Amirkabir Journal of Mechanical Engineering

Amirkabir J. Mech. Eng., 52(10) (2021) 709-712
DOI: 10.22060/mej.2019.15966.6240

Buckling Analysis of Truncated Conical Sandwich Panel with Porous Functionally Graded Core in Different Thermal Conditions

M. Rahmani[1], Y. Mohammadi[1]*, F. Kakavand[2], H. Raeisifard[1]

[1] Faculty of Industrial and Mechanical Engineering, Qazvin Branch, Islamic Azad University Qazvin, Iran.
[2] Department of Mechanical Engineering, Takestan Branch, Islamic Azad University, Takestan, Iran.

ABSTRACT: In this paper, for the first time, by considering the flexibility of the core in the high order theory of sandwich shells, the buckling behavior of the truncated conical sandwich shells which include a temperature-dependent porous functionally graded core and two temperature-dependent homogeneous face sheets are investigated in various thermal conditions. The power-law rule which modified by considering the two types of porosity volume fractions is applied to model the gradual variation of functionally graded materials. By applying the principle of minimum potential energy, considering the in-plane stresses in the core and faces, and nonlinear von-Karman strains for both mechanical and thermal stresses, the governing equations are obtained under the axial in-plane compressive loads. A Galerkin procedure is used to solve the equations in a simply supported, clamped and clamped-free boundary conditions. Uniform, linear and nonlinear temperature distributions are used to model the effect of the temperature changing in the sandwich shell. To verify the results of these work, they are compared with finite element method results obtained by ABAQUS software and for special cases with the results in literature. Critical load variations are surveyed versus the temperature changing, geometrical effects, porosities, and some others in the numerical examples.

Review History:

Received: 11 Mar. 2019
Revised: 10 May. 2019
Accepted: 8 Jul. 2019
Available Online: 15 Jul. 2019

Keywords:

High order sandwich shell theory
Conical sandwich
Functionally graded core
Porosity
Temperature distribution

1- Introduction

After the first considering sandwich constructions in a research paper in 1944, these modern structures with high flexural stiffness to weight ratio have become favorite structures among the researchers. Sandwiches include two faces to resist the in-plane and bending loads and a core to resist the transverse shear loads and maintain the faces distance [1]. Conical sandwich shells are important kinds of sandwich structures which have been applied in modern equipment such as vessels, missiles, spacecraft, and nuclear reactors. Despite the importance of these modern structures, due to the complex set of partial differential equations, there are little studies about conical sandwich shells comparing with cylindrical shells and circular plates [2].

Due to failure, delamination and thermal stress concentration in high-temperature environments, application of usual materials and ordinary composites is not proper. Japanese researchers proposed Functionally Graded Materials (FGM) to overcome these problems. FGMs are microscopic inhomogeneous materials which gradually graded from a metal surface to a ceramic one [3]. During the production process of FGMs, some micro-voids appear which affect the material properties. Considering these porosities in the modeling of these materials is a development in the researches. Considering the dependence of material properties on the temperature, and distribution of the temperature in the thickness direction of the structure are important to model the mechanical behavior of the sandwich panels, too.

*Corresponding author's email: u.mohammadi@qiau.ac.ir

There are several approaches to investigate the mechanical behavior of sandwich structures, such as the Finite Element Model (FEM), shear deformation theories, 3-Dimensional (3D) elastic theory, and energy methods [4]. In these theories the core height is constant, but in fact the thickness of the sandwich plates is variable. So, the core should be considered as a flexible layer that compressed transversely. In the classical theories, the localized effects in the core cannot be calculated, so to consider these effects, a high order theory was presented [5].

Often, studying the buckling of conical shells has been interesting for researchers. Sofiyev [6] by using First-Order Shear Deformable Theory (FSDT) and Galerkin method studied the stability of Functionally Graded (FG) conical sandwich shells under axial load. Xu et al. [7] studied the buckling behavior of truncated conical shells subjected to uniform pressure by using the calculus of variations. Zhong and Reimerdes [8] employed a high order theory to study the stability behavior of conical sandwich shells by using the principle of minimum total potential energy. Sofiyev [9] in a review paper gathered some research on vibration and buckling of FG shells.

2- Methodology

In this study, by applying a high order theory which modified by considering the flexibility of the core, buckling behavior of truncated conical sandwich shells with porous FG core under axial compressible loads is investigated in the uniform, linear and nonlinear temperature distributions. FG material properties are temperature and location-dependent which graded in according to power-law rules that include the volume fraction

Copyrights for this article are retained by the author(s) with publishing rights granted to Amirkabir University Press. The content of this article is subject to the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY-NC 4.0) License. For more information, please visit https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.

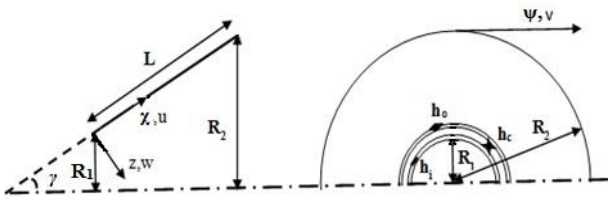


Fig. 1. Hybrid turbine model

Fig. 2. The flow field and boundary conditions

of the porosities. The homogeneous materials are temperature dependent, too. High order stresses and thermal stress resultants, in-plane stresses and thermal stresses of the core and face sheets are considered at the same time. Nonlinear von Karman strains are used for both mechanical and thermal stresses. Boundary conditions are simply supported, clamped and clamped-free and equations are derived based on the minimum potential energy principle. To obtain critical loads, a Galerkin method is applied. To validate the present approach, the results of this analytical approach are compared with the numerical results obtained by ABAQUS software and for a special case are compared with some studies. Finally, the effects of the temperature changing, volume fraction distribution of FG core, porosity and some geometrical effects on the buckling characteristics of defined sandwich shells are investigated.

3- Results and Discussion

In this study, a truncated sandwich shell is considered which the interior plane of the core and inner face sheet are made of the zirconium dioxide and the outer plane of the core and outer face sheet are made of silicon nitride. Fig. 1 shows a schematic of a truncated conical sandwich shell in a curve linear coordination.

To study the buckling behavior of FG conical sandwich shells, and to obtain the governing equations, minimum potential energy principle is applied which includes total potential energy variation, δV, and internal potential energy variation, δU. Based on a high order sandwich shell theory, distinct displacement fields should be considered for each layer. So FSDT is employed to model the displacement fields of the face-sheets. Also, cubic patterns are applied to model the kinematic relations of the core with twelve unknown coefficients for the in-plane and vertical displacement components. By substituting the kinematic relations and compatibility conditions, and after some algebraic operations, the twenty-eight equations are obtained. A Galerkin method is determined to solve the governing equations of truncated conical sandwich shells, with twenty-eight trigonometric shape functions, which satisfy the boundary conditions. These twenty-eight equations are not independent and the number of them can be reduced by a reduction approach. Lagrange constants can be isolated as the expression of the face sheets. It can be seen that based on the compatibility conditions, the unknown constants of the faces are dependent on the core constants. At last by some operations, the number of the equations is reduced to sixteen in terms of the core unknown constants. These sixteen equations can be written in a 16×16 matrix. To verify the approach of this study, present results are compared with FEM results of ABAQUS software and in a special case are compared with results of Refs. [10-11]. Fig. 2 shows a finite element model of the structure in the present study.

4- Conclusions

Effects of temperature, power-law index, semi-vertex angle, thicknesses, radius, length, porosities and three temperature distributions on the critical load are discussed. Increasing the temperature reduces mechanical properties. So, with increasing the temperature in a constant power-law index, the critical load parameter decreases. While power law index is increased, the amount of ceramic reduces, so the critical load parameter decreases. In a constant power-law index and a constant temperature, the critical load parameter decreases when length to thickness ratio is increased. With increasing the semi vertex angle, the critical load parameter decreases. In a constant power-law index, the critical load parameter decreases when radius to thickness ratio is increased. With increasing the core to face-sheet thickness ratio in different power-law indices, the critical load parameters decrease, except in the zero power in which with increasing the ratio the critical load increases. In different power-law indices, with increasing the length to radius ratio, lower than four, the critical load parameters decrease. When the length to radius ratio is more than four, by increasing the ratio, the critical load parameters increase. With increasing the porosity volume fraction, the critical load parameter decreases. These decreasing are more in the case of even porosity distribution. Critical loads in the case of non-uniform distributions of temperature are bigger than the uniform one. The highest critical loads are in nonlinear temperature distribution. The critical load parameter is the highest in the clamped boundary condition.

References

[1] J. Vinson, The behavior of sandwich structures of isotropic and composite materials, Routledge, 2018.

[2] G. Jin, T. Ye, Z. Su, Conical Shells, in: Structural Vibration, Springer, 2015, pp. 199-233.

[3] R.M. Mahamood, E.T. Akinlabi, Functionally graded materials, Springer, 2017.

[4] J. Reddy, Analysis of functionally graded plates, International Journal for numerical methods in engineering, 47(1-3) (2000) 663-684.

[5] Y. Frostig, M. Baruch, O. Vilnay, I. Sheinman, High-order

theory for sandwich-beam behavior with transversely flexible core, Journal of Engineering Mechanics, 118(5) (1992) 1026-1043.

[6] A. Sofiyev, The stability analysis of shear deformable FGM sandwich conical shells under the axial load, Composite Structures, 176 (2017) 803-811.

[7] X. Jia-chu, W. Cheng, L. Ren-Huai, Nonlinear stability of truncated shallow conical sandwich shell with variable thickness, Applied Mathematics and Mechanics, 21(9) (2000) 977-986.

[8] C. Zhong, H.-G. Reimerdes, Stability behavior of cylindrical and conical sandwich shells with flexible core, Journal of Sandwich Structures & Materials, 9(2) (2007) 143-166.

[9] A. Sofiyev, Review of research on the vibration and buckling of the FGM conical shells, Composite Structures, Composite Structures, 211 (2019) 301-317.

[10] A. Sofiyev, The buckling of FGM truncated conical shells subjected to axial compressive load and resting on Winkler–Pasternak foundations, International Journal of Pressure Vessels and Piping, 87(12) (2010) 753-761.

[11] P. Seide, Discussion: ``Buckling of Circular Cones under Axial Compression'' (Lackman, Leslie, and Penzien, Joseph, 1960, ASME J. Appl. Mech., 27, pp. 458-460), Journal of Applied Mechanics, 28 (1961) 315.

This page intentionally left blank

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر

نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، دوره ۵۲، شماره ۱۰، سال ۱۳۹۹، صفحات ۲۸۵۹ تا ۲۸۷۸
DOI: 10.22060/mej.2019.15966.6240

تحلیل کمانش پوسته ساندویچی مخروطی با هسته هدفمند متخلخل در شرایط حرارتی مختلف

محسن رحمانی[۱]، یونس محمدی[۱*]، فرشاد کاکاوند[۲]، حامد رییسی فرد[۱]

[۱] دانشکده مهندسی صنایع و مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین، قزوین، ایران.
[۲] دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تاکستان، تاکستان، ایران.

خلاصه: در این تحقیق، برای اولین بار، با در نظر گرفتن انعطاف‌پذیری هسته در تئوری مرتبه بالای پوسته‌های ساندویچی، رفتار کمانشی پوسته ساندویچی مخروطی ناقص که شامل هسته هدفمند متخلخل و رویه‌های همگن است، در توزیع دماهای مختلف بررسی می‌شود. از مواد با خواص وابسته به دما در هسته و رویه‌ها استفاده می‌گردد و برای مدل‌سازی تغییر تدریجی خواص مواد هدفمند از قانون توانی که با در نظر گرفتن دو مدل توزیع تخلخل اصلاح می‌شود، استفاده می‌شود. به کمک اصل مینیمم انرژی پتانسیل و با در نظر گرفتن تنش‌های درون صفحه‌ای هسته و رویه‌ها و کرنش غیرخطی ون کارمن هم برای تنش مکانیکی و هم تنش حرارتی، معادلات تعادل سازه در معرض بار فشاری درون صفحه‌ای محوری به‌دست می‌آیند. از روش گلرکین برای حل معادلات حاکم در شرایط تکیه‌گاهی ساده، دو سرگیردار و گیردار–آزاد بهره برده می‌شود. برای بررسی اثر تغییر دما بر روی سازه، توزیع دما به‌صورت یکنواخت، خطی و غیرخطی در نظر گرفته می‌شود. برای صحت‌سنجی روش، نتایج تحلیل کار حاضر در حالات خاص با مقالات دیگر و همچنین با نتایج بدست آمده از نرم‌افزار آباکوس مقایسه می‌شود. تغییرات بار بحرانی بی‌بعد نسبت به تغییرات هندسی سازه، تغییرات دما، خواص مواد و تخلخل بررسی خواهد شد.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۷/۱۲/۲۰
بازنگری: ۱۳۹۸/۰۲/۲۰
پذیرش: ۱۳۹۸/۰۴/۱۷
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۰۴/۲۴

کلمات کلیدی:
تئوری مرتبه بالای پوسته ساندویچی
ساندویچ مخروطی
هسته هدفمند
تخلخل
توزیع حرارت

۱- مقدمه

بعد از اولین استفاده فیربیرن[1] از ساختار ساندویچی، کاربرد این سازه‌ها در صنایع و تجهیزات مختلف از جمله، پنل‌های هواپیما، تجهیزات راداری، پنل‌های ساختمانی و تجهیزات دیگر بسیار گسترش یافته است. سازه‌های ساندویچی معمولا از سه لایه تشکیل می‌شوند. دو لایه خارجی به نام رویه به یک لایه داخلی که هسته نام دارد، می‌چسبند. رویه‌ها از هسته محکم‌تر و مقاوم‌ترند، اما مقاومت هسته باید به قدری باشد که فاصله عمودی دو رویه را حفظ کند. این سازه‌ها بر خلاف وزن کمشان، استحکام، مقاومت و سفتی خمشی بالایی دارند [۱].

کامپوزیت‌ها از جمله موادی هستند که در ساخت رویه‌ها و هسته استفاده می‌شوند. مواد کامپوزیتی شامل چندین ماده با خواص فیزیکی و شیمیایی مجزا در فاز جامدند که با هم ترکیب شده و منجر به ایجاد مواد کارآمدتر از مواد اولیه می‌گردند. این مواد استحکام بالا و وزن کمی دارند ولی در دماهای بالا ضعیف‌اند و به دلیل ناپیوستگی در وجه مشترک لایه‌ها و تورق که منجر به تمرکز تنش می‌شود، از بین می‌روند. پژوهشگران ژاپنی برای چیره شدن بر این مشکلات در سپرهای حرارتی فضاپیماها استفاده از مواد هدفمند را پیشنهاد کردند [۲]. مواد هدفمند که شامل سرامیک و فلز هستند، به‌طور میکروسکوپی غیرهمگن هستند. سرامیک باعث ایجاد خاصیت مقاومت حرارتی و فلز سبب کارایی مکانیکی بالا و همچنین سبب کاهش احتمال شکست می‌شود. بنابراین این مواد تغییرات شدید وجه مشترک را با تغییر تدریجی کسر حجمی مواد تشکیل‌دهنده در یک یا چند جهت از بین می‌برند [۳]. به دلیل کاربرد روزافزون این مواد در صنایع مختلف، پژوهش‌های گوناگونی بر روی آن‌ها انجام می‌گیرد. هادی و همکاران [۴] به تحلیل ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای هدفمند که خواصشان بر طبق قانون توانی در راستای ضخامت تغییر می‌کرد پرداختند. ترابی و افشاری [۵] لنگش و پایداری روتورهایی که در معرض نیروی محوری و گشتاور پیچشی بودند را بر اساس تئوری تیموشنکو بررسی کردند. این روتورها از مواد هدفمندی ساخته شده بودند که خواص مکانیکی‌شان به‌صورت پیوسته

1 Fairbairn

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: u.mohammadi@qiau.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode دیدن فرمائید.

