی برای مقادیر

جدول ۱: مطالعه همگرایی روش گالرکین

Table 1. Convergence study of Galerkin Method

تعداد توابع پایه به کار گرفته شده جهت محاسبه دمای کمانش بحرانی					(e,a) پارامتر مقیاس
5	4	3	2	1	
329/74	329/74	329/75	331/76	335/49	0/0
302/33	302/33	302/33	304/71	308/12	0/5
287/24	287/24	287/24	290/87	293/33	1/0
269/31	269/31	269/32	272/74	275/46	1/5
254/64	254/64	254/64	258/67	261/08	2/0

که علامت () بیانگر مشتق نسبت به T_2 می باشد. فرم کلی دستگاه به طور خلاصه عبارت است از:

$$\begin{cases} n_1 a_k' + n_2 a_k \beta_k' = 0 \\ n_1 a_k \beta_k' + n_2 a_k' + n_3 a_k^3 = 0 \end{cases} \quad (32)$$

$$k = 1, 2, \dots, M, \quad n_i = cte$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} \beta_k' = -\frac{n_1 a_k'}{n_2 a_k} \\ n_2^2 - n_1^2 a_k' + n_3 a_k^3 = 0 \end{cases} \quad (33)$$

که معادله دوم به فرم معادله برنولی است و حل آن عبارت است از:

$$a_k = \pm \sqrt{\frac{c_1^k}{c_2^k + c_3^k T_2}}, \quad c_i^k = cte \quad (34)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \beta_k' &= \frac{c_7^k}{c_8^k + c_9^k T_2} \Rightarrow \beta_k \\ &= c_4^k \ln(c_5^k T_2 + c_6^k) + \beta_{0k} \end{aligned} \quad (35)$$

بنابراین

$$\begin{cases} a_k = \pm \sqrt{\frac{c_1^k}{c_2^k + c_3^k T_2}}, & c_i^k = cte \\ \beta_k = c_4^k \ln(c_5^k T_2 + c_6^k) + \beta_{0k} \end{cases}, k = 1, 2, \dots, 2j \quad (36)$$

پس می توان نوشت:

$$A_k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c_1^k}{c_2^k + c_3^k \varepsilon^2 t}} \exp \left(i c_4^k \ln(c_5^k \varepsilon^2 t + c_6^k) + i \beta_{0k} \right) \quad (37)$$

جایگذاری y_i^1 و y_i^2 در رابطه (۲۲) و استفاده از رابطه (۳۷) نتیجه می دهد:

جدول ۴: نسبت پریود مود اول ارتعاشات دامنه بزرگ ورق با تکیه گاه ثابت

Table 4. First mode period ratio of large domain vibrations of fixed plate

نسبت پریود غیرخطی		W/h
مرجع [39]	تحقیق حاضر	
0/970	0/973	0/4
0/913	0/915	0/8
0/835	0/837	1/2
0/742	0/744	1/6
0/633	0/634	2/0

مرجع [۳۶] نشان می دهد.

۳-۲- صحنه گذاری مسئله ارتعاشات

به منظور بررسی دقت محاسبات و فرمول بندی حاضر، فرکانس طبیعی نانو ورق گرافن مستطیلی دولایه زیگزآگ و آرمچر با تکیه گاه های ثابت محاسبه و با مرجع [۲۹] مقایسه شده و در جدول ۳ آمده است و دقت مناسبی را نشان می دهد.

به منظور بررسی صحت تحلیل های غیرخطی و محاسبات فرکانسی نسبت پریود غیرخطی ارتعاشات دامنه بزرگ ورق با تکیه گاه های ثابت محاسبه و با مرجع [۳۹] مقایسه شده که بر اساس جدول ۴ پاسخ ها دارای نزدیکی مناسبی می باشند.

۳-۳- نتایج عددی

به منظور انجام محاسبات عددی، یک ورق گرافن ۲ لایه با خواص مواد تابع حرارت طبق جدول ۵ مورد استفاده قرار گرفته و نیز خواص هر دو لایه یکسان فرض می گردد.

با توجه به اینکه خواص ماده گرافن به صورت نقطه ای داده شده و رفتار خواص با تغییرات حرارت به صورت یک تابع صریح از دما مشخص نیست، از روش درون یابی جهت حدس تابعیت خواص به صورت توابع چند جمله ای استفاده و در فرآیند حل در تحقیق حاضر لحاظ شده است.

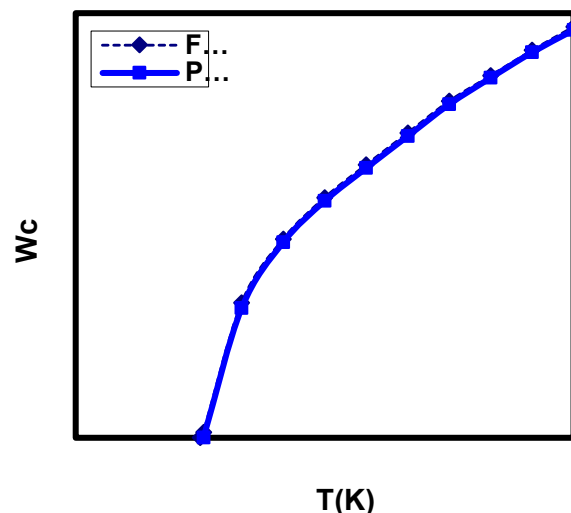
۳-۳-۱- مسئله بعد از کمانش

با جایگذاری w و ϕ در رابطه (۱۲) و حل معادله حاصل برحسب دما، نمودار شاخه ای نانو ورق گرافن که نشان دهنده دامنه کمانش

جدول ۲: خواص مواد ورق مربعی نیکل [۳۶]

Table 2. Material properties of square Nickel plate [36]

199/5	مدول یانگ (GPa)
0/30	نسبت پواسون
13/3	ضریب انبساط حرارتی ($^{\circ}\text{C} \times 10^{-6}$)



جدول ۳: مقایسه فرکانس های طبیعی خطی نانو ورق گرافن (THz)

Table 3. Comparison between natural frequencies of NPGS (THz)

