



## تحلیل الکترومکانیک استوانه چرخان ساخته شده از مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی به کمک نظریه تغییرشکل برشی مرتبه بالا: حسگر و عملگر

سید مهدی جباری، سید محمد زمانی نژاد\*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۳۱ شهریور ۱۳۹۵  
بازنگری: ۱۰ دی ۱۳۹۵  
پذیرش: ۳ بهمن ۱۳۹۵  
ارائه آنلاین: ۷ بهمن ۱۳۹۵

### کلمات کلیدی:

تحلیل الکترومکانیکی  
پوسته استوانه‌ای چرخان  
نظریه تغییرشکل برشی  
مواد مدرج تابعی  
مواد پیزوالکتریک

**چکیده:** در این مقاله بر مبنای نظریه تغییرشکل برشی مرتبه بالا، معادلات الکترواستاتیک حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن مدرج تابعی در حالت کلی استخراج شده است. تنش‌ها و پتانسیل الکتریکی برای استوانه با دو سر بسته مقید، به صورت تحلیلی به دست آمده است. این راهکار منجر به تعریف فرمولاسیون جدید برای تحلیل پوسته‌های جدار ضخیم بر پایه نظریه تغییرشکل برشی شده است. معادلات تعادل مکانیکی به روش انرژی به دست آمد و برای یافتن معادلات تعادل الکتریکی از معادلات ماکسول و گاوس استفاده شد. حل معادلات حاکم در حالت عمومی (مستقل از مرتبه نظریه تغییرشکل برشی) به صورت کوپل مکانیکی-الکتریکی و با استفاده از روش بردارهای ویژه ارائه شد. در این بررسی تمامی خواص الکترومکانیک در راستای شعاعی به صورت تابع توانی فرض شده است. به منظور بررسی صحت نتایج، جابه‌جایی شعاعی، پتانسیل الکتریکی و تنش شعاعی استوانه جدار ضخیم همگن با نظریه الاستیسیته مستوی مقایسه و شباهت‌ها نشان داده شده است. به منظور بررسی تأثیر افزایش مرتبه نظریه تغییرشکل برشی بر مقادیر جابه‌جاییها، تنش‌ها و پتانسیل الکتریکی، مقایسه‌های بین نتایج حاصل از نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول و سوم صورت گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که استفاده از تقریب مرتبه بالا برای تحلیل الکترواستاتیک پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی ضروری است. در انتها با بهره‌گیری از روش ارائه شده، تأثیر بارگذاری‌های الکتریکی و مکانیکی بر رفتار تنش‌ها، جابه‌جایی‌ها و توزیع پتانسیل الکتریکی سیلندر بررسی شده است.

### ۱- مقدمه

با گسترش روزافزون علوم و فناوری‌های نوین، شناخت و به کارگیری مواد هدفمند (مواد مدرج تابعی<sup>۱</sup>) و هوشمند<sup>۲</sup> در صنایع روز به روز از اهمیت بیشتری برخوردار می‌شود. از سوی دیگر، نیاز روزافزون به کنترل تغییرشکل اجسام الاستیک در سامانه‌های بسیار پیشرفته همچون سازه‌های فضایی (ماهواره)، هوافضا، رباتیک، میکرو، نانو و بیومکانیک و کاربردهای صنعتی دیگر، موجب توجه محققین به فناوری کنترل سازه‌ها شده است. یکی از برجسته‌ترین ویژگی سازه‌های هوشمند توانایی تعیین وضعیت سازه و کنترل آن در هر لحظه است. یکی از راه‌های کنترل سازه‌ها استفاده از تعدادی حسگر و عملگر است. از جمله مهمترین حسگرها و عملگرها، مواد پیزوالکتریک<sup>۳</sup> هستند که به دلیل کوپل بودن خواص الکتریکی و مکانیکی، به طور گسترده در کنترل پاسخ سازه‌ها مورد استفاده واقع شده‌اند. در سال‌های اخیر استفاده همزمان از مواد هدفمند و هوشمند در سازه‌ها، به عنوان موضوعی جدید مطرح و تحقیقات گسترده‌ای بر روی آن انجام شده است.

اولین مطالعات مدون در زمینه نظری و کاربردهای مواد پیزوالکتریک در کتاب کادی یافت می‌شود [۱]. راولی و لوئیس [۲] با استفاده از خاصیت عملگری

مواد پیزوالکتریک یکی جزء اجزا محدود برای سازه‌های پیزوالکتریک معرفی کردند. وانگ و پارک [۳] مدل‌سازی اجزا محدود سازه‌های پیزوالکتریک را در حالت حسگر و عملگر توسعه دادند. چن و همکاران [۴] حل دقیقی برای پوسته استوانه‌ای ناهمسانگرد با لایه پیزوالکتریک تحت بارگذاری خمشی ارائه نموده‌اند. کاپوریا و همکاران [۵] تحلیل سه بعدی برای پوسته استوانه‌ای برای بارگذاری متقارن محوری با تکیه‌گاه ساده به روش مقادیر ویژه معرفی کردند.

تنش در استوانه‌های ساخته شده از مواد پیزوسرامیکی توسط رجبپاکسه و ژائو [۶] به کمک انتگرال‌های فوریه بررسی شد. ویکو و هاوجیانگ [۷] معادلات اولر حاکم بر پوسته‌های کروی چرخان پیزوالکتریک را حل کردند. چن و همکاران [۸] با استفاده از جداسازی متغیرها حل دقیقی برای میدان الاستوالکتریک پوسته پیزوسرامیک کروی چرخان ساخته شده از مواد مدرج تابعی ارائه کردند. وو و همکاران [۹] بر پایه نظریه تغییرشکل برشی مرتبه یک پوسته‌های ساخته شده از مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی را به کمک توابع سینوسی تحلیل کردند. آن‌ها در پژوهشی دیگر حل دقیق برای پوسته‌های استوانه‌ای در حالت حسگر و عملگر راه‌حل دقیق ارائه کردند [۱۰].

گالیک و هورگان [۱۱] یک روش تحلیلی برای یک سیلندر توخالی پیزوالکتریک را معرفی کردند. وو و سایو [۱۲] حل دقیقی برای پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری خمشی ارائه دادند.

- 1 Functionally Graded Material
- 2 Smart Material
- 3 Piezoelectric Material

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: m\_zamani@yu.ac.ir

تغییرشکل برشی [۳۳-۳۵]، در این تحقیق به بررسی رفتار استوانه چرخان جدار ثابت ساخته شده از مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی تحت بارگذاری مکانیکی و الکتریکی به کمک نظریه تغییرشکل برشی مرتبه بالا پرداخته می‌شود. برای این منظور، ابتدا معادلات حاکم بر استوانه چرخان ساخته شده از مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی، با استفاده از نظریه تغییرشکل برشی عمومی و معادلات ماکسول استخراج شده است. سپس با استفاده از مقادیر ویژه و دستگاه معادلات حاکم حل شده است. برای بررسی صحت حل ارائه شده، نتایج با مطالعات پیشین مقایسه شده است. در انتها نیز رفتار الکترومکانیک دو بعدی استوانه چرخان پیزوالکتریک مورد مطالعه قرار گرفته شده است.

