



دانشگاه صنعتی امیر کبیر
(پلی تکنیک تهران)

دوره چهل و شش، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۳، صفحه ۸۱ تا ۹۳
Vol. 46, No. 2, Winter 2014, pp. 81- 93



نشریه علمی - پژوهشی امیرکبیر (مهندسی مکانیک)
Amirkabir Journal of Science & Research (Mechanical Engineering)
(AJSR - ME)

تحلیل رفتار غیرخطی ارتعاشات آزاد تیر یکسرگیردار دارای ترک خستگی با استفاده از روش لیندست - پوانکاره

موسی رضائی^{۱*}، هادی فکرمندی^۲

۱- دانشیار، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز

(دریافت ۱۳۸۸/۷/۱، پذیرش ۱۳۹۲/۱۰/۳۰)

چکیده

در این پژوهش رفتار غیرخطی ارتعاشات آزاد تیر یکسرگیردار دارای ترک خستگی مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور ابتدا ارتعاشات عرضی تیر یکسرگیردار در مود اول به صورت یک سیستم یک درجه آزادی با جرم و سختی معادل مدل-سازی شده است. سپس مدل جدیدی برای سختی دوخطی تیر با ترک باز و بسته شونده ارائه شده است. به کمک این مدل معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم به شکل قابل تحلیل به روش لیندست - پوانکاره نوشته شده است. نتایج به دست آمده نشان می دهد پاسخ به دست آمده به روش اغتشاشات از دو قسمت تشکیل شده است که بخش اول آن پاسخ سیستمی است که سختی آن برابر با میانگین سختی معادل در حالت های کاملاً باز و کاملاً بسته ترک بوده و بخش دیگر جملات تصحیحی هستند که با اضافه شدن به جمله اول، اثرات تغییر در سختی معادل ناشی از باز و بسته شدن ترک را در پاسخ سیستم منظور می کنند. در حقیقت جملات تصحیحی در برگیرنده اجزای هارمونیک های بالاتر ظاهر شده در پاسخ ناشی از رفتار غیرخطی سیستم است. صحت نتایج به دست آمده با استفاده از تست های تجربی به تأیید رسیده است.

کلمات کلیدی

تیر ترک دار، ترک باز و بسته شونده، مدل دوخطی ترک، روش لیندست پوانکاره.

* نویسنده مسئول و عهده دار مکاتبات Email: m_rezaee@tabrizu.ac.ir

۱- مقدمه

ترک‌های خستگی اغلب در اجزای سازه‌های تحت بارهای تکراری به وجود می‌آیند و اگر به موقع تشخیص داده نشوند، می‌توانند منجر به خرابی شوند. تحقیقات نشان می‌دهد پاسخ دینامیکی سازه معیوب و سازه سالم متفاوتند و با اندازه‌گیری این تفاوت بر اساس مدلی از سازه معیوب می‌توان پارامترهای عیب (عمق و محل ترک) را تعیین کرد [۱]. اغلب این تحقیقات بر اساس مدل‌های خطی انجام شده‌اند. در این مدل‌ها ترک در سازه به صورت یک شیار همیشه باز در نظر گرفته می‌شود و اغلب از تغییرات ایجاد شده در فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی برای تشخیص عیب در سازه استفاده می‌شود. Elber [۲] در تحقیقات خود دریافته است که ترک خستگی در هنگام ارتعاش باز و بسته می‌شود. Gudmunson [۳] با بررسی این پدیده به این نتیجه رسید که استفاده از مدل ترک باز برای بررسی رفتار ترک خستگی می‌تواند منجر به نتایج نادرستی شود که مهمترین آن پیش‌بینی عمق ترک خستگی کمتر از مقدار واقعی آن است. چنین تخمین نادرستی می‌تواند خطراتی را در پی داشته باشد، لذا اخیراً توجه محققین به مدل‌های باز و بسته شونده ترک^۱ معطوف شده است. با توجه به اینکه رفتار باز و بسته شونده ترک خستگی منجر به تغییر سختی سازه در هنگام ارتعاش و در نتیجه باعث رفتار غیرخطی سیستم می‌شود، ارائه مدلی دقیق برای پیش‌بینی رفتار دینامیکی سازه‌های دارای ترک خستگی امری دشوار است. مشخصه اصلی این رفتار غیرخطی، حضور مؤلفه‌های فرکانسی بالاتر در پاسخ دینامیکی سازه است.

محققین مختلفی به بررسی مدل‌های ارائه شده در این زمینه پرداخته‌اند. Friswell و Penny [۴] رفتار غیرخطی تیر یکسرگیردار با ترک باز و بسته شونده در مود اول ارتعاشی را توسط یک نوسانگر یک درجه آزادی ساده با سختی دوخطی^۲ مدل‌سازی کرده‌اند. در این مدل وضعیت باز یا بسته بودن ترک در هر لحظه به علامت انحنای منحنی خیز تیر در محل ترک بستگی دارد. تحلیل آنها حاکی از حضور مؤلفه‌های فرکانسی بالاتر در ضرایب صحیحی از فرکانس طبیعی سیستم است.

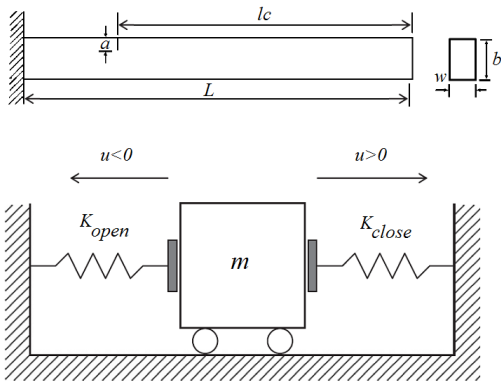
Shen و Chu [۵] با استفاده از روش گالرکین هر یک از مودهای ارتعاشی یک تیر با تکیه‌گاه‌های ساده را به صورت یک معادله حرکت دوخطی مدل‌سازی کرده‌اند. بررسی‌های انجام شده توسط این محققین بر روی پاسخ سیستم به تحریک هارمونیک به وضوح نشان‌دهنده رفتار غیرخطی برای هر یک از مودهای ارتعاشی است. همین محققان [۶] با توجه به مزایای روش‌های تحلیلی نسبت به سایر روش‌ها سعی کرده‌اند که از برهم‌نهی

