



## ارتعاشات آزاد غیرخطی عرضی-پیچشی تیرهای چرخان با در نظر گرفتن نیروی کریولیس

هادی آروین بروجنی\*

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت:

بازنگری:

پذیرش:

ارائه آنلاین:

### کلمات کلیدی:

تیرهای چرخان

فرمولاسیون دقیق هندسی

نیروی کریولیس

ضریب غیرخطی مؤثر

روش مقیاس‌های چندگانه

**خلاصه:** در این مقاله به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی عرضی-پیچشی تیرهای چرخان پرداخته می‌شود. معادلات ارائه شده بر مبنای فرمولاسیون دقیق هندسی بوده که بر اساس تئوری کوزرات برای میله‌ها استخراج گردیده‌اند. با صرفنظر از اثر تغییرشکل برشی، دو معادله عرضی و پیچشی برای تیرهای مستطیلی متقارن به‌دست می‌آید. این معادلات با یکدیگر کوپل بوده و دارای شرط‌های مرزی غیرهمگن نیز می‌باشند. با اعمال روش مستقیم مقیاس‌های چندگانه رابطه ضریب غیرخطی مؤثر در فرکانس‌های طبیعی غیرخطی استخراج می‌گردد. سپس با مقایسه نتایج فرکانس غیرخطی با نتایج موجود در مقالات دیگر نتایج حاضر تایید می‌گردند. پس از آن به بررسی تأثیر سرعت چرخش بر علامت و مقدار ضریب غیرخطی مؤثر در فرکانس‌های طبیعی پرداخته می‌شود. علامت ضریب غیرخطی مؤثر نوع نرم‌شوندگی و سخت‌شوندگی فرکانس طبیعی غیرخطی را نشان می‌دهد. مشاهده می‌گردد که با در نظر نگرفتن کوپل پیچش و خمش ناشی از نیروی کریولیس با وجود آنکه در مودهای فرد حرکت عرضی علامت ضریب غیرخطی مؤثر یکسانی پیش‌بینی می‌گردد اما مقدار ضریب غیرخطی مؤثر متفاوت حاصل می‌شود. از طرف دیگر در مودهای زوج عرضی و در سرعت بالا علاوه بر مقدار ضریب غیرخطی مؤثر، علامت ضریب غیرخطی مؤثر نیز متفاوت پیش‌بینی می‌گردد.

### ۱- مقدمه

صفحه و پیچشی پرداختند. هاجز [۴] در سال ۱۹۹۰ با در نظر گرفتن تابیدگی و استفاده از زوایای رودریگر فرمولاسیون دقیقی برای تحلیل دینامیکی تیرهای چرخان ایزوتروپ پیش-پیچیده شده ارائه نمود. هاجز [۵] در سال ۱۹۹۵ تأثیر ویژگی‌های خاصی از شرایط مرزی و نیروهای مرکزگرا را بر روی ارتعاشات آزاد تیرهای تیموشنکوی چرخان روشن نمود. اوراموف و همکاران [۶] در سال ۲۰۰۸ معادلات حرکت تیرهای نازک چرخان با سطح مقطع متغیر و دارای خروج از مرکزی بین مرکز سطح و مرکز جرم را با استفاده از اصل همیتون استخراج نمود. والورده و گارسیا-والجو [۷] در سال ۲۰۰۹ با بکارگیری فرمولاسیون مختصاتی گرهی مطلق در مقابل روش فرمولاسیون دقیق بر مبنای تئوری کوزرات برای میله‌ها به مقایسه نتایج این دو روش برای پایداری تیرهای چرخان پرداختند. لاکاربونارا و همکاران [۸] در سال ۲۰۱۲ با استفاده از روش فرمولاسیون دقیق هندسی معادلات حاکم بر پره‌های چرخان با پیش‌پیچش اولیه و متغیر در طول پره را بدست آوردند. آروین و همکاران [۹] در همان سال با استفاده از فرمولاسیون دقیق هندسی به‌دست آمده در مرجع [۸] با صرفنظر از نیروی کریولیس، معادلات دقیق عرضی و

تیرهای چرخان در بسیاری از صنایع دیده می‌شوند که از جمله آن‌ها می‌توان به صنایع هوافضا، نیروگاه‌های بادی، آبی و گازی اشاره نمود. از طرفی بدلیل حساس بودن و هزینه‌های بالای سازه‌های مرتبط، مدل نمودن دقیق آن‌ها و پیش‌بینی دینامیک و ارتعاش آن‌ها از مسائل بسیار مهم برای طراحان می‌باشد. لذا در این مقاله به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی عرضی-پیچشی آن‌ها پرداخته می‌شود.

هاجز و داوول [۱] در سال ۱۹۷۴ فرمولاسیون نسبتاً دقیقی برای تیر چرخان ایزوتروپ غیرمتقارن برای ارتعاش با دامنه‌های متوسط ارائه نمودند. داسیلوا و هاجز [۲] در سال ۱۹۸۶ معادلات حرکت تیری چرخان با پیش‌پیچش اولیه متغیر در طول تیر را با استفاده از اصل همیتون استخراج نمودند. داسیلوا و هاجز [۳] در همین سال به تحلیل تأثیر ترم‌های غیرخطی متفاوت شامل غیرخطی هندسی و ترم‌های غیرخطی ناشی از نیروهای آیرودینامیک بر ناپایداری حرکت‌های جفت‌شده عرضی، عرضی خارج از

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: hadi.arvin@sku.ac.ir

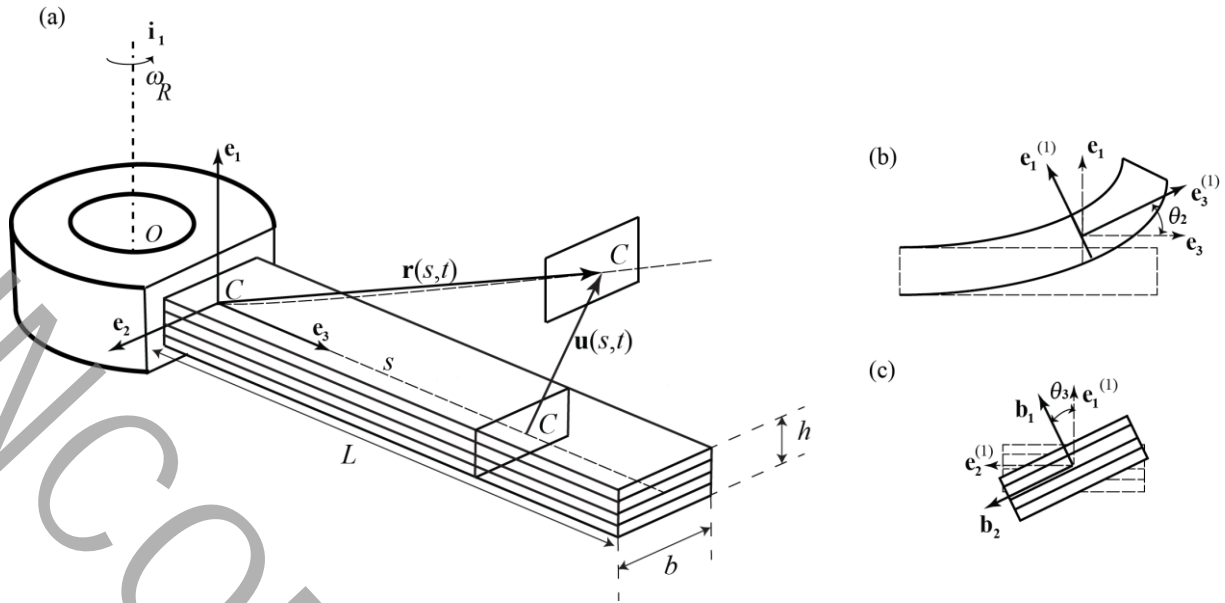


Fig. 1. (a)-Schematic of rotating composite beam, (b)-Interface coordinate system, (c)-Current coordinate system

شکل ۱: (الف) شماتیک تیر کامپوزیتی چرخان، (ب) دستگاه مختصات واسط، (پ) دستگاه مختصات جاری

کامپوزیتی با لایه‌چینی متقارن و سطح مقطع مستطیلی پرداخته می‌شود. در ابتدا با استفاده از روابط ارائه شده در مرجع [۸] معادلات دقیق تیرها بازنویسی می‌گردد. سپس با صرف نظر از تغییر شکل برشی معادلات عرضی و پیچشی استخراج می‌شوند. پس از بی‌بعدسازی معادلات حرکت با استفاده از روش مستقیم مقیاس‌های چندگانه رابطه ضریب غیرخطی مؤثر استخراج می‌گردد. در قسمت ارائه نتایج عددی در پی اعتبارسنجی نتایج حاضر به بررسی تأثیر سرعت چرخش بر علامت ضریب غیرخطی مؤثر مودهای اول تا سوم عرضی و اول و دوم پیچشی پرداخته می‌شود.

## ۲- معادلات حرکت

شماتیکی از یک تیر چرخان چند لایه با طول  $L$ ، عرض  $b$  و ضخامت  $h$  در شکل ۱(الف) نشان داده شده است. این تیر در حال چرخش با سرعت ثابت  $\omega_R$  حول محور  $i_1$  می‌باشد. در این مقاله حرکت عرضی-پیچشی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.  $s$  متغیر مکان مرکز جرم سطح مقطع دلخواه می‌باشد که از مرکز جرم سطح مقطع متصل به روتور اندازه‌گیری می‌شود. موقعیت مرکز جرم سطح مقطع متصل به روتور نسبت به مبدا  $O$  توسط رابطه  $d = d_2 e_2 + d_3 e_3$  مشخص می‌گردد که با در نظر گرفتن هم‌سطحی بین مبدا  $O$  و مرکز سطح مقطع متصل به روتور  $d_2 = 0$  خواهد بود.  $u(s,t)$  بردار تغییر مکان مرکز جرم در نظر گرفته شده در موقعیت  $s$  می‌باشد و

طولی را استخراج نموده و سپس با استفاده از روش مستقیم مقیاس‌های چندگانه به بررسی علامت ضریب غیرخطی مؤثر مدهای متفاوت عرضی و تأثیر سرعت چرخش بر آن پرداختند. آروین و لاکاربونارا [۱۰] در سال ۲۰۱۴ با ارائه روابط دقیق ساختاری برای کامپوزیت‌ها، فرمولاسیون دقیق ارائه شده در مرجع [۸] را برای پره‌های چرخان کامپوزیتی توسعه دادند. سپس مطالعه مشابه مرجع [۹] را برای بررسی تأثیر سرعت چرخش بر علامت ضریب غیرخطی مؤثر انجام دادند. تورهان و بولت [۱۱] در سال ۲۰۰۹ با استفاده از روش لینستد-پوانکاره اثر سرعت چرخش بر پاسخ غیرخطی شامل تغییر علامت ضریب غیرخطی مؤثر از سخت‌شونده به نرم‌شونده و برعکس و پدیده‌های پرش هارمونیک و سوپر هارمونیک را بررسی نمودند. آروین و بختیاری‌نژاد [۱۲] در سال ۲۰۱۱ روش مقیاس‌های چندگانه را بر معادلات گسسته‌سازی شده تیر چرخان اویلر-برنولی اعمال و مدهای نرمال غیرخطی را استخراج نمودند.

پس از بررسی پژوهش‌های انجام شده مشاهده می‌گردد که در مطالعات انجام شده تا کنون در بررسی ارتعاشات غیرخطی به بررسی حرکت جفت شده خمشی-پیچشی که به دلیل نیروی کریولیس ایجاد می‌گردد پرداخته نشده است. لذا در این مقاله با در نظر گرفتن نیروی کریولیس به بررسی مقدار و علامت ضریب غیرخطی مؤثر (که نشان دهنده نرم‌شوندگی و یا سخت‌شوندگی فرکانس طبیعی غیرخطی مورد نظر است) تیرهای چرخان

برابر  $u_3^0(s) = u_3^0(s)e_3 + u_1(s,t)e_1$  است. شایان ذکر است که  $u_3^0(s)$  تغییر شکل طولی ناشی از نیروی گریز از مرکز حاصل از چرخش و  $u_1(s,t)$  تغییر شکل عرضی دینامیکی است. بردار مکان مرکز جرم سطح مقطع در نظر گرفته در موقعیت  $s$  است و مطابق شکل ۱ (الف) توسط رابطه  $r(s,t) = se_3 + u(s,t)$  حاصل می‌شود. جهت فرمولاسیون دقیق معادلات دو دستگاه مختصات چرخان که یکی تنها دارای حرکت دوران تیر بوده و در مرکز جرم سطح مقطع متصل به روتور قرار دارد و بردارهای پایه آن با  $e_k$  نمایش داده می‌شود و دیگری در موقعیت  $s$  قرار دارد و جهت سطح مقطع جاری را نشان می‌دهد و بردارهای پایه آن با  $b_k$  نمایش داده می‌شود در نظر گرفته شده است. لذا جهت داشتن معادلات دقیق دو ماتریس انتقال متعامد در نظر گرفته می‌شود که به ترتیب از دستگاه مختصات چرخان  $e_k$  با چرخش حول محور  $e_2$  با زاویه  $\theta_2(s,t)$  به دستگاه مختصات واسط  $e_k^{(1)}$  رفته (شکل ۱ (ب)) و سپس از دستگاه واسط با چرخش حول محور  $e_3^{(1)}$  با زاویه  $\theta_3(s,t)$  به دستگاه مختصات نهایی در پیکره‌بندی جاری می‌رویم (شکل ۱ (پ)). ماتریس انتقال نهایی از دستگاه مختصات چرخان  $e_k$  به مختصات جاری  $b_k$  به صورت  $b_k = R \cdot e_k$  خواهد بود که  $R$  تانسور چرخش می‌باشد و در پیوست الف ارائه شده است. معادله‌های حرکت مشخص کننده حرکت‌های عرضی در امتداد محورهای  $e_1$  و خمشی حول محور  $e_2$  و حرکت پیچشی به ترتیب عبارتند از [۸]:

$$N^0 + \rho A \omega_R^2 (d_3 + s + u_3^0) = 0 \quad (2)$$

$$u_3^0(0) = 0, \quad N^0(L) = 0 \quad (3)$$

که (\*) نشان دهنده مشتق نسبت به متغیر مکان می‌باشد.