کابریتی	ω_{L1}		ω_{L2}	
	تحقیق حاضر	مرجع [29]	تحقیق حاضر	مرجع [29]
آرمچر	0/1131	0/1126	2/6001	2/5999
زیگزآگ	0/1169	0/1166	2/5999	2/5988

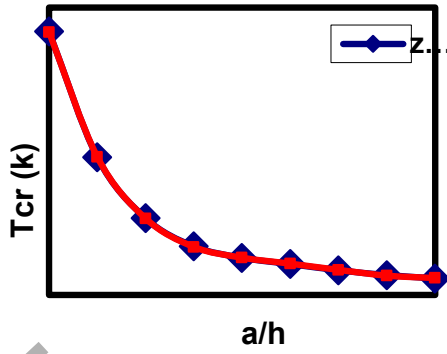
مختلف پارامتر مقیاس و تعداد توابع پایه در جدول ۱ آمده و یک نرخ همگرایی سریع را بازا کلیه مقادیر پارامتر مقیاس نشان می دهد. جهت بررسی بیشتر، تاثیر تغییرات حرارتی بر روی جابجایی عرضی ورق مستطیلی بررسی و با مرجع [۳۶] مقایسه شده است. در جدول ۲ خواص مواد مورد استفاده جهت فرآیند صحنه گذاری آمده است.

در شکل ۲ جابجایی نقطه مرکزی ورق مربعی با تکیه گاه های ثابت بازا تغییرات درجه حرارت آمده است و نزدیکی خوبی را با پاسخ های

جدول ۵: خواص مواد نانو ورق گرافن در محیط حرارتی [۳۱]

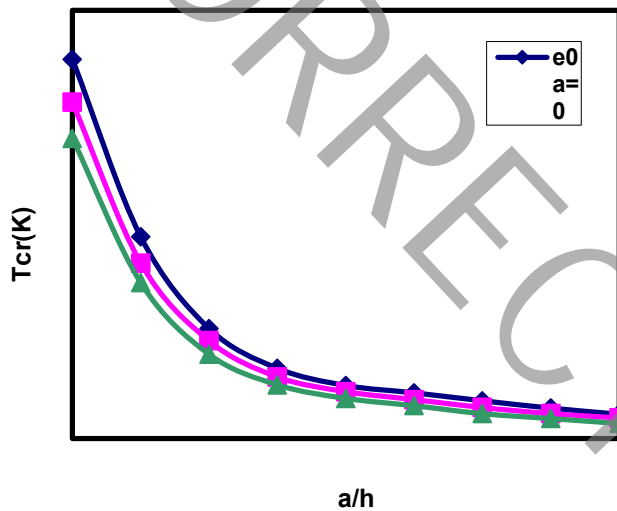
Table 5. Material properties of NPGS in thermal environment [31]

$\alpha_r (10^{-6} / K)$	$\alpha_l (10^{-6} / K)$	$G_{rr} (TPa)$	$E_r (TPa)$	$E_l (TPa)$	$T (K)$	
2/1	2/3	0/923	2/168	2/154	300	ورق آرمچر
2/1	2/0	0/937	2/140	2/133	500	
1/7	1/8	0/958	2/119	2/112	700	
1/6	1/8	0/913	2/054	2/067	300	ورق زیگزاگ
2/0	1/8	0/926	2/027	2/040	500	
1/9	1/7	0/933	2/007	2/013	700	



شکل ۵: تأثیر کایرالیته بر نمودار تغییرات دمای کمانش بحرانی با نسبت منظری تحت بار حرارتی یکنواخت و پارامتر مقیاس واحد

Fig. 5. Effect of chirality on the critical buckling temperature vs. aspect ratio under uniform temperature rise and ($\mu = 1$)

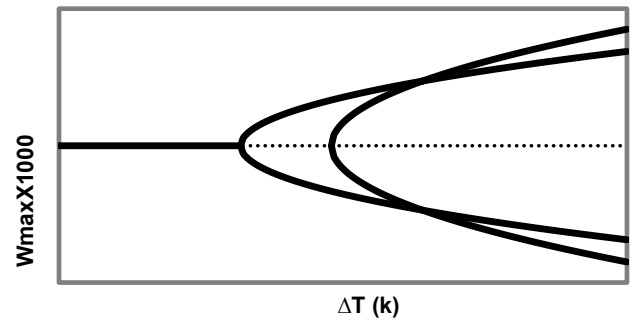


شکل ۶: گرادیان دمای بحرانی نانو ورق گرافن زیگزاگ نسبت به a/h تحت افزایش حرارت یکنواخت

Fig. 6. Critical temperature gradient of DLZGS vs. a/h under uniform temperature rise

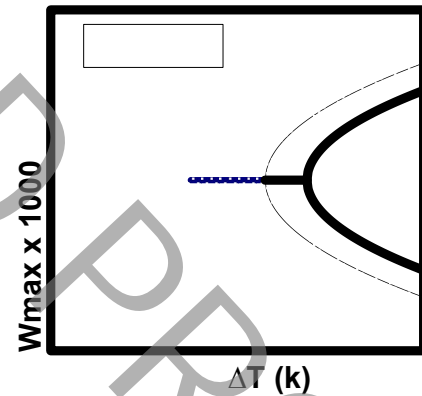
با یکدیگر مقایسه شده است. بر اساس این شکل ملاحظه می‌گردد که با در نظر گرفتن تأثیر پارامتر مقیاس، شروع نقطه شاخه‌ای در دمای پایین‌تری اتفاق می‌افتد؛ در نتیجه، در نظر گرفتن پارامتر مقیاس سختی خمشی مجموعه را کاهش داده و شروع شاخه‌ای شدن نمودار را تسریع می‌بخشد و اهمیت لحاظ کردن تئوری غیرمحلّی در مدل‌سازی نانو ورق را نشان می‌دهد.

در شکل ۵ با در نظر گرفتن دو ورق گرافن با ابعاد مشابه، تأثیر کایرالیته بر درجه حرارت بحرانی بررسی شده و نتایج نشان می‌دهد که کایرالیته تأثیر ناچیزی بر دمای کمانش بحرانی خواهد داشت.