## ۲- فرمول‌بندی مسأله

در نظریه الاستیسیته صفحه‌ای، فرض بر این است که مقاطع مستطیلی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از اعمال فشار و تغییرشکل، همچنان مستطیل و عمود بر محور استوانه باقی بمانند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی در نظر گرفته نمی‌شود. در نظریه کلاسیک پوسته‌های نازک، فرض می‌شود که خطوط راست و عمود بر صفحه میانی، پس از تغییرشکل، همچنان راست و عمود باقی می‌مانند و جابه‌جایی هر نقطه از پوسته، جابه‌جایی صفحه میانی در نظر گرفته می‌شود. در این نظریه نیز از کرنش برشی و تنش برشی چشم‌پوشی می‌شود. در نظریه تغییرشکل برشی، خطوط راست و عمود بر صفحه میانی، پس از تغییرشکل، راست باقی می‌مانند ولی الزاماً عمود نیستند، یعنی کرنش برشی و تنش برشی لحاظ می‌شود.

مطابق شکل ۱، اگر فاصله هر نقطه دلخواه استوانه تا محور تقارن  $r$  شعاع سطح میانی  $R$  و فاصله نقطه مورد نظر از سطح میانی  $z$  باشد، آنگاه داریم:

$$r = R + z \quad (۱)$$

همچنین:

$$-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (۲)$$

با توجه به نظریه تغییرشکل برشی، برای میدان جابه‌جایی متقارن محوری به کمک توابع چندجمله‌ایداریم [۳۶]:

$$\begin{cases} U_z = \sum_{i=0}^{n_{SDT}} u_i z^i \\ U_x = \sum_{i=0}^{n_{SDT}} w_i z^i \end{cases} \quad (۳)$$

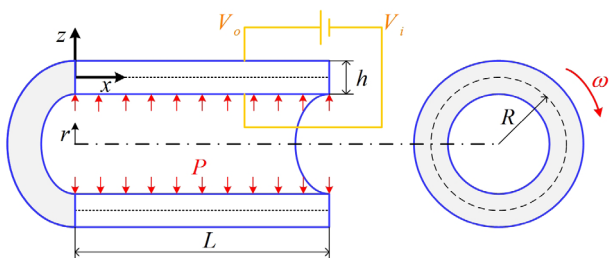


Fig. 1. Geometry and loading conditions of the cylindrical shell

شکل ۱: نحوه بارگذاری و هندسه استوانه مورد مطالعه

شنگ و وانگ [۱۳] اثر کماتش و ارتعاشات را بر استوانه‌های پیزوالکتریک مورد مطالعه قرار دادند. رفتار پیزوالکتریک استوانه‌های توخالی ناهمگن تحت گرادیان دمایی توسط زنکور بررسی شد [۱۴]. علی بیگلو به بررسی تغییرشکل ترموالاستیک ساخته شده از پانل پیزوالکتریک دو سرمفصل پرداخت [۱۵]. قربانپور و همکاران [۱۶] رفتار ترموالکترومکانیک سیلندرها را با تغییرات شعاعی خاص را بررسی کردند. عارفی و رحیمی [۱۷] معادلات عمومی سه بعدی را برای پوسته‌های جدار ضخیم با ضخامت متغیر با مواد ناهمگن دلخواه استخراج کردند. رفتار الکترومکانیک دو بعدی استوانه‌های توخالی ساخته شده از مواد مدرج تابعی توسط فشارکی و همکاران [۱۸] ارائه گردید. تحلیل الکتروالاستیک پوسته استوانه‌ای ساخته شده از مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی تحت فشار داخلی با استفاده از نظریه مرتبه اول تغییرشکل برشی توسط رحیمی و همکاران [۱۹] ارائه شد. آن‌ها برای حل معادلات حاکم از تغییرات محوری جابه‌جایی‌ها صرف‌نظر نمودند. دای و همکاران [۲۰] در حالت کرنش صفحه‌ای، توزیع تنش را در استوانه‌های توخالی ساخته شده از مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی به دست آوردند. الستی و خرسند [۲۱] تحلیل سه بعدی غیرخطی ترموالاستیک سیلندرها را با لایه پیزوالکتریک به روش تربیع دیفرانسیل فوریه نمایش دادند. پاسخ هیگروتروموالاستیک سیلندرها ساخته شده از مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی با تغییرات نمایی خواص در حالت متقارن محوری و کرنش صفحه‌ای توسط زنکور [۲۲] بررسی شد. زمانی نژاد و همکاران بر پایه نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول برای پوسته‌های استوانه‌ای جدار متغیر همگن و ساخته شده از مواد مدرج تابعی با تغییرات محوری خواص به روش چندلایه‌ای کردن پوسته حل الاستیک ارائه دادند [۲۳-۲۵]. آن‌ها با استفاده از این روش رفتار مخروط‌های ساخته شده از مواد همگن و مدرج تابعی را نیز مورد بررسی قرار دادند [۲۶-۲۸]. حیدری و همکاران [۲۹] آنالیز تنش را برای پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری مگنتوتروموالاستیک انجام دادند. تحلیل خمش ترمومگنتوالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای توسط دای و جانگ [۳۰] ارائه گردید. عطریان و همکاران [۳۱] به کمک نظریه الاستیسیته رفتار ترموالکترومکانیک سیلندرها را توخالی پیزوالکتریک تحت بارگذاری نامتقارن محوری را تحلیل نمودند. تنش‌های حرارتی یک بعدی در استوانه‌های توخالی نامتقارن محوری ساخته شده از مواد مدرج تابعی با لایه‌های داخلی و خارجی پیزوالکتریک توسط جباری و اقدام [۳۲] محاسبه شد. جباری و همکاران [۳۳-۳۵] به کمک نظریه مرتبه بالا تغییرشکل برشی، روشی نوین برای حل ترموالاستیک پوسته‌های جدار متغیر معرفی کردند. آن‌ها دریافتند که استفاده از مرتبه بالای تغییرشکل برشی در تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های جدار متغیر ضروری است.

همانطور که در مطالعات پیشین مشاهده شد عموم فعالیت‌های انجام شده در خصوص استوانه‌های پیزوالکتریک با استفاده از نظریه الاستیسیته می‌باشد و فقط در چند نمونه از نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول استفاده شده است. با توجه به ضعف‌های شناخته شده در تقریب‌های مرتبه پایین

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{1}{R+z} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \end{cases} \quad (۸)$$

شرایط مرزی برای پتانسیل الکتریکی در حالت کلی، در مرزهای شعاعی استوانه به شکل زیر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{cases} \phi|_{z=-\frac{h}{2}} = V_i \\ \phi|_{z=+\frac{h}{2}} = V_o \end{cases} \quad (۹)$$

برای تابع پتانسیل الکتریکی فرندانس و پوژت [۳۸] رابطه زیر را پیشنهاد داده‌اند:

$$\phi = \left( \frac{V_o - V_i}{h} \right) z - \left( \frac{V_o + V_i}{2} \right) + \Omega(z) \psi(x) \quad (۱۰)$$

اگر جهت قطبی‌سازی در راستای شعاع استوانه باشد، می‌توان فرض نمود:

$$\Omega(z) = z^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \quad (۱۱)$$