برای صرفنظر از تغییر شکل برشی، تغییر شکل برشی  $\eta_1$  صفر قرار داده می‌شود. با برابر صفر قرار دادن  $\eta_1$  و استفاده از رابطه بدیهی  $\cos(\theta_2(s,t)) = \frac{1/v_{inv}^0}{v}$ ،  $\sin(\theta_2(s,t)) = \frac{\partial_s u_1}{v}$ ،  $\cos^2(\theta_2(s,t)) + \sin^2(\theta_2(s,t)) = 1$  و  $\theta_2(s,t) = \arctan(\frac{\partial_s u_1}{1/v_{inv}^0})$  از معادله دوم رابطه (۱) استخراج و در معادله اول رابطه (۱) جایگزین شده و با توجه به روابط به دست آمده برای  $\theta_2(s,t)$  معادله حرکت عرضی به دست آید. بدین ترتیب معادلات حرکت به دو معادله عرضی و پیچشی کاهش می‌یابند. در تیرهای متقارن چرخان معادلات عرضی و پیچشی با یکدیگر در قسمت خطی وابسته می‌باشند. دلیل وابستگی خطی این معادلات نیروی کریولیس می‌باشد که در بسیاری از مقالات از آن صرفنظر می‌گردد. در این مقاله برای اولین بار به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی خمشی-پیچشی تیرهای چرخان به دلیل در نظر گرفتن اثر نیروی کریولیس پرداخته می‌شود.

برای تیر چرخان یکسرگردار شرایط مرزی متناظر به صورت رابطه (۴) مشخص می‌گردند.

برای  $u_3^0(s) = u_3^0(s)e_3 + u_1(s,t)e_1$  است. شایان ذکر است که  $u_3^0(s)$  تغییر شکل طولی ناشی از نیروی گریز از مرکز حاصل از چرخش و  $u_1(s,t)$  تغییر شکل عرضی دینامیکی است. بردار مکان مرکز جرم سطح مقطع در نظر گرفته در موقعیت  $s$  است و مطابق شکل ۱ (الف) توسط رابطه  $r(s,t) = se_3 + u(s,t)$  حاصل می‌شود. جهت فرمولاسیون دقیق معادلات دو دستگاه مختصات چرخان که یکی تنها دارای حرکت دوران تیر بوده و در مرکز جرم سطح مقطع متصل به روتور قرار دارد و بردارهای پایه آن با  $e_k$  نمایش داده می‌شود و دیگری در موقعیت  $s$  قرار دارد و جهت سطح مقطع جاری را نشان می‌دهد و بردارهای پایه آن با  $b_k$  نمایش داده می‌شود در نظر گرفته شده است. لذا جهت داشتن معادلات دقیق دو ماتریس انتقال متعامد در نظر گرفته می‌شود که به ترتیب از دستگاه مختصات چرخان  $e_k$  با چرخش حول محور  $e_2$  با زاویه  $\theta_2(s,t)$  به دستگاه مختصات واسط  $e_k^{(1)}$  رفته (شکل ۱ (ب)) و سپس از دستگاه واسط با چرخش حول محور  $e_3^{(1)}$  با زاویه  $\theta_3(s,t)$  به دستگاه مختصات نهایی در پیکره‌بندی جاری می‌رویم (شکل ۱ (پ)). ماتریس انتقال نهایی از دستگاه مختصات چرخان  $e_k$  به مختصات جاری  $b_k$  به صورت  $b_k = R \cdot e_k$  خواهد بود که  $R$  تانسور چرخش می‌باشد و در پیوست الف ارائه شده است. معادله‌های حرکت مشخص کننده حرکت‌های عرضی در امتداد محورهای  $e_1$  و خمشی حول محور  $e_2$  و حرکت پیچشی به ترتیب عبارتند از [۸]:

$$\begin{aligned} & [\partial_s Q_1 + \bar{\mu}_2 N] R_{1,1} + [\bar{\mu}_3 Q_1 - \bar{\mu}_1 N] R_{2,1} \\ & + [\partial_s N - \bar{\mu}_2 Q_1] R_{3,1} = \rho A \partial_{tt} u_1 \\ & \partial_s M_2 - \bar{\mu}_1 T + \bar{v} Q_1 - \partial_s u_1 N^0 R_{2,2} = \\ & \rho J_{22} \partial_t \bar{\omega}_2 - \rho J_{22} \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_3 \\ & \partial_s T + \bar{\mu}_1 M_2 - \partial_s u_1 N^0 R_{3,2} = \\ & \rho J_{33} \partial_t \bar{\omega}_3 + (\rho J_{22} - \rho J_{11}) \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 \end{aligned} \quad (1)$$

که در این رابطه  $v$  کشیدگی کلی می‌باشد که از رابطه  $\bar{r}^* = \partial_s r = \bar{v} b_3 + \eta_1 b_1$  به دست می‌آید [۱۳] که در آن  $\eta_1$  تغییر شکل برشی در راستای محور  $b_1$  است. بدین ترتیب  $\bar{v} = \sqrt{(v^0)^2 + (\partial_s u_1)^2}$  و  $\eta_1 = \cos(\theta_3(s,t)) \cos(\theta_2(s,t)) \partial_s u_1 - v^0 \cos(\theta_3(s,t)) \sin(\theta_2(s,t))$  خواهد شد که در آن  $v^0 = \frac{1}{v_{inv}^0} = 1 + u_3^0(s)$  کشیدگی ناشی از پیش‌تنش بوجود آمده از نیروی گریز از مرکز می‌باشد.  $\bar{r}$  و  $\bar{u}$  به ترتیب بردار انحنا و بردار سرعت چرخشی کلی می‌باشند که به ترتیب با مشتق‌گیری نسبت به مکان و زمان از بردارهای پایه جاری به صورت  $\partial_s b_k = \bar{\mu} \times b_k$

پواسون است.

فرم بدون بعد معادله نیروی محوری ناشی از پیش‌تنش (رابطه (۲)) و شرایط مرزی متناظرش (رابطه (۳)) نیز به صورت رابطه‌های (۸) و (۹) خواهد بود:

$$\alpha_{22} u_3^0(s) + \lambda^2 (r + s + u_3^0(s)) = 0 \quad (8)$$

$$u_3^0(0) = 0, \quad N^0(1) = 0, \quad (9)$$

حل این معادله منجر به رابطه (۱۰) می‌گردد:

$$u_3^0(s) = \sin(\lambda_a s) \frac{(\sin(\lambda_a)) \lambda r + \sqrt{\alpha_{22}}}{(\cos(\lambda_a)) \lambda} + \cos(\lambda_a s) r - s - r \quad (10)$$

که در این رابطه  $r = d_3/L$  و  $\lambda_a = \lambda/\sqrt{\alpha_{22}}$  است.

### ۳- روش مقیاس‌های چندگانه

پس از استخراج معادلات بدون بعد، در این بخش روش مقیاس‌های چندگانه مستقیم جهت محاسبه فرکانس‌های طبیعی غیرخطی به کار گرفته می‌شود. ابتدا فرم مرتبه‌بندی شده تغییرمکان عرضی و پیچشی به صورت رابطه (۱۱) در نظر گرفته می‌شود [۱۳]:

$$u_1(s, T_0, T_1, T_2) = \varepsilon u_{1,0}(s, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_{1,1}(s, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 u_{1,2}(s, T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^4) \quad (11)$$

$$\theta_3(s, T_0, T_1, T_2) = \varepsilon \theta_{3,0}(s, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 \theta_{3,1}(s, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 \theta_{3,2}(s, T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^4)$$

که در این رابطه‌ها  $\varepsilon$  پارامتر معمول مورد استفاده در روش‌های اغتشاشات است [۱۴].

با جایگذاری فرم مرتبه‌بندی شده تغییرمکان عرضی و پیچشی در معادلات بدون بعد عرضی و پیچشی و شرایط مرزی مرتبطشان و استفاده از مشتقات مرتبه اول و دوم زمانی روش مقیاس‌های چندگانه به صورت  $d^2/dt^2 = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (2D_0 D_2 + D_1^2) + O(\varepsilon^3)$  و بندی شده مرتبه اول و شرایط مرزی مربوط به آن‌ها به صورت رابطه‌های

$$u_1(0, t) = 0, \theta_2(0, t) = 0, \theta_3(0, t) = 0, \quad (4)$$

$$Q_1(L, t) = 0, M_2(L, t) = 0, T(L, t) = 0,$$

لازم به ذکر است که در تیرهای چرخان متقارن با صرف‌نظر از تغییر شکل برشی نیروی محوری کلی از رابطه  $\bar{N}b_3 = Nb_3 + N^0 e_3$  به دست می‌آید که با توجه به رابطه انتقال بین بردارهای پایه  $\bar{N}b_3 = Nb_3 + N^0 b_{3R_{3,3}}$  خواهد شد و بدین ترتیب  $v = \bar{v} - (v^0 - 1)R_{3,3}$  خواهد بود.

### ۲-۱- فرم بدون بعد معادلات حرکت

معادلات حرکت با اعمال پارامترهای رابطه (۵) به فرم بی‌بعد تبدیل می‌گردند:

$$\hat{s} = s/L, \hat{t} = \omega_0 t, \hat{u}_1 = \frac{1}{L} u_1, \hat{\theta}_3 = \theta_3 \quad (5)$$

که در این رابطه  $\omega_0 = \sqrt{EJ_{22}/(\rho AL^4)}$  فرکانس مشخصه می‌باشد. حال به منظور ساده سازی معادلات علامت (۵) از این معادلات حذف می‌گردد تا معادلات عرضی و پیچشی بدون بعد و شرایط مرزی متناظرشان در انتهای تیر به صورت رابطه‌های (۶) و (۷) ساده گردند:

$$I \cdot \ddot{u} + G \cdot \dot{u} + L \cdot u + i_0^{(3)}(u, u, \dot{u}) + i_1^{(3)}(u, \dot{u}, \ddot{u}) + i_2^{(3)}(u, u, \ddot{u}) + n^{(3)}(u, u, u) = 0 \quad (6)$$

$$I_{BC} \cdot \ddot{u} + G_{BC} \cdot \dot{u} + L_{BC} \cdot u + n_{BC}^{(3)} = 0, \quad (7)$$

که در این رابطه‌ها  $u(s, t) = [u_1(s, t), \theta_3(s, t)]^T$  می‌باشد.  $I$ ،  $G$  و  $L$  نیز به ترتیب اپراتورهای اینرسی، ژبروسکوپ و سفتی می‌باشند و در پیوست ب ارائه شده‌اند.  $i_0^{(3)}$ ،  $i_1^{(3)}$  و  $i_2^{(3)}$  ترم‌های غیرخطی اینرسی درجه سوم و  $n^{(3)}$  ترم غیرخطی سفتی درجه سوم می‌باشند که در پیوست پ نمایش داده شده‌اند. لازم به ذکر است که به ترتیب، از زیرنوشت‌های ۱ و ۶ جهت مشخص نمودن مولفه‌های معادلات عرضی و پیچشی در این مقاله استفاده گردیده است.  $n_{BC}^{(3)}$  نیز، ترم غیرخطی مرتبه سوم شرایط مرزی می‌باشد که در پیوست پ ارائه شده است. در معادلات مذکور  $\lambda = \omega_R/\omega_0$  و  $\alpha_{i2} = EAL^2/EJ_{ii}$ ،  $GJ_{33} = EJ_{33}/2(1+\bar{\nu})$  می‌باشند که  $\bar{\nu}$  ضریب

(۱۲) و (۱۳) استخراج می‌گردند:

که  $RHS(O_{Eq1}^{(3)})$ ،  $RHS(O_{Eq6}^{(3)})$ ،  $RHS(O_{BC11}^{(3)})$  و  $RHS(O_{BC12}^{(3)})$

در پیوست ت ارائه شده‌اند.

حل معادلات مرتبه اول یعنی رابطه (۱۲) و شرایط مرزی مربوط به آن‌ها، همان حل ارتعاشات خطی سیستم بوده که در اینجا با استفاده از روش گلرکین محاسبه می‌گردد [۱۵] و به‌صورت رابطه (۱۸) قابل بیان است:

$$\begin{aligned} u_{1,0} &= \psi_{1,k}(s)[A_k(T_1, T_2)e^{i\omega_{1,k}T_0} + CC] \\ \theta_{3,0} &= \psi_{6,k}(s)[A_k(T_1, T_2)e^{i\omega_{1,k}T_0} + CC] \end{aligned} \quad (18)$$

که در این رابطه‌ها  $\psi_{6,k}$  و  $\psi_{1,k}$  به ترتیب مودهای خطی عرضی و پیچشی و  $\omega_{1,k}$  فرکانس خطی عرضی-پیچشی  $k$ ام می‌باشد.  $A_k(T_1, T_2)$  دامنه مختلط مود  $k$ ام،  $CC$  نمایشگر مزدوج مختلط ترم‌های پیش از خود و  $i$  موهومی یکه می‌باشد.