شکل ۳: دیاگرام شاخه‌ای شدن نانو ورق گرافن ۲ لایه زیگزاگ با افزایش دما به ازا پارامتر مقیاس واحد

Fig. 3. Bifurcation diagram of DLZGS with temperature rise for ($\mu = 1$)

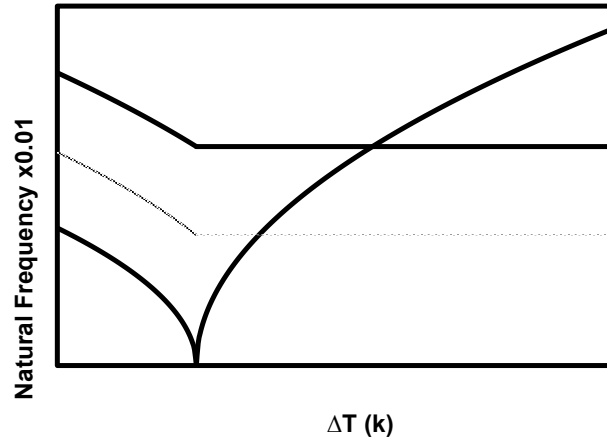


شکل ۴: مقایسه بین دیاگرام شاخه‌ای شدن نانو ورق گرافن زیگزاگ با تئوری غیرمحلّی ($\mu = 1$) و تئوری محلّی ($\mu = 0$)

Fig. 4. Comparison between bifurcation diagram of DLZGS for nonlocal ($\mu = 1$) and local theory ($\mu = 0$)

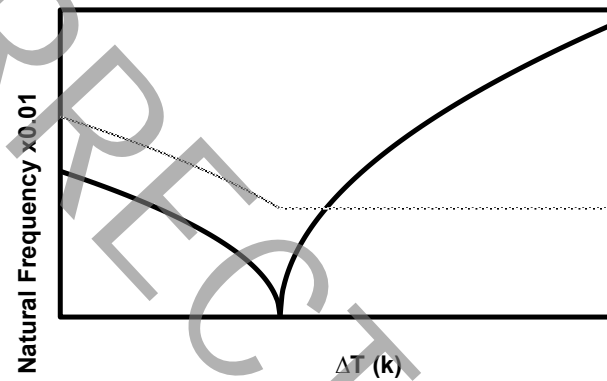
نقطه مرکزی ورق به عنوان تابعی از گرادیان حرارت می‌باشد، به دست می‌آید که نتایج آن در شکل ۳ نشان داده شده است.

در شکل ۴ نمودار شاخه‌ای حاصل از تئوری‌های محلّی و غیرمحلّی



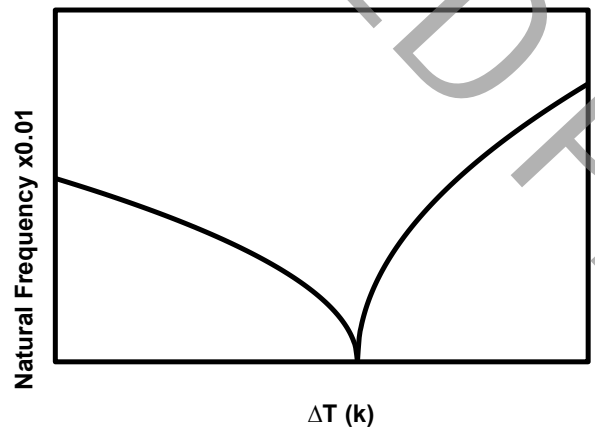
a) Variation of the natural frequencies of vibration around the first buckled nanoplate configurations of fixed support

الف) تغییرات فرکانس طبیعی ارتعاشات حول اولین مود کمانشی نانو ورق با تکیه گاه ثابت



b) Variation of the natural frequencies of vibration around the second buckled nanoplate configurations of fixed support

ب) تغییرات فرکانس طبیعی ارتعاشات حول دومین مود کمانشی نانو ورق با تکیه گاه ثابت

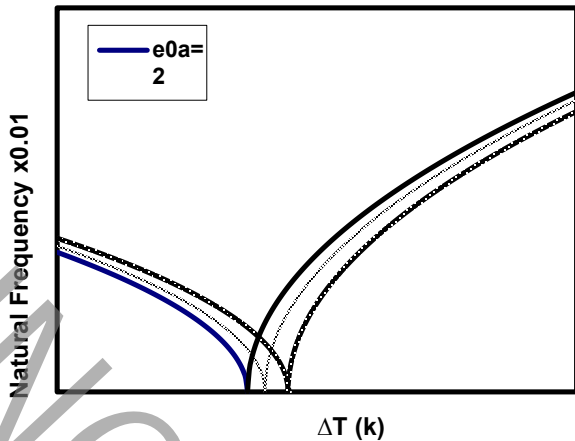


c) Variation of the natural frequencies of vibration around the third buckled nanoplate configurations of fixed support

ج) تغییرات فرکانس طبیعی ارتعاشات حول سومین مود کمانشی نانو ورق با تکیه گاه ثابت

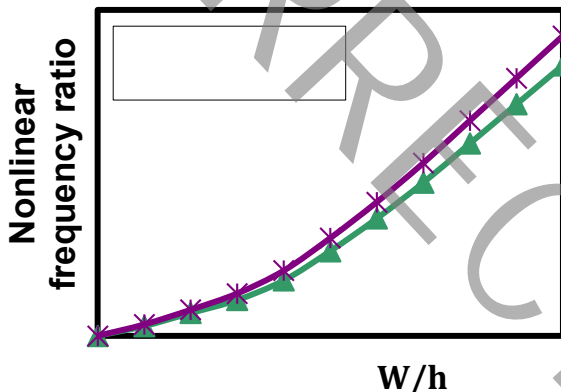
شکل ۷: تغییرات فرکانس طبیعی نانو ورق گرافن ۲ لایه زیگزاگ با افزایش دما قبل و بعد از کمانش

Fig. 7. Variation of the natural frequencies of DLZGS with temperature rise before and after buckling



شکل ۸: تأثیر پارامتر مقیاس بر فرکانس طبیعی نانو ورق گرافن زیگزاگ با افزایش دما قبل و بعد از کمانش برای مود دوم.