حل‌های خطی موجود برای نیم سیکل‌های ترک باز و ترک بسته به کمک بسط فوریه به یک حل تحلیلی برای مدل سختی دوخطی دست یابند. Ostachowicz و Krawczuck [۷] با در نظر گرفتن تغییرات سختی به صورت یک تابع موج مربعی و با استفاده از روش هارمونیک بالانس^۳ رفتار سازه دارای ترک خستگی را بررسی کرده‌اند. این محققین با توجه به حساسیت اجزای هارمونیک موجود در پاسخ دینامیکی سازه معیوب نسبت به پارامترهای عیب، به بررسی امکان ترک‌یابی بر اساس تغییرات ایجاد شده در دامنه این اجزا پرداخته‌اند. در یک مدل پیچیده‌تر Abraham و Brandon [۸] از ماتریس‌های ارتباط متغیر با زمان^۴ برای مرتبط کردن دو قسمت تیر که توسط ترک از هم جدا شده‌اند، استفاده کرده‌اند. این ماتریس‌ها توسط بسط فوریه به دست آمده‌اند. در این مدل برای نزدیک‌تر شدن به شرایط واقعی فرض شده است که تغییرات در سختی سازه به صورت پیوسته رخ می‌دهد. با این وجود روش عددی و محاسبات طولانی به کار رفته برای استخراج پاسخ، نحوه ارتباط پارامترهای ترک را با اجزای فرکانسی بالاتر به درستی روشن نمی‌کند و همچون بسیاری از تحقیقات پیشین انجام شده در این زمینه صرفاً به حضور این مؤلفه‌های فرکانسی بالاتر در پاسخ دینامیکی سازه معیوب و حساسیت آنها نسبت به پارامترهای عیب اشاره می‌کند. در مدل ساده‌تری که توسط Cheng و همکاران [۹] ارائه شده است سختی به صورت یک تابع هارمونیک زمانی با فرکانسی برابر با فرکانس تحریک سازه بین مقادیر متناظر با حالت‌های کاملاً باز و کاملاً بسته ترک تغییر می‌کند. چنین فرضی منجر به یک مدل خطی با ضرایب متغیر با زمان می‌شود. با استفاده از این مدل Duka و Hadjileontiadis [۱۰] از یک روش آنالیز زمان-فرکانس برای بررسی مشخصه‌های غیرخطی پاسخ دینامیکی استفاده کرده‌اند.

علاوه براین در تحقیقات انجام شده در این زمینه با استفاده از روش المان محدود نیز حضور اجزای هارمونیک در ضرایب صحیحی از فرکانس طبیعی سیستم و حساسیت آنها نسبت به پارامترهای عیب مورد تأیید است [۱۱]- [۱۳]. از این جمله می‌توان به تحقیق انجام شده توسط Saavedra و Cuitino [۱۲] اشاره کرد. این محققین برای المان ترک، از یک ماتریس سختی جدید استخراج شده بر اساس تئوری مکانیک شکست و به کمک روش انرژی، استفاده کرده‌اند. نتایج به دست آمده توسط این محققین که به تأیید تجربی نیز رسیده است نشان می‌دهد که دامنه هارمونیک‌های زوج بسیار بیشتر از دامنه هارمونیک‌های فرد است.

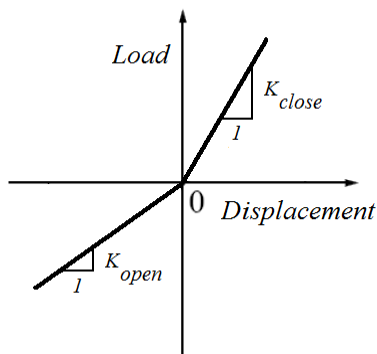
۲- مدل یک درجه آزادی تیر یکسرگیردار ترکدار

در تحقیق حاضر، ارتعاشات آزاد تیر یکسرگیردار دارای ترک خستگی عرضی در مود اول ارتعاشی به صورت یک سیستم یک درجه آزادی با جرم و سختی معادل مدل سازی شده است (شکل ۱). اساس این معادل سازی برابر قرار دادن انرژی‌های جنبشی و پتانسیل تیر ترکدار و مدل یک درجه آزادی معادل است.



شکل (۱): تیر یکسرگیردار ترکدار و مدل یک درجه آزادی معادل

مطالعاتی که بر روی رفتار ترک خستگی انجام شده است، نشان می‌دهد که رابطه غیرخطی بار- جابجایی سازه ترکدار را می‌توان تقریباً به صورت یک رابطه دوخطی در نظر گرفت [۱۵] (شکل ۲). در نتیجه در هنگام ارتعاش تیر با تغییر وضعیت ترک بین حالت‌های کاملاً باز و کاملاً بسته، سختی معادل تیر بین مقادیر سختی‌های معادل متناظر با این حالت‌ها تغییر می‌کند.



شکل (۲): نمودار دوخطی بار- جابجایی تیر ترکدار با ترک خستگی

مدل سختی دوخطی که از ترکیب دو خط با شیب‌های مختلف تشکیل شده است، تابعی از دامنه نوسان است و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$k(u) = \begin{cases} k_{close} & u > 0 \\ k_{open} & u < 0 \end{cases} \quad (1)$$

که در آن k_{open} و k_{close} به ترتیب سختی‌های معادل سیستم در حالت‌های ترک کاملاً باز و ترک کاملاً بسته می‌باشند. سختی

در جدیدترین تحقیق صورت گرفته در این زمینه Peng و همکاران [۱۴] با استفاده از مفهوم نمودارهای خروجی پاسخ فرکانسی غیرخطی^۵ (NOFRF) به بررسی رفتار غیرخطی ترک پرداخته‌اند. نتایج حاکی از آن است که نمودارهای به دست آمده از تحریک سیستم در یک فرکانس مناسب، حساسیت خوبی نسبت به حضور ترک خستگی دارد.

با وجود اینکه در بسیاری از تحقیقات انجام شده به حضور اجزای هارمونیک در پاسخ دینامیکی سازه معیوب و حساسیت آنها نسبت به پارامترهای ترک اشاره شده است، تغییر پارامترهای سیستم در طول زمان، استفاده از روش‌های تحلیلی برای ریشه‌یابی این رفتار و بررسی پارامترهای تأثیرگذار بر آن را بسیار دشوار می‌کند به طوریکه عمده تحقیقات انجام شده در این زمینه بر اساس روش‌های عددی یا المان محدود است. از طرف دیگر ماهیت عددی و محاسبات طولانی به کار رفته در بیشتر این روش‌ها استفاده از آنها را برای تعریف نشانگرهای دینامیکی عیب به منظور استفاده در روش‌های عیب‌یابی مبتنی بر ارتعاشات با مشکل مواجه می‌کند.