جهت حل معادلات مرتبه دوم ابتدا حل مرتبه اول یعنی  $u_{1,0}$  و  $\theta_{3,0}$  از رابطه (۱۸) در رابطه (۱۴) و شرایط مرزی مربوطه جایگزین می‌گردد. برای داشتن پاسخ پربودیک در مرتبه دوم باید ترم سکولار این دسته معادلات حذف گردد. بدین ترتیب به دلیل داشتن شرایط مرزی غیر همگن و داشتن معادلات کوپل با انجام فرآیندی مشابه با مرجع [۱۶] که بر مبنای تعامد مودها می‌باشد ترم سکولار به‌صورت رابطه (۱۹) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \int_0^1 [\psi_{1,k} \cdot C_{1,1}(s, T_1, T_2) + \psi_{6,k} \cdot C_{1,6}(s, T_1, T_2)] ds \\ - C_{1,BC11}(T_1, T_2) \cdot \psi_{1,k} \Big|_{s=1} \\ - C_{1,BC6}(T_1, T_2) \cdot \psi_{6,k} \Big|_{s=1} \\ - C_{1,BC12}(T_1, T_2) \cdot \psi_{1,k} \Big|_{s=1} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

که در این رابطه  $C_{1,1}(s, T_1, T_2)$  و  $C_{1,6}(s, T_1, T_2)$  به ترتیب ضریب  $e^{i\omega_{1,k}T_0}$  در سمت راست معادله اول رابطه (۱۴) و معادله دوم رابطه (۱۴) می‌باشند.  $C_{1,BC11}(T_1, T_2)$ ،  $C_{1,BC6}(T_1, T_2)$  و  $C_{1,BC12}(T_1, T_2)$  نیز به ترتیب ضریب  $e^{i\omega_{1,k}T_0}$  در سمت راست معادله اول رابطه (۱۵)، معادله دوم رابطه (۱۵) و معادله سوم رابطه (۱۵) می‌باشند. بدین ترتیب ترم سکولار پس از ساده سازی به‌صورت رابطه (۲۰) ساده می‌گردد:

$$\begin{aligned} \text{Secular Order } \varepsilon^2 := [2i\omega_{1,k}\xi_{1,1,1} + \frac{2(-2i\omega_{1,k}\xi_{1,1,2} + \lambda\xi_{1,6})}{\alpha_{22}} \\ + \lambda \frac{\alpha_{12} - \alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{12}} \xi_{6,1} + \frac{2i\omega_{1,k}\xi_{6,6} + \lambda\xi_{6,1}}{\alpha_{32}} \\ - iC_2 - C_1] D_1 A_k(T_1, T_2) \end{aligned} \quad (20)$$

$O(\varepsilon^1)$ :

$$\begin{aligned} -I_{11}D_0^2[u_{1,0}] + G_{16}D_0[\theta_{3,0}] + L_{11}[u_{1,0}] = 0, \\ -I_{66}D_0^2[\theta_{3,0}] + G_{61}D_0[u_{1,0}] + L_{66}[\theta_{3,0}] = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} -I_{BC,11}D_0^2[u_{1,0}] + G_{BC,11}D_0[\theta_{3,0}] + L_{BC,11}[u_{1,0}] = 0, \\ -I_{BC,12}D_0^2[u_{1,0}] + G_{BC,12}D_0[\theta_{3,0}] + L_{BC,12}[u_{1,0}] = 0, \\ -I_{BC,6}D_0^2[\theta_{3,0}] + G_{BC,6}D_0[u_{1,0}] + L_{BC,6}[\theta_{3,0}] = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

لازم به ذکر است زیرنوشت‌های  $BC,11$ ،  $BC,12$  و  $BC,6$  به ترتیب معرف شرایط مرزی  $Q_1(1,t)=0$ ،  $M_2(1,t)=0$  و  $T(1,t)=0$  می‌باشند. معادلات مرتبه بندی شده مرتبه دوم و شرایط مرزی مربوط به آن‌ها نیز به‌صورت رابطه‌های (۱۴) و (۱۵) استخراج می‌گردند:

$O(\varepsilon^2)$ :

$$\begin{aligned} -I_{11}D_0^2[u_{1,1}] + G_{16}D_0[\theta_{3,1}] + L_{11}[u_{1,1}] = RHS(O_{Eq1}^{(2)}), \\ -I_{66}D_0^2[\theta_{3,1}] + G_{61}D_0[u_{1,1}] + L_{66}[\theta_{3,1}] = RHS(O_{Eq6}^{(2)}), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} -I_{BC,11}D_0^2[u_{1,1}] + G_{BC,11}D_0[\theta_{3,1}] \\ + L_{BC,11}[u_{1,1}] = RHS(O_{BC11}^{(2)}), \\ -I_{BC,12}D_0^2[u_{1,1}] + G_{BC,12}D_0[\theta_{3,1}] + L_{BC,12}[u_{1,1}] = 0, \\ -I_{BC,6}D_0^2[\theta_{3,1}] + G_{BC,6}D_0[u_{1,1}] + L_{BC,6}[\theta_{3,1}] = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

که  $RHS(O_{Eq1}^{(2)})$ ،  $RHS(O_{Eq6}^{(2)})$  و  $RHS(O_{BC11}^{(2)})$  در پیوست ت نمایش داده شده‌اند.

در آخر معادلات مرتبه بندی شده مرتبه سوم و شرایط مرزی متناظر نیز به‌صورت رابطه‌های (۱۶) و (۱۷) خواهند بود:

$O(\varepsilon^3)$ :

$$\begin{aligned} -I_{11}D_0^2[u_{1,2}] + G_{16}D_0[\theta_{3,2}] + L_{11}[u_{1,2}] = RHS(O_{Eq1}^{(3)}), \\ -I_{66}D_0^2[\theta_{3,2}] + G_{61}D_0[u_{1,2}] + L_{66}[\theta_{3,2}] = RHS(O_{Eq6}^{(3)}), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} -I_{BC,11}D_0^2[u_{1,2}] + G_{BC,11}D_0[\theta_{3,2}] + L_{BC,11}[u_{1,2}] = RHS(O_{BC11}^{(3)}), \\ -I_{BC,12}D_0^2[u_{1,2}] + G_{BC,12}D_0[\theta_{3,2}] + L_{BC,12}[u_{1,2}] = RHS(O_{BC12}^{(3)}), \\ -I_{BC,6}D_0^2[\theta_{3,2}] + G_{BC,6}D_0[u_{1,2}] + L_{BC,6}[\theta_{3,2}] = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

طبق تحلیل عددی انجام گرفته در بخش نتایج که در شکل ۵(ج) نمایش داده شده، مشاهده می‌گردد که مقدار  $\gamma_{1,k,R}$  در مقایسه با مقدار  $\gamma_{1,k,i}$  بسیار ناچیز بوده و قابل صرف نظر است و بدین ترتیب  $\gamma_{1,k,R} = 0$  خواهد بود. لذا حل دو معادله منجر به رابطه (۲۵) خواهد گردید:

$$\begin{aligned} a_k(T_2) &= \text{Constant} = a_k^0 \\ \beta_k(T_2) &= \frac{1}{4} a_k^{02} \gamma_{1,k,i} T_2 + \beta_k^0 \end{aligned} \quad (25)$$

که  $a_k^0$  و  $\beta_k^0$  دامنه و فاز اولیه بوده و با استفاده از شرایط اولیه بدست می‌آیند.

حال با جایگذاری رابطه‌های (۱۸) و (۲۱) در رابطه (۱۱) و با در نظر گرفتن  $\varepsilon = 1$  فرم مرتبه دوم تغییر مکان عرضی و پیچشی به صورت رابطه (۲۶) ساده می‌گردد:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_k^0 \psi_{1,k}(s) \cos(\omega_{1,k}^{NL} t + \beta_k^0) + O(\varepsilon^3) \\ \theta_3 &= a_k^0 \psi_{6,k}(s) \cos(\omega_{1,k}^{NL} t + \beta_k^0) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (26)$$

که در این رابطه  $\omega_{1,k}^{NL}$  فرکانس غیرخطی  $k$ ام است و دارای رابطه  $\omega_{1,k}^{NL} = \omega_{1,k} + 1/4 a_k^{02} \gamma_{1,k,i}$  است. همان گونه که در این رابطه مشخص است علامت  $\gamma_{1,k,i}$  نرم شوندگی و سخت شوندگی فرکانس طبیعی غیرخطی  $k$ ام را نشان می‌دهد و به آن ضریب غیرخطی مؤثر مود  $k$ ام گفته می‌شود.

#### ۴- نتایج عددی

ابتدا جهت اعتبارسنجی نتایج حاضر تیر چرخان در نظر گرفته شده مطابق با مرجع‌های [۱۲] و [۹] دارای طول  $L = 9$ (m) و شعاع روتور  $d_3 = 0.5$ (m) در نظر گرفته می‌شود. این تیر دارای جرم بر واحد طول  $\rho A = 10$ (kg/m)، سفتی طولی  $EA = 2/23 \times 10^8$ (N) و سفتی عرضی  $EJ_{22} = 3/99 \times 10^5$ (N·m<sup>2</sup>) می‌باشد و با سرعت  $\omega_R = 20$ (rad/s) در حال چرخش است. فرکانس‌های طبیعی غیرخطی اول تا سوم به ترتیب در شکل‌های ۲ تا ۴ نشان داده شده‌اند. در هر دو مرجع مقایسه شونده با صرف نظر از اثر نیروی کریولیس جفت شدگی بین حرکت پیچشی و عرضی در نظر گرفته نشده و تنها معادلات عرضی و طولی را در نظر گرفته‌اند. از طرف دیگر معادلات مرجع [۱۲] با استفاده از رابطه کرنش-تغییر مکان فون-کارمن بدست آمده، در حالی که معادلات مرجع [۹] بر اساس روش

که در این رابطه  $C_1 = -(2(-\psi_{6,k}|_{s=1} \lambda)) \psi_{1,k}|_{s=1} / \alpha_{22}$  ،  $C_2 = -2(\psi_{1,k}'|_{s=1}) \omega_{1,k} \psi_{1,k}|_{s=1} / \alpha_{22}$  ، ث داده شده‌اند. طبق رابطه (۲۰) حذف ترم سکولار نیازمند صفر بودن  $D_1 A_k(T_1, T_2) = 0$  می‌باشد و یا به عبارت دیگر خواهد بود. بدین صورت سمت راست کلیه معادلات مرتبه دوم و شرایط مرزی آن‌ها متحد صفر شده و بنابراین حل مرتبه دوم منجر به رابطه (۲۱) خواهد گردید:

$$\begin{aligned} u_{1,1}(s, T_0, T_1, T_2) &:= 0 \\ \theta_{3,1}(s, T_0, T_1, T_2) &:= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

با وارد نمودن رابطه‌های (۱۸) و (۲۱) در معادلات مرتبه سوم، رابطه (۱۶)، و شرایط مرزی مرتبه، رابطه (۱۷)، و انجام فرآیند مشابه مرتبه دوم، ترم سکولار مرتبه سوم به صورت رابطه (۲۲) ظاهر خواهد گردید.

$$\begin{aligned} \text{Secular Order } \varepsilon^3 &:= (2i \omega_{1,k} \Gamma_{1,k,i} + \lambda \Gamma_{1,k,R}) A_k'(T_2) \\ &+ (i \Gamma_{2,k,i} \lambda \omega_{1,k} + \Gamma_{2,k,R}) \bar{A}_k(T_2) A_k(T_2)^2 \end{aligned} \quad (22)$$

که در این رابطه  $\Gamma$ ها در پیوست ج داده شده‌اند.  $\chi$  و  $C$ های استفاده شده در تعریف  $\Gamma$ ها نیز، به ترتیب، در پیوست‌های ث و چ ارائه شده‌اند. حل رابطه (۲۲) منجر به معادله مدولاسیون دامنه مختلط یعنی  $A_k'(T_2)$  خواهد گردید:

$$A_k'(T_2) = (i \gamma_{1,k,i} + \gamma_{1,k,R}) \bar{A}_k(T_2) A_k(T_2)^2 \quad (23)$$

که  $\gamma_{1,k,R}$  و  $\gamma_{1,k,i}$  در پیوست ج ارائه شده‌اند. حال با جایگزینی فرم قطبی دامنه  $k$ ام یعنی  $A_k(T_2) = (1/2) a_k(T_2) e^{i \beta_k(T_2)}$  در رابطه مدولاسیون دامنه مختلط و جداسازی قسمت حقیقی و موهومی معادله بدست آمده و حل این دو معادله جهت دستیابی به معادلات مدولاسیون دامنه حقیقی و فاز، یعنی  $a_k'(T_2)$  و  $\beta_k'(T_2)$ ، رابطه (۲۴) به دست خواهند آمد:

$$\begin{aligned} a_k'(T_2) &= \frac{1}{4} a_k(T_2)^3 \gamma_{1,k,R} \\ a_k(T_2) \beta_k'(T_2) &= \frac{1}{4} a_k(T_2)^3 \gamma_{1,k,i} \end{aligned} \quad (24)$$

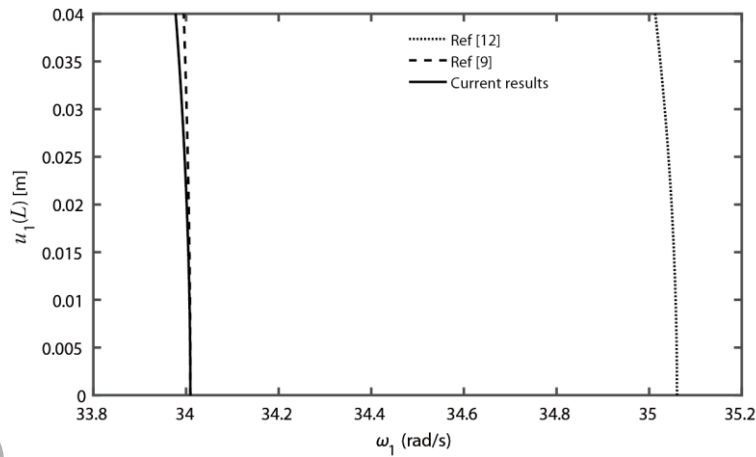


Fig. 2. Variations of the current first nonlinear natural frequency in terms of the tip point amplitude of the rotating beam (solid-lines) vs the associated results from reference. [9] (dashed-lines) and reference. [12] (dotted-lines)