Fig. 8. Effect of scale parameter on natural frequencies of DLZGS with temperature rise before and after buckling for mode 2



شکل ۹: منحنی پاسخ بعد از کمانش نانو ورق گرافن زیگزاگ دولایه با اندرکنش واندروالس خطی و غیرخطی

Fig. 9. Response curve of postbuckled DLZGS with linear and nonlinear van der Waals interactions

کمانش یک موقعیت تعادل پایدار است. بررسی بیشتر نشان می‌دهد که مدهای کمانشی بالاتر از مود ۲ تا مود ۵ دارای موقعیت تعادل ناپایدار می‌باشند.

در شکل ۷ تغییرات فرکانس حول سه مود کمانشی اول نشان داده شده است. خطوط تیره بیانگر مدهای ارتعاشی فرد و خطوط خط چین نشان دهنده مدهای زوج می‌باشد.

در شکل ۸ تأثیر پارامتر مقیاس بر تغییرات ارتعاشات خطی نانو ورق گرافن نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که تأثیر این پارامتر قبل و بعد از فرایند کمانش کاملاً برعکس یکدیگر می‌باشد که علت آن تفاوت معادله حاکم بر ارتعاشات قبل و بعد از کمانش است.

شکل ۶ تغییرات گرادیان حرارت بحرانی را برای نانو ورق گرافن دولایه با تکیه‌گاه‌های ثابت تحت افزایش حرارت یکنواخت بازا مقادیر مختلف پارامتر مقیاس نشان می‌دهد. با مراجعه به معادله حاکم بر مسئله ملاحظه می‌شود که این پارامتر به صورت یک عامل مجذور در معادلات ظاهر می‌گردد. بر این اساس و مطابق نمودار با افزایش پارامتر مقیاس، دمای بحرانی کاهش یافته و نسبت شدت کاهش این دما برای ورق‌های کوچکتر، بیشتر است.

۳-۳-۲- مسئله ارتعاشات و تحلیل پایداری

در این بخش نتایج حاصل از تحلیل ارتعاشات غیرخطی بعد از کمانش ارائه و تأثیر پارامترهای مختلف بر آن بررسی شده است. پیش از ارائه نتایج، ابتدا شاخه‌های پایدار مدهای کمانشی باید تعیین گردد. پایداری غیرخطی نانو ورق گرافن اورتوتروپ تک لایه با تکیه‌گاه‌های ساده بررسی و اهمیت در نظر گرفتن اثرات غیرمحلی بر رفتار پایداری غیرخطی نشان داده شده است [۴۰]. پایداری مدهای کمانشی نانو ساختارها با بررسی نوسانات کوچک حول مدهای کمانش کرده امکان پذیر است [۳۵] به عبارت دیگر، یک تحلیل ارتعاش خطی حول حالت بعد از کمانش باید انجام پذیرد. جهت انجام این کار، با حذف جملات غیرخطی معادله حرکت و اعمال روش گالرکین بر جملات باقیمانده، یک مسئله مقدار ویژه بر حسب ω حاصل می‌شود. برای یک ترکیب حالت کمانش پایدار، ω^2 باید مثبت باشد و بنابراین ω عددی حقیقی است. جهت بررسی پایداری فرم‌های کمانش کرده براساس مرجع [۳۵] فرض می‌شود q_x^T کمی بزرگتر از بار کمانش بحرانی (مثلاً $q_x^T = 1/0.07 q_{xcr}^T$) باشد و با بررسی شکل مود فیزیکی مربوطه، موقعیت‌های پایدار و ناپایدار مشخص می‌گردد. بررسی این موضوع در ۲ گام (مرحله) انجام می‌پذیرد؛ در گام اول مسئله مقدار ویژه حل و مقدار ω^2 در دو ناحیه مثبت و منفی ارزیابی می‌شود. در ناحیه $\omega^2 > 0$ اگر شکل مود متناظر، مطابق با شکل مود فیزیکی مربوطه بود، شرط اول پایداری برآورده می‌شود؛ از طرفی، در ناحیه $\omega^2 \leq 0$ اگر شکل مود متناظر، یک شکل مود غیرفیزیکی باشد، شرط دوم پایداری برآورده شده و در نتیجه آن مود، یک مود تعادل پایدار است. اما اگر هر یک از این دو شرط برآورده نشود، آن مود ناپایدار خواهد بود. برای مثال برای اولین مود کمانش، کلیه ریشه‌های مثبت مطابق با شکل‌های مدهای فیزیکی است؛ در نتیجه، اولین مود

در شکل ۹ نشان داده شده است. مراجعه به معادلات دینامیکی حاکم بر مسئله نشان می‌دهد که ضریب مذکور در ترم‌های غیرخطی معادله خود را آشکار نموده و بر این اساس ملاحظه می‌شود که تأثیر ضریب غیرخطی و اندروالس e_f در دامنه‌های بالاتر بیشتر بوده و برای دامنه‌های بالا بایستی در نظر گرفته شود.

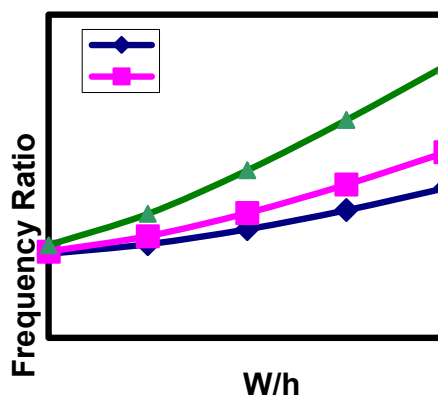
تأثیر تغییرات درجه حرارت بر منحنی فرکانس - دامنه نانو ورق گرافن ۲ لایه کماتش کرده حول مود کماتش پایدار (مود اول) در شکل ۱۰ نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که افزایش حرارت با کاهش میزان سختی نانو ورق، فرکانس طبیعی را کاهش داده اما نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی را افزایش می‌دهد.