در راستای طولی تغییر می‌کرد. شکیب و همکاران [۶] با استفاده از مواد هدفمند در هسته یک پنل ساندویچی به بررسی اثر ضربه سرعت پایین بر پاسخ دینامیکی این سازه پرداختند. طهانی و طالبیان [۷] با بهره‌گیری از مواد هدفمند در مخازن استوانه‌ای رفتار استاتیکی این سازه‌ها را در معرض بارهای مکانیکی و حرارتی بررسی کردند. خواص مواد به تدریج در راستای ضخامت مطابق با تابع توانی تغییر می‌کرد. عارفی و آرانی [۸] تحلیل ترموالاستیک و الکترومغناطیس نانوتیرهای هدفمند را در محیط‌های مختلف مکانیکی، الکتریکی و مغناطیسی بررسی کردند. آرانی و همکاران [۹] ارتعاشات ورق ساندویچی ویسکوالاستیک با رویه‌های نانوکامپوزیتی پیزوالکتریک هدفمند را تحلیل کردند.

از روش‌های مختلفی در ساخت و تولید مواد هدفمند استفاده می‌شود که بسیار پیچیده و گران‌قیمت هستند. در فرآیند تولید مواد هدفمند به خصوص روش پختن، ریزحفره‌هایی موسوم به تخلخل ایجاد می‌شوند که بر خواص مکانیکی آن‌ها اثر می‌گذارند، بنابراین مطالعه اثر ریزحفره‌ها در این مواد، یکی از علایق پژوهشگران در تحقیقات نوین شده است. اکبری [۱۰] یک روش بهینه‌سازی توزیع تخلخل در تیرهای هدفمند ارائه داد تا رفتار کمانشی را اصلاح کند. نتایج این کار نشان می‌دهد که میزان تخلخل در دیواره‌های تیر کمینه و در مرکز آن بیشینه است. وانگ و همکاران [۱۱] ارتعاشات ورق‌های هدفمند متخلخل را مطالعه نمودند. دو نوع توزیع تخلخل به نام یکنواخت و غیریکنواخت که در فرآیند ساخت ایجاد می‌شوند در این تحلیل در نظر گرفته شد. رضایی و همکاران [۱۲] رفتار ارتعاشاتی ورق‌های مستطیل هدفمند را بررسی کردند و دو نوع توزیع تخلخل یکنواخت و غیریکنواخت را در نظر گرفتند. در توزیع یکنواخت حفره‌ها به‌طور یکنواخت در سراسر سطح مقطع پخش می‌شوند ولی در توزیع غیریکنواخت، آن‌ها در مرکز سطح میانی جمع می‌شوند. لیو و همکاران [۱۳] با در نظر گرفتن دو نوع توزیع تخلخل در مواد هدفمند رفتار کمانشی تیرهای ساندویچی را بررسی کردند. خواص مواد با قانون ترکیب ویت تقریب زده شد. آرانی و همکاران [۱۴] تحلیل دینامیکی ورق متخلخل بر روی بستر الاستیک را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی بررسی کردند. چن و همکاران [۱۵] کمانش و خمش ورق‌های هدفمند متخلخل را با روش ریتز چبیشف تحلیل کردند.

برای بررسی رفتار مکانیکی سازه‌های ساندویچی روش‌های مختلفی از جمله روش المان محدود، تئوری‌های تغییر شکل برشی ورق و تئوری الاستیسیته سه‌بعدی پیشنهاد شده است. شعبان و علی‌بیگلو [۱۶] با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی و روش انرژی، خمش پنل‌های ساندویچی را مطالعه نمودند. یه و چن [۱۷] با روش المان محدود رفتار دینامیکی ورق‌های ساندویچی مستطیلی ارتوتروپیک را مطالعه کردند. مانتاری و اُر [۱۸] با به کار بردن تئوری برشی مرتبه اول ارتعاشات آزاد ورق‌های کامپوزیتی ساندویچی مستطیل شکل را بررسی کردند. ژائو و همکاران [۱۹] ارتعاشات آزاد پنل‌های مخروطی ناقص کامپوزیتی تقویت شده با نانوتیوب‌های کربنی هدفمند را بر اساس روش سری‌های فوریه و روش ریتز بررسی کردند. سپیانی و همکاران [۲۰] کمانش و ارتعاشات پوسته استوانه‌ای دولایه‌ای هدفمند را بر اساس تئوری برشی مرتبه اول تحلیل کردند. آرانی و همکاران [۲۱] کمانش مکانیکی، حرارتی و الکتریکی نانوتیرهای ساندویچی مستقر بر بستر پسترناک را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا مطالعه کردند. کالیری و همکاران [۲۲] پژوهش‌های اخیر بر روی تئوری سازه‌های ساندویچی را گردآوری کرده‌اند. در تئوری‌های کلاسیک ضخامت هسته ثابت در نظر گرفته شده درحالی‌که در سازه‌های ساندویچی ضخامت هسته متغیر است. برای پوشش دادن پدیده انعطاف‌پذیری هسته تئوری مرتبه بالا پیشنهاد شده است. مظفری و همکاران [۲۳] ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی مستطیلی شامل سیم‌های حافظه‌دار را بر اساس تئوری مرتبه بالای ورق ساندویچی بررسی کردند. افطاری و همکاران [۲۴] با استفاده از تئوری مرتبه بالای پنل ساندویچی، ارتعاشات آزاد پنل ساندویچی را بررسی کردند. ملک‌زاده و همکاران [۲۵] بر اساس تئوری مرتبه بالای ورق ساندویچی پاسخ دینامیکی ورق‌های ساندویچی با رویه کامپوزیتی بر روی بستر الاستیک که در معرض ضربه سرعت پایین قرار داشت را مطالعه نمودند. محمدی و همکاران [۲۶] با استفاده از تئوری مرتبه بالای ورق ساندویچی پاسخ ضربه سرعت پایین ورق ساندویچی با رویه‌های هدفمند را بررسی کردند. محمدی و خلیلی [۲۷] بر اساس تئوری مرتبه بالای تیر ساندویچی تغییر شکل محلی تیر ساندویچی با رویه هدفمند و هسته منعطف را بررسی کردند.

در محیط‌های حرارتی خواص مواد تغییر می‌کند، به همین دلیل در نظر گرفتن وابستگی خواص مواد به تغییر دما مهم است. همچنین توزیع دما در راستای ضخامت سازه از موارد مهم در تحلیل و مدل‌سازی رفتار مکانیکی پنل‌های ساندویچی است. محمدی و همکاران [۲۸] با استفاده از تئوری مرتبه بالای ورق ساندویچی ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی دایره‌ای با رویه‌های هدفمند بررسی کردند. خواص مواد رویه و هسته وابسته به دما در نظر گرفته شد. شرعیات و همکاران [۲۹] با استفاده از روش اجزای محدود، رفتار غیرخطی ترموالاستیک گذرای استوانه هدفمند را بررسی کردند. خواص مکانیکی و حرارتی مواد وابسته به دما در نظر گرفته شد. محمدی‌مهر و

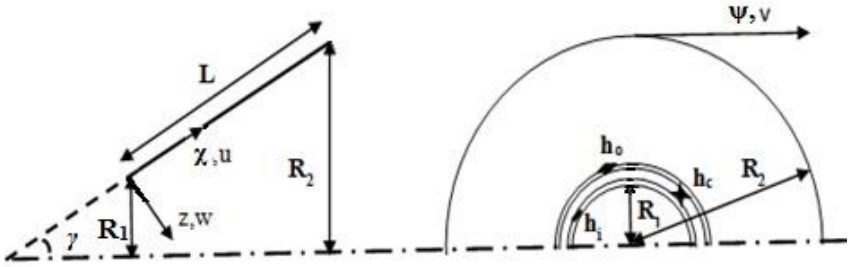
همکاران [۳۰] با در نظر گرفتن خواص وابسته به دما در مواد زمینه و نانولوله‌های تقویت‌کننده به مطالعه کمانش و ارتعاشات میکروورق‌های نانوکامپوزیتی پرداختند. فن تانگ [۳۱] کمانش حرارتی و رفتار خمشی ورق‌های ساندویچی هدفمند را با به کار بردن مواد وابسته به دما در رویه‌ها و هسته بررسی کردند. چن و همکاران [۳۲] به بررسی پاسخ فرکانسی تیرهای هدفمند با به کار بردن تئوری مرتبه بالا پرداختند. خواص مواد با دما تغییر و توزیع دما در راستای ضخامت به‌صورت یکنواخت، خطی و غیرخطی در نظر گرفته شد. سیدی و همکاران [۳۳] کمانش پوسته ساندویچی مخروطی با رویه‌های هدفمند را مطالعه کردند. خواص مواد رویه و هسته وابسته به دما در نظر گرفته شد. فازولاری و فیورنزو [۳۴] ارتعاشات آزاد و پایداری حرارتی ورق‌های ساندویچی هدفمند را با روش ریتز بررسی کردند. آن‌ها سه توزیع دمای یکنواخت، خطی و غیرخطی را در راستای ضخامت در نظر گرفتند. تالبیتوتی [۳۵] اثر بار حرارتی بر ارتعاشات پوسته‌های مخروطی هدفمند مدور را بررسی کرد. او توزیع دما در امتداد ضخامت را به‌صورت غیرخطی در نظر گرفت.

یکی از مهمترین و مدرن‌ترین انواع سازه‌های ساندویچی که در محیط‌های حرارتی استفاده می‌شود، پوسته‌های ساندویچی مخروطی بوده که شامل یک هسته هدفمند هستند. چون پوسته‌های مخروطی هدفمند مقاومت و استحکام حرارتی بالایی دارند، از آن‌ها در کاربردهای مختلف مهندسی از جمله سیستم‌های نیروی محرکه هواپیمای نظامی، سازه‌های بدنه هواپیما، راکت، موتورهای زیردریایی، موشک، و مخازن تحت فشار استفاده می‌کنند [۳۶]. به دلیل کاربرد گسترده این سازه‌ها، بررسی رفتار مکانیکی و به خصوص رفتار ارتعاشی و کمانشی پوسته ساندویچی مخروطی از اهمیت بالایی برخوردار است. آقایی و طالبی‌توتی [۳۷] ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی را بر اساس تئوری کلاسیک در شرایط حرارتی بررسی کردند. سوفیف [۳۸] رفتار کمانشی و ارتعاشاتی پوسته ساندویچی مخروطی با پوشش هدفمند را بر اساس تئوری خطی پوسته دانل بررسی کرد. همچنین سوفیف [۳۹] مروری بر پژوهش‌های انجام شده در زمینه ارتعاشات و کمانش پوسته مخروطی هدفمند انجام داد. ژانگ و ریمردز [۴۰] با استفاده از تئوری مرتبه بالا و بر اساس اصل مینیمم انرژی پتانسیل به بررسی رفتار کمانشی پوسته ساندویچی مخروطی پرداختند. ژو و همکاران [۴۱] با استفاده از حساب تغییرات و در شرایط فشار یکنواخت رفتار کمانشی پوسته مخروطی ناقص را مطالعه نمودند. ثای و همکاران [۴۲] با استفاده از تئوری پوسته کلاسیک، پایداری غیرخطی پوسته ساندویچی مخروطی ناقص هدفمند متخلخل سفت شده غیرمرکزی را بر روی بستر پسترناک بررسی کردند. سوفیف [۴۳] براساس تئوری برشی مرتبه اول و با کمک روش گلرکین رفتار کمانشی پوسته ساندویچی مخروطی هدفمند را در معرض فشار هیدروستاتیک مطالعه کرد.

با بررسی پژوهش‌های انجام شده در زمینه سازه‌های مخروطی، نویسندگان این پژوهش به این نتیجه رسیدند که بررسی کمانش پوسته ساندویچی نیاز به مطالعه بیشتر دارد. در این تحلیل برای اولین بار، رفتار کمانشی پوسته ساندویچی مخروطی ناقص با دو رویه همگن و یک هسته هدفمند که شامل تخلخل است در شرایط حرارتی مختلف و با استفاده از یک تئوری مرتبه بالای اصلاح شده پوسته‌های ساندویچی، تحت بارگذاری فشاری درون صفحه‌ای محوری بررسی می‌گردد. خواص مواد هسته و رویه‌ها وابسته به دما است. خواص مواد هدفمند با در نظر گرفتن دو نوع توزیع تخلخل مطابق با قانون توانی در راستای ضخامت به تدریج تغییر می‌کند. توزیع دمای یکنواخت، خطی و غیرخطی برای بررسی تغییر دما در نظر گرفته می‌شود. تنش‌های درون صفحه‌ای هسته، منتجه‌های حرارتی و منتجه‌های تنش مرتبه بالای هسته که عموماً نادیده گرفته می‌شوند، در معادلات وارد خواهند شد. کرنش غیرخطی وُن کارمن هم برای تنش مکانیکی و هم تنش حرارتی استفاده می‌شود که باعث افزایش دقت و پیچیدگی معادلات حاکم بر سازه می‌گردد. از تئوری برشی مرتبه اول و توابع مکعبی به ترتیب در میدان جابه‌جایی رویه‌ها و هسته استفاده خواهد شد. معادلات حاکم بر اساس اصل مینیمم انرژی پتانسیل بدست می‌آیند و با یک روش کاهش مرتبه از تعداد آن‌ها کاسته می‌شود. روش گلرکین برای حل معادلات در شرایط تکیه‌گاهی ساده، دو سرگیردار و گیردار–آزاد استفاده می‌شود. برای صحت‌سنجی تحلیل کنونی، نتایج در حالاتی خاص با کارهای محققان دیگر و همچنین با نتایج المان محدود مقایسه می‌گردند. در نهایت تغییرات بار بحرانی بی‌بعد نسبت به تغییرات هندسی سازه، تغییرات دما، خواص مواد و تخلخل بررسی خواهد شد.