هدف از این تحقیق تعیین رابطه بین اجزای هارمونیک ظاهر شده در طیف فرکانسی پاسخ ارتعاشی تیر ترکدار و پارامترهای ترک و مشخصه‌های سیستم از یک دیدگاه تحلیلی و به کمک یکی از روش‌های اغتشاشات به نام روش لیندست- پوانکاره است. بدین منظور ابتدا ارتعاشات عرضی یک تیر یکسرگیردار دارای ترک خستگی باز و بسته شونده به صورت یک نوسانگر یک درجه آزادی با سختی دوخطی مدل سازی شده است. معادله دیفرانسیل حاکم با ارائه یک مدل جدید برای سختی دوخطی و با استفاده از عملیات ریاضی به شکل استاندارد قابل تحلیل به روش لیندست- پوانکاره نوشته شده است. در نهایت پاسخ سیستم با استفاده از روش لیندست- پوانکاره به دست آمده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد جملات تصحیحی که توسط روش لیندست- پوانکاره به پاسخ سیستم خطی متناظر اضافه می‌شود در برگیرنده اجزای هارمونیک ظاهر شده در پاسخ ناشی از رفتار غیرخطی سیستم می‌باشد. بنابراین تحلیل حاضر منجر به استخراج رابطه تحلیلی میان دامنه اجزای هارمونیک و خصوصیات سیستم و پارامترهای ترک شده است. صحت نتایج به دست آمده، توسط روش‌های عددی و تست‌های تجربی به تأیید رسیده است.

رابطه زیر را برای تعیین تغییر در انعطاف‌پذیری تیر یک سر گیردار در اثر حضور ترکی به عمق a و در فاصله l_c از انتهای آزاد تیر ارائه کرده‌اند:

$$\Delta C = w \frac{\partial^2}{\partial P_i^2} \int_0^a J da = \frac{72l_c^2 \pi (1-\nu^2)}{Ewb^4} \varphi \quad (6)$$

که در آن w و b به ترتیب عرض و ارتفاع سطح مقطع تیر، J نرخ آزاد شدن انرژی کرنشی و ν نسبت پواسون می‌باشد و تابع φ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\varphi = 19.60 \frac{a^{10}}{b^8} - 40.69 \frac{a^9}{b^7} + 47.04 \frac{a^8}{b^6} - 32.99 \frac{a^7}{b^5} + 20.30 \frac{a^6}{b^4} - 9.98 \frac{a^5}{b^3} + 4.60 \frac{a^4}{b^2} - 1.05 \frac{a^3}{b} + 0.63a^2 \quad (7)$$

جرم معادل تیر از رابطه زیر به دست می‌آید [۱۶]:

$$m = \int_0^L m(x) \phi^2(x) dx \quad (8)$$

در روابط فوق $m(x)$ جرم واحد طول تیر می‌باشد. با توجه به فرضیات فوق معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم معادل را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$m\ddot{u} + k(u)u = 0 \quad (9)$$

که در آن u جابجایی جرم معادل تیر است که برابر با جابجایی انتهای آزاد تیر می‌باشد.

۳- ارائه مدل جدید برای سختی دوخطی تیر ترک‌دار

نشان داده شده است که اگر بتوان معادله دیفرانسیل حاکم بر یک سیستم دینامیکی غیرخطی را به صورت رابطه (۱۰) بیان کرد، می‌توان با استفاده از روش لیندست- پوانکاره که یکی از روش‌های اغتشاشات است، پاسخ آن را به دست آورد [۱۹].

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon f(u, t) \quad (10)$$

که در این رابطه ω_0 فرکانس طبیعی سیستم خطی متناظر است و ε یک پارامتر بی‌بعد کوچک در نظر گرفته می‌شود.

همانطور که در رابطه (۱) ملاحظه می‌شود سختی معادل تیر تابعی از دامنه نوسان است. با در نظر گرفتن تابع دو ضابطه‌ای ارائه شده برای $k(u)$ ، می‌توان سختی دوخطی تیر ترک‌دار را به شکل زیر بیان کرد:

$$\begin{cases} k_{close} = k(1 + \varepsilon) \\ k_{open} = k(1 - \varepsilon) \end{cases} \quad (11)$$

که در رابطه فوق k میانگین سختی معادل در حالت‌های کاملاً باز و کاملاً بسته ترک است:

معادل تیر سالم به صورت زیر به دست می‌آید [۱۶]:

$$k_c = \frac{1}{C_c} = \int_0^L EI \phi''^2(x) dx \quad (2)$$

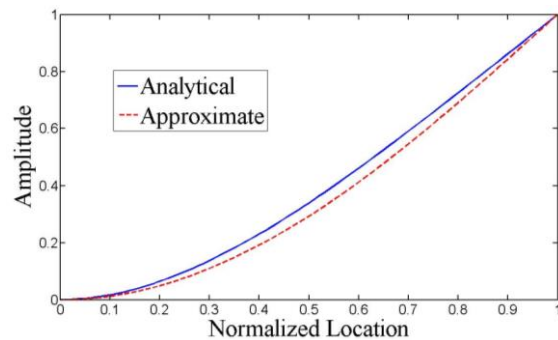
که در این رابطه C_c انعطاف‌پذیری تیر سالم، E مدول یانگ، I ممان اینرسی سطح مقطع تیر و L طول تیر است. فرض بر این است که با اعمال شرایط اولیه مناسب، تیر در مود اول به ارتعاش در می‌آید بنابراین $\phi(x)$ شکل مود نوسانی اول تیر یکسرگیردار است. Penzien و Clough [۱۷] رابطه تقریبی زیر را برای محاسبه شکل مود اول ارتعاشی تیر یکسرگیردار پیشنهاد کرده‌اند:

$$\psi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad (3)$$

در بیشتر تحقیقات انجام شده در این زمینه از رابطه فوق برای استخراج جرم و سختی معادل سیستم استفاده شده است. در تحقیق حاضر به منظور افزایش دقت، از شکل مودهای ارتعاشی تیر اولر- برنولی که از حل تحلیلی معادلات حرکت به صورت زیر به دست آمده‌اند، استفاده شده است:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \cos \lambda x - \cosh \lambda x \\ &- \frac{(\cos \lambda L + \cosh \lambda L)}{(\sin \lambda L + \sinh \lambda L)} (\sin \lambda x - \sinh \lambda x) \end{aligned} \quad (4)$$

در رابطه فوق، شکل مود اول ارتعاشی به ازای $\lambda L = 1.875$ به دست می‌آید. در شکل ۳ تفاوت بین شکل مود تحلیلی به کار رفته در تحقیق حاضر و شکل مود تقریبی پیشنهاد شده در مرجع [۱۷] نشان داده شده است.