همچنین منحنی پاسخ نانو ورق گرافن دولایه در شکل ۱۱ ترسیم شده و تأثیر پارامتر مقیاس بر نمودار مذکور مورد بررسی قرار گرفته است. با مراجعه به معادلات دینامیکی حاکم ملاحظه می‌شود که تأثیر پارامتر مذکور بر ترم‌های غیرخطی یک تأثیر افزایشی است و نتایج نیز نشان می‌دهد که بازاء یک جابجایی عمودی ثابت، پارامتر مذکور دارای اثر افزایشی بر نسبت فرکانس غیرخطی خواهد بود.

تأثیر کایرالیته بر رفتار فیزیکی نانو ورق گرافن دو لایه با تکیه‌گاه‌های ثابت در شکل ۱۲ نشان داده شده است. براساس شکل مذکور، ورق زیگزگاک دارای مقدار عددی بالاتری از نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی در مقایسه با ورق آرمچر است که این موضوع به دلیل تفاوت کایرالیته و ساختار متفاوت دو ورق مذکور می‌باشد.

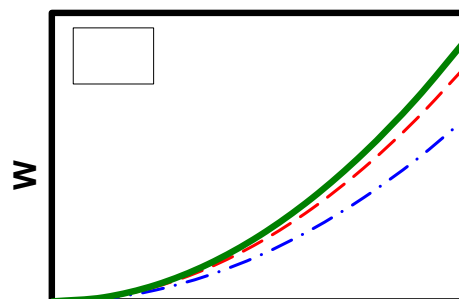
۴- نتیجه‌گیری

در این پژوهش پاسخ ارتعاشی نانو ورق گرافن دولایه کماتش کرده براساس مدل ورق غیرمحملی برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ثابت بررسی شده است. تفاوت اصلی بین مدل حاضر با مدل‌های قبلی این است که حل مسئله حاضر شامل جابجایی تحت تأثیر بعد از کماتش حرارتی است. حل مسئله در دو فاز بررسی شده است؛ فاز اول شامل تعادل حرارتی (مسئله استاتیک) و دیگری ارتعاشات دامنه بزرگ حول پاسخ استاتیک. در تحلیل بعد از کماتش حرارتی، یک رفتار کماتش شاخه‌ای شدن مشاهده شده و یک مسیر تعادل بعد از کماتش حرارتی به دست آمده است. معادله حرکت ارتعاشات غیرخطی نانو ورق گرافن دولایه استخراج و پس از تشکیل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی مرتبه ۲، حل به کمک روش مقیاس‌های زمانی چندگانه ارائه شده است.



شکل ۱۰: اثر تغییر دما بر منحنی دامنه-فرکانس بعد از کماتش نانو ورق گرافن زیگزگاک دولایه

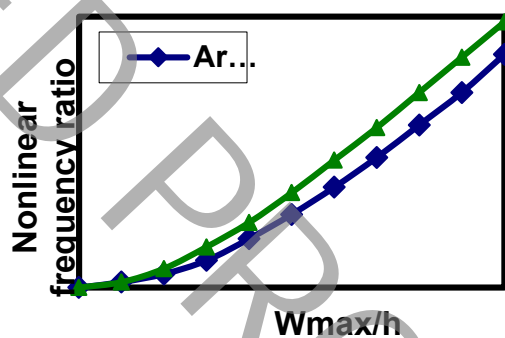
Fig. 10. Effect of temperature variation on domain-frequency curve of postbuckled DLZGS



Nonlinear Frequency Ratio

شکل ۱۱: اثر پارامتر مقیاس بر منحنی پاسخ نانو ورق گرافن آرمچر دولایه

Fig. 11. Effect of scale parameter on response curve of DLGS



شکل ۱۲: تأثیر کایرالیته بر منحنی پاسخ بعد از کماتش نانو ورق گرافن دولایه با تکیه‌گاه ثابت و $\Delta T = 450\text{K}$

Fig. 12. Effect of Chirality on response curve of postbuckled DLGS with fixed support and $\Delta T = 450\text{K}$

پس از تحلیل ارتعاشات خطی و بررسی پایداری، نتایج تحلیل ارتعاشات غیرخطی حول مود کماتش پایدار (مود ۱) انجام شده و نتایج در ادامه آمده است. تأثیر ضریب غیرخطی نیروهای و اندروالس

M^T	گشتاورهای حرارتی
N_{ij}	نیروهای داخلی
N^T	نیروهای حرارتی
P	ماتریس مودال
u	مؤلفه جابجایی ناشی از ارتعاش در جهت محور x
U	جابجایی کلی در راستای محور x
u, v	مؤلفه جابجایی بعد از کمانش در راستای محور x
V	مؤلفه جابجایی ناشی از ارتعاش در جهت محور y
v_0	جابجایی کلی در راستای محور y
w	مؤلفه جابجایی بعد از کمانش در راستای محور y
W	مؤلفه جابجایی ناشی از ارتعاش در جهت محور z
w	جابجایی کلی در راستای محور z
α_1	ضریب انبساط حرارتی در جهت x
α_2	ضریب انبساط حرارتی در جهت y
ϵ_{ij}^0	مؤلفه‌های کرنش در صفحه میانی نانو ورق
Φ	تابع تنش ایری
μ	پارامتر مقیاس غیرمحلی
σ	پارامتر میزان‌سازی

پیوست ۱: ضرایب ثابت

با توجه به پیچیدگی و حجم بالای ضرایب با افزایش تعداد درجات آزادی، ضرایب ثابت معادله (۱۶) در ساده‌ترین حالت و با $M = 1$ به عنوان نمونه در ادامه آمده است.