۲- روابط بنیادین و هندسی

در شکل ۱ پوسته ساندویچی مخروطی با شعاع کوچک R_1، شعاع بزرگ R_2 و زاویه نیم راس γ، بر پایه دستگاه مختصات منحنی الخط (χ,ψ,z) نشان داده شده است. ضخامت رویه‌های بیرونی و داخلی و هسته به ترتیب با h_o، h_i و h_c مشخص می‌شود. تغییرات شعاعی بین دو شعاع کوچک و بزرگ به‌صورت رابطه (۱) است:



شکل ۱: شماتیک پوسته ساندویچی مخروطی

Fig. 1. Schematic of the truncated conical sandwich shell

$$R(\chi)=R_1+\chi\sin\gamma \tag{۱}$$

بر اساس تئوری مرتبه بالای پنل ساندویچی، هر لایه باید به‌صورت مجزا مدل‌سازی شود. بنابراین از تئوری برشی مرتبه اول در میدان جابه‌جایی رویه‌ها استفاده می‌کنیم (روابط (۲) تا (۴)) [۴۴].

$$u_j(\chi,\psi,z_j,t)=u_{0j}(\chi,\psi,t)+z_j\phi_\chi^j(\chi,\psi,t) \tag{۲}$$

$$v_j(\chi,\psi,z_j,t)=v_{0j}(\chi,\psi,t)+z_j\phi_\psi^j(\chi,\psi,t) \tag{۳}$$

$$w_j(\chi,\psi,z_j,t)=w_{0j}(\chi,\psi,t);\quad j=(o,i) \tag{۴}$$

زیرنویس ۰ مقادیر مربوط به صفحه میانی لایه‌ها را مشخص می‌کند. φ_χ و φ_ψ چرخش بردار نرمال بر صفحه میانی به ترتیب حول ψ و χ است. اندیس‌های o، i و c به ترتیب به رویه خارجی، رویه داخلی و هسته اشاره دارند. همچنین، توابع چندجمله‌ای مکعبی برای نمایش میدان جابه‌جایی هسته به کار برده می‌شوند که ضرایب مجهول در آن‌ها توسط حساب تغییرات مطابق روابط (۵) تا (۷) بدست می‌آیند [۳۳].

$$u_c(\chi,\psi,z_j,t)=u_0(\chi,\psi,t)+z_cu_1(\chi,\psi,t)+z_c^2u_2(\chi,\psi,t)+z_c^3u_3(\chi,\psi,t) \tag{۵}$$

$$v_c(\chi,\psi,z_j,t)=v_0(\chi,\psi,t)+z_cv_1(\chi,\psi,t)+z_c^2v_2(\chi,\psi,t)+z_c^3v_3(\chi,\psi,t) \tag{۶}$$

$$w_c(\chi,\psi,z_j,t)=w_0(\chi,\psi,t)+z_cw_1(\chi,\psi,t)+z_c^2w_2(\chi,\psi,t)+z_c^3w_3(\chi,\psi,t) \tag{۷}$$

فرض می‌شود که رویه‌ها در لایه مشترک با هسته به‌طور کامل به هم چسبیده‌اند و هیچگونه حرکت نسبی بین لایه‌های سازه رخ نمی‌دهد. برای برقراری این موقعیت، شرایط سازگاری به‌صورت روابط (۸) تا (۱۳) ارائه می‌گردند.

$$u_o(z_o=h_o/2)=u_c(z_c=-h_c/2) \tag{۸}$$

$$v_o(z_o=h_o/2)=v_c(z_c=-h_c/2) \tag{۹}$$

$$w_o=w_c(z_c=-h_c/2) \tag{۱۰}$$

$$u_i(z_i=-h_i/2)=u_c(z_c=h_c/2) \tag{۱۱}$$

$$v_i(z_i=-h_i/2)=v_c(z_c=h_c/2) \tag{۱۲}$$

$$w_i=w_c(z_c=h_c/2) \tag{۱۳}$$

روابط غیرخطی وُن کارمن برای تعیین کرنش رویه‌ها و هسته به‌صورت روابط (۱۴) تا (۱۹) به کار برده می‌شود [۴۴].

$$\varepsilon_{\chi\chi}^j=u_{j,\chi}+\frac{1}{2}\left(w_{o,\chi}\right)^2,\ j=(c,i,o) \tag{۱۴}$$

$$\varepsilon_{\psi\psi}^j=\frac{1}{r}\left[v_{j,\psi}+u_{j,\psi}\sin\gamma+w_j\cos\gamma\right]+\frac{1}{2r^2}\left(w_{o,\psi}\right)^2 \tag{۱۵}$$

$$\varepsilon_{zz}^{j} = w_{j,z} \quad (۱۶)$$

$$\gamma_{\chi\psi}^{j} = \frac{1}{r}\left[u_{j,\psi} - v_j \sin\gamma\right] + v_{j,\chi} + \frac{1}{r}\left[w_{o,\chi} w_{o,\psi}\right] \quad (۱۷)$$

$$\gamma_{\chi z}^{j} = u_{j,z} + w_{j,\chi} \quad (۱۸)$$

$$\gamma_{\psi z}^{j} = \frac{1}{r}\left[w_{j,\psi} - v_j \cos\gamma\right] + v_{j,z} \quad (۱۹)$$

۲- ۱- مدل‌سازی خواص مواد

برای افزایش دقت مدل‌سازی، خواص مواد در رویه‌ها و هسته، وابسته به دما در نظر گرفته می‌شود که تغییرات این خواص با یک تابع غیرخطی وابسته به دما (رابطه (۲۰)) نشان داده می‌شود [۴۵].

$$P = P_0\left(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3\right) \quad (۲۰)$$

که $T=T_0+\Delta T$ و $T_0=300\ K$، P_{-1}، P_0، P_1، P_2 و P_3 ضرایب دما هستند و برای هر یک از مواد تشکیل‌دهنده یکتا هستند.

به منظور بررسی رفتار مکانیکی پوسته ساندویچی، یک پوسته ساندویچی مخروطی با هسته هدفمند و رویه‌های همگن در نظر گرفته می‌شود. معمولا مواد هدفمند از سرامیک و فلز تشکیل می‌شوند که در حین فرآیند ساخت، ریزحفره‌هایی در این مواد ظاهر می‌شود. خواص مواد در هسته هدفمند، $P(z_c,T)$، علاوه بر وابستگی به دما، به‌تدریج در راستای ضخامت نیز تغییر می‌کنند. این رفتار مطابق با قانون توانی مدل می‌شود که با در نظر گرفتن دو نوع توزیع تخلخل بین فلز و سرامیک اصلاح می‌شود. توزیع اول یکنواخت است که قانون توانی را به‌صورت روابط (۲۱) و (۲۲) اصلاح می‌کند [۴۶].

$$P_c(z_c,T) = g(z_c)P_{ce}^{c}(T) + \left[1-g(z_c)\right]P_m^{c}(T) - \left(P_{ce}^{c}(T) + P_m^{c}(T)\right)\frac{\zeta}{2} \quad (۲۱)$$

$$g(z_c) = \left[\frac{\frac{h_c}{2} - z_c}{h_c}\right]^{N} \quad (۲۲)$$

که کسر حجمی تخلخل با ζ و شاخص توان قانون توانی با N نشان داده شده است. هرگاه سازه‌های هدفمند با روش نفوذ چند مرحله‌ای متوالی تولید شوند، فرض می‌شود که تخلخل در سطح میانی هر لایه ایجاد می‌گردد. در این ناحیه، نفوذ مواد در هم سخت و ناقص است اما در لبه‌های لایه هدفمند این نفوذ به سادگی رخ می‌دهد که باعث ایجاد تخلخل کمتری می‌شود. بنابراین در توزیع دوم، فرض می‌شود که تخلخل در صفحه میانی حداکثر و با نزدیک شدن به لبه‌های لایه به صفر می‌گراید. بنابراین معادله تغییر خواص مواد در حالت غیریکنواخت به‌صورت رابطه (۲۳) اصلاح می‌شود [۴۶].

$$P_c(z_c,T) = g(z_c)P_{ce}^{c}(T) + \left[1-g(z_c)\right]P_m^{c}(T) - \left(P_{ce}^{c}(T) + P_m^{c}(T)\right).\frac{\zeta}{2}.\left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) \quad (۲۳)$$

۲- ۲- توزیع دما

سه توزیع دمای یکنواخت، خطی و غیرخطی در این پژوهش مورد استفاده قرار می‌گیرد. به منظور مدل‌سازی توزیع دمای خطی، مطابق با روابط (۲۴) تا (۲۶) توزیع دما در هر کدام از لایه‌ها به‌صورت مجزا، خطی و توابعی از ضخامت هستند.

$$T_o(z_o) = r_1 z_o + r_2 \quad (۲۴)$$

$$T_c(z_c) = r_3 z_3 + r_4 \quad (۲۵)$$

$$T_i(z_i) = r_5 z_i + r_6 \quad (۲۶)$$

ضرایب مجهول r_1، r_2، r_3، r_4، r_5 و r_6 با شش شرط مرزی حرارتی در روابط (۲۷) و (۲۸) مشخص می‌شوند.

$$T_o(-h_o/2) = T_o;\ T_o(h_o/2) = T_c(-h_c/2);\quad k_o(h_o/2, T_{io})\frac{\partial T_o}{\partial z_o} = k_c(-h_c/2, T_{io})\frac{\partial T_c}{\partial z_c} \quad (۲۷)$$

$$T_i(h_i/2) = T_i;\ T_c(h_c/2) = T_i(-h_i/2);\quad k_i(-h_i/2, T_{ii})\frac{\partial T_i}{\partial z_i} = k_c(h_c/2, T_{ii})\frac{\partial T_c}{\partial z_c} \quad (۲۸)$$

که k ضریب هدایت حرارتی، T_{io} و T_{ii} به ترتیب دمای وجه مشترک

رویه بالا و پایین با هسته و T_o و T_i به ترتیب دمای سطح بیرونی و داخلی ساندویچ است. برای مدل‌سازی توزیع دمای غیرخطی، معادلات انتقال حرارت یک‌بعدی حالت ماندگار به‌صورت مجزا برای رویه‌ها و هسته در نظر گرفته می‌شود. معادلات توزیع دمای غیرخطی رویه‌ها و هسته مطابق با روابط (۲۹) تا (۳۱) است.

$$-\frac{d}{dz_o}\left(k_o\left(T_o\right)\frac{dT_o}{dz_o}\right)=0 \qquad (۲۹)$$

$$-\frac{d}{dz_c}\left(k_c\left(z_c,T_c\right)\frac{dT_c}{dz_c}\right)=0 \qquad (۳۰)$$

$$-\frac{d}{dz_i}\left(k_i\left(T_i\right)\frac{dT_i}{dz_i}\right)=0 \qquad (۳۱)$$

شرایط مرزی برای حل این روابط به‌صورت روابط (۳۲) تا (۳۴) است.

$$-\frac{d}{dz_i}\left(k_i\left(T_i\right)\frac{dT_i}{dz_i}\right)=0 \qquad (۳۲)$$

$$T_o\left(h_o/2\right)=T_{io};T_o\left(-h_o/2\right)=T_o;\\ k_o\frac{\partial T_o}{\partial z_o}=k_c\left(z_c=-h_c/2\right)\frac{\partial T_c}{\partial z_c} \qquad (۳۳)$$

$$T_i\left(-h_i/2\right)=T_{ii};T_i\left(-h_i/2\right)=T_i;\\ k_i\frac{\partial T_i}{\partial z_i}=k_c\left(z_c=h_c/2\right)\frac{\partial T_c}{\partial z_c} \qquad (۳۴)$$

مطابق با شرایط مرزی در روابط (۳۲) تا (۳۴)، معادله (۳۰) براساس سری چندجمله‌ای در رابطه (۳۵) حل می‌شود [۳۵]:

$$T_c\left(z_c\right)=T_{ii}+\left(T_{io}-T_{ii}\right)\eta_z \qquad (۳۵)$$

که در آن η_z به‌صورت رابطه (۳۶) است.

$$\eta(z)=\frac{1}{c}(g(z_c)-(\frac{(k_{ce}-k_m)}{(N+1)\mathrm{k}_m})(g(z_c))^{N+1}+\\ (\frac{(k_{ce}-k_m)^2}{(2N+1)\mathrm{k}_m^2})(g(z_c))^{2N+1}-(\frac{(k_{ce}-k_m)^3}{(3N+1)\mathrm{k}_m^3})(g(z_c))^{3N+1}\\ +(\frac{(k_{ce}-k_m)^4}{(4N+1)\mathrm{k}_m^4})(g(z_c))^{4N+1}-(\frac{(k_{ce}-k_m)^5}{(5N+1)\mathrm{k}_m^5})(g(z_c))^{5N+1}) \qquad (۳۶)$$

و c برابر است با:

$$c=1-(\frac{(k_{ce}-k_m)}{(N+1)\mathrm{k}_m})+(\frac{(k_{ce}-k_m)^2}{(2N+1)\mathrm{k}_m^2})-\\ (\frac{(k_{ce}-k_m)^3}{(3N+1)\mathrm{k}_m^3})+(\frac{(k_{ce}-k_m)^4}{(4N+1)\mathrm{k}_m^4})-(\frac{(k_{ce}-k_m)^5}{(5N+1)\mathrm{k}_m^5}) \qquad (۳۷)$$

که در آن k_m و k_{ce} به ترتیب ضریب هدایتی فلز و سرامیک است. همچنین تغییرات دما در هر یک از رویه‌های همگن مطابق با روابط (۳۸) و (۳۹) به‌دست می‌آیند.

$$T_o\left(z_o\right)=(\frac{T_{io}-T_o}{\int_{-h_o/2}^{h_o/2}\frac{dz_o}{k_o\left(T_o\right)}})\int_{-h_o/2}^{z_o}\frac{dz_o}{k_o\left(T_o\right)}+T_o \qquad (۳۸)$$

$$T_i\left(z_i\right)=(\frac{T_i-T_{ii}}{\int_{-h_i/2}^{h_i/2}\frac{dz_i}{k_i\left(T_i\right)}})\int_{-h_i/2}^{z_i}\frac{dz_i}{k_i\left(T_i\right)}+T_{ii} \qquad (۳۹)$$

۲- ۳- روابط حاکم

به منظور مطالعه رفتار کمانشی پوسته ساندویچی مخروطی ناقص با هسته هدفمند متخلخل و با شرایط مرزی تکیه‌گاهی مختلف و برای به‌دست آوردن معادلات تعادل از اصل مینیمم انرژی پتانسیل استفاده می‌شود که شامل تغییرات انرژی کرنشی و انرژی پتانسیل است [۴۷].

$$\delta U+\delta V=0 \qquad (۴۰)$$

که δV و δU به ترتیب تغییرات انرژی پتانسیل و انرژی کرنشی هستند. تغییرات انرژی پتانسیل به‌صورت رابطه (۴۱) محاسبه می‌شود.

$$\delta V=-\int_0^L\int_0^{2\pi}\delta(\tilde{N}_{\chi\chi}^o\tilde{\varepsilon}_{\chi\chi}^o+\tilde{N}_{\chi\chi}^i\tilde{\varepsilon}_{\chi\chi}^i+\tilde{N}_{\chi\chi}^c\tilde{\varepsilon}_{\chi\chi}^c)rd\chi d\psi \qquad (۴۱)$$

$\tilde{\mathrm{N}}$ منتجه تنش‌های فشاری درون صفحه‌ای در رویه‌ها و هسته‌اند. تغییرات انرژی کرنشی کل شامل تنش‌های مکانیکی و حرارتی به همراه

کرنش‌های غیرخطی لایه‌های پوسته ساندویچی است که انرژی مکانیکی و حرارتی را ایجاد می‌کند. همچنین شرایط سازگاری در وجه مشترک هسته و رویه‌ها در نقش قیودی هستند که با استفاده از شش ضریب لاگرانژ وارد رابطه پتانسیل می‌گردند. با در نظر گرفتن تنش‌های درون صفحه‌ای هسته، تغییرات انرژی کرنشی به‌صورت رابطه (۴۲) مشخص می‌گردد.