شکل ۲: تغییرات فرکانس غیرخطی اول عرضی حاضر نسبت به دامنه انتهای تیر چرخان (خط پر) در مقایسه با نتایج متناظر از مرجع [۹] (خط چین) و مرجع [۱۲] (نقطه)

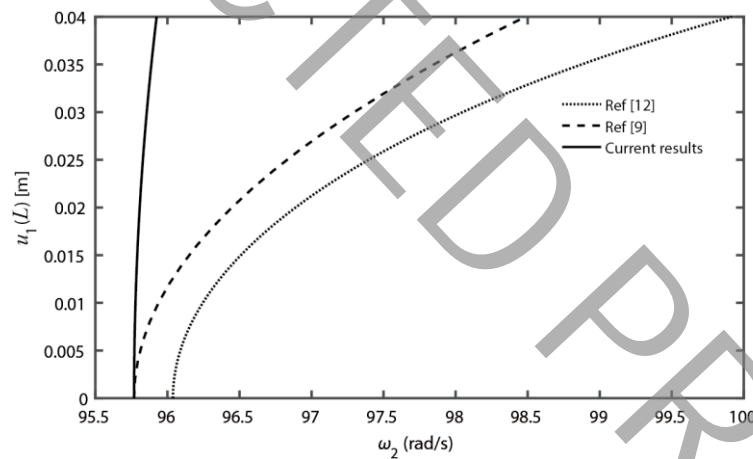


Fig. 3. Variations of the current second nonlinear natural frequency in terms of the tip point amplitude of the rotating beam (solid-lines) vs the associated results from reference [9] (dashed-lines) and reference [12] (dotted-lines)

شکل ۳: تغییرات فرکانس غیرخطی دوم عرضی حاضر نسبت به دامنه انتهای تیر چرخان (خط پر) در مقایسه با نتایج متناظر از مرجع [۹] (خط چین) و مرجع [۱۲] (نقطه)

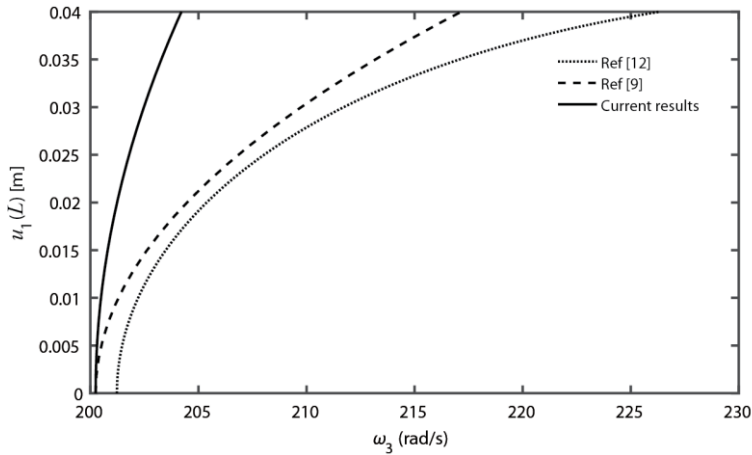


Fig. 4. Variations of the current third nonlinear natural frequency in terms of the tip point amplitude of the rotating beam (solid-lines) vs the associated results from reference [9] (dashed-lines) and reference [12] (dotted-lines)

شکل ۴: تغییرات فرکانس غیرخطی سوم عرضی حاضر نسبت به دامنه انتهای تیر چرخان (خط پر) در مقایسه با نتایج متناظر از مرجع [۹] (خط چین) و مرجع [۱۲] (نقطه)

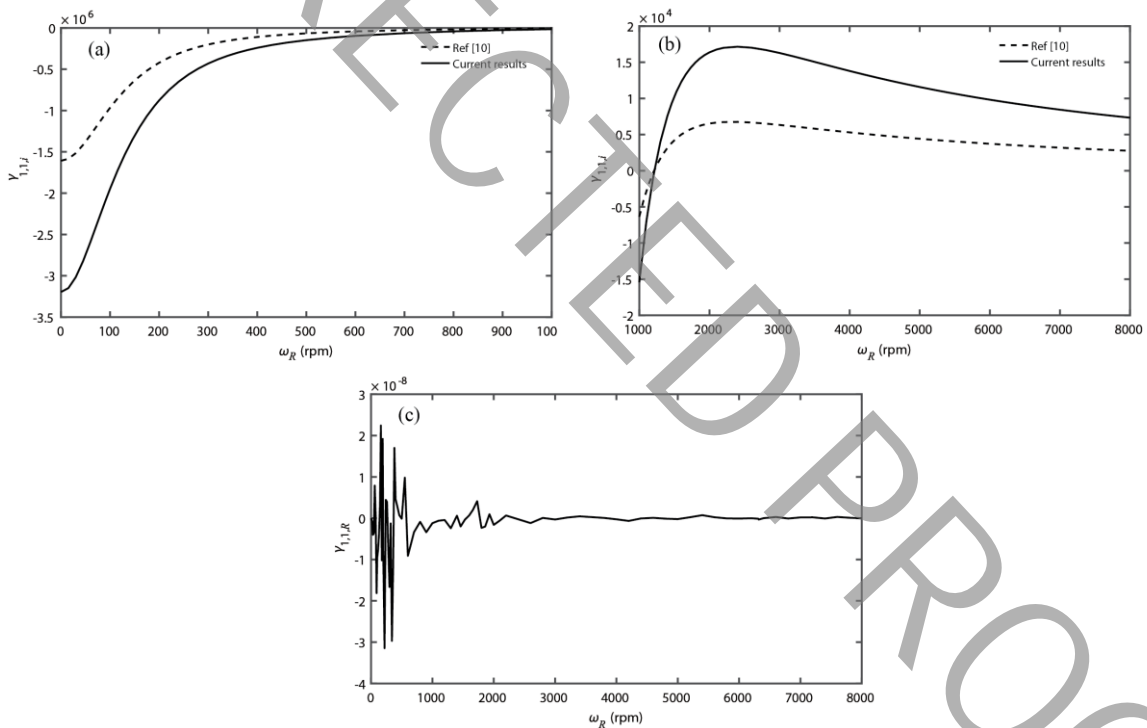


Fig. 5. Variations of the effective nonlinearity coefficient of the first flapping mode  $\gamma_{1,1,i}$  [current results (solid-lines) and reference [10] results (dashed-lines)] (a)-  $\gamma_{1,1,i}$  for 0-1000 rpm, (b)-  $\gamma_{1,1,i}$  for 1000-8000 rpm and (c)- variations of  $\gamma_{1,1,R}$  for the first flapping mode

شکل ۵: تغییرات ضریب غیرخطی مؤثر در مود اول عرضی  $\gamma_{1,1,i}$  [نتایج حاضر (خط پر) و نتایج مرجع [۱۰] (خط چین)]، (الف)  $\gamma_{1,1,i}$  در سرعت ۰ تا ۱۰۰۰ دور بر دقیقه، (ب)  $\gamma_{1,1,i}$  در سرعت ۱۰۰۰ تا ۸۰۰۰ دور بر دقیقه و (پ) تغییرات  $\gamma_{1,1,R}$  برای مود اول عرضی



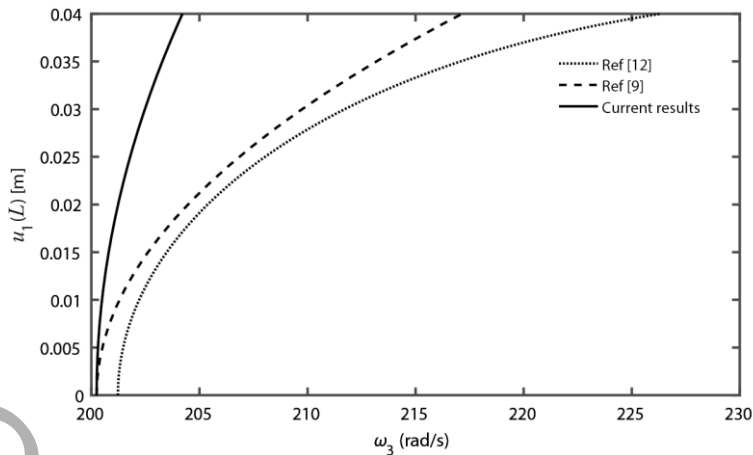


Fig. 6. Variations of the effective nonlinearity coefficient of the second flapping mode  $\gamma_{1,2,i}$  [current results (solid-lines) and reference [10] results (dashed-lines)]

شکل ۶: تغییرات ضریب غیرخطی مؤثر در مود دوم عرضی  $\gamma_{1,2,i}$  [نتایج حاضر (خط پر) و نتایج مرجع [۱۰] (خط چین)]

این تیر کامپوزیتی با لایه‌های  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  می‌باشد و دارای شعاع روتور  $d_3 = 0.2$  (m)، طول  $L = 2$  (m)، ضخامت  $h = 0.005$  (m) و عرض  $b = 0.05$  (m) می‌باشد. خواص ماده‌ای لایه‌ها نیز شامل  $E_1 = E_2 = 9/6$  (GPa)،  $\nu_{31} = \nu_{32} = 0/3$ ،  $G_{13} = G_{23} = 4/1$  (GPa)،  $G_{12} = 3/4$  (GPa)،  $E_3 = 145$  (GPa) و  $\nu_{21} = 0/5$ ،  $\rho = 1389$  (kg/m<sup>3</sup>) می‌باشد.

در شکل‌های ۵(الف) و ۵(ب)، ضریب غیرخطی مؤثر عرضی مود اول  $\gamma_{1,1,i}$  در مقایسه با نتایج مرجع [۱۰] نشان داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌گردد مقدار  $\gamma_{1,1,i}$  پیش‌بینی شده در حالت در نظر گرفتن جفت‌شدگی خمشی-پیچشی ناشی از نیروی کریولیس در مقایسه با حالت بدون در نظر گرفتن آن متفاوت بدست آمده است. با این وجود همان‌گونه که مشاهده می‌شود در بازه‌های سرعت متفاوت، علامت ضریب غیرخطی مؤثر یعنی نرم‌شوندگی یا سخت‌شوندگی فرکانس طبیعی غیرخطی مورد نظر در دو حالت مقایسه شده مشابه یکدیگر حاصل شده است. بدین ترتیب در سرعت صفر که نتایج برای یک تیر یکسرگیردار ثابت حاصل شده، علامت ضریب غیرخطی مؤثر در دو حالت یکسان و فرکانس طبیعی غیرخطی اول عرضی نرم‌شونده بدست آمده است.

در شکل ۵(ج) نتایج حاضر برای مقدار  $\gamma_{1,1,R}$  برای مود اول عرضی ارائه شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌گردد این مقدار در برابر مقادیر ارائه

فرمولاسیون دقیق هندسی استخراج شده‌اند. نتایج مرجع [۱۲] با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه‌ای بدست آمده که بر معادلات گسسته‌سازی شده با استفاده از روش گلرکین اعمال گشته است، در حالی که نتایج مرجع [۹] بر اساس روش مقیاس‌های چندگانه‌ای می‌باشد که مشابه این مقاله بر معادلات پاره‌ای اعمال شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌گردد در هر سه فرکانس اول محاسبه شده، فرکانس خطی بدست آمده حاضر دقیقاً با فرکانس طبیعی خطی ارائه شده در مرجع [۹] مطابقت دارد و دارای مقادیری کمتر از مرجع [۱۲] می‌باشد که دلیل آن دقت بالاتر روش فرمولاسیون دقیق هندسی است. از طرف دیگر علامت ضریب غیرخطی مؤثر بدست آمده نیز با هر دو مرجع سازگار است و بدین ترتیب به ترتیب برای فرکانس‌های اول تا سوم به ترتیب نرم‌شوندگی، سخت‌شوندگی و سخت‌شوندگی پیش‌بینی گردیده است.

#### ۴-۱ نتایج حاضر

پس از اعتبارسنجی نتایج حاضر جهت مشاهده اثر جفت‌شدگی عرضی-پیچشی ناشی از نیروی کریولیس تیری که در مرجع [۱۰] بدون اثر نیروی کریولیس مورد تحلیل قرار گرفته است، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. فرمولاسیون مورد استفاده شده در آن مرجع نیز فرمولاسیون دقیق هندسی است اما تنها حرکت‌های عرضی و طولی در نظر گرفته شده‌اند.