$$c_1 := -\frac{1}{16} \frac{\pi^2 i_2 \left(12\pi^2 a^4 \mu^2 + 8\pi^2 a^2 b^2 \mu^2 + 12\pi^2 b^4 \mu^2 - 3a^4 b^2 - 3a^2 b^4 \right)}{a^3 b^3}$$

$$c_2 := \frac{1}{64a^3 b^3} (48\pi^4 a^4 \mu^2 N_y^T - 27W_{0i}^2 e_{ij}^4 a^4 b^4 - 27W_{0j}^2 e_{ij}^4 a^4 b^4 + 32D_3 \pi^4 a^2 b^2 + 12\pi^2 a^4 b^2 N_y^T + 48\mu^2 \pi^4 b^4 N_x^T + 12N_x^T \pi^2 a^2 b^4 + 48\pi^4 a^4 D_2 + 48D_1 \pi^4 b^4 - 9c_{ij} a^4 b^4 + 54W_{0i} W_{0j} e_{ij}^4 a^4 b^4 + 16\mu^2 \pi^4 a^2 b^2 N_x^T - 12\mu^2 \pi^2 b^4 c_{ij} a^2 + 16\mu^2 \pi^4 a^2 b^2 N_y^T - 12\mu^2 \pi^2 c_{ij} a^4 b^2 - 36\mu^2 \pi^2 b^4 e_{ij} a^2 W_{0i}^2 - 36\pi^2 a^4 b^2 \mu^2 W_{0i}^2 e_{ij} + 72\pi^2 a^4 b^2 \mu^2 W_{0i} W_{0j} e_{ij} - 36\pi^2 a^4 b^2 \mu^2 W_{0j}^2 e_{ij} + 72\pi^2 a^2 b^4 \mu^2 W_{0i} W_{0j} e_{ij} - 36\pi^2 a^2 b^4 \mu^2 W_{0j}^2 e_{ij})$$

همچنین با استفاده از تحلیل ارتعاش خطی و تشکیل مسئله مقدار ویژه، یک تحلیل پایداری انجام شده است. تأثیر کایرالیته بر دمای کمانش بحرانی و رفتار ارتعاشی نانو ورق دولایه با در نظر گرفتن شرایط مشابه دمایی و ابعادی بررسی شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که اگرچه کایرالیته تأثیر ناچیزی بر دمای کمانش بحرانی دارد، اما تأثیر آن بر رفتار ارتعاشی قابل توجه خواهد بود. همچنین نتایج نشان می‌دهد که برای مشخصات ابعادی و شرایط دمایی مشابه، ورق آرمچر فرکانس طبیعی کمتری نسبت به ورق زیگزآگ خواهد داشت. تحلیل پایداری نشان می‌دهد که مود کمانش اول یک موقعیت تعادل پایدار دارد؛ در حالی که، مودهای بالاتر دارای موقعیت تعادل ناپایدار هستند. تأثیر پارامتر مقیاس بر کمیت‌های مختلف از جمله فرکانس طبیعی، دمای بحرانی و منحنی پاسخ بررسی شده است. ملاحظه می‌شود که با به کار گرفتن تئوری غیرمحلی، شروع نقطه شاخه‌ای شدن در یک دمای پایین‌تر اتفاق می‌افتد و در نتیجه لحاظ کردن پارامتر مقیاس سختی خمشی را کاهش داده و شروع فرآیند شاخه‌ای شدن و نیز ناپایداری را تسریع می‌کند. همچنین، با افزایش پارامتر مقیاس میزان جابجایی افزایش می‌یابد. با افزایش دما فرکانس‌های طبیعی دو رفتار متفاوت را نشان می‌دهند؛ کاهش قبل از شروع کمانش و افزایش بعد از وقوع کمانش. همچنین لحاظ کردن پارامتر مقیاس دو تأثیر متفاوت بر جا می‌گذارد؛ با افزایش دما پیش از کمانش فرکانس طبیعی را کاهش داده در حالی که در حالت بعد از کمانش باعث افزایش آن می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که پارامتر مقیاس و تغییر دما نقشی اساسی در رفتار ارتعاش غیرخطی نانوساختارهای کمانش کرده دارند.

فهرست علائم

a	طول نانو ورق در راستای محور x
a_j	دامنه پاسخ
b	طول نانو ورق در راستای محور y
c_{ij}	ضریب قسمت خطی نیروی واندروالس
D_i	سفتی‌های خمشی
e_{ij}	ضریب قسمت غیرخطی نیروی واندروالس
E_{ij}	مدول‌های یانگ مؤثر
\bar{E}_{ij}	مدول‌های یانگ تبدیل یافته
I_2	ممان اینرسی جرم
M	تعداد درجات آزادی
M_{ij}	گشتاورهای اینرسی

non-linear postbuckling behavior of nanoplates, International Journal of Non-Linear Mechanics, 55 (2013) 19-24.

[3] R. Maitra, S. Bose, Post Buckling Behaviour of a Nanobeam considering both the surface and nonlocal effects, International Journal of Advancements in Research & Technology, 1 (2012) 1-5.

[4] W.T. Koiter, Couple Stresses in the Theory of Elasticity, I and II, Proc. Royal Netherlands Academy of Sciences, Series B, LXVII, 1(67) (1964) 17-44.

[5] R.D. Mindlin, N.N. Eshel, On first strain-gradient theories in linear elasticity, Int. J. Sol. Struct., 4 (1968) 109-124.

[6] F. Yang, A. Chong, D. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, Int. J. Sol. Struct., 39 (2002) 2731-2743.

[7] A.C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, J. Appl. Phys., 54 (1983) 4703-4710.

[8] A.C. Eringen, Nonlocal Continuum Field Theories, New York, 2002.

[9] S.C. Pradhan, J.K. Phadikar, Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates, J. Sound. Vib., 325 (2009) 206-223.

[10] G.A. Varzandian, S. Ziaee, Analytical Solution of Non-Linear Free Vibration of Thin Rectangular Nano Plates with Various Boundary Conditions Based on Non-Local Theory, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, 48(4) (2017) 331-346 (in Persian).

[11] N. Yamaki, M. Chiba, Nonlinear Vibrations of a Clamped Rectangular Plate with Initial Deflection and Initial Edge Displacement Part I: Theory, Thin-Walled Structures, 1 (1983) 3-29.

[12] J.K. Paik, Large deflection orthotropic plate approach to develop ultimate strength formulations for stiffened panels under combined biaxial compression/tension and lateral pressure, Thin-Walled Structures, 39 (2001) 215-246.