$$\begin{aligned}\delta U = &\int_{V_o}((\sigma^o_{\chi\chi}+\sigma^{oT}_{\chi\chi})\delta\varepsilon^o_{\chi\chi}+(\sigma^o_{\psi\psi}+\sigma^{oT}_{\psi\psi})\delta\varepsilon^o_{\psi\psi}\\&+\tau^o_{\chi\psi}\delta\gamma^o_{\chi\psi}+\tau^o_{\chi z}\delta\gamma^o_{\chi z}+\tau^o_{\psi z}\delta\gamma^o_{\psi z})dV_o\\&+\int_{V_i}((\sigma^i_{\chi\chi}+\sigma^{iT}_{\chi\chi})\delta\varepsilon^i_{\chi\chi}+(\sigma^i_{\psi\psi}+\sigma^{iT}_{\psi\psi})\delta\varepsilon^i_{\psi\psi}\\&+\tau^i_{\chi\psi}\delta\gamma^i_{\chi\psi}+\tau^i_{\chi z}\delta\gamma^i_{\chi z}+\tau^i_{\psi z}\delta\gamma^i_{\psi z})dV_i\\&+\int_{V_c}((\sigma^c_{\chi\chi}+\sigma^{cT}_{\chi\chi})\delta\varepsilon^c_{\chi\chi}+(\sigma^c_{\psi\psi}+\sigma^{cT}_{\psi\psi})\delta\varepsilon^c_{\psi\psi}\\&+(\sigma^c_{zz}+\sigma^{cT}_{zz})\delta\varepsilon^c_{zz}+\tau^c_{\chi\psi}\delta\gamma^c_{\chi\psi}+\tau^c_{\chi z}\delta\gamma^c_{\chi z}+\tau^c_{\psi z}\delta\gamma^c_{\psi z})dV_c\\&+\delta\int_0^{L}\int_0^{2\pi}[\lambda_{\chi o}(u_o(z_o=h_o/2)-u_c(z_c=-h_c/2))\\&+\lambda_{\psi o}(v_o(z_o=h_o/2)-v_c(z_c=-h_c/2))\\&+\lambda_{zo}(w_o(z_o=h_o/2)-w_c(z_c=-h_c/2))\\&+\lambda_{\chi i}(u_c(z_c=h_c/2)-u_i(z_i=-h_i/2))\\&+\lambda_{\psi i}(v_c(z_c=h_c/2)-v_i(z_i=-h_i/2))\\&+\lambda_{zi}(w_c(z_c=h_c/2)-w_i)]rd\chi d\psi\end{aligned} \tag{۴۲}$$

که $\sigma_{\chi\chi}$، $\sigma_{\psi\psi}$ و $\tau_{\chi\psi}$ نشان‌دهنده تنش‌های درون صفحه‌ای عمودی و برشی در لایه‌های سازه هستند. $\varepsilon_{\chi\chi}$، $\varepsilon_{\psi\psi}$ و $\gamma_{\chi\psi}$ کرنش‌های غیرخطی عمودی و برشی هستند. اندیس T در بالای مولفه‌های تنش بیانگر تنش حرارتی است. σ_{zz} و ε_{zz} تنش عمودی و کرنش عمودی در راستای ضخامت هسته‌اند. $\tau_{z\psi}$، $\tau_{z\chi}$ و $\gamma_{z\psi}$ و $\gamma_{z\chi}$ بیانگر تنش‌های برشی و کرنش‌های برشی در هسته‌اند. λ_{χ}، λ_{ψ} و λ_{z} ضرایب لاگرانژ هستند که به واسطه شرایط سازگاری در وجه مشترک هسته و رویه‌ها ایجاد می‌شوند. پس از بسط روابط (۴۱) و (۴۲)، منتجه‌های تنش و منتجه‌های گشتاور در رویه‌ها در روابط ظاهر می‌شوند که به‌صورترابطه (۳۴) بیان می‌شوند که در آن، N و N^T به ترتیب بیانگر منتجه تنش درون صفحه‌ای و منتجه تنش حرارتی است. Q منتجه‌های تنش‌های برشی خارج از صفحه، M و M^T منتجه‌های گشتاور و منتجه‌های گشتاور حرارتی هستند. ضرایب ثابت A، B و D به ترتیب معرف سفتی کششی، سفتی خمشی-کششی و سفتی خمشی هستند. تعاریف این پارامترها در بخش پیوست الف آورده شده است.

$$\begin{bmatrix}N^j_{\chi\chi}\\N^j_{\psi\psi}\\N^j_{\chi\psi}\\M^j_{\chi\chi}\\M^j_{\psi\psi}\\M^j_{\chi\psi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^j_{11}&A^j_{12}&0&B^j_{11}&B^j_{12}&0\\A^j_{12}&A^j_{22}&0&B^j_{12}&B^j_{22}&0\\0&0&A^j_{66}&0&0&B^j_{66}\\B^j_{11}&B^j_{12}&0&D^j_{11}&D^j_{12}&0\\B^j_{12}&B^j_{22}&0&D^j_{12}&D^j_{22}&0\\0&0&B^j_{66}&0&0&D^j_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon^0_{\chi\chi}\\\varepsilon^0_{\psi\psi}\\\varepsilon^0_{s\theta}\\k_{\chi\chi}\\k_{\psi\psi}\\k_{\chi\psi}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}N^{Tj}_{\chi\chi}\\N^{Tj}_{\psi\psi}\\0\\M^{Tj}_{\chi\chi}\\M^{Tj}_{\psi\psi}\\0\end{bmatrix},j=(o,i) \tag{۴۳}$$

$$\begin{bmatrix}Q^0_{\chi j}\\Q^0_{\psi j}\end{bmatrix}=\frac{\pi^2}{12}\begin{bmatrix}A^j_{44}&0\\0&A^j_{55}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma^0_{\chi zj}\\\gamma^0_{\psi zj}\end{bmatrix}+\frac{\pi^2}{12}\begin{bmatrix}B^j_{44}&0\\0&B^j_{55}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma^1_{\chi zj}\\\gamma^1_{\psi zj}\end{bmatrix} \tag{۴۴}$$

$$Q^1_{\psi j}=\frac{\pi^2}{12}B^j_{55}\gamma^0_{\psi zj}+\frac{\pi^2}{12}D^j_{55}\gamma^1_{\psi zj} \tag{۴۵}$$

در این مدل با جایگذاری روابط (۴۱) و (۴۲) برحسب روابط جابه‌جایی رویه‌ها و هسته در اصل مینیمم انرژی پتانسیل و با استفاده از روابط وجه مشترک و بعد از چند عملیات جبری، بیست و هشت معادله تعادل بدست می‌آید که شامل بیست و هشت مجهول است. ده مجهول برای رویه‌ها، دوازده مجهول برای هسته و شش مجهول شامل ضرایب لاگرانژ می‌باشد.

پنج معادله مربوط به رویه بالایی به صورت روابط (۴۶) تا (۵۰) است:

$$\begin{aligned}&-N^o_{\chi\chi}sin\gamma-rN^o_{\chi\chi,\chi}-N^{oT}_{\chi\chi}sin\gamma-rN^{oT}_{\chi\chi,\chi}+N^o_{\psi\psi}sin\gamma\\&+N^{oT}_{\psi\psi}sin\gamma-N^o_{\chi\psi,\psi}+sin\gamma\tilde{N}^o_{\chi\chi}+r\tilde{N}^o_{\chi\chi,\chi}+r\lambda_{\chi o}=0\end{aligned} \tag{۴۶}$$

$$-N^o_{\psi\psi,\psi}-N^{oT}_{\psi\psi,\psi}-2N^o_{\chi\psi}sin\gamma-rN^o_{\chi\psi,\chi}-Q^o_{\psi 0}cos\gamma+r\lambda_{\psi o}=0 \tag{۴۷}$$

$$\begin{aligned}&-N^o_{\chi\chi}sin\gamma w^o_{0,\chi}-N^o_{\chi\chi,\chi}rw^o_{0,\chi}-N^o_{\chi\chi}rw^o_{0,\chi\chi}-N^{oT}_{\chi\chi}sin\gamma w^o_{0,\chi}\\&-N^{oT}_{\chi\chi,\chi}rw^o_{0,\chi}-N^{oT}_{\chi\chi}rw^o_{0,\chi\chi}+N^o_{\psi\psi}cos\gamma+N^{oT}_{\psi\psi}cos\gamma-r^{-1}N^{oT}_{\psi\psi}w^o_{0,\psi\psi}\\&-r^{-1}\left(N^o_{\psi\psi,\psi}w^o_{0,\psi}+N^o_{\psi\psi}w^o_{0,\psi\psi}+N^{oT}_{\psi\psi,\psi}w^o_{0,\psi}\right)-N^o_{\chi\psi,\chi}w^o_{0,\theta}-\\&2N^o_{\chi\psi}w^o_{0,\chi\psi}-N^o_{\chi\psi,\psi}w^o_{0,\chi}-Q^o_{\chi 0}sin\gamma-rQ^o_{\chi 0,\chi}-Q^o_{\psi 0,\psi}+\tilde{N}^o_{\chi\chi}sin\gamma w^o_{0,\chi}\\&+\tilde{N}^o_{\chi\chi,\chi}rw^o_{0,\chi}+\tilde{N}^o_{\chi\chi}rw^o_{0,\chi\chi}+r\lambda_{zo}=0\end{aligned} \tag{۴۸}$$

$$\begin{aligned}&-M^o_{\chi\chi}sin\gamma-rM^o_{\chi\chi,\chi}-M^{oT}_{\chi\chi}sin\gamma-rM^{oT}_{\chi\chi,\chi}\\&+M^o_{\psi\psi}sin\gamma+M^{oT}_{\psi\psi}sin\gamma-M^o_{\chi\psi,\psi}+rQ^o_{\chi 0}+r\frac{h_o}{2}\lambda_{\chi o}=0\end{aligned} \tag{۴۹}$$

$$-M^{o}_{\psi\psi,\psi}-M^{oT}_{\psi\psi,\psi}-2M^{o}_{\chi\psi}sin\gamma-rM^{o}_{\chi\psi,\chi}$$
$$-Q^{o}_{\psi1}cos\gamma+rQ^{o}_{\psi0}+r\frac{h_o}{2}\lambda_{\psi o}=0 \qquad (۵۰)$$

پنج معادله مربوط به رویه پایینی به‌صورت روابط (۵۱) تا (۵۵) است:

$$-N^{i}_{\chi\chi}sin\gamma-rN^{i}_{\chi\chi,\chi}-N^{iT}_{\chi\chi}sin\gamma-rN^{iT}_{\chi\chi,\chi}+N^{i}_{\psi\psi}sin\gamma$$
$$+N^{iT}_{\psi\psi}sin\gamma-N^{i}_{\chi\psi,\psi}+sin\gamma\tilde{N}^{i}_{\chi\chi}+r\tilde{N}^{i}_{\chi\chi,\chi}-r\lambda_{\chi i}=0 \qquad (۵۱)$$

$$-N^{i}_{\psi\psi,\psi}-N^{iT}_{\psi\psi,\psi}-2N^{i}_{\chi\psi}sin\gamma-rN^{i}_{\chi\psi,\psi}-Q^{i}_{\psi0}cos\gamma-r\lambda_{\psi i}=0 \qquad (۵۲)$$

$$-N^{i}_{\chi\chi}sin\gamma w^{i}_{0,\chi}-N^{i}_{\chi\chi,\chi}rw^{i}_{0,\chi}-N^{i}_{\chi\chi}rw^{i}_{0,\chi\chi}-N^{iT}_{\chi\chi}sin\gamma w^{i}_{0,\chi}$$
$$-N^{iT}_{\chi\chi,\chi}rw^{i}_{0,\chi}-N^{iT}_{\chi\chi}rw^{i}_{0,\chi\chi}+N^{i}_{\psi\psi}cos\gamma$$
$$-r^{-1}\left(N^{i}_{\psi\psi,\psi}w^{i}_{0,\psi}+N^{i}_{\psi\psi}w^{i}_{0,\psi\psi}+N^{iT}_{\psi\psi,\psi}w^{i}_{0,\psi}\right)+N^{iT}_{\psi\psi}cos\gamma \qquad (۵۳)$$
$$-r^{-1}N^{iT}_{\psi\psi}w^{i}_{0,\psi\psi}-N^{i}_{\chi\psi,\chi}w^{i}_{0,\theta}-2N^{i}_{\chi\psi}w^{i}_{0,\chi\psi}-N^{i}_{\chi\psi,\psi}w^{i}_{0,\chi}-Q^{i}_{\chi0}sin\gamma$$
$$-rQ^{i}_{\chi0,\chi}-Q^{i}_{\psi0,\psi}+\tilde{N}^{i}_{\chi\chi}sin\gamma w^{i}_{0,\chi}+\tilde{N}^{i}_{\chi\chi,\chi}rw^{i}_{0,\chi}+\tilde{N}^{i}_{\chi\chi}rw^{i}_{0,\chi\chi}-r\lambda_{zi}=0$$

$$-M^{i}_{\chi\chi}sin\gamma-rM^{i}_{\chi\chi,\chi}-M^{iT}_{\chi\chi}sin\gamma-rM^{iT}_{\chi\chi,\chi}+M^{i}_{\psi\psi}sin\gamma$$
$$+M^{iT}_{\psi\psi}sin\gamma-M^{i}_{\chi\psi,\psi}+rQ^{i}_{\chi0}+r\frac{h_i}{2}\lambda_{\chi i}=0 \qquad (۵۴)$$

$$-M^{i}_{\psi\psi,\psi}-M^{iT}_{\psi\psi,\psi}-2M^{i}_{\chi\psi}sin\gamma-rM^{i}_{\chi\psi,\chi}-Q^{i}_{\psi1}cos\gamma$$
$$+rQ^{i}_{\psi0}+r\frac{h_i}{2}\lambda_{\psi i}=0 \qquad (۵۵)$$