لذا با توجه به رابطه (۸) و روابط فوق برای میدان الکتریکی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} E_x = -\left( \frac{4z^2 - h^2}{4} \right) \frac{d\psi}{dx} \\ E_z = -2z\psi \end{cases} \quad (۱۲)$$

با استفاده از نظریه پوسته‌ها و تعادل می‌توان رابطه نیروها و گشتاورهای داخلی اجزا با تنش‌ها و جابه‌جایی الکتریکی را به دست آورد:

$$\begin{cases} N_x^{(i)} \\ N_\theta^{(i)} \\ N_z^{(i)} \\ N_{xz}^{(i)} \end{cases} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{cases} \sigma_x (R+z) \\ R \sigma_\theta \\ \sigma_z (R+z) \\ \tau_{xz} (R+z) \end{cases} \frac{z^i}{R} dz, (i = 0..n_{SDT}) \quad (۱۳)$$

برای به دست آوردن معادلات تعادل به روش نظریه تغییرشکل برشی از روش انرژی استفاده می‌شود. در این روش تغییرات انرژی کل سامانه بنا بر اصل پایستگی انرژی صفر فرض می‌شود ( $\delta U = \delta W$ ). تغییرات انرژی کرنشی برای یک استوانه با شرایط متقارن محوری از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} - D_x \delta E_x - D_z \delta E_z) dz d\theta dx \quad (۱۴)$$

و تابع تغییرات کار خارجی عبارتست از:

که در آن  $U_x$  جابه‌جایی در راستای شعاع و  $U_z$  جابه‌جایی در راستای ضخامت و  $n_{SDT}$  مرتبه نظریه تغییرشکل برشی می‌باشد.  $u_i$  و  $w_i$  توابع مجهول برحسب مکان محوری استوانه ( $x$ ) است. با استفاده از روابط سینماتیک مؤلفه‌های کرنش برای جابه‌جایی‌های کوچک از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} = \sum_{i=0}^{n_{SDT}} \frac{dw_i}{dx} z^i \\ \varepsilon_\theta = \frac{U_z}{r} = \frac{1}{R+z} \sum_{i=0}^{n_{SDT}} u_i z^i \\ \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} = \sum_{i=0}^{n_{SDT}} i u_i z^{i-1} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} = \sum_{i=0}^{n_{SDT}} i w_i z^{i-1} + \sum_{i=0}^{n_{SDT}} \frac{du_i}{dx} z^i \end{cases} \quad (۴)$$

در صورتی که جهت دوقطبی بودن استوانه در راستای محور شعاعی بوده و ماده پیزوالکتریک، ایزوتروپیک عرضی باشد، معادلات رفتاری از رابطه زیر به دست می‌آید [۳۷]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \sigma_x \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} & 0 \\ e_{12} & 0 \\ e_{13} & 0 \\ 0 & e_{35} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_z \\ E_x \end{Bmatrix} \quad (۵)$$

$$\begin{Bmatrix} D_z \\ D_\theta \\ D_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{35} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \xi_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_z \\ E_x \end{Bmatrix} \quad (۶)$$

که در آن  $C_{ij}$  ماتریس ضرایب الاستیک،  $e_{ij}$  ماتریس ضرایب پیزوالکتریک-تنش و  $\xi_{ij}^0$  ماتریس ضرایب نفوذپذیری ماده پیزوالکتریک در کرنش ثابت می‌باشد. لازم به ذکر است در حالت عمومی تمامی خواص به صورت تابع شعاعی زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$C_{ij} = C_{ij}^0 \left( \frac{R+z}{R+h} \right)^l, e_{ij} = e_{ij}^0 \left( \frac{R+z}{R+h} \right)^l, \xi_{ij} = \xi_{ij}^0 \left( \frac{R+z}{R+h} \right)^l \quad (۷)$$

که در آن  $C_{ij}^0$  ماتریس ضرایب الاستیک،  $\rho^0$  مقدار چگالی،  $e_{ij}^0$  ماتریس ضرایب پیزوالکتریک-تنش،  $\xi_{ij}^0$  ضرایب نفوذپذیری ماده پیزوالکتریک در سطح خارجی استوانه می‌باشد.  $l$  ثابت ناهمگنی الاستیک، پیزوالکتریک و دی‌الکتریک و  $g$  ثابت ناهمگنی چگالی می‌باشد.  $E_i$  بردار میدان الکتریکی است که به صورت تابعی از پتانسیل الکتریکی  $\phi$  به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$e_{35}^0 \frac{(R+z)^l}{(R+h)^l} z^j \frac{d^2}{dx^2} \Big) (R+z) dz \quad i = 2n_{SDT} + 1 \quad (22)$$

$$I_{ij} = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( C_{33}^0 \frac{(R+z)^{l+1}}{(R+h)^l} z^{i+j} \frac{d^2}{dx^2} - ij C_{55}^0 \frac{(R+z)^{l+1}}{(R+h)^l} z^{i+j-2} \right) dz \quad (23)$$

$$0 \leq i \leq n_{SDT}$$

$$I_{ij} = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( - \left( \frac{(i - n_{SDT} - 1) C_{13}^0 (R+z)^{l+1} z^{i-n_{SDT}+j-2}}{(R+h)^l} \right) \frac{d}{dx} \right) dz \quad (24)$$

$$+ \frac{C_{23}^0 (R+z)^l z^{i+j-n_{SDT}-1}}{(R+h)^l} \frac{d}{dx} \Big) dz \quad n_{SDT} < i \leq 2n_{SDT}$$

$$I_{ij} = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( (l+1) e_{13}^0 \frac{(R+z)^{l-1}}{(R+h)^l} z^j \frac{d}{dx} \right) dz \quad (25)$$

$$+ j e_{13}^0 \frac{(R+z)^l}{(R+h)^l} z^{j-1} \frac{d}{dx} \Big) (R+z) dz \quad i = 2n_{SDT} + 1$$

$$J_i = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( -i e_{35}^0 \frac{(R+z)^{l+1}}{(R+h)^l} \Omega z^{i-1} \frac{d}{dx} \right) dz \quad 0 \leq i \leq n_{SDT} \quad (26)$$

$$J_i = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( e_{35}^0 \frac{(R+z)^{l+1}}{(R+h)^l} \Omega z^{i-n_{SDT}-1} \frac{d^2}{dx^2} - e_{12}^0 \frac{(R+z)^{l+1}}{(R+h)^l} \frac{d\Omega}{dz} z^{i-n_{SDT}-1} \right) dz \quad (27)$$

$$- (i - n_{SDT} - 1) e_{11}^0 \frac{(R+z)^{l+1}}{(R+h)^l} \frac{d\Omega}{dz} z^{i-n_{SDT}-2} \Big) dz$$

$$n_{SDT} < i \leq 2n_{SDT}$$

$$J_i = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( - \frac{\xi_{11}^0 (R+z)^l}{(R+h)^l} \left( \frac{(l+1) d\Omega}{(R+z) dz} + \frac{d^2 \Omega}{dz^2} \right) \right) dz \quad (28)$$

$$\left( - \xi_{33}^0 \frac{(R+z)^{l+1}}{(R+h)^l} \Omega \frac{d^2}{dx^2} \right) \Big) (R+z) dz \quad i = 2n_{SDT} + 1$$