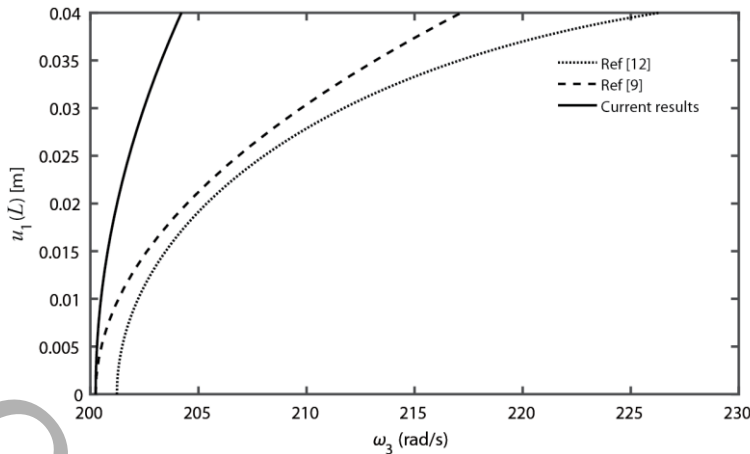


Fig. 7. Variations of the effective nonlinearity coefficient of the third flapping mode  $\gamma_{1,3,i}$  [current results (solid-lines) and reference [10] results (dashed-lines)]

شکل ۷: تغییرات ضریب غیرخطی مؤثر در مود سوم عرضی  $\gamma_{1,3,i}$  [نتایج حاضر (خط پر) و نتایج مرجع [۱۰] (خط چین)]

ارائه شده در مرجع [۱۰] دارای تکینگی در این سرعت می‌باشد. این تکینگی در نتایج حاضر بدلیل عدم در نظر گرفتن حرکت طولی دیده نمی‌شود. همان‌گونه که مشاهده می‌شود علامت ضریب غیرخطی مؤثر پیش‌بینی شده با در نظر گرفتن جفت‌شدگی خمشی-پیچشی همواره مثبت است در حالی که پس از نقطه تکینگی در بازه بسیار کمی بدون در نظر گرفتن این جفت‌شدگی علامت ضریب غیرخطی مؤثر متفاوتی پیش‌بینی شده است. لذا می‌توان گفت در تحلیل ارتعاشات غیرخطی و پیش از محاسبه فرکانس‌های غیرخطی تیرهای چرخان حتما باید طیف تغییرات فرکانس‌های طبیعی خطی رسم گردد و در صورتی که در سرعت چرخش خاصی تشدید داخلی ۲ به ۱ بین مدهای طولی و عرضی رخ می‌دهد در آن سرعت خاص باید برای محاسبه فرکانس غیرخطی از ابتدا با فرض تشدید داخلی اقدام به حل مسأله نمود و معادله حرکت طولی نیز در کنار معادلات دیگر دخیل گردد (به مرجع [۱۲] مراجعه گردد).

شکل‌های ۸ و ۹ به ترتیب ضریب غیرخطی مؤثر برای مدهای اول و دوم پیچشی را نمایش می‌دهند. همان‌گونه که در این شکل‌ها مشاهده می‌شود برای فرکانس طبیعی غیرخطی هر دو مود پیچشی رفتاری نرم‌شونده پیش‌بینی شده است.

شده در شکل‌های ۵(الف) و ۵(ب) برای  $\gamma_{1,1,i}$  بسیار کوچک است و بدین ترتیب  $\gamma_{1,1,R}$  در این مقاله صفر در نظر گرفته شده است.

شکل ۶ نتایج ضریب غیرخطی مؤثر مود دوم عرضی  $\gamma_{1,2,i}$  در مقایسه با مرجع [۱۰] را ارائه نموده است. همان‌گونه که مشاهده می‌گردد بر خلاف مود اول عرضی که هر دو حالت علامت ضریب غیرخطی مؤثر یکسانی را پیش‌بینی نمودند در این مود، ضریب غیرخطی مؤثر بدست آمده با در نظر گرفتن جفت‌شدگی خمشی-پیچشی تا سرعت ۲۷۱ دور بر دقیقه مثبت می‌باشد در حالی که از این سرعت به بعد ضریب غیرخطی مؤثر منفی خواهد بود. از طرف دیگر بدون در نظر گرفتن جفت‌شدگی خمشی-پیچشی ضریب غیرخطی مؤثر در تمام بازه مورد بررسی مثبت می‌باشد. در آخر مشابه نتایج بدست آمده برای مود اول عرضی علامت ضریب غیرخطی مؤثر برای تیرهای ثابت یکسرگیردار یکسان بدست آمده است که بدین ترتیب فرکانس طبیعی غیرخطی دوم عرضی سخت‌شونده محاسبه شده است.

نتایج استخراج شده برای ضریب غیرخطی مؤثر مود سوم عرضی  $\gamma_{1,3,i}$  در مقایسه با مرجع [۱۰] در شکل ۷ نمایش داده شده است. مشاهده می‌گردد که با در نظر گرفتن معادله حرکت طولی بدلیل حضور تشدید داخلی ۲ به ۱ بین مدهای سوم عرضی و اول طولی در سرعت  $\omega_R = 6510$  (rpm) نتایج

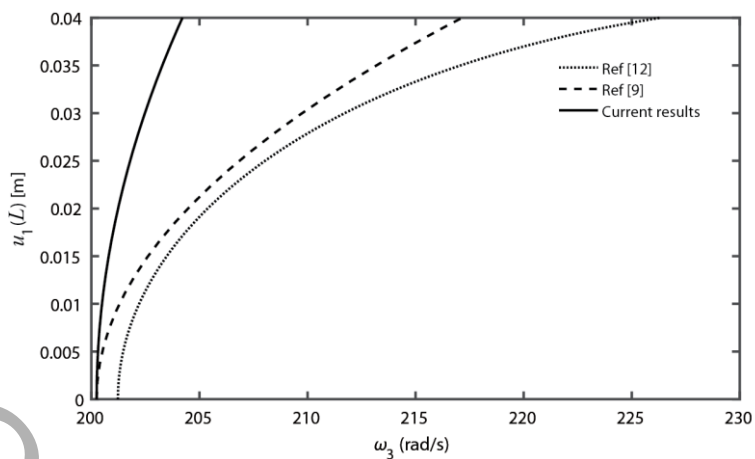


Fig. 8. Variations of the effective nonlinearity coefficient of the first torsional mode  $\gamma_{1,1,i}$

شکل ۸: تغییرات ضریب غیرخطی مؤثر در مود اول پیچشی  $\gamma_{1,1,i}$

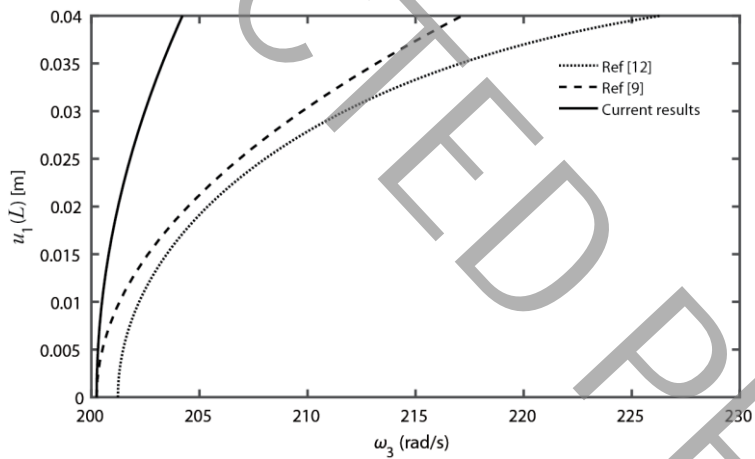


Fig. 9. Variations of the effective nonlinearity coefficient of the second torsional mode  $\gamma_{1,2,i}$

شکل ۹: تغییرات ضریب غیرخطی مؤثر در مود دوم پیچشی  $\gamma_{1,2,i}$

## ۵- نتیجه گیری

در این مقاله با در نظر گرفتن معادلات حرکت غیرخطی عرضی-پیچشی بدست آمده بر اساس فرمولاسیون دقیق هندسی به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی عرضی تیرهای چرخان با در نظر گرفتن جفت‌شدگی عرضی-پیچشی ناشی از نیروی کریولیس پرداخته شد. روش مقیاس‌های چندگانه به فرم غیرخطی درجه سوم معادلات که شامل غیرخطی‌های درجه سوم سفتی و اینرسی بود اعمال شد و رابطه‌ای برای فرکانس‌های غیرخطی عرضی بدست آمد. پس از اعتبار سنجی نتایج حاضر، تحلیلی برای تأثیر سرعت بر ضریب غیرخطی مؤثر سه مود اول عرضی و دو مود اول پیچشی انجام گرفت و نتایج حاضر با در نظر گرفتن جفت‌شدگی عرضی-پیچشی ناشی از نیروی کریولیس در مقایسه با نتایج موجود در مقالات مرتبط با صرف‌نظر از جفت‌شدگی مذکور ارائه گردید. مهمترین نتایج بدست آمده بدین ترتیب است:

در اولین و دومین مود پیچشی فرکانس غیرخطی پیچشی رفتاری نرم‌شونده نشان می‌دهند؛

با وجود اینکه حضور و عدم حضور نیروی کریولیس تأثیری در فرکانس‌های طبیعی خطی عرضی و پیچشی نمی‌گذارد اما مقدار ضریب غیرخطی مؤثر برای سه مود اول عرضی با در نظر گرفتن جفت‌شدگی عرضی-پیچشی ناشی از نیروی کریولیس با نتایج عدم در نظر گرفتن این جفت‌شدگی متفاوت است؛

در مودهای اول و سوم علامت ضریب غیرخطی مؤثر پیش‌بینی شده در هر دو حالت، با و بدون در نظر گرفتن جفت‌شدگی عرضی-پیچشی ناشی از نیروی کریولیس یکسان می‌باشد (بجز محدوده بسیار کوچکی در نزدیک نقطه تکینگی)؛

علامت ضریب غیرخطی مؤثر برای مود دوم عرضی تنها در سرعت‌های چرخش پایین با و بدون در نظر گرفتن جفت‌شدگی عرضی-پیچشی ناشی از نیروی کریولیس یکسان می‌باشد؛

در حالت خاص برای تیرهای یکسرگردار ثابت که سرعت چرخش صفر می‌باشد، علامت ضریب غیرخطی مؤثر پیش‌بینی شده با و بدون در نظر گرفتن جفت‌شدگی عرضی-پیچشی ناشی از نیروی کریولیس کاملاً یکسان است؛

در تحلیل غیرخطی و محاسبه فرکانس‌های عرضی در تیرهای چرخان باید امکان تشدید داخلی برای مودهای طولی و عرضی با رسم طیف فرکانس‌های خطی در نظر گرفته شود و در صورت این امکان از ابتدای

تحلیل باید مودهای طولی را در تحلیل دخالت داده و اقدام به محاسبه فرکانس‌های طبیعی عرضی غیرخطی نمود.

## سپاسگزاری

این مقاله مستخرج از نتایج طرح تحقیقاتی اجرا شده به شماره قرارداد ۹۶GRD\M\۱۷۵۴ از محل اعتبارات معاونت پژوهش و فناوری دانشگاه شهرکرد می‌باشد.

## منابع

- [1] D.H. Hodges, E. Dowell, Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades, NASA TN D-7818, (1974).
- [2] M.C. Da Silva, D. Hodges, Nonlinear flexure and torsion of rotating beams, with application to helicopter rotor blades-I. Formulation, Vertica, 10(2) (1986) 151-169.
- [3] M.C. da Silva, D. Hodges, Nonlinear flexure and torsion of rotating beams, with application to helicopter rotor blades-II. Response and stability results, Vertica, 10(2) (1986) 171-186.
- [4] D.H. Hodges, A mixed variational formulation based on exact intrinsic equations for dynamics of moving beams, International journal of solids and structures, 26(11) (1990) 1253-1273.
- [5] D.H. Hodges, Comment on 'Flexural behavior of a rotating sandwich tapered beam' and on 'Dynamic analysis for free vibrations of rotating sandwich tapered beams', AIAA journal, 33(6) (1995) 1168-1170.
- [6] K. Avramov, C. Pierre, N. Shyriaieva, Nonlinear equations of flexural-flexural-torsional oscillations of rotating beams with arbitrary cross-section, International Applied Mechanics, 44(5) (2008) 582-589.
- [7] J. Valverde, D. García-Vallejo, Stability analysis of a substructured model of the rotating beam, Nonlinear

- (2009) 314-335.
- [12] H. Arvin, F. Bakhtiari-Nejad, Non-linear modal analysis of a rotating beam, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46(6) (2011) 877-897.
- [13] W. Lacarbonara, *Nonlinear structural mechanics: theory, dynamical phenomena and modeling*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [14] A.H. Nayfeh, D.T. Mook, *Nonlinear oscillations*, John Wiley & Sons, 2008.
- [15] L. Meirovitch, *Principles and techniques of vibrations*, Prentice Hall New Jersey, 1997.
- [16] H. Arvin, F. Bakhtiari-Nejad, Nonlinear free vibration analysis of rotating composite Timoshenko beams, *Composite Structures*, 96 (2013) 29-43.
- dynamics, 55(4) (2009) 355-372.
- [8] W. Lacarbonara, H. Arvin, F. Bakhtiari-Nejad, A geometrically exact approach to the overall dynamics of elastic rotating blades—part 1: linear modal properties, *Nonlinear Dynamics*, 70(1) (2012) 659-675.
- [9] H. Arvin, W. Lacarbonara, F. Bakhtiari-Nejad, A geometrically exact approach to the overall dynamics of elastic rotating blades—part 2: flapping nonlinear normal modes, *Nonlinear Dynamics*, 70(3) (2012) 2279-2301.
- [10] H. Arvin, W. Lacarbonara, A fully nonlinear dynamic formulation for rotating composite beams: nonlinear normal modes in flapping, *Composite structures*, 109 (2014) 93-105.
- [11] Ö. Turhan, G. Bulut, On nonlinear vibrations of a rotating beam, *Journal of sound and vibration*, 322(1-2)

## پیوست‌ها

پیوست الف: پارامترهای مورد استفاده در معادله حرکت

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3(s,t))\cos(\theta_2(s,t)) & \sin(\theta_3(s,t)) & -\cos(\theta_3(s,t))\sin(\theta_2(s,t)) \\ -\sin(\theta_3(s,t))\cos(\theta_2(s,t)) & \cos(\theta_3(s,t)) & \sin(\theta_3(s,t))\sin(\theta_2(s,t)) \\ \sin(\theta_2(s,t)) & 0 & \cos(\theta_2(s,t)) \end{bmatrix} \quad (\text{الف. ۱})$$