شکل (۳): مقایسه شکل مود اول تیر یکسرگیردار به دست آمده از حل تحلیلی معادلات حرکت تیر اولر- برنولی (—) و تابع تقریبی پیشنهاد شده در مرجع [۱۷] (---)

سختی معادل تیر با ترک کاملاً باز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$k_o = \frac{1}{C_o} \quad (5)$$

که در آن $C_o = C + \Delta C$ بوده و ΔC تغییر در انعطاف‌پذیری تیر ناشی از حضور ترک می‌باشد. Paipetis و Dimarogonas [۱۸]

براین، فرکانس پاسخ نیز به صورت $\sum_{i=0}^n \varepsilon^i \omega_i$ بسط داده می‌شود که در آن ω_i ها ضرایب مجهولی هستند که از حذف جملات سکولار^۶ به دست می‌آیند. با قرار دادن این فرضیات در معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم و مرتب کردن آن بر حسب توان‌های افزایشی ε ، تعداد n معادله دیفرانسیل خطی حاصل می‌شود. اولین معادله که یک معادله دیفرانسیل خطی همگن است، بخش اصلی پاسخ سیستم را به دست می‌دهد. از حل سایر معادلات، جملات تصحیح به دست می‌آیند. شرط هم‌گرا بودن هر یک از معادلات حاکم بر جملات تصحیح، حذف جملات سکولار است. جملات سکولار، جملاتی هستند که دارای فرکانسی برابر با فرکانس سیستم هستند و موجب واگرایی پاسخ می‌شوند. در این روش به ندرت بیش از دو جمله تصحیح برای پاسخ در نظر گرفته می‌شود، چرا که مستلزم محاسبات ریاضی بسیار زیادی است.

در تحقیق حاضر $n=2$ در نظر گرفته شده است، که به معنای در نظر گرفتن پاسخ سیستم خطی متناظر و دو جمله تصحیح مربوط به رفتار غیرخطی سیستم است. بر این اساس پاسخ سیستم و فرکانس آن به صورت سری‌های زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{cases} u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \\ \omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \end{cases} \quad (18)$$

با توجه به تغییر متغیر $\tau = \omega t$ ، مشتقات u بر حسب زمان را می‌توان بر حسب متغیر جدید به صورت زیر بیان کرد:

$$\frac{du}{dt} = \omega \frac{du}{d\tau} = (\omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{d}{d\tau} (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) \quad (19)$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2 u}{d\tau^2} = (\omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots)^2 \frac{d^2}{d\tau^2} (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) \quad (20)$$

با جایگذاری روابط (۱۸) تا (۲۰) در معادله (۱۶) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & (\omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots)^2 \frac{d^2}{d\tau^2} (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) \\ & + \omega_0^2 (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) \\ & + \varepsilon \omega_0^2 |u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots| = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

با مرتب کردن رابطه فوق بر حسب توان‌های افزایشی ε ، سه معادله دیفرانسیل برای u_i ها به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$k = \frac{k_{open} + k_{close}}{2} \quad (12)$$

و ε پارامتری بعد و کوچکی است که آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varepsilon = \frac{k_{close} - k_{open}}{k_{close} + k_{open}} \quad (13)$$

با توجه به روابط (۱۱) تا (۱۳) مدل جدید زیر برای سختی دو خطی تیر ترک‌دار ارائه می‌شود:

$$k(u) = ku + \varepsilon k |u| \quad (14)$$

با قرار دادن رابطه (۱۴) در رابطه (۹) خواهیم داشت:

$$m\ddot{u} + ku = -\varepsilon k |u| \quad (15)$$

با تقسیم طرفین رابطه (۱۵) بر m معادله دیفرانسیل حاکم به شکل نهایی زیر بیان می‌شود:

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = -\varepsilon \omega_0^2 |u| \quad (16)$$

که در این رابطه ω_0 فرکانس سیستم خطی متناظر است و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (17)$$

با مقایسه روابط (۱۰) و (۱۶) مشاهده می‌شود که با ارائه مدل جدید برای سختی دوخطی مدل تیر ترک‌دار، معادله دیفرانسیل حاکم بر آن را می‌توان به شکل قابل تحلیل توسط روش اغتشاشات نوشت. بعلاوه، در این مدل بر خلاف مدل‌های سختی متغیر با زمان، سختی معادل تابعی از دامنه نوسان است که این امر منجر به تشکیل معادله دیفرانسیل غیرخطی شده است. مسلماً چنین مدلی در مقایسه با مدل‌های سختی متغیر با زمان به درک بهتری از رفتار غیرخطی ترک خستگی منجر می‌شود.

۴- استخراج پاسخ معادله دیفرانسیل حاکم به روش لیندست- پوانکاره

در تحقیق حاضر برای به دست آوردن پاسخ سیستم از روش لیندست- پوانکاره استفاده شده است. روش لیندست- پوانکاره یکی از روش‌های اغتشاشات برای تحلیل سیستم‌های غیرخطی است که مزیت آن نسبت به سایر روش‌ها، توانایی این روش در تحلیل برهم‌کنش دامنه و فرکانس در سیستم‌های غیرخطی است [۱۹]. در این روش با انجام تغییر متغیر $\tau = \omega t$ پاسخ سیستم به صورت سری $\sum_{i=0}^n \varepsilon^i u_i$ در نظر گرفته می‌شود. علاوه

$$-2\omega_0\omega_1 \frac{d^2 u_0}{d\tau^2} = 0 \quad (27)$$

که در این صورت $\omega_1 = 0$ به دست می‌آید. با حذف جمله سکولار از معادله (23) و قرار دادن u_0 به دست آمده در رابطه (25) در آن، این معادله به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + u_1 = -A |\cos \tau| \quad (28)$$

$|\cos \tau|$ یک تابع پریودیک زوج است که بسط فوریه آن به این صورت به دست می‌آید:

$$f(\tau) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{1}{(1-4n^2)} (-1)^n \right\} \cos 2n\tau \quad (29)$$

با قرار دادن رابطه (29) در رابطه (28) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + u_1 &= -A f(\tau) \\ &= -A \left\{ \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{1}{(1-4n^2)} (-1)^n \right\} \cos 2n\tau \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

همانطور که مشاهده می‌شود سمت راست رابطه (30) از یک مقدار ثابت و مجموعه‌ای از جمله‌های هارمونیک تشکیل شده است. با حل معادله دیفرانسیل، پاسخ خصوصی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u_1 = -A \left\{ \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{1}{(1-4n^2)^2} (-1)^n \right\} \cos 2n\tau \right\} \quad (31)$$