$$F_i = 0 \quad 0 \leq i \leq n_{SDT}$$

$$F_i = \left( - (i - n_{SDT} - 1) e_{11}^0 \frac{(R+z)^{l+1}}{(R+h)^l} z^{i+n_{SDT}-2} - e_{12}^0 \frac{(R+z)^l}{(R+h)^l} z^{i-n_{SDT}-1} \right) \left( \frac{V_o - V_i}{h} \right) \quad (29)$$

$$- P \left( R - \frac{h}{2} \right) \left( - \frac{h}{2} \right)^{i-n_{SDT}-1} - \rho^0 \omega^2 \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(R+z)^{g+2}}{(R+h)^g} z^{i-n_{SDT}-1} dz$$

$$n_{SDT} < i \leq 2n_{SDT}$$

$$\delta W =$$

$$- \int_0^{2\pi L} \int_0^{2\pi L} P \delta U_z \left( R - \frac{h}{2} \right) dx d\theta - \int_0^{2\pi L} \int_{-h/2}^{h/2} \rho \omega^2 (R+z)^2 \delta U_z dz dx d\theta \quad (15)$$

در رابطه فوق  $\rho$  چگالی،  $\omega$  سرعت زاویه‌ای و  $P$  فشار در سطح داخلی استوانه می‌باشد. با جایگذاری روابط (۱۴) و (۱۵) در رابطه کمینه انرژی پتانسیل معادلات تعادل به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d}{dx} (RN_x^{(i)}) - iRN_{xz}^{(i-1)} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{d}{dx} (RN_{xz}^{(i)}) - iRN_z^{(i-1)} - N_{\theta}^{(i)} =$$

$$- \int_{-h/2}^{h/2} \rho \omega^2 (R+z)^2 z^i dz + P \left( R - \frac{h}{2} \right) \left( - \frac{h}{2} \right)^i \quad (17)$$

معادلات فوق، دستگاه معادلات تعادل مکانیکی در پوسته‌های جدار ضخیم می‌باشند که با توجه به مرتبه نظریه تعداد آن‌ها مشخص می‌شود. برای به دست آوردن معادله تعادل الکتریکی، با توجه به معادلات ماکسول و قانون گاوس داریم [۳۹]:

$$\int_0^{2\pi} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{1}{R+z} \frac{\partial}{\partial z} ((R+z)D_z) \right) (R+z) dz d\theta dx = 0 \quad (18)$$

با جایگذاری روابط (۴) تا (۶) در رابطه (۱۳) و سپس قراردادن در روابط (۱۷) و (۱۸) می‌توان معادلات تعادل را براساس مؤلفه‌های جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محوری و جابه‌جایی الکتریکی را به فرم زیر بازنویسی نماییم:

$$L_{ij} u_j + I_{ij} w_j + J_i \psi = F_i \quad (19)$$

که در آن  $0 \leq i \leq 2n_{SDT} + 1$  و  $0 \leq j \leq n_{SDT}$  می‌باشد و  $L_{ij}$ ، ماتریس‌های ضرایب جابه‌جایی مکانیکی،  $J_i$  بردار ضرایب جابه‌جایی الکتریکی و  $F_i$  بردار کار خارجی می‌باشد که از روابط زیر به دست می‌آید:

$$L_{ij} = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( -i C_{55}^0 z^{i+j-1} \frac{(R+z)^{l+1}}{(R+h)^l} \frac{d}{dx} \right) dz \quad 0 \leq i \leq n_{SDT} \quad (20)$$

$$L_{ij} = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( - (i - n_{SDT} - 1) j C_{11}^0 \frac{(R+z)^{l+1}}{(R+h)^l} z^{i-n_{SDT}+j-3} \right) dz$$

$$C_{55}^0 \frac{(R+z)^{l+1}}{(R+h)^l} z^{i+j-n_{SDT}-1} \frac{d^2}{dx^2}$$

$$- (i + j - n_{SDT} - 1) C_{12}^0 \frac{(R+z)^{l+1}}{(R+h)^l} z^{i+j-n_{SDT}-2}$$

$$- C_{22}^0 \frac{(R+z)^{l-1}}{(R+h)^l} z^{i+j-n_{SDT}-1} \Big) dz \quad n_{SDT} < i \leq 2n_{SDT} \quad (21)$$

$$L_{ij} = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( + \frac{e_{12}^0}{(R+h)^l} (l z^j (R+z)^{l-1} + j z^{j-1} (R+z)^l) \right)$$

$$+ \frac{e_{11}^0 j}{(R+h)^l} \left( (l+1) z^{j-1} (R+z)^{l-1} + (j-1) z^{j-2} (R+z)^l \right)$$

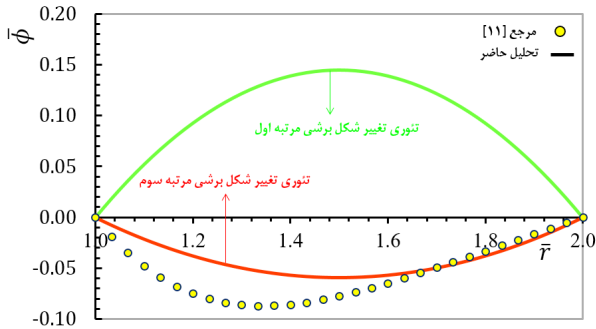


Fig. 2. The effect of the order of approximation in the shear deformation theory on normalized electric potential along the radial direction. (sensor)  
شکل ۲: بررسی اثر تقریب نظریه تغییر شکل برشی بر پتانسیل الکتریکی بی بعد در جهت شعاع استوانه (حسگر)

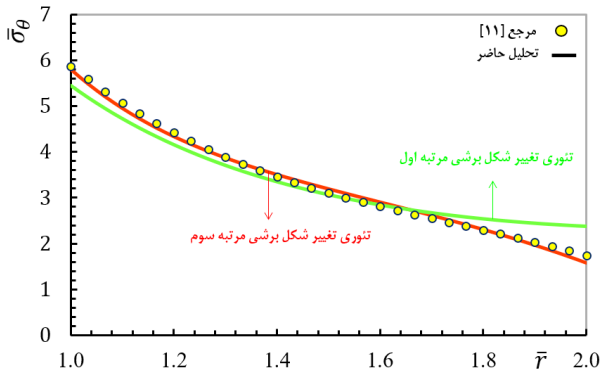


Fig. 3. The effect of the order of approximation in the shear deformation theory on normalized circumferential stress along the radial direction. (sensor)  
شکل ۳: بررسی اثر تقریب نظریه تغییر شکل برشی بر تنش محیطی بی بعد در جهت شعاع استوانه (حسگر)

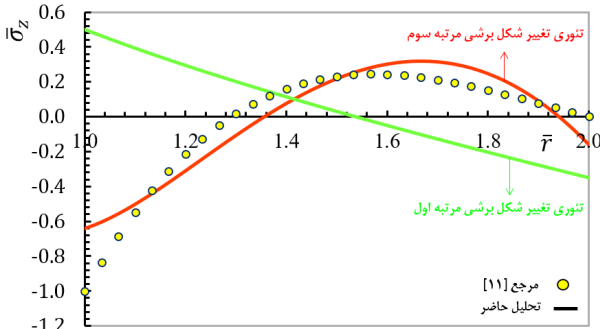


Fig. 4. The effect of the order of approximation in the shear deformation theory on normalized radial stress along the radial direction. (sensor)  
شکل ۴: بررسی اثر تقریب نظریه تغییر شکل برشی بر تنش شعاعی بی بعد در جهت شعاع استوانه (حسگر)