دوازده معادله هسته به‌صورت روابط (۵۶) تا (۶۷) است:

$$-R^{c}_{\chi}sin\gamma-rR^{c}_{\chi,\chi}-R^{cT}_{\chi}sin\gamma-rR^{cT}_{\chi,\chi}+R^{c}_{\psi}sin\gamma+R^{cT}_{\psi}sin\gamma$$
$$-Q^{c}_{\chi\psi,\psi}+sin\gamma\tilde{N}^{c}_{\chi\chi}+r\tilde{N}^{c}_{\chi\chi,\chi}-r\lambda_{\chi o}+r\lambda_{\chi i}=0 \qquad (۵۶)$$

$$-M^{c}_{\chi1}sin\gamma-rM^{c}_{\chi1,\chi}-M^{cT}_{\chi1}sin\gamma-rM^{cT}_{\chi1,\chi}+M^{c}_{\psi1}sin\gamma$$
$$+M^{cT}_{\psi1}sin\gamma+rQ^{c}_{\chi z}-M^{c}_{Q1\chi\psi,\psi}+r\frac{h_c}{2}\lambda_{\chi o}+r\frac{h_c}{2}\lambda_{\chi i}=0 \qquad (۵۷)$$

$$+M^{cT}_{\psi2}sin\gamma+2rM^{c}_{Q1\chi z}-M^{c}_{Q2\chi\psi,\psi}-r\frac{h_c^{\,2}}{4}\lambda_{\chi o}+r\frac{h_c^{\,2}}{4}\lambda_{\chi i}=0 \qquad (۵۸)$$

$$-M^{c}_{\chi3}sin\gamma-rM^{c}_{\chi3,\chi}-M^{cT}_{\chi3}sin\gamma-rM^{cT}_{\chi3,\chi}+M^{c}_{\psi3}sin\gamma$$
$$+M^{cT}_{\psi3}sin\gamma+3rM^{c}_{Q2\chi z}-M^{c}_{Q3\chi\psi,\psi}+r\frac{h_c^{\,3}}{8}\lambda_{\chi o}+r\frac{h_c^{\,3}}{8}\lambda_{\chi i}=0 \qquad (۵۹)$$

$$-R^{c}_{\psi,\psi}-R^{cT}_{\psi,\psi}-Q^{c}_{\psi z}cos\gamma-2Q^{c}_{\chi\psi}sin\gamma-rQ^{c}_{\chi\psi,\chi}-r\lambda_{\psi o}+r\lambda_{\psi i}=0 \qquad (۶۰)$$

$$-M^{c}_{\psi1,\psi}-M^{cT}_{\psi1,\psi}-M^{c}_{Q1\psi z}cos\gamma+rQ^{c}_{\psi z}-2M^{c}_{Q1\chi\psi}sin\gamma$$
$$-rM^{c}_{Q1\chi\psi,\chi}+r\frac{h_c}{2}\lambda_{\psi o}+r\frac{h_c}{2}\lambda_{\psi i}=0 \qquad (۶۱)$$

$$-M^{c}_{\psi2,\psi}-M^{cT}_{\psi2,\psi}-M^{c}_{Q2\psi z}cos\gamma-2rM^{c}_{Q1\psi z}-2M^{c}_{Q2\chi\psi}sin\gamma$$
$$-rM^{c}_{Q2\chi\psi,\chi}-r\frac{h_c^{\,2}}{4}\lambda_{\psi o}+r\frac{h_c^{\,2}}{4}\lambda_{\psi i}=0 \qquad (۶۲)$$

$$-M^{c}_{\psi3,\psi}-M^{cT}_{\psi3,\psi}-M^{c}_{Q3\psi z}cos\gamma-3rM^{c}_{Q2\psi z}-2M^{c}_{Q3\chi\psi}sin\gamma$$
$$-rM^{c}_{Q3\chi\psi,\chi}+r\frac{h_c^{\,3}}{8}\lambda_{\psi o}+r\frac{h_c^{\,3}}{8}\lambda_{\psi i}=0 \qquad (۶۳)$$

$$-R^{c}_{\chi}sin\gamma w^{c}_{0,\chi}-rR^{c}_{\chi,\chi}w^{c}_{0,\chi}-R^{c}_{\chi}rw^{c}_{0,\chi\chi}-R^{cT}_{\chi}sin\gamma w^{c}_{0,\chi}$$
$$-rR^{cT}_{\chi,\chi}w^{c}_{0,\chi}-R^{cT}_{\chi}rw^{c}_{0,\chi\chi}+R^{c}_{\psi}cos\gamma-r^{-1}R^{c}_{\psi,\psi}w^{c}_{0,\psi}$$
$$-r^{-1}R^{c}_{\psi}w^{c}_{0,\psi\psi}+R^{cT}_{\psi}cos\gamma-r^{-1}R^{cT}_{\psi,\psi}w^{c}_{0,\psi}-r^{-1}R^{cT}_{\psi}w^{c}_{0,\psi\psi}$$
$$-Q^{c}_{\chi z}sin\gamma-rQ^{c}_{\chi z,\chi}-Q^{c}_{\psi z,\psi}-Q^{c}_{\chi\psi,\chi}w^{c}_{0,\psi}-2Q^{c}_{\chi\psi}w^{c}_{0,\chi\psi} \qquad (۶۴)$$
$$-Q^{c}_{\chi\psi,\psi}w^{c}_{0,\chi}+\tilde{N}^{c}_{\chi\chi}sin\gamma w^{c}_{0,\chi}+\tilde{N}^{c}_{\chi\chi,\chi}rw^{c}_{0,\chi}+\tilde{N}^{c}_{\chi\chi}rw^{c}_{0,\chi\chi}$$
$$-r\lambda_{zo}+r\lambda_{zi}=0$$

$$+M^{c}_{\psi1}cos\gamma+M^{cT}_{\psi1}cos\gamma+rR^{c}_{z}+rR^{cT}_{z}-M^{c}_{Q1\chi z}sin\gamma$$
$$-rM^{c}_{Q1\chi z,\chi}-M^{c}_{Q1\psi z,\psi}+r\frac{h_c}{2}\lambda_{zo}+r\frac{h_c}{2}\lambda_{zi}=0 \qquad (۶۵)$$

$$+M^{c}_{\psi2}cos\gamma+M^{cT}_{\psi2}cos\gamma+2rM^{c}_{z1}+2rM^{cT}_{z1}-M^{c}_{Q2\chi z}sin\gamma$$
$$-rM^{c}_{Q2\chi z,\chi}-M^{c}_{Q2\psi z,\psi}-r\frac{h_c^{\,2}}{4}\lambda_{zo}+r\frac{h_c^{\,2}}{4}\lambda_{zi}=0 \qquad (۶۶)$$

$$+M^{c}_{\psi3}cos\gamma+M^{cT}_{\psi3}cos\gamma+3rM^{c}_{z2}+2rM^{cT}_{z2}-M^{c}_{Q3\chi z}sin\gamma$$
$$-rM^{c}_{Q3\chi z,\chi}-M^{c}_{Q3\psi z,\psi}+r\frac{h_c^{\,3}}{8}\lambda_{zo}+r\frac{h_c^{\,3}}{8}\lambda_{zi}=0 \qquad (۶۷)$$

و شش معادله که از شرایط سازگاری به‌دست می‌آیند مطابق روابط (۶۸) تا (۷۳) تعریف می‌شوند:

$$u_{0o}-\frac{h_o}{2}\phi^{o}_{\chi}-u_{0c}+\frac{h_c}{2}u_{1c}-\frac{h_c^{\,2}}{4}u_{2c}+\frac{h_c^{\,3}}{8}u_{3c}=0 \qquad (۶۸)$$

$$v_{0o}+\frac{h_o}{2}\phi^{o}_{\psi}-v_{0c}+\frac{h_c}{2}v_{1c}-\frac{h_c^{\,2}}{4}v_{2c}+\frac{h_c^{\,3}}{8}v_{3c}=0 \qquad (۶۹)$$

$$w_{0o}-w_{0c}+\frac{h_c}{2}w_{1c}-\frac{h_c^{\,2}}{4}w_{2c}+\frac{h_c^{\,3}}{4}w_{3c}=0 \qquad (۷۰)$$

$$u_{0c}+\frac{h_c}{2}u_{1c}+\frac{h_c^{\,2}}{4}u_{2c}+\frac{h_c^{\,3}}{8}u_{3c}-u_{0i}+\frac{h_i}{2}\phi^{i}_{\chi}=0 \qquad (۷۱)$$

$$v_{0c}+\frac{h_c}{2}v_{1c}+\frac{h_c^{\,2}}{4}v_{2c}+\frac{h_c^{\,3}}{8}v_{3c}-v_{0i}+\frac{h_i}{2}\phi^{i}_{\psi}=0 \qquad (۷۲)$$

$$\nu_{0c}+\frac{h_c}{2}\nu_{1c}+\frac{{h_c}^2}{4}\nu_{2c}+\frac{{h_c}^3}{8}\nu_{3c}-\nu_{0i}+\frac{h_i}{2}\phi_{\psi}^{i}=0 \quad (۷۳)$$

تنش‌های خارج از صفحه و درون صفحه‌ای هسته منجر به منتجه‌های مرتبه بالا می‌شوند که به‌صورت روابط (۷۴) تا (۷۹) محاسبه می‌شوند [۴۸].

$$Q_{\chi c},M_{Q1\chi z},M_{Q2\chi z},M_{Q3\chi z}=\int_{-hc/2}^{hc/2}\left(1,z_c,z_c^2,z_c^3\right)\tau_{\chi z}^{c}dz_c \quad (۷۴)$$

$$Q_{\psi z},M_{Q1\psi z},M_{Q2\psi z},M_{Q3\psi z}=\int_{-hc/2}^{hc/2}\left(1,z_c,z_c^2,z_c^3\right)\tau_{\psi z}^{c}dz_c \quad (۷۵)$$

$$R_z,M_{z1},M_{z2}=\int_{-hc/2}^{hc/2}\left(1,z_c\right)\sigma_{zz}^{c}dz_c \quad (۷۶)$$

$$Q_{\chi\psi}^{c},M_{Q1\chi\psi}^{c},M_{Q2\chi\psi}^{c},M_{Q3\chi\psi}^{c}=\int_{-hc/2}^{hc/2}\left(1,z_c,z_c^2,z_c^3\right)\tau_{\chi\psi}^{c}dz_c \quad (۷۷)$$

$$R_{\chi}^{c},M_{\chi1}^{c},M_{\chi2}^{c},M_{\chi3}^{c}=\int_{-hc/2}^{hc/2}\left(1,z_c,z_c^2,z_c^3\right)\sigma_{\chi\chi}^{c}dz_c \quad (۷۸)$$

$$R_{\psi}^{c},M_{\psi1}^{c},M_{\psi2}^{c},M_{\psi3}^{c}=\int_{-hc/2}^{hc/2}\left(1,z_c,z_c^2,z_c^3\right)\sigma_{\psi\psi}^{c}dz_c \quad (۷۹)$$

در نهایت با جایگذاری روابط منتجه‌های مرتبه بالای تنش در معادلات رویه‌ها و هسته بر حسب مولفه‌های جابه‌جایی، معادلات تعادل بر حسب بیست و هشت مجهول جابه‌جایی به‌دست می‌آیند. در ادامه، برای پوسته ساندویچی مخروطی ناقص با هسته هدفمند در شرایط تکیه‌گاهی ساده، روش حل گلرکین ارائه می‌شود.

۳- پوسته ساندویچی مخروطی با تکیه‌گاه ساده، دو سرگیردار و گیردار-آزاد

روش حل گلرکین با بیست و هشت تابع شکل مثلثاتی برای حالت پوسته ساندویچی مخروطی ناقص انتخاب شده است که شرایط مرزی با تکیه‌گاه ساده را ارضا می‌کند. ضمنا توابع شکل برای حالت دو سر گیردار در مرجع [۴۹] و برای تکیه‌گاه گیردار-آزاد در مرجع [۵۰] ارائه شده است (روابط (۸۰) تا (۸۷)).

$$u_{0k}=C_{uk}cos\left(\frac{m\pi\chi}{L}\right)\cos(n\psi);\ k=(o,i,c) \quad (۸۰)$$

$$\nu_{0k}=C_{\nu k}sin\left(\frac{m\pi\chi}{L}\right)\sin(n\psi) \quad (۸۱)$$

$$w_{0k}=C_{wk}sin\left(\frac{m\pi\chi}{L}\right)\cos(n\psi) \quad (۸۲)$$

$$\phi_{\chi}^{j}=C_{\phi\chi j}cos\left(\frac{m\pi\chi}{L}\right)\cos(n\psi);\ j=(o,i) \quad (۸۳)$$

$$\phi_{\psi}^{j}=C_{\phi\psi j}cos\left(\frac{m\pi\chi}{L}\right)\cos(n\psi) \quad (۸۴)$$

$$\lambda_{\chi j}=C_{\lambda\chi j}cos\left(\frac{m\pi\chi}{L}\right)\cos(n\psi) \quad (۸۵)$$

$$\lambda_{\psi j}=C_{\lambda\psi j}sin\left(\frac{m\pi\chi}{L}\right)\sin(n\psi) \quad (۸۶)$$

$$\lambda_{zj}=C_{\lambda zj}sin\left(\frac{m\pi\chi}{L}\right)\cos(n\psi) \quad (۸۷)$$

که ضرایب C بیست و هشت ثابت مجهول توابع شکل و m و n شماره موج هستند. با بررسی روابط، مشخص می‌شود که این بیست و هشت معادله از هم مستقل نیستند، بنابراین می‌توان با استفاده از یک روش کاهش مرتبه از تعداد آن‌ها کاست. ثابت‌های لاگرانژ بر حسب عبارت‌های جابه‌جایی رویه‌ها باز تعریف می‌شوند. همچنین از شرایط سازگاری مشاهده می‌گردد که ثابت‌های مجهول رویه‌ها وابسته به ثابت‌های هسته‌اند. پس از چند عملیات ریاضی با حذف دوازده معادله، تعداد معادلات به شانزده عدد که وابسته به ثابت‌های هسته و چرخش نرمال رویه‌ها هستند، کاهش می‌یابد. این دسته معادلات شانزده‌تایی را می‌توان به‌صورت دو ماتریس شانزده در شانزده که شامل ماتریس سفتی، K و ماتریس سفتی هندسی، M است، مطابق با رابطه (۸۸) نشان داد که مقادیر ویژه این عبارت برابر با بار بحرانی سیستم، P_{mn}، برای هر شماره موج هستند.

$$(K_{mn}-P_{mn}M_{mn})C_{mn}=0 \quad (۸۸)$$

در رابطه (۸۸)، ضرایب C شامل بردارهای ویژه‌اند که شانزده ثابت هسته را مشخص می‌کنند. همچنین با در نظر گرفتن کرنش یکپارچه در سازه، منتجه‌های فشاری خارجی بر حسب بار بحرانی تعریف می‌شوند [۴۷].

$$\tilde{N}_{\chi\chi}^{o}=\frac{-h_o\bar{E}_oP_{mn}}{H} \quad (۸۹)$$

$$\tilde{N}_{\chi\chi}^{i}=\frac{-h_i\bar{E}_iP_{mn}}{H} \quad (۹۰)$$

$$\tilde{N}^{c}_{xx}=\frac{-h_c\bar{E}_cP_{mn}}{H} \quad (۹۱)$$

$$H=\sum_j h_j\bar{E}_j\ ;\bar{E}_j=\frac{\int_{-hj/2}^{hj/2}E_j(z_j)dz_j}{h_j},(j=o,i,c) \quad (۹۲)$$

برای ساده‌تر شدن، تمام نتایج عددی در این تحقیق بر حسب پارامتر بار بحرانی بی‌بعد، P_{cr}، به‌صورت رابطه (۹۳) تعریف می‌شود.

$$P_{cr}=P_{mn}\frac{1-\nu^2}{10Eh^2\sin\gamma} \quad (۹۳)$$

h ضخامت کل سازه ساندویچی و E مدول یانگ و برابر با ۲۰۰ GPa است.

٤- صحت‌سنجی و نتایج عددی

برای صحت‌سنجی روش به کار رفته، نتایج به‌دست آمده در این تحقیق در حالت پوسته مخروطی ایزوتروپیک با تکیه‌گاه ساده، با نتایج مراجع [۵۱] و [۵۲] و نتایج عددی المان محدود مقایسه می‌شود. برای این کار پوسته مخروطی فلزی با پارامترهای سازه‌ای به‌صورت $R_2/h=۴۰۰$ ،$h=۰/۰۰۰۵$ m و $L=۰/۲۵\ R_2\sin\gamma$ تعریف شده است. برای سه زاویه نیم راس مخروط، پارامتر تنش محوری بحرانی در جدول ۱ ارائه می‌گردد.