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_1 &= \partial_s \theta_2(s,t) \sin(\theta_3(s,t)) \\ \bar{\mu}_2 &= \partial_s \theta_2(s,t) \cos(\theta_3(s,t)) \\ \bar{\mu}_3 &= \partial_s \theta_3(s,t) \end{aligned} \quad (\text{الف. ۲})$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= \partial_t \theta_2(s,t) \sin(\theta_3(s,t)) + \omega_R \cos(\theta_2(s,t)) \cos(\theta_3(s,t)) \\ \bar{\omega}_2 &= \partial_t \theta_2(s,t) \cos(\theta_3(s,t)) - \omega_R \cos(\theta_2(s,t)) \sin(\theta_3(s,t)) \\ \bar{\omega}_3 &= \partial_t \theta_3(s,t) + \omega_R \sin(\theta_2(s,t)) \end{aligned} \quad (\text{الف. ۳})$$

**پیوست ب:** اپراتورهای خطی اینرسی، ژيروسکوپیی و سفتی معادلات حرکت و شرایط مرزی ناظر

$$I_{11} = -(\bullet) + 2\partial_s(\bullet)v_{inv}^0 / \alpha_{22} + v_{inv}^0 \partial_{ss}(\bullet) / \alpha_{22}, I_{16} = 0, G_{11} = 0, G_{16} = -2\lambda(\bullet)v_{inv}^0 / \alpha_{22} - 2\lambda\partial_s(\bullet)v_{inv}^0 / \alpha_{22}$$

$$L_{11} = -v_{inv}^0 \lambda^2 \partial_{ss}(\bullet) / \alpha_{22} + \alpha_{22} \partial_{ss}(\bullet) N^0 v_{inv}^0 + \alpha_{22} \partial_s(\bullet) N^0 v_{inv}^0 - \partial_s(\bullet) v_{inv}^0 v_{inv}^0 - 4\partial_{sss}(\bullet) v_{inv}^0 v_{inv}^0 - 3\partial_{ss}(\bullet) v_{inv}^0 v_{inv}^0$$

$$- v_{inv}^0 \partial_s(\bullet) v_{inv}^0 - 2v_{inv}^0 \partial_{ss}(\bullet) - \partial_{ssss}(\bullet) v_{inv}^0 + \alpha_{22} \partial_s(\bullet) N^0 v_{inv}^0 - 2\lambda^2 v_{inv}^0 \partial_s(\bullet) v_{inv}^0 / \alpha_{22} \quad (۱.ب)$$

$$I_{61} = 0, I_{66} = -(\bullet) / \alpha_{32}, G_{66} = 0, G_{61} = \lambda \partial_s(\bullet) v_{inv}^0 / \alpha_{12} - \lambda \partial_s(\bullet) v_{inv}^0 / \alpha_{22} - \lambda \partial_s(\bullet) v_{inv}^0 / \alpha_{32}$$

$$L_{66} = \alpha_{22} \partial_{ss}(\bullet) / (\alpha_{32}(2 + 2\bar{v})) + \lambda^2(\bullet) / \alpha_{22} - \lambda^2(\bullet) / \alpha_{12} \quad (۲.ب)$$

$$I_{BC,11} = \partial_s(\bullet) / \alpha_{22}, G_{BC,11} = -2\lambda(\bullet) / \alpha_{22}, L_{BC,11} = -\lambda^2 \partial_s(\bullet) / \alpha_{22} - \partial_{sss}(\bullet) - \partial_s(\bullet) v_{inv}^0 - 2\partial_{ss}(\bullet) v_{inv}^0 \quad (۳.ب)$$

$$I_{BC,12} = 0, G_{BC,12} = 0, L_{BC,12} = \partial_{ss}(\bullet) + \partial_s(\bullet) v_{inv}^0 \quad (۴.ب)$$

$$I_{BC,6} = 0, G_{BC,6} = 0, L_{BC,6} = \partial_s(\bullet) \quad (۵.ب)$$

**پیوست پ:** ترمهای غیرخطی اینرسی و سفتی معادلات حرکت و شرایط مرزی متناظر

$$i_{10}^{(3)} = -2\lambda v_{inv}^0 (s) \partial_{ts} \theta_3 \theta_3^2 / \alpha_{12} + 6v_{inv}^0 (s)^3 \lambda \partial_t \theta_3 \partial_s u_1 \partial_{ss} u_1 / \alpha_{22} + 3\lambda \partial_{ts} \theta_3 v_{inv}^0 (s)^3 \partial_s u_1^2 / \alpha_{22}$$

$$+ 2\lambda \partial_{ts} \theta_3 v_{inv}^0 (s) \theta_3^2 / \alpha_{22} - 2\lambda \partial_t \theta_3 v_{inv}^0 (s) \theta_3^2 / \alpha_{12} + 2\lambda \partial_t \theta_3 v_{inv}^0 (s) \theta_3^2 / \alpha_{22}$$

$$+ 9v_{inv}^0 (s)^2 \lambda \partial_t \theta_3 v_{inv}^0 (s) \partial_s u_1^2 / \alpha_{22} + 4v_{inv}^0 (s) \partial_s \theta_3 \lambda \partial_t \theta_3 / \alpha_{22} - 4v_{inv}^0 (s) \partial_s \theta_3 \lambda \partial_t \theta_3 / \alpha_{12} \quad (۱.پ)$$

$$i_{11}^{(3)} = -8v_{inv}^0 (s)^3 \partial_s u_1 v_{inv}^0 (s) \partial_{ts} u_1^2 / \alpha_{22} - 2v_{inv}^0 \partial_{ts} \theta_3 \partial_{ts} u_1 / \alpha_{22} - 2v_{inv}^0 (s)^2 \partial_t \theta_3 \partial_{ts} u_1 / \alpha_{22}$$

$$- 4v_{inv}^0 (s)^4 \partial_s u_1 \partial_{ss} u_1 \partial_{ts} u_1 / \alpha_{22} - 2v_{inv}^0 \partial_{ts} u_1^2 \partial_{ss} u_1 / \alpha_{22} - 4v_{inv}^0 (s) \partial_t \theta_3 \partial_{ts} u_1 v_{inv}^0 (s) / \alpha_{22}$$

$$- 2v_{inv}^0 (s)^2 \partial_s \theta_3 \partial_t \theta_3 \partial_{ts} u_1 / \alpha_{22} + 4v_{inv}^0 (s) \partial_t \theta_3 \partial_{ts} u_1 v_{inv}^0 (s) / \alpha_{12} + 2v_{inv}^0 \partial_{ts} \theta_3 \partial_{ts} u_1 / \alpha_{12}$$

$$+ 2v_{inv}^0 (s)^2 \partial_s \theta_3 \partial_t \theta_3 \partial_{ts} u_1 / \alpha_{12} + 2v_{inv}^0 \partial_t \theta_3 \partial_{ts} u_1 / \alpha_{12} \quad (۲.پ)$$

$$i_{12}^{(3)} = -\partial_{tss} u_1 v_{inv}^0 (s)^2 \theta_3^2 / \alpha_{22} + \partial_{tss} u_1 v_{inv}^0 (s)^2 \theta_3^2 / \alpha_{12} - 2\partial_{tss} u_1 v_{inv}^0 (s) v_{inv}^0 (s) \theta_3^2 / \alpha_{22}$$

$$- 4v_{inv}^0 (s)^4 \partial_s u_1 \partial_{ss} u_1 \partial_{tss} u_1 / \alpha_{22} - 2v_{inv}^0 (s)^2 \partial_s \theta_3 \partial_{tss} u_1 / \alpha_{22} - 8v_{inv}^0 \partial_s u_1^2 v_{inv}^0 (s) \partial_{tss} u_1 / \alpha_{22}$$

$$- 2v_{inv}^0 (s)^4 \partial_s u_1^2 \partial_{tss} u_1 / \alpha_{22} + 2v_{inv}^0 (s)^2 \partial_s \theta_3 \partial_{tss} u_1 / \alpha_{12} + 2\partial_{tss} u_1 v_{inv}^0 (s) v_{inv}^0 (s) \theta_3^2 / \alpha_{12} \quad (۳.پ)$$

$$i_{60}^{(3)} = -\frac{3}{2} \lambda \partial_s u_1^2 v_{inv}^0 (s)^3 \partial_{ts} u_1 / \alpha_{12} + \frac{3}{2} \lambda \partial_s u_1^2 v_{inv}^0 (s)^3 \partial_{ts} u_1 / \alpha_{32} + \frac{3}{2} \lambda \partial_s u_1^2 v_{inv}^0 (s)^3 \partial_{ts} u_1 / \alpha_{22}$$

$$+ 2\lambda \theta_3^2 \partial_{ts} u_1 v_{inv}^0 (s) / \alpha_{22} - 2\lambda \theta_3^2 \partial_{ts} u_1 v_{inv}^0 (s) / \alpha_{12} \quad (۴.پ)$$

$$i_{61}^{(3)} = \theta_3 \partial_{ts} u_1^2 v_{inv}^0 (s)^2 / \alpha_{12} - \theta_3 \partial_{ts} u_1^2 v_{inv}^0 (s)^2 / \alpha_{22} \quad (۵.پ)$$

$$i_{62}^{(3)} = 0 \quad (۶.پ)$$

$$n_6^{(3)} = \theta_3 \partial_s u_1^2 v_{inv}^0 (s)^2 - \frac{2}{3} \lambda^2 \theta_3^3 / \alpha_{22} - 2\alpha_{22} v_{inv}^0 (s) v_{inv}^0 (s) \theta_3 \partial_{ss} u_1 \partial_s u_1 / \alpha_{12} - \alpha_{22} \theta_3 \partial_s u_1^2 v_{inv}^0 (s)^2 / \alpha_{12} - \lambda^2 \theta_3 \partial_s u_1^2 v_{inv}^0 (s)^2 / \alpha_{22} + \theta_3 \partial_{ss} u_1^2 v_{inv}^0 (s)^2 + \frac{2}{3} \lambda^2 \theta_3^3 / \alpha_{12} + 2\theta_3 \partial_{ss} u_1 v_{inv}^0 (s) \partial_s u_1 v_{inv}^0 (s) - \alpha_{22} \theta_3 \partial_{ss} u_1^2 v_{inv}^0 (s)^2 / \alpha_{12} + \lambda^2 \theta_3 \partial_s u_1^2 v_{inv}^0 (s)^2 / \alpha_{12} \quad (۷.پ)$$

$$n_{BC,11}^{(3)} = \lambda^2 \partial_s u_1^3 / \alpha_{22} + \lambda \partial_t \theta_3 \partial_s u_1^2 / \alpha_{22} + \theta_3^2 \lambda \partial_t \theta_3 / \alpha_{22} - 2\theta_3 \partial_t \theta_3 \partial_{ts} u_1 / \alpha_{22} + \frac{1}{2} \theta_3^2 \partial_s u_1 v_{inv}^0 \prime + 6\partial_s u_1^2 \partial_{ss} u_1 v_{inv}^0 \prime - \partial_s u_1^2 \partial_{ts} u_1 / \alpha_{22} - \frac{1}{2} \theta_3^2 \partial_{ts} u_1 / \alpha_{22} + \frac{1}{2} \lambda^2 \theta_3^2 \partial_s u_1 / \alpha_{22} + 2\partial_s u_1^3 v_{inv}^0 \prime - 2\partial_s u_1 \partial_{ts} u_1^2 / \alpha_{22} + \theta_3^2 \partial_{ss} u_1 v_{inv}^0 \prime + \frac{1}{2} \theta_3^2 \partial_{sss} u_1 + \partial_s u_1^3 v_{inv}^0 \prime + 2\partial_s u_1 \partial_{ss} u_1^2 + \partial_s u_1^2 \partial_{sss} u_1 \quad (۸.پ)$$

$$n_{BC,12}^{(3)} = -\partial_s u_1^2 \partial_{ss} u_1 - \partial_s u_1^3 v_{inv}^0 (s) - \frac{1}{2} \theta_3^2 \partial_{ss} u_1 - \frac{1}{2} \theta_3^2 \partial_s u_1 v_{inv}^0 (s) \quad n_{BC,6}^{(3)} = 0 \quad (۹.پ)$$