استوانه مورد مطالعه دارای مشخصات هندسی  $R/h = 1$  و  $L/R = 1$  بوده و با سرعت زاویه‌ای زیر در حال دوران است:

$$\omega = \sqrt{\frac{C_{33}^0}{\rho^0 R^2}} \quad (36)$$

برای بررسی رفتار استوانه در شرایط حسگر و عملگر، شرایط مرزی زیر

$$-\rho^0 \omega^2 \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(R+z)^{g+2}}{(R+h)^g} z^{i-n_{SDT}-1} dz \quad n_{SDT} < i \leq 2n_{SDT} \quad (30)$$

$$F_i = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( -(l+1) \xi_{11}^0 \frac{(R+z)^{l-1}}{(R+h)^l} \left( \frac{V_o - V_i}{h} \right) \right) (R+z) dz \quad (31)$$

$$i = 2n_{SDT} + 1$$

این معادلات در واقع دستگاه معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت می‌باشد. دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی ناهمگن با ضرایب ثابت دارای حل دقیق به روش بردارهای ویژه به شکل زیر می‌باشد:

$$\{y\}_h = \sum_{\beta=1}^{2(2n_{SDT}+3)} C_{\beta} \{\eta\}_{\beta} e^{\lambda_{\beta} x} + \{K\} \quad (32)$$

که در آن:

$$\{y\} = \{u_0 \ u_1 \ \dots \ u_{n_{SDT}} \ w_0 \ w_1 \ \dots \ w_{n_{SDT}} \ \psi\}^T \quad (33)$$

$C_{\beta}$  ثابت‌های مجهول،  $\lambda_{\beta}$  مقادیر ویژه،  $\{\eta\}_{\beta}$  بردارهای ویژه و  $\{K\}$  حل خصوصی می‌باشد. اگر فرض شود استوانه در دو انتها کاملاً بسته و اجازه تحرک ندارد.

$$\begin{cases} \{u_i\} \\ \{w_i\} \end{cases}_{x=0} = \begin{cases} \{u_i\} \\ \{w_i\} \end{cases}_{x=L} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \\ i = 0..n_{SDT} \quad (34)$$

و پتانسیل الکتریکی در دو انتهای استوانه صفر باشد

$$\phi|_{x=0} = \phi|_{x=L} = 0 \quad (35)$$

بدین ترتیب با جایگذاری رابطه (۳۲) در روابط (۳) و (۱۰) و سپس قرار دادن آن در روابط (۳۴) و (۳۵) ثابت‌های مجهول به دست می‌آیند.

### ۳- بررسی نتایج

برای مقایسه و بررسی نتایج روش ارائه شده، یک استوانه جدار ضخیم ساخته شده از تیتانات زیرکونات سرب مطابق جدول ۱ که در [۱۱] مورد مطالعه قرار گرفته است، فرض می‌شود.

جدول ۱: مشخصات مواد پیزوالکتریک در استوانه [۱۱]  
Table 1. Material properties of the piezoelectric cylinder

مقدار	نماد	مقدار	نماد
$1/15 \text{ C/m}^2$	$e_{11}^0$	$115 \text{ GPa}$	$C_{11}^0$
$-2/5 \text{ C/m}^2$	$e_{12}^0$	$6/73 \text{ GPa}$	$C_{12}^0$
$-2/5 \text{ C/m}^2$	$e_{13}^0$	$6/73 \text{ GPa}$	$C_{13}^0$
$7/12 \text{ C/m}^2$	$e_{15}^0$	$5/128 \text{ GPa}$	$C_{22}^0$
$7/12 \text{ C/m}^2$	$e_{26}^0$	$4/77 \text{ GPa}$	$C_{23}^0$
$62/5 \mu\text{F/m}$	$\xi_{11}^0$	$5/128 \text{ GPa}$	$C_{33}^0$
$62/5 \mu\text{F/m}$	$\xi_{22}^0$	$\text{kg/m}^3 \ 5684$	$\rho^0$

برای سه حالت مختلف اعمال شده است:

حالت (۱) - حسگر:

$$\sigma_r|_{z=-h/2} = -C_{33}^0 \quad \sigma_r|_{z=h/2} = 0 \quad \phi|_{z=-h/2} = 0 \quad \phi|_{z=h/2} = 0 \quad (37)$$

حالت (۲) - عملگر:

$$\sigma_r|_{z=-h/2} = 0 \quad \sigma_r|_{z=h/2} = 0 \quad \phi|_{z=-h/2} = RC_{33}^0/e_{11}^0 \quad \phi|_{z=h/2} = 0 \quad (38)$$

حالت (۳) - حسگر و عملگر:

$$\sigma_r|_{z=-h/2} = -C_{33}^0 \quad \sigma_r|_{z=h/2} = 0 \quad \phi|_{z=-h/2} = RC_{33}^0/e_{11}^0 \quad \phi|_{z=h/2} = 0 \quad (39)$$

برای مستقل از داده‌های ورودی بودن نتایج، پارامترهای رفتاری استوانه به صورت بی‌بعد با توجه به روابط زیر گزارش شده است:

$$\bar{\sigma}_i = \frac{\sigma_i}{C_{33}^0} \quad \bar{\phi} = \frac{e_{11}^0}{C_{33}^0} \phi \quad \bar{U}_i = \frac{U_i}{R} \quad (40)$$

با توجه به فرضیات و شرایط مرزی یاد شده، در ادامه به بررسی نتایج حاصل پرداخته می‌شود.

همانطور که بیان شد، نظریه تغییرشکل برشی براساس تقریب میدان جابه‌جایی در راستای شعاع استوانه به صورت تابع چندجمله‌ای پایه‌گذاری شده است؛ بنابراین انتخاب مرتبه تقریب مناسب یکی از موارد مهم در این نظریه است و لازم است در اولین گام مرتبه تقریب به

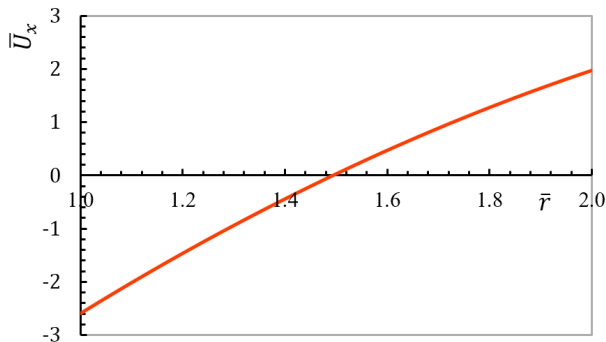


Fig. 9. Response of the normalized axial displacement along the radial direction of the cylindrical piezoelectric actuator.