در رابطه (24) عبارت $\frac{|u_0 + \varepsilon u_1|}{u_0 + \varepsilon u_1} u_1$ را می‌توان با استفاده از بسط فوریه به صورت زیر نوشت:

$$g(\tau) = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos m\tau \quad (32)$$

که در آن ضرایب بسط فوریه به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^z \bar{u}_1 d\tau - \int_z^\pi \bar{u}_1 d\tau \right\} \quad (33)$$

$$b_m = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^z \bar{u}_1 \cos m\tau d\tau - \int_z^\pi \bar{u}_1 \cos m\tau d\tau \right\}, m=1,2,\dots \quad (34)$$

که در این روابط z محل تغییر علامت تابع $(u_0 + \varepsilon u_1)$ است و \bar{u}_1 مقدار میانگین تابع u_1 به دست آمده در رابطه (31) است. با محاسبه انتگرال‌های فوق ضرایب بسط فوریه رابطه (32) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$b_0 = \left(\frac{\bar{b}_1}{\pi} \right) (2z - \pi) \quad (35)$$

$$\varepsilon^0 : \omega_0^2 \left(\frac{d^2 u_0}{d\tau^2} + u_0 \right) = 0 \quad (22)$$

$$\varepsilon^1 : \omega_0^2 \left(\frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + u_1 \right) = -2\omega_0\omega_1 \frac{d^2 u_0}{d\tau^2} - \omega_0^2 |u_0| \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 : \omega_0^2 \left(\frac{d^2 u_2}{d\tau^2} + u_2 \right) &= -2\omega_0\omega_1 \frac{d^2 u_1}{d\tau^2} \\ &- (\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_2) \frac{d^2 u_0}{d\tau^2} - \omega_0^2 \frac{|u_0 + \varepsilon u_1|}{u_0 + \varepsilon u_1} u_1 \end{aligned} \quad (24)$$

رابطه (22) نشان‌دهنده یک معادله دیفرانسیل همگن است که از حل آن پاسخ سیستمی با میانگین سختی‌های معادل در حالت‌های کاملاً باز و کاملاً بسته ترک به دست می‌آید. این سیستم که در اصطلاح سیستم خطی متناظر نامیده می‌شود، در برگیرنده بخش اصلی پاسخ است. اثرات تغییر سختی معادل در پاسخ سیستم که ناشی از باز و بسته شدن ترک است، از حل معادلات (23) و (24) به دست می‌آید. به این قسمت از پاسخ در اصطلاح جملات تصحیح گفته می‌شود. برای تعیین علامت جملات مرتبه‌های مختلف ε که به صورت تابع قدر مطلق بیان شده است، از علامت جملات مراتب پایین‌تر استفاده می‌شود. در روش لیندست- پوانکاره شرایط اولیه در اولین معادله اعمال شده و شرایط اولیه معادلات تصحیح صفر لحاظ می‌شود. برای این منظور دو روش وجود دارد. در روش اول ضرایب نامعلوم حل همگن معادلات تصحیح به گونه‌ای تعیین می‌شود که شرایط اولیه صفر شود. در روش دوم از حل همگن معادلات تصحیح صرف نظر می‌شود. در عوض با بسط ضرایب حل همگن بخش اصلی پاسخ بر حسب توان‌های ε ، ضرایب این بسط به گونه‌ای تعیین می‌شود که شرایط اولیه مربوط به معادلات تصحیح صفر شود. نشان داده شده است که این دو روش کاملاً معادلند [19]. در تحقیق حاضر از روش دوم استفاده شده است. بدین ترتیب با فرض شرایط اولیه جابجایی خالص، بخش اصلی پاسخ از حل معادله دیفرانسیل (22) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u_0 = A \cos \tau \quad (25)$$

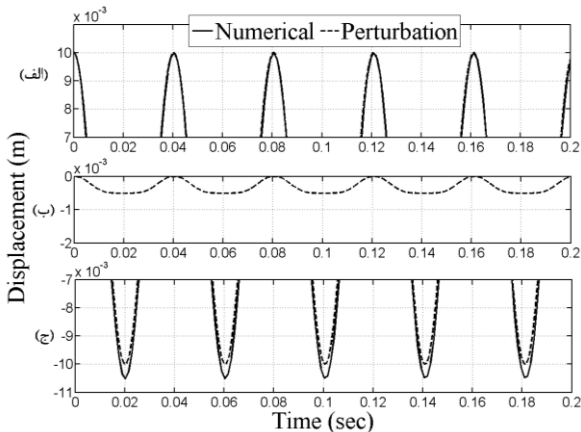
که در آن:

$$A = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 \quad (26)$$

A_0 جابجایی اولیه انتهای آزاد تیر بوده و A_1 و A_2 به گونه‌ای تعیین می‌شوند که شرایط اولیه جملات تصحیح مرتبه اول و دوم صفر شود. برای حذف تنها جمله سکولار معادله (23) خواهیم داشت:

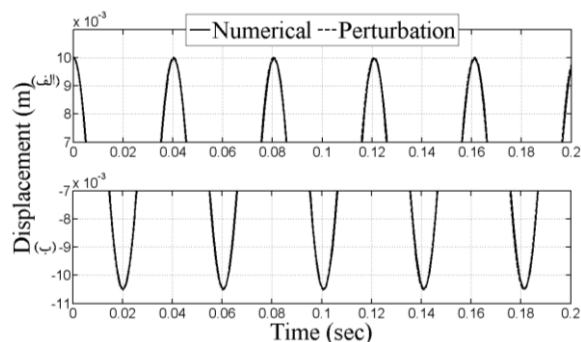
9

مشاهده می‌شود این دو نمودار در پیک‌های بالایی بر هم منطبق هستند ولی در پیک‌های پایینی از یکدیگر تمایز می‌یابند. این تفاوت که ناشی از باز شدن ترک در پیک‌های پایینی و کاهش سختی معادل سیستم است، با اضافه شدن جمله تصحیح مرتبه اول به پاسخ سیستم خطی متناظر جبران می‌شود. جمله تصحیح مرتبه اول در شکل ۴- ب نشان داده شده است. در پیک‌های بالایی با توجه به اینکه دو نمودار برهم منطبقند، جمله تصحیح نیز به صفر میل می‌کند.



شکل (۴): (الف) پیک‌های بالایی پاسخ سیستم خطی متناظر (ب) جمله تصحیح مرتبه اول و (ج) پیک‌های پایینی پاسخ سیستم خطی متناظر (---) و پاسخ به دست آمده به روش عددی رانگ-کوتا (—)، برای $\beta = 0.9$ و $\alpha = 0.5$

در شکل ۵ پیک‌های بالایی و پایینی پاسخ به دست آمده از روش لیندست- پوانکاره پس از اضافه شدن جمله تصحیح مرتبه اول به پاسخ سیستم خطی متناظر به همراه پاسخ به دست آمده به روش عددی رانگ- کوتا مرتبه چهار نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود دو نمودار کاملاً بر هم منطبق هستند.