**پیوست ت:** ترمهای سمت راست مرتبه دوم و سوم معادلات حرکت و شرایط مرزی متناظر در روش مقیاس‌های چندگانه

$$RHS(O_{Eq1}^{(2)}) = 2D_0 D_1 u_{1,0} + 2v_{inv}^0 \lambda D_1 \partial_s \theta_{3,0} / \alpha_{22} + 2\lambda v_0^{inv} D_1 \theta_{3,0} / \alpha_{22} - 2v_{inv}^0 D_0 D_1 \partial_{ss} u_{1,0} / \alpha_{22} - 4v_0^{inv} v_{inv}^0 D_0 D_1 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{22} \quad (۱.ت)$$

$$RHS(O_{Eq6}^{(2)}) = 2D_0 D_1 \theta_{3,0} / \alpha_{32} + v_{inv}^0 \lambda D_1 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{22} + v_{inv}^0 \lambda D_1 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{32} - v_{inv}^0 \lambda D_1 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{12} \quad (۲.ت)$$

$$RHS(O_{BC11}^{(2)}) = 2\lambda D_1 \theta_{3,0} / \alpha_{22} - 2D_0 D_1 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{22} \quad (۳.ت)$$

$$RHS(O_{Eq1}^{(3)}) = 2D_0 D_2 u_{1,0} + D_1^2 u_{1,0} + 2D_0 D_1 u_{1,1} + 2v_{inv}^0 (s)^2 \theta_{3,0} \partial_s \theta_{3,0} D_0^2 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{22} - 2v_{inv}^0 (s)^2 \theta_{3,0} \partial_s \theta_{3,0} D_0^2 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{12} + 2\lambda v_0^{inv} (s) D_1 \theta_{3,1} / \alpha_{22} + 2\lambda v_0^{inv} (s) D_2 \theta_{3,0} / \alpha_{22} - 2v_{inv}^0 (s)^2 D_0 D_2 \partial_{ss} u_{1,0} / \alpha_{22} + 8v_{inv}^0 (s)^3 v_0^{inv} (s) \partial_s u_{1,0} D_0^2 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{22} + 4v_{inv}^0 (s)^4 \partial_s u_{1,0} \partial_{ss} u_{1,0} D_0^2 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{22} - 2v_{inv}^0 (s) v_0^{inv} (s) D_0^2 \partial_s u_{1,0} \theta_{3,0}^2 / \alpha_{12} - 4v_0^{inv} (s) v_{inv}^0 (s) \theta_{3,0} D_0 \theta_{3,0} D_0 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{12} + 8v_{inv}^0 (s)^3 v_0^{inv} (s) \partial_s u_{1,0} D_0 \partial_s u_{1,0}^2 / \alpha_{22} + 4v_{inv}^0 (s)^4 \partial_s u_{1,0} D_0 \partial_s u_{1,0} D_0 \partial_{ss} u_{1,0} / \alpha_{22} - 2v_{inv}^0 (s) \lambda D_0 \partial_s \theta_{3,0} \theta_{3,0}^2 / \alpha_{22} + 2v_{inv}^0 (s) \lambda D_0 \partial_s \theta_{3,0} \theta_{3,0}^2 / \alpha_{12} - 3v_{inv}^0 (s)^3 \lambda D_0 \partial_s \theta_{3,0} \partial_s u_{1,0}^2 / \alpha_{22} + 2v_{inv}^0 (s)^2 \theta_{3,0} D_0 \theta_{3,0} D_0 \partial_{ss} u_{1,0} / \alpha_{22} - 2v_{inv}^0 (s)^2 D_0 \theta_{3,0} \partial_s \theta_{3,0} D_0 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{12} - 2v_{inv}^0 (s)^2 \theta_{3,0} D_0 \theta_{3,0} D_0 \partial_{ss} u_{1,0} / \alpha_{12} - 2v_{inv}^0 (s)^2 \theta_{3,0} D_0 \partial_s \theta_{3,0} D_0 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{12} + 2v_{inv}^0 (s)^4 \partial_s u_{1,0}^2 D_0^2 \partial_{ss} u_{1,0} / \alpha_{22} - v_{inv}^0 (s)^2 D_0^2 \partial_{ss} u_{1,0} \theta_{3,0}^2 / \alpha_{12} - 4v_0^{inv} (s) v_{inv}^0 (s) D_0 D_1 \partial_s u_{1,1} / \alpha_{22} - 4v_0^{inv} (s) v_{inv}^0 (s) D_0 D_2 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{22} - 2v_0^{inv} (s) v_{inv}^0 (s) D_1^2 \partial_s u_{1,0} / \alpha_{22} + 2v_{inv}^0 (s)^4 D_0 \partial_s u_{1,0}^2 \partial_{ss} u_{1,0} / \alpha_{22} + 2v_{inv}^0 (s) \lambda D_1 \partial_s \theta_{3,1} / \alpha_{22} - 9v_{inv}^0 (s)^2 \lambda v_0^{inv} (s) D_0 \theta_{3,0} \partial_s u_{1,0}^2 / \alpha_{22} - 4v_0^{inv} (s) \lambda \theta_{3,0} D_0 \theta_{3,0} \partial_s \theta_{3,0} / \alpha_{22} + 2v_0^{inv} (s) v_{inv}^0 (s) D_0^2 \partial_s u_{1,0} \theta_{3,0}^2 / \alpha_{22} + 4v_0^{inv} (s) \lambda \theta_{3,0} D_0 \theta_{3,0} \partial_s \theta_{3,0} / \alpha_{12} + 2\lambda v_0^{inv} (s) D_0 \theta_{3,0} \theta_{3,0}^2 / \alpha_{12} + 2v_{inv}^0 \lambda D_2 \partial_s \theta_{3,0} / \alpha_{22} - 2\lambda v_0^{inv} (s) D_0 \theta_{3,0} \theta_{3,0}^2 / \alpha_{22} + v_{inv}^0 (s)^2 D_0^2 \partial_{ss} u_{1,0} \theta_{3,0}^2 / \alpha_{22} - 2v_0^{inv} D_0 D_1 \partial_{ss} u_{1,1} / \alpha_{22} - v_{inv}^0 (s)^2 D_1^2 \partial_{ss} u_{1,0} / \alpha_{22} - 6v_{inv}^0 (s)^3 \lambda D_0 \theta_{3,0} \partial_s u_{1,0} \partial_{ss} u_{1,0} / \alpha_{22} - 2v_{inv}^0 (s)^4 \partial_{ss} u_{1,0}^3 - 2v_{inv}^0 (s)^3 v_0^{inv} (s) \partial_s u_{1,0}^3 + \alpha_{22} v_0^{inv} (s) v_0^{inv} (s) \partial_s u_{1,0} \theta_{3,0}^2 / \alpha_{12} \quad (۴.ت)$$

$$\begin{aligned}
 &+4\alpha_{22}v_{inv}^0(s)v_0^{inv}(s)\partial_{sss}u_{1,0}\theta_{3,0}^2/\alpha_{12}+2\alpha_{22}v_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}\partial_{ss}\theta_{3,0}\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{12} \\
 &+2\alpha_{22}v_{inv}^0(s)v_0^{inv}(s)\partial_s\theta_{3,0}^2\partial_su_{1,0}/\alpha_{12}+2\lambda^2v_0^{inv}(s)v_{inv}^0(s)\partial_su_{1,0}\theta_{3,0}^2/\alpha_{12} \\
 &+2\lambda^2v_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}/\alpha_{12}+2\alpha_{22}v_0^{inv}(s)^2\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}/\alpha_{12} \\
 &-2\lambda^2v_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}/\alpha_{22}-2\lambda^2v_0^{inv}(s)v_{inv}^0(s)\partial_su_{1,0}\theta_{3,0}^2/\alpha_{22} \\
 &-v_0^{inv}(s)v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}\theta_{3,0}^2-4v_{inv}^0(s)v_0^{inv}(s)\partial_{sss}u_{1,0}\theta_{3,0}^2 \\
 &-v_0^{inv}(s)v_{inv}^0(s)\partial_su_{1,0}\theta_{3,0}^2-8v_{inv}^0(s)^4\partial_su_{1,0}\partial_{ss}u_{1,0}\partial_{sss}u_{1,0} \\
 &-24v_{inv}^0(s)^3v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}\partial_{ss}u_{1,0}^2-10v_{inv}^0(s)^2v_0^{inv}(s)v_{inv}^0(s)\partial_su_{1,0}^3 \\
 &-14v_{inv}^0(s)^3v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}^2\partial_{ss}u_{1,0}+3/2\alpha_{22}v_{inv}^0(s)^3\partial_su_{1,0}^2\partial_{ss}u_{1,0} \\
 &-3\alpha_{22}v_{inv}^0(s)^2\partial_su_{1,0}^2\partial_{ss}u_{1,0}-16v_{inv}^0(s)^3v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}^2\partial_{sss}u_{1,0} \\
 &-30v_{inv}^0(s)^2v_0^{inv}(s)^2\partial_su_{1,0}^2\partial_{ss}u_{1,0}-4v_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_{sss}u_{1,0} \\
 &-3v_{inv}^0(s)v_0^{inv}(s)\partial_{ss}u_{1,0}\theta_{3,0}^2+10\alpha_{22}v_{inv}^0(s)v_0^{inv}(s)\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{12} \\
 &+2\alpha_{22}v_{inv}^0(s)v_0^{inv}(s)\theta_{3,0}\partial_{ss}\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}/\alpha_{12}-2v_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}\partial_{ss}\theta_{3,0}\partial_{ss}u_{1,0} \\
 &+4\alpha_{22}v_{inv}^0(s)v_0^{inv}(s)\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}/\alpha_{12}+4\alpha_{22}v_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{12} \\
 &+\alpha_{22}v_0^{inv}(s)v_{inv}^0(s)\partial_su_{1,0}\theta_{3,0}^2/\alpha_{12}-8v_{inv}^0(s)^3\lambda^2v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}^3/\alpha_{22} \\
 &+3\alpha_{22}v_{inv}^0(s)^2N^0(s)v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}^3-v_0^{inv}(s)^2\partial_{ssss}u_{1,0}\theta_{3,0}^2-2v_{inv}^0(s)^2\partial_s\theta_{3,0}^2\partial_{ss}u_{1,0} \\
 &-2v_0^{inv}(s)^2\partial_{ss}u_{1,0}\theta_{3,0}^2-2v_{inv}^0(s)^4\partial_su_{1,0}^2\partial_{ssss}u_{1,0}+\alpha_{22}v_{inv}^0(s)^3N^0(s)\partial_su_{1,0}^3 \\
 &+3/2\alpha_{22}v_{inv}^0(s)^2v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}^3-2\alpha_{22}v_{inv}^0(s)v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}^3-4v_{inv}^0(s)v_0^{inv}(s)^3\partial_su_{1,0}^3 \\
 &-2v_0^{inv}(s)^2\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}-2v_{inv}^0(s)v_0^{inv}(s)\theta_{3,0}\partial_{ss}\theta_{3,0}\partial_su_{1,0} \\
 &-4v_{inv}^0(s)v_0^{inv}(s)\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}+\lambda^2v_{inv}^0(s)^2\partial_{ss}u_{1,0}\theta_{3,0}^2/\alpha_{12} \\
 &+2\alpha_{22}v_{inv}^0(s)^2\partial_s\theta_{3,0}^2\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{12}+\alpha_{22}v_{inv}^0(s)^2\partial_{ssss}u_{1,0}\theta_{3,0}^2/\alpha_{12} \\
 &+2\alpha_{22}v_0^{inv}(s)^2\partial_{ss}u_{1,0}\theta_{3,0}^2/\alpha_{12}-\lambda^2v_{inv}^0(s)^2\partial_{ss}u_{1,0}\theta_{3,0}^2/\alpha_{22} \\
 &-10v_{inv}^0(s)v_0^{inv}(s)\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_{ss}u_{1,0}-6v_{inv}^0(s)^4\lambda^2\partial_su_{1,0}^2\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{22} \\
 &+3\alpha_{22}v_{inv}^0(s)^3N^0(s)\partial_su_{1,0}^2\partial_{ss}u_{1,0}-2v_{inv}^0(s)v_0^{inv}(s)\partial_s\theta_{3,0}^2\partial_su_{1,0}
 \end{aligned} \tag{۴.ت}$$

$$\begin{aligned}
 RHS(O_{Eq6}^{(3)}) &= 2D_0D_1\theta_{3,1}/\alpha_{32}+2D_0D_2\theta_{3,0}(\alpha_{32}+D_1^2\theta_{3,0}/\alpha_{32}+v_{inv}^0(s)\lambda D_1\partial_su_{1,1}/\alpha_{22} \\
 &+v_{inv}^0(s)\lambda D_2\partial_su_{1,0}/\alpha_{22}+v_{inv}^0(s)\lambda D_1\partial_su_{1,1}/\alpha_{32}+v_{inv}^0(s)\lambda D_2\partial_su_{1,0}/\alpha_{32} \\
 &-v_{inv}^0(s)\lambda D_1\partial_su_{1,1}/\alpha_{12}-v_{inv}^0(s)\lambda D_2\partial_su_{1,0}/\alpha_{12}+2v_{inv}^0(s)\lambda\theta_{3,0}^2D_0\partial_su_{1,0}/\alpha_{12} \\
 &-2v_{inv}^0(s)\lambda\theta_{3,0}^2D_0\partial_su_{1,0}/\alpha_{22}+3/2v_{inv}^0(s)^3\lambda\partial_su_{1,0}^2D_0\partial_su_{1,0}/\alpha_{12} \\
 &-3/2v_{inv}^0(s)^3\lambda\partial_su_{1,0}^2D_0\partial_su_{1,0}/\alpha_{32}-3/2v_{inv}^0(s)^3\lambda\partial_su_{1,0}^2D_0\partial_su_{1,0}/\alpha_{22} \\
 &-v_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}D_0\partial_su_{1,0}^2/\alpha_{12}+v_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}D_0\partial_su_{1,0}^2/\alpha_{22}+2/3\lambda^2\theta_{3,0}^3/\alpha_{22} \\
 &+\alpha_{22}v_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}\partial_{ss}u_{1,0}^2/\alpha_{12}+\lambda^2v_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}^2/\alpha_{22}-v_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}\partial_{ss}u_{1,0}^2 \\
 &-\lambda^2v_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}^2/\alpha_{12}+2\alpha_{22}v_{inv}^0(s)v_0^{inv}(s)\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{12} \\
 &-2/3\lambda^2\theta_{3,0}^3/\alpha_{12}-v_0^{inv}(s)^2\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}^2-2v_{inv}^0(s)v_0^{inv}(s)\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}\partial_{ss}u_{1,0} \\
 &+\alpha_{22}v_0^{inv}(s)^2\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}^2/\alpha_{12}
 \end{aligned} \tag{۵.ت}$$

$$\begin{aligned}
 RHS(O_{BC11}^{(3)}) &= -2D_0D_2\partial_su_{1,0}/\alpha_{22}-D_1^2\partial_su_{1,0}/\alpha_{22}-2D_0D_1\partial_su_{1,1}/\alpha_{22}+2\lambda D_2\theta_{3,0}/\alpha_{22} \\
 &+2\lambda D_1\theta_{3,1}+1/2\theta_{3,0}^2D_0^2\partial_su_{1,0}/\alpha_{22}+2\partial_su_{1,0}D_0\partial_su_{1,0}^2/\alpha_{22}/\alpha_{22} \\
 &+2\theta_{3,0}D_0\theta_{3,0}D_0\partial_su_{1,0}/\alpha_{22}+\partial_su_{1,0}^2D_0^2\partial_su_{1,0}/\alpha_{22}-\lambda D_0\theta_{3,0}\partial_su_{1,0}^2/\alpha_{22} \\
 &-1/2\theta_{3,0}^2\partial_{ss}u_{1,0}-2\partial_su_{1,0}\partial_{ss}u_{1,0}^2-v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}^3-2v_0^{inv}(s)^2\partial_su_{1,0}^3 \\
 &-1/2v_0^{inv}(s)\theta_{3,0}^2\partial_su_{1,0}-v_0^{inv}(s)\theta_{3,0}^2\partial_{ss}u_{1,0}-1/2\lambda^2\theta_{3,0}^2\partial_su_{1,0}/\alpha_{22} \\
 &-6v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}^2\partial_{ss}u_{1,0}-\lambda^2\partial_su_{1,0}^3/\alpha_{22}-\lambda D_0\theta_{3,0}\theta_{3,0}^2/\alpha_{22}-\partial_su_{1,0}^2\partial_{ss}u_{1,0}
 \end{aligned} \tag{۶.ت}$$

$$RHS(O_{BC12}^{(3)})=1/2\theta_{3,0}^2\partial_{ss}u_{1,0}+\partial_su_{1,0}^2\partial_{ss}u_{1,0}+1/2v_0^{inv}(s)\theta_{3,0}^2\partial_su_{1,0}+v_0^{inv}(s)\partial_su_{1,0}^3 \tag{۷.ت}$$