شکل ۹: پاسخ جابه‌جایی محوری بی‌بعد استوانه در جهت شعاع برای حالت عملگر پیزوالکتریک

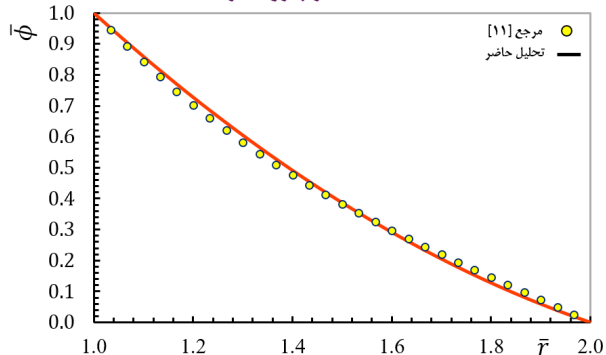


Fig. 10. Response of the normalized electric potential along the radial direction of the cylinder subjected to the mechanical and electrical loading.

شکل ۱۰: پاسخ پتانسیل الکتریکی بی‌بعد استوانه در جهت شعاع تحت بارگذاری الکتریکی و مکانیکی همزمان

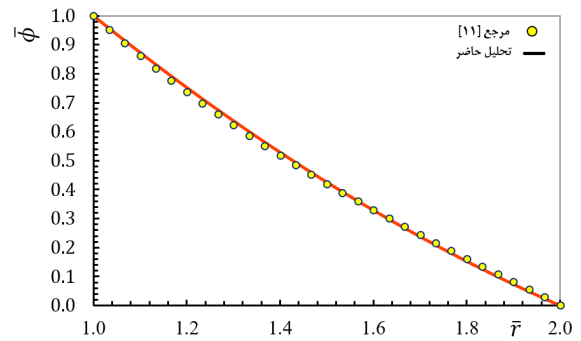


Fig. 5. Response of the normalized electric potential along the radial direction of the cylindrical piezoelectric actuator.

شکل ۵: پاسخ پتانسیل الکتریکی بی‌بعد استوانه در جهت شعاع برای حالت عملگر پیزوالکتریک

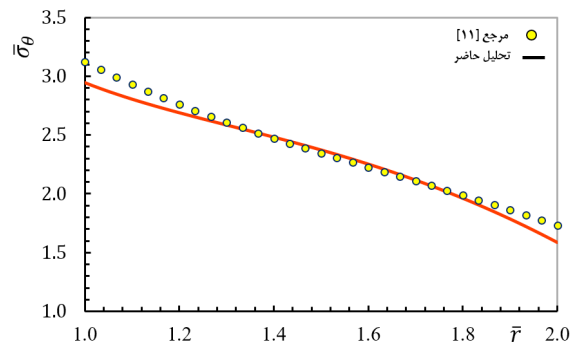


Fig. 6. Response of the normalized circumferential stress along the radial direction of the cylindrical piezoelectric actuator.

شکل ۶: پاسخ تنش محیطی بی‌بعد استوانه در جهت شعاع برای حالت عملگر پیزوالکتریک

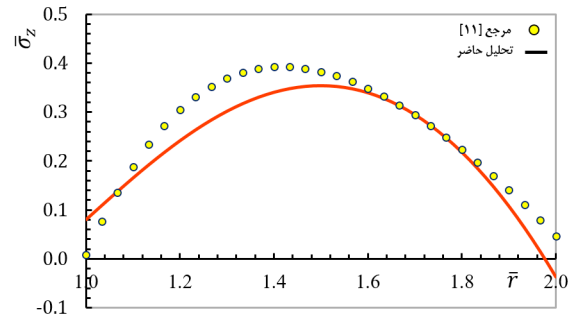


Fig. 7. Response of the normalized radial stress along the radial direction of the cylindrical piezoelectric actuator.

شکل ۷: پاسخ تنش شعاعی بی‌بعد استوانه در جهت شعاع برای حالت عملگر پیزوالکتریک

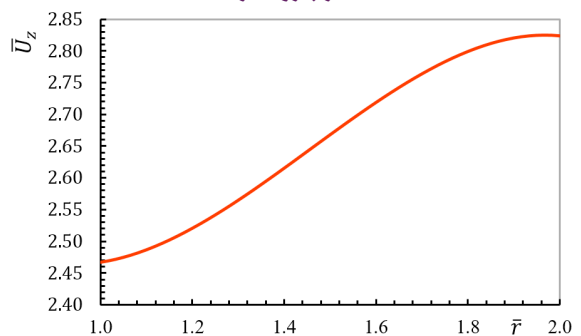


Fig. 8. Response of the normalized radial displacement along the radial direction of the cylindrical piezoelectric actuator.

شکل ۸: پاسخ جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد استوانه در جهت شعاع برای حالت عملگر پیزوالکتریک



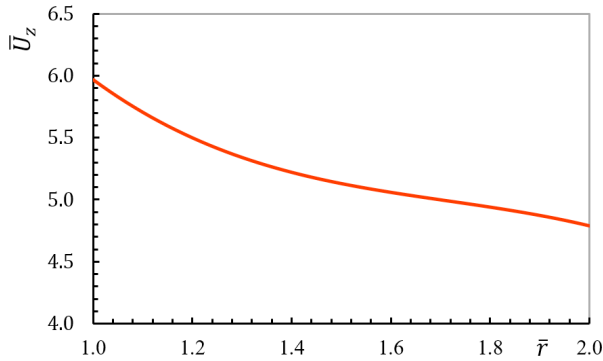


Fig. 13. Response of the normalized radial displacement along the radial direction of the cylinder subjected to the mechanical and electrical loading.

شکل ۱۳: پاسخ جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد استوانه در جهت شعاع تحت بارگذاری الکتریکی و مکانیکی همزمان

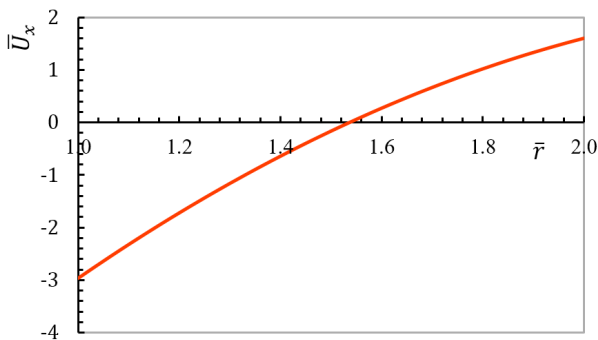


Fig. 14. Response of the normalized axial displacement along the radial direction of the cylinder subjected to the mechanical and electrical loading.

شکل ۱۴: پاسخ جابه‌جایی محوری بی‌بعد استوانه در جهت شعاع تحت بارگذاری الکتریکی و مکانیکی همزمان

استوانه به صورت صعودی افزایش می‌یابد. شیب تغییرات در لایه داخلی و خارجی به سمت صفر میل می‌کند. همچنین جابه‌جایی محوری در لایه میانی استوانه برابر صفر است. در شکل‌های ۱۰ تا ۱۲، پاسخ استوانه جدار ضخیم به بارهای مکانیکی و الکتریکی همزمان بررسی شده است. با توجه به شکل‌های ۱۰ تا ۱۲ و نتایج ارائه شده در دو حالت عملگر و حسگر، ملاحظه می‌گردد که اصل جمع آثار در خصوص استوانه‌های پیزوالکتریک صادق نمی‌باشد. همچنین تنش محیطی در لایه داخلی دارای مقدار بیشینه می‌باشد.