شکل (۵): (الف) پیک‌های بالایی و (ب) پیک‌های پایینی پاسخ به دست آمده به روش لیندست- پوانکاره پس از اعمال تصحیح مرتبه اول (---) و پاسخ به دست آمده به روش عددی رانگ- کوتا (—)، برای $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.9$

$$b_m = \left(\frac{4b_1}{m\pi} \right) \sin mz, \quad m = 1, 2, \dots \quad (36)$$

با قرار دادن بسط فوریه ارائه شده برای عبارت $\frac{|x_0 + \varepsilon x_1|}{x_0 + \varepsilon x_1}$ در معادله (۲۴) مشاهده می‌شود که اولین جمله از این بسط یک جمله سکولار است که برای حذف آن برقراری رابطه زیر لازم است:

$$-2\omega_0\omega_2(-A\cos\tau) - \omega_0^2(b_m \cos m\tau)|_{m=1} = 0 \quad (37)$$

بنابراین:

$$\omega_2 = \frac{\omega_0 b_1}{2A} \quad (38)$$

با حذف جمله سکولار از معادله (۲۴) و حل این معادله دیفرانسیل، پاسخ خصوصی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u_2 = b_0 + \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{b_m}{1-m^2} \right) \cos m\tau \quad (39)$$

که در این رابطه b_0 و b_m به ترتیب از روابط (۳۵) و (۳۶) به دست می‌آیند. در نهایت، پاسخ سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u(\tau) = u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) + \varepsilon^2 u_2(\tau) \quad (40)$$

که در آن:

$$\tau = \omega t \quad (41)$$

و

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon^2 \omega_2 \quad (42)$$

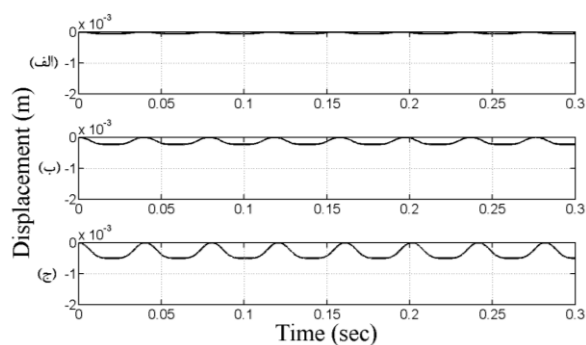
۵- نتایج تحلیلی

ابعاد هندسی و مشخصات مکانیکی تیر فولادی یکسرگیردار ترک‌دار مورد بررسی به این صورت است: طول تیر $L = 450 \text{ mm}$ ، سطح مقطع تیر $A = 3.9 \times 6.4 \text{ mm}$ ، مدول یانگ $E = 200 \text{ GPa}$ و چگالی $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$. علاوه بر این، پارامترهای بی‌بعد ترک عبارتند از: $\alpha = \frac{a}{b}$ نشان دهنده عمق نسبی ترک^۷ (نسبت عمق ترک به ضخامت تیر) و $\beta = \frac{l_c}{L}$ نشان دهنده موقعیت نسبی ترک (نسبت فاصله ترک از انتهای آزاد تیر به طول تیر). شرایط اولیه در تمامی حالت‌هایی که بررسی خواهد شد یکسان و به صورت $\{x(0) = 0.01(m), \dot{x}(0) = 0\}$ می‌باشد.

در شکل ۴- الف و ۴- ج به ترتیب پیک‌های بالایی و پیک‌های پایینی پاسخ سیستم خطی متناظر و پاسخ نهایی به دست آمده از روش عددی رانگ-کوتا رسم شده است. همانطور که

در شکل ۶ اثر افزایش عمق نسبی ترک در یک موقعیت نسبی ثابت بر پاسخ سیستم، مورد بررسی قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که با افزایش عمق نسبی ترک میزان کاهش سختی معادل سیستم بیشتر شده و در نتیجه اختلاف پاسخ سیستم خطی متناظر و پاسخ به دست آمده به روش عددی افزایش می‌یابد. با توجه به اینکه به دلیل باز شدن ترک در نیم-سیکل‌های پایین، کاهش سختی معادل سیستم در این قسمت از پاسخ اثر می‌گذارد، در شکل ۶ پیک‌های پایینی دو نمودار نمایش داده شده است.

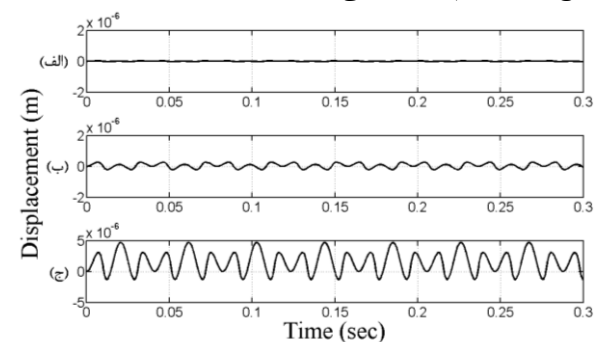
همانطور که ملاحظه می‌شود پاسخ سیستم با اعمال تصحیح مرتبه اول با دقت بسیار خوبی به پاسخ نهایی به دست آمده به روش عددی نزدیک می‌شود. جمله تصحیح مرتبه دوم نسبت به جمله تصحیح مرتبه اول تأثیر بسیار کمتری در پاسخ دارد. با این وجود نسبت به پارامترهای ترک حساس بوده و در نیم سیکل‌های باز و بسته ترک شکل آن تغییر می‌کند.



شکل (۸): جمله تصحیح پاسخ به دست آمده به روش

لیندست- پوانکاره برای عمق نسبی ترک $\alpha = 0.5$ و موقعیت‌های نسبی (الف) $\beta = 0.3$ (ب) $\beta = 0.6$ و (ج) $\beta = 0.9$

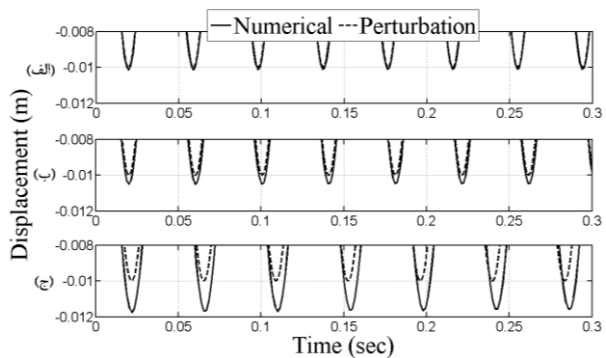
در شکل ۹ اثر افزایش عمق نسبی ترک در یک موقعیت نسبی ثابت بر دامنه نوسانات جمله تصحیح مرتبه دوم نشان داده شده است. با افزایش عمق نسبی ترک دامنه نوسانات جمله تصحیح مرتبه دوم افزایش می‌یابد.