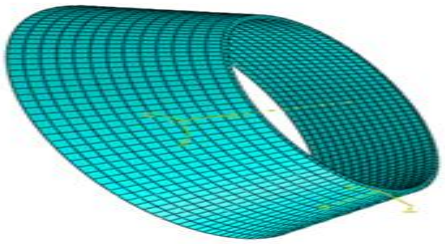
به دلیل تفاوت تئوری‌های به کار رفته در مدل‌سازی این کارها، اختلاف اندکی بین نتایج ایجاد می‌شود. برای بررسی روش کنونی، یک مساله عددی برای پوسته ساندویچی مخروطی ناقص در سه تکیه‌گاه ساده، گیردار و گیردار-آزاد ارائه می‌گردد. رویه بالایی از جنس نیترید سیلیکون و رویه پایینی از جنس دی‌اکسیدزیرکونیوم است. هسته از جنس مواد هدفمند و شامل ترکیب توانی دی‌اکسیدزیرکونیوم و سیلیکون نیترید است. خواص وابسته به دمای این مواد در مرجع [۴۵] ارائه شده است که برای اختصار در اینجا آورده نمی‌شود. چند نمونه عددی برای صحت‌سنجی تحلیل حاضر توسط نرم‌افزار آباکوس نسخه ۶,۱۳ ارائه می‌گردد که نمونه شبکه‌بندی شده آن در شکل ۲ نشان داده شده است. سازه مخروطی هدفمند متخلخل با المان سه‌بعدی پیوسته و هشت‌گره‌ای با تاثیر المان‌های حرارتی[1] تعریف شده است. به منظور اعمال هدفمندی ماده در لایه‌ها هر لایه به بیست زیر لایه مجزا تقسیم‌بندی شده و پس از اعمال تخلخل در روابط، خواص مکانیکی به‌صورت ایزوتروپ در هر زیر لایه مطابق با مختصات ضخامت آن وارد شده که به تدریج از یک سطح فلزی خالص به سطح سرامیکی خالص مطابق با مدل تابع توانی می‌رسد. همانطور که در شکل ۳ نشان داده شده است، تعداد المان‌های در نظر گرفته شده در مدل المان محدود بستگی به همگرایی در جواب‌ها دارد. ابتدا تعداد المان‌ها چهار هزار در نظر گرفته شد. با افزایش تعداد المان‌ها تا دوازده هزار مشاهده گردید که جواب‌ها تغییرات زیادی دارند. اما بعد از این مقدار، دوازده هزار المان، جواب‌های به‌دست آمده به همگرایی رسیدند و مشخص گردید که تعداد دوازده هزار المان برای به‌دست آوردن جواب‌ها مناسب است و افزایش بیشتر از این مقدار تنها بر زمان حل مساله می‌افزاید و تاثیری بر مقادیر بدست آمده ندارد. همچنین از روش حل صریح[2] برای تحلیل مساله استفاده شد.

در جدول ۲ پارامترهای بی‌بعد بار بحرانی که از روش کنونی و روش المان محدود به‌دست می‌آیند در دمای محیط و برای توان‌های مختلف تابع توانی در حالت ساندویچی ۱-۸-۱ و مشخصات $h_o=۰/۰۰۲$ m ،$R_1=L/2$ و $\gamma=۳۰$ و برای سه تکیه‌گاه ساده (S_S)، دو سر گیردار (C_C) و گیردار-آزاد (C_F) با هم مقایسه می‌شوند. باید به این نکته اشاره کرد که ساندویچ ۱-۸-۱ یک سازه ساندویچی است که ضخامت هسته هشت برابر ضخامت هر کدام از رویه‌هایش است. همانطور که از نتایج جدول ۲ پیداست، مقادیر به‌دست

Table 1. Comparison of critical axial stresses (MPa) in the present, references and FEM in the simply supported boundary condition

جدول ۱: مقایسه نتایج تنش محوری بحرانی(MPa) در تحلیل حاضر، مراجع و نتایج المان محدود در شرایط تکیه‌گاهی ساده

γ	مرجع [۵۲]	مرجع [۵۱]	تحلیل حاضر	المان محدود
۳۰	۲۸۴/۰۵	۲۸۳/۴۴	۲۸۵/۵۶	۲۸۴/۲۵
۴۵	۲۳۹/۶۶	۲۳۸/۲۵	۲۴۱/۲۵	۲۴۰/۶۳
۶۰	۱۷۵/۳۱	۱۷۲/۵۲	۱۷۵/۹۸	۱۷۵/۳۹
۷۵	۹۳/۰۹۶	۸۹/۷۵	۹۲/۶۵	۹۲/۸۴

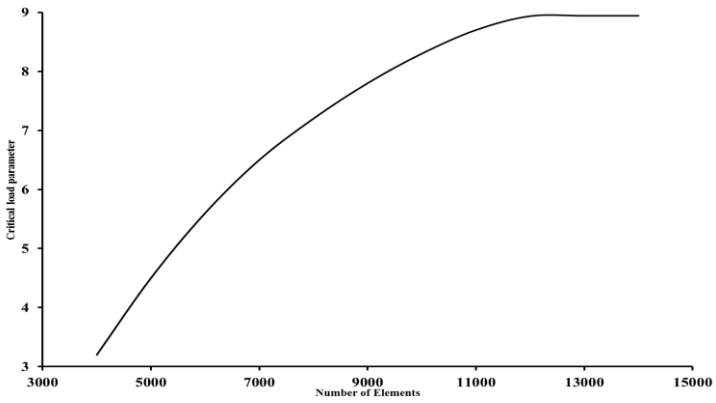


شکل ۲: مدل المان محدود نمونه استفاده شده در تحلیل حاضر

Fig. 2. Finite element model of the structure in the present study

1 C3D8T

2 Explixit



شکل ۳: بررسی همگرایی پاسخ کمانشی نسبت به تعداد المان‌ها

Fig. 3. Convergence of Abaqus FEM for buckling responses versus number of elements

Table 2. Comparison of the critical load results in the present study and FEM

جدول ۲: مقایسه نتایج بار بحرانی بی‌بعد تحلیل کنونی با المان محدود

	N	تحلیل حاضر	المان محدود	اختلاف (درصد)
S_S	۰	۸/۹۳۵۰	۸/۴۵۲۳	۵/۷۱
	۰/۲	۸/۸۱۲۵	۸/۲۳۶۲	۶/۹۹
	۱	۶/۸۹۷۶	۶/۳۸۶۱	۸/۰۰
	۲	۶/۲۸۹۸	۵/۹۸۲۴	۵/۱۳
C_C	۰	۹/۱۸۳۷	۹/۷۶۴۷	۵/۹۵
	۱	۷/۳۵۶۲	۸/۰۱۲۳	۸/۱۸
	۲	۶/۶۷۲۵	۷/۱۳۴۷	۶/۴۷
C_F	۰	۶/۹۲۰۹	۷/۵۸۸۶	۸/۷۹
	۱	۵/۵۸۶۲	۶/۱۴۴۰	۹/۰۷
	۲	۴/۹۹۶۵	۵/۳۸۲۴	۷/۱۶

آمده از دو روش، تطابق قابل قبولی نسبت به هم دارند. همچنین اختلاف اندک موجود بین نتایج تحلیل حاضر و مدل المان محدود به دلیل روش شبیه‌سازی هسته است. در هنگام مدل‌سازی هسته در نرم‌افزار آباکوس، لایه هسته هدفمند را به بیست لایه مجزا تقسیم می‌کنیم و هر لایه را به‌صورت ایزوتروپیک در نظر می‌گیریم که خواص مکانیکی آن‌ها به‌تدریج و به آرامی مطابق با تابع توانی در راستای ضخامت تغییر می‌کنند.

شکل ۳، تغییرات بار بحرانی بی‌بعد را با تغییرات دمای یکنواخت برای پوسته ساندویچی مخروطی در توان‌های مختلف و مقادیر پارامتری هندسی

Table 3. Effect of the temperature variation on the Young modulus

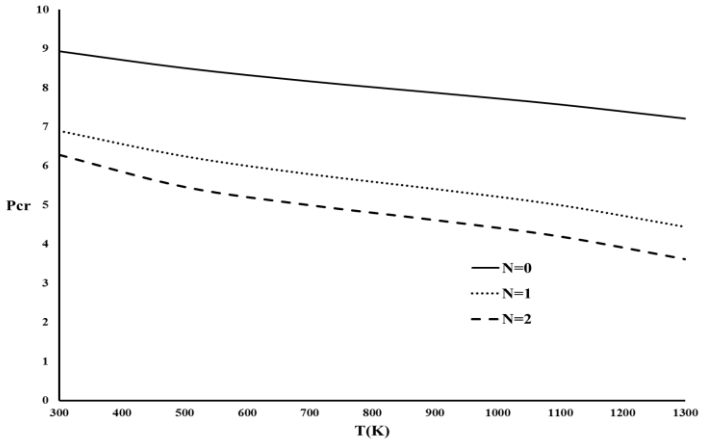
جدول ۳: اثر تغییر دما بر مدول یانگ مواد

T(K)	زیرکونیوم دی‌اکسید	سیلیکون نیترید
۳۰۰	۱۶۸/۰۶ (GPa)	۳۲۲/۲۷ (GPa)
۱۵۰۰	۱۰۵/۶۸ (GPa)	۲۵۲/۱۴ (Gpa)
درصد تغییرات (درصد)	۳۷/۱۱	۲۱/۷۶

h= ۰/۰۲ m، $R_1=L/2$، γ=۳۰ و L=۱۰۰ h نشان می‌دهد. همانطور که از شکل ۳ پیداست، بار بحرانی بی‌بعد با افزایش مقدار دما، کاهش می‌یابد زیرا طبق رابطه (۲۰) افزایش دما سبب کاهش استحکام ماده می‌گردد. برای بهتر نشان دادن این موضوع در جدول ۳ اثر تغییر دما بر مدول الاستیسیته دو ماده آورده می‌شود. با افزایش دما خواص مکانیکی مواد فلزی و سرامیکی کاهش می‌یابد و به دلایل ریزساختاری خواص مواد متمایل به فلز بیشتر از مواد متمایل به سرامیک کاهش می‌یابد که در نتیجه استحکام کل سازه را کم می‌کند که مساله مهمی در کاهش میزان بار بحرانی بی‌بعد است.

شکل ۴ نشان می‌دهد که در دمای ثابت و در توان‌های بزرگتر تابع توانی، بار بحرانی بی‌بعد کاهش می‌یابد زیرا با این افزایش خواص مواد هدفمند متمایل به فلزی شدن می‌گردند و از استحکام سازه کاسته می‌شود.

حال به بررسی چند اثر هندسی بر بار بحرانی بی‌بعد می‌پردازیم. جدول ۴ اثر تغییر نسبت طول به ضخامت بر بار بحرانی بی‌بعد را برای پوسته ساندویچی مخروطی در پارامترهای h_0=۰/۰۰۲m، $R_1=L/2$ و γ=۳۰ نشان می‌دهد.



شکل ٤: اثر تغییر دما بر بار بحرانی بی‌بعد

Fig. 4. Effect of the temperature variation on the nondimensional critical load

Table 4. Variation of the nondimensional critical load with length to thickness ratio in different power law indices

جدول ٤: بار بحرانی بی‌بعد به ازای نسبت طول به ضخامت‌های مختلف در توان‌های مختلف

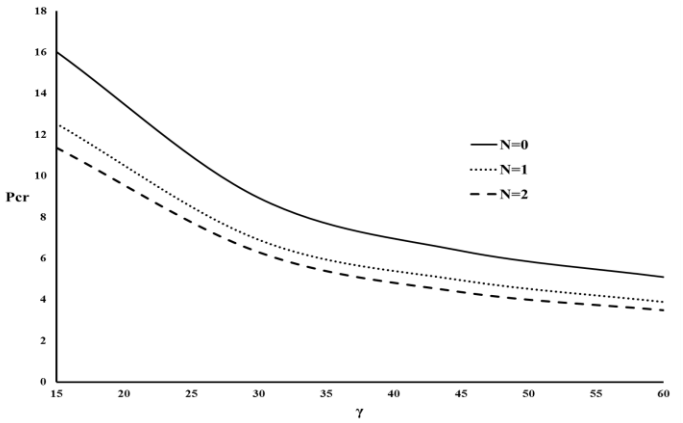
N	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰
۰	۸/۹۳۵۰	۳/۳۸۶۳	۲/۲۱۹۳	۱/۸۰۷۲	۱/۶۱۶۱
۱	۶/۸۹۷۶	۲/۶۱۹۳	۱/۷۳۲۴	۱/۴۱۹۴	۱/۲۷۴۲
۲	۶/۲۸۹۸	۲/۳۱۱۵	۱/۵۷۸۲	۱/۲۹۷۲	۱/۱۶۶۹

از جدول ۴ اینطور برداشت می‌شود که با افزایش مقدار این نسبت در یک توان تابع توانی ثابت، بار بحرانی بی‌بعد کم می‌شود. زیرا افزایش این نسبت پایداری سازه را کاهش می‌دهد و مشخص می‌کند که نسبت‌های طولی بالا برای سازه ساندویچی مخروطی مناسب نیست. همچنین میزان تغییرات بار بحرانی در نسبت‌های بزرگتر از ۲۰۰ کمتر می‌شود.

تغییرات زاویه نیم‌راس، یکی از اثرات مهم هندسی بر سازه مخروطی است. در شکل ۵، اثر این زاویه بر بار بحرانی بی‌بعد و با پارامترهای h_o=۰/۰۰۲ m، R_1=L/۲، γ=۳۰ و L=۱۰۰ h بررسی می‌شود. شکل ۵ تاکید می‌کند که با افزایش زاویه نیم‌راس مخروط در یک تابع توانی ثابت، از مقدار بار بحرانی بی‌بعد کاسته می‌شود.

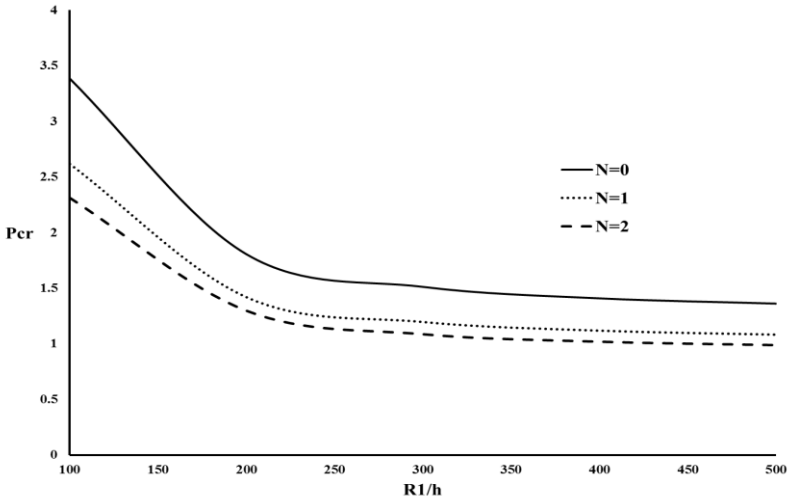
شکل ۶ اثر تغییر نسبت شعاع به ضخامت بر بار بحرانی بی‌بعد را با پارامترهای R_1 L=۲ و γ=۳۰ نشان می‌دهد و تاکید می‌کند که افزایش این نسبت در یک توان ثابت، بار بحرانی بی‌بعد را کم می‌کند. ملاحظه می‌شود که شیب تغییرات بار بحرانی در نسبت‌های کمتر از ۲۵۰ بیشتر است و در نسبت‌های بزرگتر، از شیب تغییرات کاسته می‌شود. به عنوان نمونه، در N= ۰، تغییر بار بحرانی با تغییر نسبت از ۱۰۰ به ۲۰۰ به میزان ۴۶/۶۳ درصد، از ۲۰۰ به ۳۰۰ به میزان ۱۶/۳۱ درصد و از ۳۰۰ به ۵۰۰ به میزان ۹/۹۵ درصد است. همانطور که از شکل ۶ و جدول ۴ پیداست، بار بحرانی بی‌بعد در نسبت‌های بزرگتر از ۳۰۰ تغییرات کمی دارد که نشان‌دهنده عدم تاثیر تغییر این نسبت‌ها در مقادیر بالاتر است.