در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ مشاهده می‌شود جابه‌جایی محوری در لایه میانی استوانه برابر صفر است و جابه‌جایی شعاعی در راستای شعاع به صورت نزولی تغییر می‌کند.

#### ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی رفتار الکترومکانیک استوانه جدار ضخیم ساخته شده از مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی ایزوتروپ عرضی پرداخته شد. منحنی تغییرات خواص، غیرخطی و به صورت تابع تابع توانی در راستای شعاع فرض

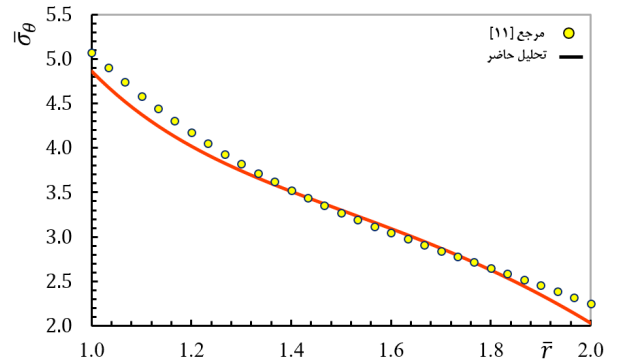


Fig. 11. Response of the normalized circumferential stress along the radial direction of the cylinder subjected to the mechanical and electrical loading.

شکل ۱۱: پاسخ تنش محیطی بی‌بعد استوانه در جهت شعاع تحت بارگذاری الکتریکی و مکانیکی همزمان

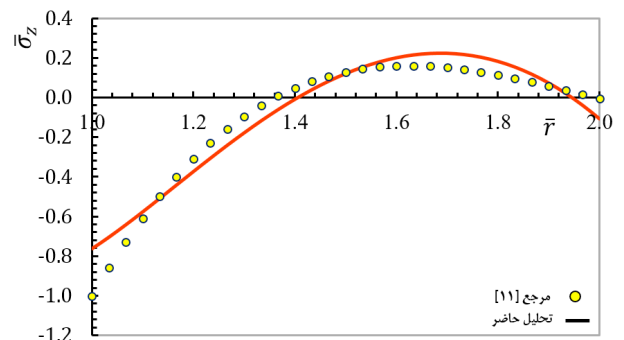


Fig. 12. Response of the normalized radial stress along the radial direction of the cylinder subjected to the mechanical and electrical loading.

شکل ۱۲: پاسخ تنش شعاعی بی‌بعد استوانه در جهت شعاع تحت بارگذاری الکتریکی و مکانیکی همزمان

کار گرفته شده مورد بررسی قرار گیرد. برای این منظور در شکل‌های ۲ تا ۴ به بررسی اثر تقریب بر روی نتایج پرداخته شده است: در شکل‌های ۲ تا ۴ مشاهده می‌شود که نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول در محاسبه میدان الکتریکی و تنش‌ها خطای بسیار زیادی دارد؛ لذا استفاده از مرتبه‌های بالا در تحلیل الکترومکانیک استوانه‌های چرخان ضروری به نظر می‌رسد. همچنین مشاهده می‌شود که نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول علاوه بر مقدار عددی، در شناخت رفتار توابع پتانسیل الکتریکی و تنش شعاعی نیز ناتوان است. با توجه به این موضوع، در شکل‌های بعدی به بررسی رفتار استوانه جدار ضخیم پیزوالکتریک در حالت عملگر با استفاده از نظریه مرتبه سوم تغییرشکل برشی پرداخته شده است:

در شکل ۵ مشاهده می‌شود که پتانسیل بی‌بعد الکتریکی در لایه داخلی برابر یک بوده و با پروفیل محدب در راستای شعاع، به سمت صفر میل می‌کند. در شکل ۶ مشاهده می‌شود که تنش محیطی در لایه داخلی استوانه بیشینه است. با توجه به شکل ۷ می‌توان نتیجه گرفت که تنش شعاعی در لایه‌های میانی استوانه دارای بیشترین مقدار می‌باشد. نمودار تغییرات جابه‌جایی در شکل‌های ۸ و ۹ رسم شده است:

مشاهده می‌شود که جابه‌جایی شعاعی و محوری در جهت شعاع

- solids and structures*, 38(38-39) (2001) 7015-7027.
- [9] X.-H. Wu, C. Chen, Y.-P. Shen, X.-G. Tian, A high order theory for functionally graded piezoelectric shells, *International Journal of Solids and Structures*, 39(20) (2002) 5325-5344.
- [10] X.-H. Wu, Y.-P. Shen, C. Chen, An exact solution for functionally graded piezothermoelastic cylindrical shell as sensors or actuators, *Materials Letters*, 57(22-23) (2003) 3532-3542.
- [11] D. Galic, C. Horgan, The stress response of radially polarized rotating piezoelectric cylinders, *Journal of applied mechanics*, 70(3) (2003) 426-435.
- [12] C.-P. Wu, Y.-S. Syu, Exact solutions of functionally graded piezoelectric shells under cylindrical bending, *International Journal of Solids and Structures*, 44(20) (2007) 6450-6472.
- [13] G. Sheng, X. Wang, Thermoelastic vibration and buckling analysis of functionally graded piezoelectric cylindrical shells, *Applied Mathematical Modelling*, 34(9) (2010) 2630-2643.
- [14] A.M. Zenkour, Piezoelectric behavior of an inhomogeneous hollow cylinder with thermal gradient, *International Journal of Thermophysics*, 33(7) (2012) 1288-1301.
- [15] A. Alibeigloo, Thermoelastic solution for static deformations of functionally graded cylindrical shell bonded to thin piezoelectric layers, *Composite Structures*, 93(2) (2011) 961-972.
- [16] A. Ghorbanpour, A. Loghman, A. Abdollahitaheri, V. Atabakhshian, Electrothermomechanical behavior of a radially polarized rotating functionally graded piezoelectric cylinder, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 6(6) (2011) 869-882.
- [17] M. Arefi, G. Rahimi, Three-dimensional multi-field equations of a functionally graded piezoelectric thick shell with variable thickness, curvature and arbitrary nonhomogeneity, *Acta Mechanica*, 223(1) (2012) 63-79.
- [18] J.J. Fesharaki, V.J. Fesharaki, M. Yazdipoor, B. Razavian, Two-dimensional solution for electro-mechanical behavior of functionally graded piezoelectric hollow cylinder, *Applied Mathematical Modelling*, 36(11) (2012) 5521-5533.
- [19] G. Rahimi, M. Arefi, M. Khoshgoftar, Electro elastic analysis of a pressurized thick-walled functionally graded piezoelectric cylinder using the first order shear deformation theory and energy method, *Mechanics*, 18(3) (2012) 292-300.
- [20] H.-L. Dai, T. Dai, H.-Y. Zheng, Stresses distributions in a rotating functionally graded piezoelectric hollow

شد. معادلات ترموالکترواستیک حاکم بر پوسته‌های جدار ضخیم ناهمگن در حالت عمومی و با استفاده از نظریه مرتبه بالا تغییرشکل برشی استخراج گردید. بارگذاری مکانیکی به صورت سرعت زاویه‌ای ثابت در راستای محور دوران می‌باشد. اختلاف پتانسیل در جهت شعاع به استوانه اعمال شد. استوانه در جهت شعاع قطبی و در تقریب تابع پتانسیل الکتریکی شرایط مرزی شعاع داخلی و خارجی اعمال شد. معادلات تعادل مکانیکی به روش انرژی به دست آمد و برای یافتن معادلات تعادل الکتریکی از معادلات ماکسول و قانون گاوس استفاده شد. حل معادلات حاکم در حالت عمومی (مستقل از مرتبه نظریه تغییرشکل برشی) به صورت کوپل مکانیکی-الکتریکی و با استفاده از روش بردارهای ویژه ارائه شد.