[13] R. Ansari, R. Gholami, Size-dependent modeling of the free vibration characteristics of postbuckled third-

$$C_3 := -C_2$$

$$c_{45} := \frac{15}{128} \frac{e_{ij} \left(\frac{8\pi^2 a^2 \mu^2 + 8\pi^2 b^2 \mu^2 + 5a^2 b^2}{8\pi^2 b^2 \mu^2 + 5a^2 b^2} \right) (W_{0i} - W_{0j})}{ab}$$

$$c_{67} := -\frac{15}{256} \frac{e_{ij} \left(\frac{8\pi^2 a^2 \mu^2 + 8\pi^2 b^2 \mu^2 + 5a^2 b^2}{8\pi^2 b^2 \mu^2 + 5a^2 b^2} \right) (W_{0i} - W_{0j})}{ab}$$

$$C_{89} := -C_{45}$$

$$c_{101112} := \frac{525}{16384} \frac{e_{ij} \left(\frac{12\pi^2 a^2 \mu^2 + 12\pi^2 b^2 \mu^2 + 7a^2 b^2}{12\pi^2 b^2 \mu^2 + 7a^2 b^2} \right)}{ab}$$

$$C_{131415} := -C_{101112}$$

$$c_{161718} := -\frac{175}{16384} \frac{e_{ij} \left(\frac{12\pi^2 a^2 \mu^2 + 12\pi^2 b^2 \mu^2 + 7a^2 b^2}{12\pi^2 b^2 \mu^2 + 7a^2 b^2} \right)}{ab}$$

$$C_{192021} := -C_{161718}$$

$$c_{22} := -\frac{3}{64} \frac{C_1 \left(\frac{4\pi^2 a^2 \mu^2 + 4\pi^2 b^2 \mu^2 + 3a^2 b^2}{4\pi^2 b^2 \mu^2 + 3a^2 b^2} \right)}{ab}$$

پیوست ۲: معادله بعد از کمانش

معادله جبری بعد از کمانش حاصل از انتگرال گیری به روش

گالرکین (رابطه (۱۲)) به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} & -\frac{W_{j0}^3}{16384a^4b^3} (32768\pi^6 \mu^2 A_3 a^2 + 16384\pi^6 \mu^2 A_2 b^2 + 32768\pi^6 \mu^2 A_1 a^2 + \\ & 8192\pi^4 A_2 a^2 b^2 + 8192\pi^4 A_1 a^2 b^2 + 16384\pi^6 \mu^2 A_3 a^2 + 8192\pi^4 A_2 a^2 b^2 + \\ & 32768\pi^6 \mu^2 A_1 a^2 b^2 + 16384\pi^6 \mu^2 A_2 a^2 b^2 + 8192\pi^4 A_3 a^2 b^2 + \\ & 4096\pi^4 A_6 a^2 b^2 + 16384\pi^6 \mu^2 A_1 a^2 b^2 + 8192\pi^4 A_2 a^2 b^2 + 4096\pi^4 A_7 a^2 b^2 + \\ & 16384\pi^6 \mu^2 A_3 a^2 + 16384\pi^6 \mu^2 A_2 a^2 + 8192\pi^4 A_6 a^2 b^2 + 32768\pi^6 \mu^2 A_1 a^2 b^2 + \\ & 32768\pi^6 \mu^2 A_2 a^2 b^2 + 32768\pi^6 \mu^2 A_3 a^2 + 2100\pi^2 a^4 b^2 \mu^2 e_{ij} + 2100\pi^2 a^2 b^4 \mu^2 e_{ij} + 1225a^4 b^4 e_{ij}) \\ & - (1/16384) (-6300\pi^2 a^4 b^2 \mu^2 e_{ij} w_{j0} - 6300\pi^2 a^2 b^4 \mu^2 e_{ij} w_{j0} - 3675a^4 b^4 e_{ij} w_{j0}) w_{j0}^2 / (a^3 b^3) - \\ & (1/16384) (3072\pi^2 N_1^i a^4 b^2 - 8192\pi^4 D_3 a^2 b^2 + 12288\mu^2 \pi^4 N_1^i a^4 + 3072\pi^2 N_1^i a^2 b^4 + \\ & 12288\mu^2 \pi^4 N_1^i b^4 + 2304c_a a^4 b^4 - 12288\pi^4 D_2 a^4 - 12288\pi^4 * D_1 b^4 + 6300\mu^2 \pi^2 e_{ij} w_{j0}^2 a^2 b^4 + \\ & 6300\mu^2 \pi^2 e_{ij} w_{j0}^2 a^4 b^2 + 3675e_{ij} w_{j0}^2 a^4 b^4 + 4096\mu^2 \pi^4 N_1^i a^2 b^2 + 4096\mu^2 \pi^4 N_1^i a^2 b^2 + \\ & 3072\mu^2 \pi^2 c_{ij} a^4 b^2 + 3072\mu^2 \pi^2 c_{ij} a^2 b^4) w_{j0} / (a^3 b^3) - (1/16384) (-2100\pi^2 a^4 b^2 \mu^2 e_{ij} w_{j0}^3 - \\ & 2100\pi^2 a^2 b^4 \mu^2 e_{ij} w_{j0}^3 - 3072\pi^2 a^4 b^2 \mu^2 c_{ij} w_{j0} - 3072\pi^2 a^2 b^4 \mu^2 c_{ij} w_{j0} - 1225a^4 b^4 e_{ij} w_{j0}^3 - \\ & 2304a^4 b^4 c_{ij} w_{j0}) / (a^3 b^3) = 0 \end{aligned}$$

مراجع

- [1] A.R. Setoodeh, P. Malekzadeh, A.R. Vosoughi, Nonlinear free vibration of orthotropic graphene sheets using nonlocal mindlin plate theory, Proc. Inst. Mech. Eng., Part C: J Mech. Eng. Sci., 226(7) (2011) 1896-1906.
- [2] K.F. Wang, B.L. Wang, Effect of surface energy on the