در جدول ۵ نتایج اثر تغییر نسبت ضخامت هسته به رویه بر بار بحرانی بی‌بعد، در پارامترهای h=۰/۰۲ m، R_1=L/۲، γ=۳۰ و L=۱۰۰ h در توان‌های مختلف تابع توانی و دمای محیط آورده شده است. در توان صفر هسته کاملا سرامیکی است که با افزایش این نسبت بر سفتی هسته افزوده شده و باعث افزایش بار بحرانی بی‌بعد می‌شود. اما در توان‌های بالاتر و در حالی‌که ضخامت کل ثابت است، با افزایش نسبت از مقدار سرامیک کم و بر مقدار فلز افزوده می‌شود که سبب نرمتر شدن هسته و همچنین کاهش بار بحرانی بی‌بعد می‌شود.



شکل ۵: تغییر بار بحرانی بی‌بعد با تغییر زاویه نیم‌راس مخروط

Fig. 5. Variation of the nondimensional critical load with semi vertex angle



شکل ٦: تغییر بار بحرانی بی‌بعد بر اثر تغییر نسبت شعاع کوچک به ضخامت

Fig. 6. Variation of the nondimensional critical load with radius to the thickness ratio

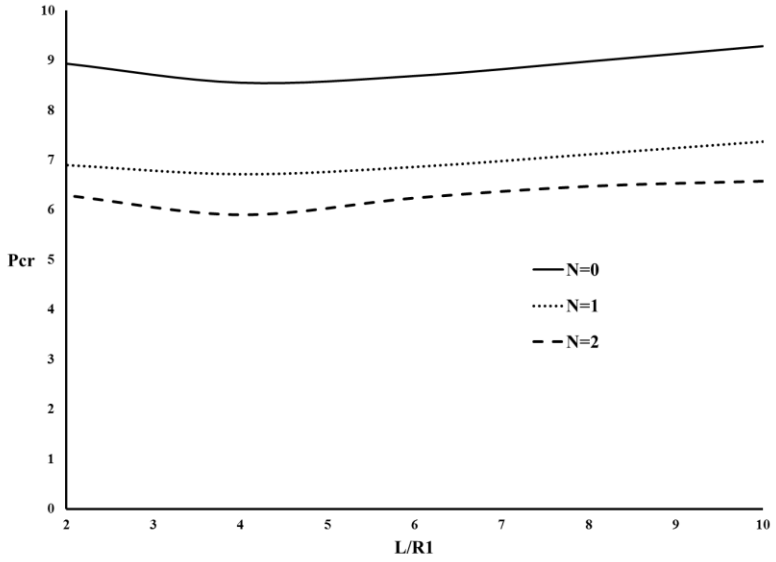
Table 5. Variation of the nondimensional critical load with core to face sheet thickness ratio in the constant temperature

جدول ۵: تغییر بار بحرانی بی‌بعد بر اثر تغییر نسبت ضخامت هسته به رویه در دمای ثابت

N	۰/۵	۱	۲	۴	۸
۰	۸/۱۸۴۳	۸/۳۸۹۰	۸/۵۷۱۰	۸/۷۵۳۰	۸/۹۳۵۰
۱	۷/۵۷۰۰	۷/۴۲۰۹	۷/۲۸۴۴	۷/۱۲۵۱	۶/۸۹۷۶
۲	۷/۳۰۷۱	۷/۰۷۹۶	۶/۸۰۶۶	۶/۵۵۶۴	۶/۲۸۹۸

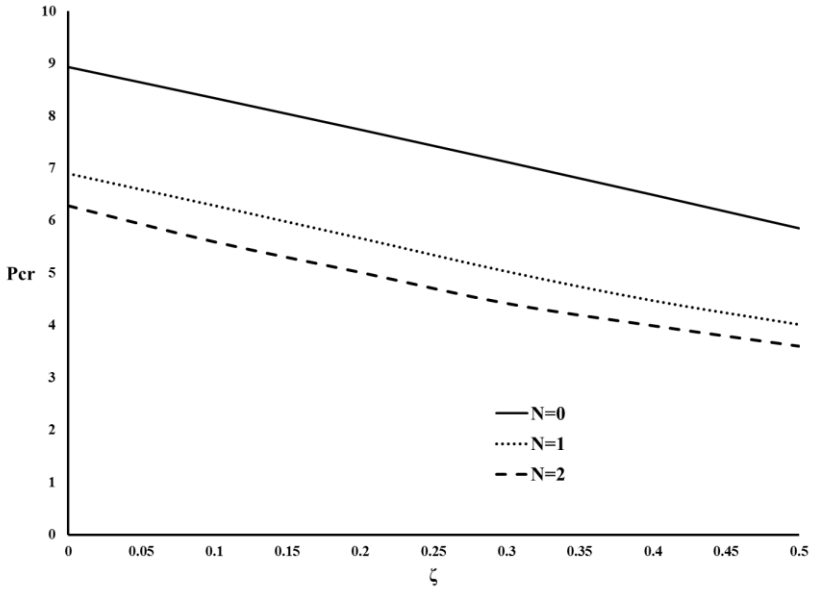
در شکل ۷ اثر تغییر نسبت طول به شعاع کوچک نشان داده شده است. همانطور که از شکل ۷ پیداست، در توان‌های مختلف، با افزایش نسبت تا مقدار ۴ از مقدار بار بحرانی کاسته می‌شود و بعد از این مقدار با افزایش نسبت، مقدار بار بحرانی بی‌بعد افزایش می‌یابد. به عنوان مثال در N=۰، مقدار بار بحرانی از نسبت ۲ به ۴ به میزان ۴/۴۷ درصد کاهش یافته و از نسبت ۴ به ۱۰ به میزان ۸/۵۸ درصد افزایش می‌یابد. با توجه به تغییرات می‌توان نتیجه گرفت اثر نسبت طول به شعاع تاثیر بسزایی بر میزان بار بحرانی ندارد.

شکل‌های ۸ و ۹ به ترتیب اثر توزیع تخلخل یکنواخت و غیریکنواخت را بر تغییر بار بحرانی بی‌بعد نشان می‌دهند. همانطور که از این شکل‌ها مشخص است، با افزایش کسر حجمی تخلخل از مقدار بار بحرانی بی‌بعد در توان‌های مختلف کاسته می‌شود. اما این میزان کاهش در حالت تخلخل



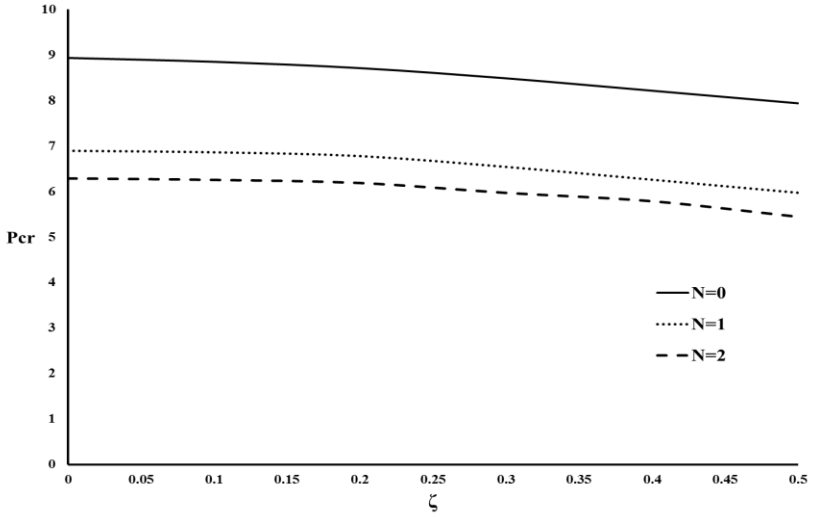
شکل ۷: تغییر بار بحرانی بی‌بعد بر اثر تغییر نسبت طول به شعاع کوچک

Fig. 7. Variation of the nondimensional critical load with length to the radius ratio



شکل ۸: تغییر بار بحرانی بی‌بعد بر اثر تغییر توزیع تخلخل یکنواخت

Fig. 8. Variation of the nondimensional critical load with the even porosity distribution



شکل ۹: تغییر بار بحرانی بی‌بعد بر اثر تغییر توزیع تخلخل غیریکنواخت

Fig. 9. Variation of the nondimensional critical load with uneven porosity distribution

یکنواخت که ریزحفره‌ها در تمام سطح مقطع پخش شده‌اند بیشتر از حالت تخلخل غیریکنواخت است که ریزحفره‌ها در سطح میانی لایه بیشتر از دیواره‌های لایه است.

جدول ۶ تغییرات پارامتر بار بحرانی بی‌بعد در توزیع دماهای مختلف را نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است، بار بحرانی بی‌بعد در حالت توزیع یکنواخت دما کمتر از حالت توزیع غیریکنواخت دما است که در دماهای بالاتر این اختلاف بیشتر می‌گردد. در توزیع یکنواخت، تمام نقاط لایه‌های سازه ساندویچی یک دمای ثابت را تجربه می‌کنند اما در توزیع غیریکنواخت، دما از سمت لایه فلزی به سمت لایه سرامیکی تغییر می‌کند. بنابراین استحکام سازه در حالت غیریکنواخت بیشتر از حالت یکنواخت است و بار بحرانی بی‌بعد افزایش می‌یابد.

جدول ۷ تغییرات بار بحرانی بی‌بعد را با تغییرات دمای یکنواخت برای پوسته ساندویچی مخروطی در دو تکیه‌گاه گیردار و گیردار–آزاد و مقادیر پارامتری هندسی $h=0.02\ m$، $R_1=L/2$، $\gamma=30$ و $L=100\ h$ و $N=0$ نشان می‌دهد. در جدول ۷، مطابق انتظار نتایج تکیه‌گاه گیردار بیشتر از تکیه‌گاه آزاد–گیردار است. همچنین با افزایش دما از مقدار بار بحرانی کاسته می‌شود.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مطابق با یک تئوری مرتبه بالای پوسته ساندویچی، میدان جابه‌جایی رویه‌ها بر اساس تئوری برشی مرتبه اول و میدان جابه‌جایی هسته بر اساس توابع چند جمله‌ای مکعبی برای تغییر شکل‌های عمودی و افقی در نظر گرفته شد. برای اصلاح تئوری مرتبه بالا، منتجه‌های مرتبه بالای تنش و منتجه‌های تنش حرارتی، تنش‌های درون صفحه‌ای و تنش‌های حرارتی هسته در نظر گرفته شد. کرنش‌های غیرخطی ون کارمن هم برای تنش حرارتی و هم تنش مکانیکی به‌کار برده شدند تا معادلات تعادل دقیق‌تری بدست آید که باعث پیچیده‌تر شدن مساله گردید. همچنین خواص مواد رویه‌ها و هسته وابسته به دما در نظر گرفته شد. دو نوع توزیع تخلخل مختلف برای اصلاح توزیع تابع توانی در مدل‌سازی خواص مواد هدفمند هسته به‌کار برده شد. سه توزیع دمای یکنواخت، خطی و غیرخطی برای مدل‌سازی اثر تغییرات دما در راستای ضخامت سازه ساندویچی در نظر گرفته شد. معادلات حاکم براساس اصل مینیمم انرژی پتانسیل بدست آمد و از روش گلرکین در شرایط تکیه‌گاهی ساده، گیردار، گیردار–آزاد برای حل آن‌ها استفاده شد. همچنین از یک روش کاهش مرتبه برای کاهش تعداد معادلات استفاده گردید. به منظور بررسی دقت این مدل در تحلیل کمانش پوسته ساندویچی با هسته هدفمند متخلخل، نتایج در حالت خاص با مراجع مختلف و همچنین در حالت ساندویچی با هسته هدفمند با نتایج المان محدود مقایسه شد. براساس نتایج به‌دست آمده، تطابق خوبی بین روش

Table 6. Variotion of the nondimensional critical load in different temperature distributions

جدول ٦: تغییرات بار بحرانی بی‌بعد با دما در توزیع دماهای مختلف

T_o (K)	توزیع یکنواخت	توزیع خطی	توزیع غیرخطی
۳۰۰	۸/۹۳۵۰۷	۸/۹۳۵۰۷	۸/۹۳۵۰۷
۵۰۰	۸/۵۰۳۷۷	۸/۵۸۲۸۱	۸/۶۳۲۳۵
۷۰۰	۸/۱۶۶۶۸	۸/۳۲۳۳۵	۸/۴۱۶۵۷
۹۰۰	۷/۸۷۳۵۶	۸/۰۹۱۷۸	۸/۱۵۳۹۸
۱۱۰۰	۷/۵۷۲۵۱	۷/۸۱۶۶۷	۷/۹۰۲۷۳

Table 7. Variotion of the nondimensional critical load with temperature in clamped and clamped-free boundary conditions

جدول ۷: تغییرات بار بحرانی بی‌بعد با دما در تکیه‌گاه‌های گیردار و گیردار–آزاد

T_o (K)	C_C	C_F
۳۰۰	۹/۱۸۳۷	۶/۹۲۰۹
۵۰۰	۸/۹۱۹۰	۶/۶۶۷۴
۷۰۰	۸/۶۹۲۴	۶/۴۶۵۵
۹۰۰	۸/۴۷۵۵	۶/۲۸۱۷
۱۱۰۰	۸/۲۴۰۴	۶/۰۸۳۴

به‌کار رفته در این مقاله و نتایج المان محدود و مراجع دیگر مشاهده شد.

با بررسی نتایج به‌دست آمده مشاهده می‌شود که افزایش دما در یک تابع توانی ثابت سبب کاهش خواص مکانیکی سازه و کاهش مقدار بار بحرانی بی‌بعد می‌شود. افزایش مقدار تابع توانی منجر به کاهش بار بحرانی بی‌بعد می‌شود. افزایش نسبت طول به ضخامت سازه، افزایش زاویه نیم‌راس مخروط، افزایش نسبت شعاع به ضخامت، افزایش نسبت ضخامت هسته به ضخامت رویه در توان‌های مختلف سبب کم شدن بار بحرانی بی‌بعد می‌شوند. در توان صفر با افزایش نسبت ضخامت هسته به رویه بر مقدار بار بحرانی افزوده می‌شود، اما در توان‌های بالاتر افزایش این نسبت سبب کاهش میزان بار بحرانی بی‌بعد می‌گردد. اثر نسبت طول به شعاع کوچک مختلف است. بار بحرانی بی‌بعد تا نسبت چهار کاهش می‌یابد و بعد از این مقدار بر میزان آن افزوده می‌شود. افزایش مقدار کسر حجمی تخلخل باعث کاهش بار بحرانی می‌گردد که در مدل تخلخل یکنواخت این کاهش شدیدتر از مدل تخلخل غیریکنواخت است. همچنین، بار بحرانی بی‌بعد در حالت توزیع غیریکنواخت دما بزرگتر از حالت یکنواخت است. بالاترین بار بحرانی بی‌بعد مربوط به توزیع دمای غیرخطی است. مقدار بار بحرانی بی‌بعد در حالت تکیه‌گاه گیردار بیشتر از تکیه‌گاه‌های دیگر است.