نتایج نشان می‌دهد که برای تحلیل رفتار الکترو-مکانیکی استوانه جدار ضخیم ساخته شده از مواد پیزوالکتریک مدرج تابعی، استفاده از نظریه تغییرشکل مرتبه بالا ضروری است. در تحلیل استوانه جدار ضخیم پیزوالکتریک، اصل جمع آثار صادق نبوده و باید اثرات بارگذاری به صورت همزمان بررسی و نتایج گزارش شود.

#### مراجع

- [1] W.G. Cady, Piezoelectricity: Volume Two: An Introduction to the Theory and Applications of Electromechanical Phenomena in Crystals, *Courier Dover Publications*, 2018.
- [2] E.F. Crawley, J. De Luis, Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures, *AIAA journal*, 25(10) (1987) 1373-1385.
- [3] W.-S. Hwang, H.C. Park, Finite element modeling of piezoelectric sensors and actuators, *AIAA journal*, 31(5) (1993) 930-937.
- [4] C.-Q. Chen, Y.-P. Shen, X.-M. Wang, Exact solution of orthotropic cylindrical shell with piezoelectric layers under cylindrical bending, *International Journal of Solids and Structures*, 33(30) (1996) 4481-4494.
- [5] S. Kapuria, S. Sengupta, P. Dumir, Three-dimensional solution for simply-supported piezoelectric cylindrical shell for axisymmetric load, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 140(1-2) (1997) 139-155.
- [6] R. Rajapakse, Y. Zhou, Stress analysis of piezoceramic cylinders, *Smart materials and structures*, 6(2) (1997) 169.
- [7] C. Weiqiu, D. Haojiang, Exact static analysis of a rotating piezoelectric spherical shell, *Acta Mechanica Sinica*, 14(3) (1998) 257-265.
- [8] W. Chen, H. Ding, J. Liang, The exact elasto-electric field of a rotating piezoceramic spherical shell with a functionally graded property, *International journal of*



- [30] H.-L. Dai, H.-J. Jiang, Magneto-thermoelastic bending analysis of a functionally graded material cylindrical shell, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 22(4) (2015) 281-289.
- [31] A. Atrian, J.J. Fesharaki, S. Nourbakhsh, Thermo-electromechanical behavior of functionally graded piezoelectric hollow cylinder under non-axisymmetric loads, *Applied Mathematics and Mechanics*, 36(7) (2015) 939-954.
- [32] M. Jabbari, M. Aghdam, Asymmetric thermal stresses of hollow FGM cylinders with piezoelectric internal and external layers, (2015).
- [33] M.Z. Nejad, M. Jabbari, M. Ghannad, A general disk form formulation for thermo-elastic analysis of functionally graded thick shells of revolution with arbitrary curvature and variable thickness, *Acta Mechanica*, 228(1) (2017) 215-231.
- [34] M. Jabbari, M.Z. Nejad, M. Ghannad, Thermo-elastic analysis of axially functionally graded rotating thick cylindrical pressure vessels with variable thickness under mechanical loading, *International journal of engineering science*, 96 (2015) 1-18.
- [35] M. Jabbari, M.Z. Nejad, M. Ghannad, Thermo-elastic analysis of axially functionally graded rotating thick truncated conical shells with varying thickness, *Composites Part B: Engineering*, 96 (2016) 20-34.
- [36] Ghannad M, Rahimi, G H, Esmaeilzadeh Khadem S. General Solution of Shear Deformation of Axisymmetric Functionally Graded Thick Cylindrical Shells. *Modares Mechanical Engineering*. 2011; 10 (4) :13-26. (in Persian)
- [37] V.Z. Parton, Fracture mechanics of piezoelectric materials, *Acta Astronautica*, 3(9-10) (1976) 671-683.
- [38] A. Fernandes, J. Pouget, Structural response of composite plates equipped with piezoelectric actuators, *Computers & structures*, 84(22-23) (2006) 1459-1470.
- [39] S.S. Vel, B.P. Baillargeon, Analysis of static deformation, vibration and active damping of cylindrical composite shells with piezoelectric shear actuators, *Journal of Vibration and Acoustics*, 127(4) (2005) 395-407.
- cylinder, *Meccanica*, 47(2) (2012) 423-436.
- [21] R.A. Alashti, M. Khorsand, Three-dimensional nonlinear thermo-elastic analysis of functionally graded cylindrical shells with piezoelectric layers by differential quadrature method, *Acta Mechanica*, 223(12) (2012) 2565-2590.
- [22] A. Zenkour, Hygrothermoelastic responses of inhomogeneous piezoelectric and exponentially graded cylinders, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 119 (2014) 8-18.
- [23] M.Z. Nejad, M. Jabbari, M. Ghannad, Elastic analysis of axially functionally graded rotating thick cylinder with variable thickness under non-uniform arbitrarily pressure loading, *International Journal of Engineering Science*, 89 (2015) 86-99.
- [24] M.Z. Nejad, M. Jabbari, M. Ghannad, Elastic analysis of rotating thick cylindrical pressure vessels under non-uniform pressure: linear and non-linear thickness, *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering*, 59(2) (2015) 65-73.
- [25] M. Zamani Nejad, M. Jabbari, M. Ghannad, A semi-analytical solution for elastic analysis of rotating thick cylindrical shells with variable thickness using disk form multilayers, *The Scientific World Journal*, 2014 (2014).
- [26] M.Z. Nejad, M. Jabbari, M. Ghannad, A semi-analytical solution of thick truncated cones using matched asymptotic method and disk form multilayers, *Archive of Mechanical Engineering*, 61(3) (2014) 495-513.
- [27] M. Zamani Nejad, M. Jabbari, M. Ghannad, Elastic analysis of rotating thick truncated conical shells subjected to uniform pressure using disk form multilayers, *ISRN Mechanical Engineering*, 2014 (2014).
- [28] M.Z. Nejad, M. Jabbari, M. Ghannad, Elastic analysis of FGM rotating thick truncated conical shells with axially-varying properties under non-uniform pressure loading, *Composite Structures*, 122 (2015) 561-569.
- [29] E. Heydari, S. Hashemi, S.S. Roknizadeh, Stress Analysis of Functionally Graded Cylindrical Shells under Magneto-Thermo-Elastic Loads.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:



Please cite this article using:

M. Jabbari, M. Zamani Nejad, Electro-mechanical Analysis of Rotating Cylinder Made of Functionally Graded Piezoelectric Materials: Sensor and Actuator, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 51(1) (2018) 215-224.  
DOI: 10.22060/mej.2017.11983.5236