**بیوست ث:** پارامترهای استفاده شده در ترمهای سکولار

$$\delta_{k,k} = \int_0^1 [\psi_{1,k} \psi_{1,k} + \psi_{6,k} \psi_{6,k} / \alpha_{32}] ds, \quad \xi_{111} = \int_0^1 [\psi_{1,k}^2] ds, \quad \xi_{112} = \int_0^1 [\psi_{1,k} v_{inv}^0 (v_{inv}^0)' (\psi_{1,k}')] ds + \frac{1}{2} \left( \int_0^1 [\psi_{1,k} v_{inv}^0]^2 (\psi_{1,k}'') ds \right) \quad (1.ث)$$

$$\xi_{16} = \int_0^1 [\psi_{1,k} (v_{inv}^0)' \psi_{6,k}] ds + \left( \int_0^1 [\psi_{1,k} v_{inv}^0 (\psi_{6,k}')] ds \right), \quad \xi_{61} = \int_0^1 [\psi_{6,k} v_{inv}^0 (\psi_{1,k}')] ds, \quad \xi_{66} = \int_0^1 [\psi_{6,k}^2] ds \quad (2.ث)$$

$$\chi_{6a1} = \int_0^1 [\psi_{6,k} v_{inv}^0]^3 (\psi_{1,k}')^3 ds, \quad \chi_{6c1} = \int_0^1 [\psi_{6,k} v_{inv}^0 (\psi_{1,k}')] ds, \quad \chi_{6d1} = \int_0^1 [\psi_{6,k}^4] ds, \quad \chi_{6b1} = \int_0^1 [\psi_{6,k} v_{inv}^0]^2 (\psi_{1,k}'')^2 ds, \quad (3.ث)$$

$$\chi_{6b2} = \int_0^1 [\psi_{6,k} v_{inv}^0]^2 (\psi_{1,k}'')^2 ds, \quad \chi_{6b3} = \int_0^1 [\psi_{6,k}^2 (v_{inv}^0)' v_{inv}^0 (\psi_{1,k}') (\psi_{1,k}'')] ds, \quad \chi_{6b4} = \int_0^1 [\psi_{6,k}^2 (v_{inv}^0)''^2 (\psi_{1,k}')^2] ds$$

**بیوست ج:**  $\Gamma$  ها و ضریب غیرخطی مؤثر برای مود  $k$  ام

$$\Gamma_{1,k,R} = -C_3 / \alpha_{22} + \xi_{61} / \alpha_{32} + 2\xi_{16} / \alpha_{22} + \xi_{61} / \alpha_{22} - \xi_{61} / \alpha_{12}$$

$$\Gamma_{1,k,i} = \xi_{111} - \frac{1}{2} C_4 / \alpha_{22} + \xi_{66} / \alpha_{32} - 2\xi_{112} / \alpha_{22}$$

$$\Gamma_{2,k,i} = -C_6 / \alpha_{22} - \frac{3}{2} \chi_{6a1} / \alpha_{32} - \frac{3}{2} \chi_{6a1} / \alpha_{22} - 6\chi_{1b3} / \alpha_{22} - 2\chi_{1d1} / \alpha_{22} - 6\chi_{1d2} / \alpha_{22} - 9\chi_{1b1} / \alpha_{22}$$

$$- 2\chi_{6c1} / \alpha_{22} + 2\chi_{1d1} / \alpha_{12} + 6\chi_{1d2} / \alpha_{12} + 2\chi_{6c1} / \alpha_{12} - 3\chi_{1b2} / \alpha_{22} + \frac{3}{2} \chi_{6a1} / \alpha_{12}$$

$$\Gamma_{2,k,R,\lambda} = -\frac{1}{2} (2C_{5,\lambda}^2 \alpha_{12} + 36\alpha_{12}\chi_{1a1} + 48\alpha_{12}\chi_{1a20} + 6\alpha_{12}\chi_{1c1} + 12\alpha_{12}\chi_{1c16} + 12\alpha_{12}\chi_{1c17} + 4\alpha_{22}\chi_{6d1} - 6\alpha_{12}\chi_{6b1} - 4\alpha_{12}\chi_{6d1} - 6\alpha_{22}\chi_{1c1} - 12\alpha_{22}\chi_{1c16} - 12\alpha_{22}\chi_{1c17} + 6\alpha_{22}\chi_{6b1}) / (\alpha_{22}\alpha_{12})$$

$$\Gamma_{2,k,R,\omega} = -\frac{1}{2} (2\alpha_{12}\chi_{1c1} + 4\alpha_{12}\chi_{1c16} + 4\alpha_{12}\chi_{1c17} - 2\alpha_{12}\chi_{6b1} + 2C_{5,\omega,k}^2 \alpha_{12} + 32\alpha_{12}\chi_{1a20} + 24\alpha_{12}\chi_{1a1} - 4\alpha_{22}\chi_{1c16} - 4\alpha_{22}\chi_{1c17} + 2\alpha_{22}\chi_{6b1} - 2\alpha_{22}\chi_{1c1}) / (\alpha_{22}\alpha_{12})$$

$$\Gamma_{2,k,R,C} = -\frac{1}{2} (12\chi_{1c14}\alpha_{12}\alpha_{22} + 12\chi_{1c7}\alpha_{12}\alpha_{22} + 12\alpha_{22}^2\chi_{1a18}\alpha_{12} + 12\chi_{1c10}\alpha_{12}\alpha_{22} + 24\chi_{1c5}\alpha_{12}\alpha_{22} + 6\chi_{1c3}\alpha_{12}\alpha_{22} + 12\chi_{1c15}\alpha_{12}\alpha_{22} + 12\chi_{1c4}\alpha_{12}\alpha_{22} + 12\chi_{1a5}\alpha_{12}\alpha_{22} + 12\chi_{1a3}\alpha_{12}\alpha_{22} + 48\chi_{1a6}\alpha_{12}\alpha_{22} - 6\alpha_{22}^2\chi_{1a19}\alpha_{12} + 84\chi_{1a13}\alpha_{12}\alpha_{22} + 60\chi_{1a12}\alpha_{12}\alpha_{22} + 180\chi_{1a7}\alpha_{12}\alpha_{22} - 9\alpha_{22}^2\chi_{1a17}\alpha_{12} + 96\chi_{1a4}\alpha_{12}\alpha_{22} + 24\chi_{1c9}\alpha_{12}\alpha_{22} + 12\chi_{1a14}\alpha_{12}\alpha_{22} + 12\chi_{1c6}\alpha_{12}\alpha_{22} - 18\alpha_{22}^2\chi_{1a10}\alpha_{12} + 60\chi_{1c8}\alpha_{12}\alpha_{22} + 144\chi_{1a8}\alpha_{12}\alpha_{22} + 6\chi_{1c11}\alpha_{12}\alpha_{22} + 6\chi_{1c2}\alpha_{12}\alpha_{22} + 24\chi_{1c12}\alpha_{12}\alpha_{22} + 18\alpha_{22}^2\chi_{1a11}\alpha_{12} + 18\chi_{1c13}\alpha_{12}\alpha_{22} + 24\chi_{1a15}\alpha_{12}\alpha_{22} - 9\alpha_{22}^2\chi_{1a2}\alpha_{12} + 2C_{5,Cons} \alpha_{22}\alpha_{12} + 6\chi_{6b2}\alpha_{22}\alpha_{12} + 12\chi_{6b3}\alpha_{22}\alpha_{12} + 6\chi_{6b4}\alpha_{22}\alpha_{12} - 24\alpha_{22}^2\chi_{1c12} - 12\alpha_{22}^2\chi_{1c15} - 6\alpha_{22}^2\chi_{1c2} - 6\alpha_{22}^2\chi_{1c3} - 12\alpha_{22}^2\chi_{1c4} - 24\alpha_{22}^2\chi_{1c5} - 12\alpha_{22}^2\chi_{1c6} - 12\alpha_{22}^2\chi_{1c7} - 24\alpha_{22}^2\chi_{1c9} - 12\alpha_{22}^2\chi_{1c10} - 6\alpha_{22}^2\chi_{1c11} - 12\alpha_{22}^2\chi_{6b3} - 6\alpha_{22}^2\chi_{6b4} - 18\alpha_{22}^2\chi_{1a16}\alpha_{12} - 12\alpha_{22}^2\chi_{1c14} - 18\alpha_{22}^2\chi_{1c13} - 60\alpha_{22}^2\chi_{1c8} - 6\alpha_{22}^2\chi_{6b2}) / (\alpha_{22}\alpha_{12}) \quad (1.ج)$$

$$\Gamma_{2,k,R} = \lambda^2 \Gamma_{2,k,R,\lambda} + \Gamma_{2,k,R,\omega} \omega_{1,k}^2 + \Gamma_{2,k,R,C}$$

$$\gamma_{1,k,i} = -\omega_{1,k} (\lambda^2 \Gamma_{1,k,R} \Gamma_{2,k,i} - 2\Gamma_{1,k,i} \Gamma_{2,k,R}) / (\lambda^2 \Gamma_{1,k,R}^2 + 4\Gamma_{1,k,i}^2 \omega_{1,k}^2)$$

$$\gamma_{1,k,R} = -\lambda (2\Gamma_{1,k,i} \Gamma_{2,k,i} \omega_{1,k}^2 + \Gamma_{1,k,R} \Gamma_{2,k,R}) / (\lambda^2 \Gamma_{1,k,R}^2 + 4\Gamma_{1,k,i}^2 \omega_{1,k}^2) \quad (2.ج)$$

پیوست ج: پارامترهای استفاده شده در معادلات مدولاسیون

$$\begin{aligned}
 C_3 &= 2\psi_{6,k}|_{s=1}\psi_{1,k}|_{s=1}, C_4 = -2(\psi_{1,k}'|_{s=1})\psi_{1,k}|_{s=1} \\
 C_{5,Cons} &= -6\psi_{1,k}|_{s=1}(v_{inv}^0|_{s=1})^2(\psi_{1,k}'|_{s=1})^3 - 3\psi_{1,k}|_{s=1}(\psi_{1,k}''|_{s=1})\psi_{6,k}|_{s=1}^2(v_{inv}^0|_{s=1}) \\
 &\quad - 6\psi_{1,k}|_{s=1}(\psi_{1,k}''|_{s=1})^2(\psi_{1,k}'|_{s=1}) + \frac{3}{2}\psi_{6,k}|_{s=1}^2(v_{inv}^0|_{s=1})(\psi_{1,k}'|_{s=1})^2 \\
 &\quad - \frac{3}{2}\psi_{1,k}|_{s=1}\psi_{6,k}|_{s=1}^2\psi_{6,k}|_{s=1}^2v_{inv}^0|_{s=1}\psi_{1,k}'|_{s=1} + 3(\psi_{1,k}''|_{s=1})(\psi_{1,k}'|_{s=1})^3 \\
 &\quad - \frac{3}{2}\psi_{1,k}|_{s=1}\psi_{6,k}|_{s=1}^2(\psi_{1,k}'''|_{s=1}) - 3\psi_{1,k}|_{s=1}(\psi_{1,k}'''|_{s=1})(\psi_{1,k}'|_{s=1})^2 \\
 &\quad - 3\psi_{1,k}|_{s=1}(v_{inv}^0|_{s=1})(\psi_{1,k}'|_{s=1})^3 + \frac{3}{2}(\psi_{1,k}'|_{s=1})(\psi_{1,k}''|_{s=1})\psi_{6,k}|_{s=1}^2 \\
 &\quad - 18\psi_{1,k}|_{s=1}(\psi_{1,k}''|_{s=1})(v_{inv}^0|_{s=1})(\psi_{1,k}'|_{s=1})^2 + 3(v_{inv}^0|_{s=1})(\psi_{1,k}'|_{s=1})^4 \\
 C_{5,\omega_{1,k}^2} &= \frac{1}{2}\psi_{1,k}'|_{s=1}(\psi_{6,k}|_{s=1}^2 - 2\psi_{1,k}'|_{s=1}^2)\psi_{1,k}|_{s=1}, \\
 C_{5,\lambda^2} &= -\frac{3}{2}\psi_{1,k}'|_{s=1}(\psi_{6,k}|_{s=1}^2 + 2\psi_{1,k}'|_{s=1}^2)\psi_{1,k}|_{s=1} \\
 C_6 &= -\psi_{6,k}|_{s=1}(\psi_{6,k}|_{s=1}^2 + (\psi_{1,k}'|_{s=1})^2)\psi_{1,k}|_{s=1}
 \end{aligned} \tag{۱.ج}$$