پیوست الف

$N_{\chi\chi}^{Tj}$ ، $M_{\chi\chi}^{Tj}$ و $M_{\psi\psi}^{Tj}$ منتجه حرارتی نیرو و گشتاور است. A_{kl}^{j} ، B_{kl}^{j} و D_{kl}^{j} $\left(k,l=1,2,6,\ j=o,i\right)$ مولفه‌های ماتریس سفتی است که برای رویه‌های بیرونی و داخلی به‌صورت زیر است:

$$N_{\chi\chi}^{Tj}=N_{\psi\psi}^{Tj}=\int_{-hj/2}^{hj/2}\left(\frac{E_j\left(T_j\right)}{1-\nu_j\left(T_j\right)}\alpha_j\left(T_j\right)T_j\right)dz_j \qquad \text{(الف)}$$

$$M_{\chi\chi}^{Tj}=M_{\psi\psi}^{Tj}=\int_{-hj/2}^{hj/2}\left(\frac{E_j\left(T_j\right)}{1-\nu_j\left(T_j\right)}\alpha_j\left(T_j\right)T_j\right)z_j dz_j \qquad \text{(ب)}$$

$$\begin{Bmatrix}A_{11}^{j}\\B_{11}^{j}\\D_{11}^{j}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}A_{22}^{j}\\B_{22}^{j}\\D_{22}^{j}\end{Bmatrix}=\int_{-hj/2}^{hj/2}\left(\frac{E_j\left(T_j\right)}{1-\nu_j\left(T_j\right)^2}\right)\begin{Bmatrix}1\\z_j\\z_j^2\end{Bmatrix}dz_j \qquad \text{(پ)}$$

$$\begin{Bmatrix}A_{12}^{j}\\B_{12}^{j}\\D_{12}^{j}\end{Bmatrix}=\int_{-hj/2}^{hj/2}\left(\frac{\nu_j\left(T_j\right).E_j\left(T_j\right)}{1-\nu_j\left(T_j\right)^2}\right)\begin{Bmatrix}1\\z_j\\z_j^2\end{Bmatrix}dz_j \qquad \text{(ت)}$$

$$\begin{Bmatrix}A_{66}^{j}\\B_{66}^{j}\\D_{66}^{j}\end{Bmatrix}=\int_{-hj/2}^{hj/2}\left(\frac{E_j\left(T_j\right)}{1-\nu_j\left(T_j\right)^2}\right)\begin{Bmatrix}1\\z_j\\z_j^2\end{Bmatrix}dz_j \qquad \text{(ث)}$$

که $E_j\left(T_j\right)$، $\nu_j\left(T_j\right)$، $\alpha_j\left(T_j\right)$ و $\left(j=o,i\right)$ مدول ارتجاعی، ضریب پواسون و ضریب انبساط حرارتی رویه‌هاست.

فهرست علائم

R_1, R_2	شعاع کوچک و بزرگ مخروط (m)
T	دما (K)
u_{0j}, v_{oj}, w_{oj}	جابه‌جایی‌های صفحه میانی لایه در جهت طولی، محیطی و عرضی
t	زمان(s)
m, n	شماره موج
علایم یونانی	
ρ	چگالی (kgm^{-3})
χ, ψ	مولفه‌های دستگاه مختصات منحنی الخط

γ	زاویه نیم راس مخروط
$\varphi_\chi, \varphi_\psi$	چرخش بردار نرمال بر صفحه میانی حول محور طولی و محیطی
$\varepsilon_\chi, \varepsilon_\psi, \varepsilon_z$	کرنش نرمال در رویه‌ها و هسته
$\gamma_{\chi\psi}, \gamma_{\psi z}, \gamma_{\chi z}$	کرنش برشی در رویه‌ها و هسته
ζ	کسر حجمی تخلخل
$\lambda_\chi, \lambda_\psi, \lambda_z$	ضرایب لاگرانژ
υ	ضریب پواسون

بالانویس‌ها

T	مربوط به منتجه حرارتی

زیرنویس‌ها

$j=i, o, c$	مربوط به رویه‌های پایین، بالا و هسته

منابع

[1] Y.Q. Wang, Y.H. Wan, Y.F. Zhang, Vibrations of longitudinally traveling functionally graded material plates with porosities, European Journal of Mechanics-A/ Solids, 66 (2017) 55-68.

[2] A. Rezaei, A. Saidi, M. Abrishamdari, M.P. Mohammadi, Natural frequencies of functionally graded plates with porosities via a simple four variable plate theory: an analytical approach, Thin-Walled Structures, 120 (2017) 366-377.

[3] Y. Liu, S. Su, H. Huang, Y. Liang, Thermal-mechanical coupling buckling analysis of porous functionally graded sandwich beams based on physical neutral plane, Composites Part B: Engineering, 168 (2019) 236-242.

[4] A. Ghorbanpour Arani, M. Khani, Z. Khoddami Maraghi, Dynamic analysis of a rectangular porous plate resting on an elastic foundation using high-order shear deformation theory, Journal of Vibration and Control, 24(16) (2018) 3698-3713.

[5] D. Chen, J. Yang, S. Kitipornchai, Buckling and bending analyses of a novel functionally graded porous plate using Chebyshev-Ritz method, Archives of Civil and Mechanical Engineering, 19(1) (2019) 157-170.

[6] M. Shaban, A. Alibeigloo, Three-dimensional elasticity solution for sandwich panels with corrugated cores by using energy method, Thin-Walled Structures, 119 (2017) 404-411.

[7] J.-Y. Yeh, L.-W. Chen, Finite element dynamic analysis of orthotropic sandwich plates with an electrorheological fluid core layer, Composite structures, 78(3) (2007) 368-376.

[8] J. Mantari, M. Ore, Free vibration of single and sandwich laminated composite plates by using a simplified FSDT, Composite Structures, 132 (2015) 952-959.

[9] J. Zhao, K. Choe, C. Shuai, A. Wang, Q. Wang, Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite truncated conical panels with general boundary conditions, Composites Part B: Engineering, 160 (2019) 225-240.

[10] H. Sepiani, A. Rastgoo, F. Ebrahimi, A.G. Arani, Vibration and buckling analysis of two-layered functionally graded cylindrical shell, considering the effects of transverse shear and rotary inertia, Materials & Design, 31(3) (2010) 1063-1069.

[11] A.G. Arani, M. Pourjamshidian, M. Arefi, M. Arani, Thermal, electrical and mechanical buckling loads of sandwich nano-beams made of FG-CNTRC resting on Pasternak's foundation based on higher order shear deformation theory, Structural Engineering and Mechanics, 69(4) (2019) 439-455.

[12] M.F. Caliri Jr, A.J. Ferreira, V. Tita, A review on plate and shell theories for laminated and sandwich structures highlighting the Finite Element Method, Composite Structures, 156 (2016) 63-77.

[13] A. Mozaffari, M. Karami, A. Azarnia, Effects of SMA Wires Free Vibration of Shape Memory Sandwich Panel, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, 44(2) (2013) 29-40, (in Persian).

BNNT nanotubes with temperature-dependent material properties based on most general strain gradient theory, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, (2017) (in Persian).

[21] H. Van Tung, Thermal and thermomechanical postbuckling of FGM sandwich plates resting on elastic foundations with tangential edge constraints and temperature dependent properties, Composite Structures, 131 (2015) 1028-1039.

[22] Y. Chen, G. Jin, C. Zhang, T. Ye, Y. Xue, Thermal vibration of FGM beams with general boundary conditions using a higher-order shear deformation theory, Composites Part B: Engineering, 153 (2018) 376-386.

[23] J. Seidi, S. Khalili, K. Malekzadeh, Temperature-dependent buckling analysis of sandwich truncated conical shells with FG facesheets, Composite Structures, 131 (2015) 682-691.

[24] F.A. Fazzolari, Natural frequencies and critical temperatures of functionally graded sandwich plates subjected to uniform and non-uniform temperature distributions, Composite Structures, 121 (2015) 197-210.

[25] M. Talebitooti, Thermal effect on free vibration of ring-stiffened rotating functionally graded conical shell with clamped ends, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 25(2) (2018) 155-165.

[26] A. Sofiyev, Buckling analysis of freely-supported functionally graded truncated conical shells under external pressures, Composite Structures, 132 (2015) 746-758.

[27] N. Aghaei, M. TalebiTooti, Free vibration analysis of nanotube-reinforced composite conical shell in high temperature environment, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, (2018) (in Persian).

[14] B. Eftari, S. Khalili, A. Jafari, K. MalekZadeh, Analysis of Free Vibration of Sandwich Panels Based on Improved High-order Sandwich Panel Theory, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, 43(2) (2012) 27-33, (in Persian).

[15] K.M. Fard, G. Payganeh, M. kardan, Dynamic response of sandwich panels with flexible cores and elastic foundation subjected to low velocity impact, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, 45(2) (2013) 27-42, (in Persian).

[16] Y. Mohammadi, S. Khalili, K. Malekzadeh Fard, Low velocity impact analysis of sandwich plates with functionally graded face sheets, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 23(4) (2016) 363-374.

[17] Y. Mohammadi, S.R. Khalili, Effect of geometrical and mechanical properties on behaviour of sandwich beams with functionally graded face sheets under indentation loading, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications, 225(4) (2011) 231-244.

[18] Y. Mohammadi, K.H. Safari, M. Rahmani, Free vibration analysis of circular sandwich plates with clamped FG face sheets, Journal of Simulation and Analysis of Novel Technologies in Mechanical Engineering, 9(4) (2017) 631-646, (in Persian).

[19] M. Shariyat, D. Asgari, M. Azadi, Nonlinear Transient Thermoelastic Analysis of a Thick FGM Cylinder with Temperature-Dependent Material Properties Using the Finite Element Method, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, 42(1) (2010) 9-18, (in Persian).

[20] M. MohammadiMehr, M. Mehrabi, E. ShabaniNejad, Buckling and vibration analyses of double-bonded nanocomposite micro plates reinforced by CNT and

Engineering Journal, 7(1) (2016) 313-333.

[37] M. Kheirikhah, S. Khalili, K.M. Fard, Biaxial buckling analysis of soft-core composite sandwich plates using improved high-order theory, European Journal of Mechanics-A/Solids, 31(1) (2012) 54-66.

[38] S. Khalili, Y. Mohammadi, Free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded face sheets and temperature-dependent material properties: A new approach, European Journal of Mechanics-A/Solids, 35 (2012) 61-74.

[39] K. Lam, L. Hua, Influence of boundary conditions on the frequency characteristics of a rotating truncated circular conical shell, Journal of Sound and Vibration, 223(2) (1999) 171-195.

[40] M.K. Kwak, J.-R. Koo, C.-H. Bae, Free vibration analysis of a hung clamped-free cylindrical shell partially submerged in fluid, Journal of Fluids and Structures, 27(2) (2011) 283-296.

[41] A. Sofiyev, The buckling of FGM truncated conical shells subjected to axial compressive load and resting on Winkler–Pasternak foundations, International Journal of Pressure Vessels and Piping, 87(12) (2010) 753-761.

[42] P. Seide, Discussion: ``Buckling of Circular Cones under Axial Compression" (Lackman, Leslie, and Penzien, Joseph, 1960, ASME J. Appl. Mech., 27, pp. 458-460), Journal of Applied Mechanics, 28 (1961) 315.

[43] A. Sofiyev, Application of the FOSDT to the solution of buckling problem of FGM sandwich conical shells under hydrostatic pressure, Composites Part B: Engineering, 144 (2018) 88-98.

[44] G. Sheng, X. Wang, Nonlinear response of fluid-conveying functionally graded cylindrical shells subjected to mechanical and thermal loading conditions,

[28] A. Sofiyev, The buckling and vibration analysis of coating-FGM-substrate conical shells under hydrostatic pressure with mixed boundary conditions, Composite Structures, 209 (2019) 686-693.

[29] A. Sofiyev, Review of research on the vibration and buckling of the FGM conical shells, Composite Structures, Composite Structures, 211 (2019) 301-317.

[30] C. Zhong, H.-G. Reimerdes, Stability behavior of cylindrical and conical sandwich shells with flexible core, Journal of Sandwich Structures & Materials, 9(2) (2007) 143-166.

[31] X. Jia-chu, W. Cheng, L. Ren-Huai, Nonlinear stability of truncated shallow conical sandwich shell with variable thickness, Applied Mathematics and Mechanics, 21(9) (2000) 977-986.

[32] D.-K. Thai, T. Tu, L. Hoa, D. Hung, N. Linh, Nonlinear Stability Analysis of Eccentrically Stiffened Functionally Graded Truncated Conical Sandwich Shells with Porosity, Materials, 11(11) (2018) 2200.

[33] A. Sofiyev, Application of the FOSDT to the solution of buckling problem of FGM sandwich conical shells under hydrostatic pressure, Composites Part B: Engineering, 144 (2018) 88-98.

[34] G. Sheng, X. Wang, Nonlinear response of fluid-conveying functionally graded cylindrical shells subjected to mechanical and thermal loading conditions, Composite Structures, 168 (2017) 675-684.

[35] H.-S. Shen, Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells, CRC press, 2016.

[36] L. Boutahar, R. Benamar, A homogenization procedure for geometrically non-linear free vibration analysis of functionally graded annular plates with porosities, resting on elastic foundations, Ain Shams

Composite Structures, 168 (2017) 675-684.

[45] H.-S. Shen, Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells, CRC press, 2016.

[46] L. Boutahar, R. Benamar, A homogenization procedure for geometrically non-linear free vibration analysis of functionally graded annular plates with porosities, resting on elastic foundations, Ain Shams Engineering Journal, 7(1) (2016) 313-333.

[47] M. Kheirikhah, S. Khalili, K.M. Fard, Biaxial buckling analysis of soft-core composite sandwich plates using improved high-order theory, European Journal of Mechanics-A/Solids, 31(1) (2012) 54-66.

[48] S. Khalili, Y. Mohammadi, Free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded face sheets and temperature-dependent material properties: A new approach, European Journal of Mechanics-A/Solids, 35 (2012) 61-74.

[49] K. Lam, L. Hua, Influence of boundary conditions on the frequency characteristics of a rotating truncated circular conical shell, Journal of Sound and Vibration, 223(2) (1999) 171-195.

[50] M.K. Kwak, J.-R. Koo, C.-H. Bae, Free vibration analysis of a hung clamped-free cylindrical shell partially submerged in fluid, Journal of Fluids and Structures, 27(2) (2011) 283-296.

[51] A. Sofiyev, The buckling of FGM truncated conical shells subjected to axial compressive load and resting on Winkler–Pasternak foundations, International Journal of Pressure Vessels and Piping, 87(12) (2010) 753-761.

[52] P. Seide, Discussion: ``Buckling of Circular Cones under Axial Compression" (Lackman, Leslie, and Penzien, Joseph, 1960, ASME J. Appl. Mech., 27, pp. 458-460), Journal of Applied Mechanics, 28 (1961) 315.