- [22] M. Karimi, A.R. Shahidi, Comparing magnitudes of surface energy stress in synchronous and asynchronous bending/buckling analysis of slanting double-layer METE nanoplates, *Applied Physics A*, 125(154) (2019) (in press).
- [23] L. C., C.T. W., Elastic moduli of multi-walled carbon nanotubes and the effect of vanderWaals forces, *Composites Science and Technology*, 11 (2003) 1517–1524.
- [24] S. Kitipornchai, X.Q. He, K.M. Liew, Continuum model for the vibration of multilayered graphene sheets, *Physical Review B*, 72 (2005) 075443.
- [25] J. Wang, X. He, S. Kitipornchai, H. Zhang, Geometrical nonlinear free vibration of multi-layered graphene sheets, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 44 (2011) 135401 (135409pp).
- [26] A. Farajpour, A. ArabSolghar, A. Shahidi, postbuckling analysis of multi-layered graphene sheets under non-uniform biaxial compression, *Physica E*, 47 (2013) 197-206.
- [27] M.R. Barati, Magneto-hygro-thermal vibration behavior of elastically coupled nanoplate systems incorporating nonlocal and strain gradient effects, *The Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, (TECHNICAL PAPER), (2017).
- [28] M. Karimi, A.R. Shahidi, S. Ziaei-Rad, Surface layer and nonlocal parameter effects on the in-phase and out-of-phase natural frequencies of a double-layer piezoelectric nanoplate under thermo-electro-mechanical loadings, *Microsystem Technologies*, (TECHNICAL PAPER) (2017).
- [29] E. Jomehzadeh, A.R. Saidi, A study on large amplitude vibration of multilayered graphene sheets, *Computational Materials Science*, 50 (2011) 1043–1051.
- [30] S. Arghavan, A.V. Singh, Effects of van der Waals interactions on the nonlinear vibration of multi-layered graphene sheets, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 45 (2012) 455305 (455308pp).
- [31] L. Shen, H. Shen, C. Zhang, Nonlocal plate model order shear deformable rectangular nanoplates based on the surface stress elasticity theory, *Composites Part B* (at press), (2016).
- [14] Chen Liu, Liao-Liang Ke, Jie Yang, Sritawat Kitipornchai, Yue-Sheng Wang, Buckling and post-buckling analyses of size-dependent piezoelectric nanoplates, *Theoretical & Applied Mechanics Letters*, 6 (2016) 253-267.
- [15] Y.M. Yue, C.Q. Ru, K.Y. Xu, Modified von Kármán equations for elastic nanoplates with surface tension and surface elasticity, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 88 (2017) 67-73.
- [16] R. Gholami, R. Ansari, Y. Gholami, Size-dependent bending, buckling and vibration of higher-order shear deformable magneto-electro-thermo-elastic rectangular nanoplates, *Mater. Res. Express*, (at press), (2017).
- [17] C.-L. Zhang, H.-S. Shen, Temperature-dependent elastic properties of single-walled carbon nanotubes: prediction from molecular dynamics simulation, *Appl. Phys. Lett.* 89 081904, (2006).
- [18] H.-S. Shen, Y.-M. Xu, C.-L. Zhang, Prediction of nonlinear vibration of bilayer graphene sheets in thermal environments via molecular dynamics simulations and nonlocal elasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 267 (2013) 458–470.
- [19] H.-S. Shen, X.-Q. He, D.-Q. Yang, Vibration of thermally postbuckled carbon nanotube-reinforced composite beams resting on elastic foundations, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, (2017).
- [20] W. Lestari, S. Hanagud, Nonlinear vibration of buckled beams: some exact solutions, *International Journal of Solids and Structures*, 38 (2001) 4741—4757.
- [21] M. Karimi, A.R. Shahidi, A general comparison the surface layer degree on the out-of phase and in-phase vibration behavior of a skew double-layer magneto-electro-thermo-elastic nanoplate, *Applied Physics A*, 125(106) (2019) (in press).

- (2010) 085432.
- [38] M. Terrones et.al, Graphene and graphite nanoribbons: Morphology, properties, synthesis, defects and Applications, nano today, 5, (2010) 351-372.
- [39] Xiu-Xi Wang, Jiang Qian ,Mao-Kuang Huang, A boundary integral equation formulation for large amplitude nonlinear vibration of thin elastic plates, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 86 (1991) 73-86.
- [40] S.R. Asemi, M. Mohammadi, A. Farajpour, A study on the nonlinear stability of orthotropic single layered graphene sheet based on nonlocal elasticity theory, Latin American Journal of Solids and Structures, 11 (2014) 1541-1564.
- [41] M. Karimi, A.R. Shahidi, Buckling analysis of skew magneto-electro-thermo-elastic nanoplates considering surface energy layers and utilizing the Galerkin method, Applied Physics A, (2018) 124:681.
- [42] M. Karimi, A.R. Shahidi, H.R. Mirdamadi, Shear vibration and buckling of double-layer orthotropic nanoplates based on RPT resting on elastic foundations by DQM including surface effects, Microsystem Technologies, (TECHNICAL PAPER) (2015).
- for nonlinear vibration of single layer graphene sheets in thermal environments, Comput. Mater. Sci., 48:680 (2010).
- [32] E. Ventsel, T. Krauthammer, Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications, Marcell Dekker Inc, 2001.
- [33] J.N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic plates and Shells: 2nd Edition, Taylor & Francis Group, 2007.
- [34] I.S. Raju, G.V. Rao, K.K. Raju, Effect of longitudinal or inplane deformation and inertia on the large amplitude flexural vibrations of slender beams and thin plates, Journal of Sound and Vibration, 49(3) (1976) 415-422.
- [35] A.H. Nayfeh, S.A. Emam, Exact solution and stability of postbuckling configurations of beams, Nonlinear Dynamics, 54 (2008) 395-408.
- [36] K.-S. Na, J.-H. Kim, Thermal postbuckling investigations of functionally graded plates using 3-D finite element method, Finite Elements in Analysis and Design, 42 (2006) 749-756.
- [37] M. Neek-Amal, F.M. Peeters, Graphene nanoribbons subjected to axial stress, PHYSICAL REVIEW B, 82,