شکل (۹): جمله تصحیح مرتبه دوم پاسخ به دست آمده به روش لیندست- پوانکاره برای موقعیت نسبی ترک $\beta = 0.6$ و عمق‌های نسبی (الف) $\alpha = 0.3$ (ب) $\alpha = 0.5$ و (ج) $\alpha = 0.7$

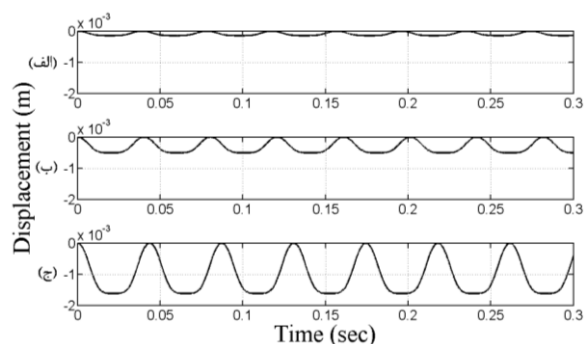
در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود که تغییر موقعیت نسبی ترک نیز بر دامنه نوسانات جمله مرتبه دوم اثر گذار است، به طوریکه

موقعیت نسبی ثابت بر پاسخ سیستم، مورد بررسی قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که با افزایش عمق نسبی ترک میزان کاهش سختی معادل سیستم بیشتر شده و در نتیجه اختلاف پاسخ سیستم خطی متناظر و پاسخ به دست آمده به روش عددی افزایش می‌یابد. با توجه به اینکه به دلیل باز شدن ترک در نیم-سیکل‌های پایین، کاهش سختی معادل سیستم در این قسمت از پاسخ اثر می‌گذارد، در شکل ۶ پیک‌های پایینی دو نمودار نمایش داده شده است.



شکل (۶): مقایسه پیک‌های پایینی پاسخ سیستم خطی متناظر (---) و پاسخ نهایی به دست آمده به روش عددی رانگ-کوتا (—)، برای موقعیت نسبی $\beta = 0.9$ و عمق‌های نسبی ترک (الف) $\alpha = 0.3$ (ب) $\alpha = 0.5$ و (ج) $\alpha = 0.7$

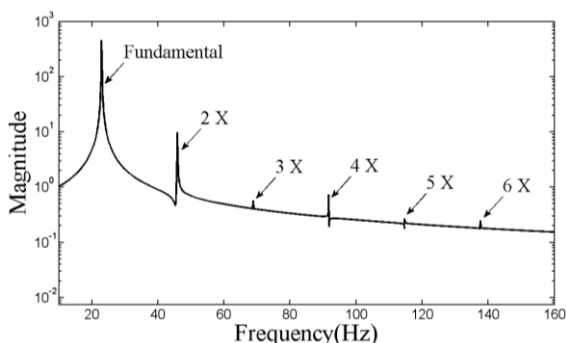
با افزایش عمق نسبی ترک در یک موقعیت نسبی ثابت و افزایش اختلاف پاسخ سیستم خطی متناظر و پاسخ به دست آمده به روش عددی، دامنه نوسانات جمله تصحیح مرتبه اول نیز با هدف جبران این اختلاف افزایش می‌یابد. این پدیده در شکل ۷ نشان داده شده است.



شکل (۷): جمله تصحیح مرتبه اول پاسخ به دست آمده به روش لیندست- پوانکاره برای موقعیت نسبی ترک $\beta = 0.9$ و عمق‌های نسبی (الف) $\alpha = 0.3$ (ب) $\alpha = 0.5$ و (ج) $\alpha = 0.7$

پارامتر موقعیت نسبی ترک نیز مانند عمق نسبی ترک بر پاسخ ارتعاشی سازه ترک‌دار اثرگذار است. در شکل ۸ تأثیر تغییر موقعیت نسبی ترکی با عمق نسبی ثابت در دامنه نوسانات جمله

تصحیح مرتبه اول و مرتبه دوم به پاسخ سیستم خطی متناظر در حالت عمق نسبی ترک $\alpha = 0.7$ و موقعیت نسبی ترک $\beta = 0.9$ نشان می‌دهد.



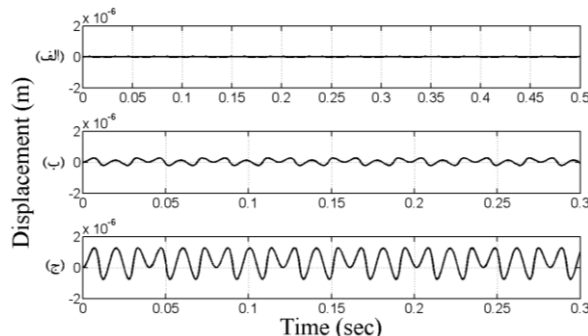
شکل (۱۲): طیف فرکانسی پاسخ پس از اعمال جملات تصحیح مرتبه اول و مرتبه دوم در پاسخ اغتشاشات برای عمق نسبی ترک $\alpha = 0.7$ و موقعیت نسبی ترک $\beta = 0.9$

مشاهده می‌شود که با اضافه شدن جمله تصحیح مرتبه دوم به پاسخ سیستم، هارمونیک‌های مراتب فرد نیز در طیف فرکانسی پاسخ ظاهر می‌شوند. این امر به این دلیل است که برخلاف جمله تصحیح مرتبه اول که تنها شامل مؤلفه‌های هارمونیک در مضارب زوجی از فرکانس طبیعی سیستم است، جمله تصحیح مرتبه دوم شامل مؤلفه‌های هارمونیک در تمامی مضارب صحیح فرکانس طبیعی سیستم می‌باشد. با توجه به اینکه هارمونیک‌های زوج از مرتبه ε و هارمونیک‌های فرد از مرتبه ε^2 هستند، دامنه هارمونیک‌های زوج به مراتب از دامنه هارمونیک‌های فرد بیشتر است. نتایج تجربی و تحلیلی مرجع [۱۲] نیز این امر را تأیید می‌کند.

با دقت در رابطه (۴۰) روشن است که دامنه مؤلفه‌های هارمونیک در پاسخ تیر ترک‌دار به صورت ضرایب بسط فوریه و از مرتبه‌های ε و ε^2 می‌باشند. با توجه به اینکه ضرایب بسط فوریه مقادیری ثابتند و پارامترهای عمق و موقعیت نسبی ترک تنها بر روی پارامتر بی‌بعد ε اثر می‌گذارند، بنابراین تغییرات پارامتر ε بر حسب پارامترهای ترک نشان‌دهنده تغییرات دامنه هارمونیک‌های زوج و تغییرات پارامتر ε^2 نشان‌دهنده تغییرات دامنه هارمونیک‌های فرد است.

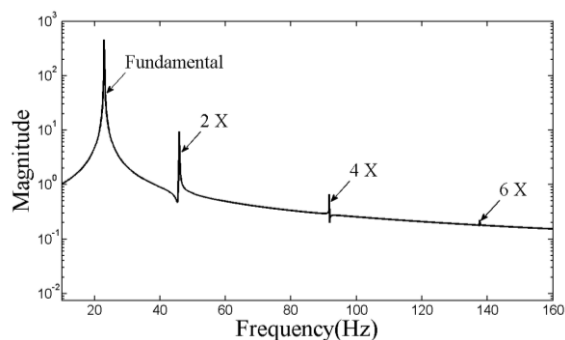
در شکل ۱۳ تغییرات پارامترهای ε و ε^2 به صورت تابعی از عمق نسبی ترک در موقعیت نسبی $\beta = 0.9$ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که در یک موقعیت نسبی ثابت با افزایش عمق نسبی ترک، اندازه پارامترهای ε و ε^2 نیز افزایش می‌یابند که به معنای افزایش دامنه مؤلفه‌های هارمونیک در پاسخ سیستم است.

با نزدیک‌تر شدن موقعیت ترکی با عمق نسبی ثابت به انتهای گیردار، دامنه نوسانات جمله تصحیح مرتبه دوم افزایش می‌یابد.



شکل (۱۰): جمله تصحیح پاسخ به دست آمده به روش اغتشاشات برای عمق نسبی ترک $\alpha = 0.5$ و موقعیت‌های نسبی $\beta = 0.3$ (الف) $\beta = 0.6$ (ب) $\beta = 0.9$ (ج)

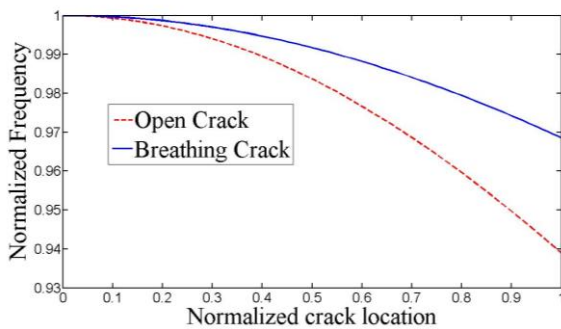
یکی از مشخصه‌های اصلی رفتار غیرخطی پاسخ ارتعاشی سازه ترک‌دار با ترک باز و بسته شونده حضور مؤلفه‌های هارمونیک در پاسخ آن است. در حقیقت بخش تصحیح پاسخ به دست آمده به روش لیندست- پوانکاره که به منظور اعمال اثرات باز و بسته شدن ترک به جمله اول پاسخ اضافه می‌شود و در روابط (۳۱) و (۳۹) ارائه شده است، شامل مؤلفه‌های هارمونیک است. در شکل ۱۱ نمودار پاسخ فرکانسی به دست آمده با استفاده از تبدیل فوریه سریع (FFT) از پاسخ به دست آمده به روش ارائه شده در تحقیق حاضر پس از اضافه شدن جمله تصحیح مرتبه اول به پاسخ سیستم خطی متناظر برای عمق نسبی ترک $\alpha = 0.7$ و موقعیت نسبی ترک $\beta = 0.9$ رسم شده است.



شکل (۱۱): طیف فرکانسی پاسخ پس از اعمال جمله تصحیح مرتبه اول در پاسخ اغتشاشات برای عمق نسبی ترک $\alpha = 0.7$ و موقعیت نسبی ترک $\beta = 0.9$

واضح است که جمله تصحیح مرتبه اول شامل هارمونیک‌هایی در مضارب زوجی از فرکانس طبیعی سیستم است که در این بین مؤلفه هارمونیک 2X بیشترین تأثیر را در پاسخ سیستم دارد. شکل ۱۲ طیف فرکانسی پاسخ را پس از اضافه شدن جملات

$\alpha = 0.5$ نشان داده شده است.



شکل (۱۶): تغییر فرکانس طبیعی سیستم با فرض ترک باز (---) و فرض ترک باز و بسته شونده (—) بر حسب موقعیت نسبی ترک برای عمق نسبی $\alpha = 0.5$

همانطور که مشاهده می‌شود در هر دو حالت فرض ترک باز و فرض ترک باز و بسته شونده، افزایش پارامترهای ترک موجب کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود ولی کاهش فرکانس‌های طبیعی با فرض ترک باز و بسته شونده کمتر از کاهش ایجاد شده با فرض ترک باز است.

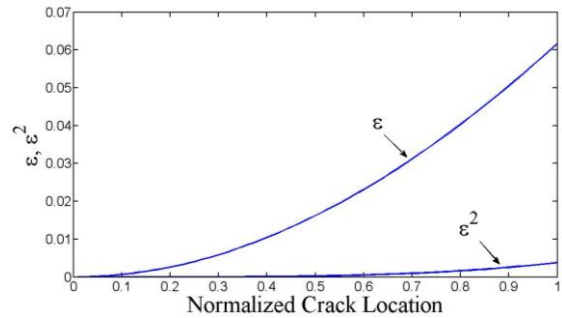
۶- نتایج تجربی

به منظور ارزیابی نتایج تئوری به دست آمده در این پژوهش، تست‌های تجربی بر روی یک تیر فولادی که ابعاد هندسی و مشخصات مکانیکی آن در بخش ۵ ذکر شده است، انجام گردید. در تحقیق حاضر یک ترک خستگی واقعی در موقعیت نسبی $\beta = 0.8$ و با عمق نسبی $\alpha = 0.38$ بر روی نمونه فولادی مورد بررسی ایجاد گردید. بدین منظور از دستگاه تست خستگی Zwick/Roell مدل Amsler HA250 استفاده شد (شکل ۱۷).



شکل (۱۷): نمونه قرار گرفته بین دو فک در دستگاه تست خستگی Zwick/Roell مدل Amsler HA250

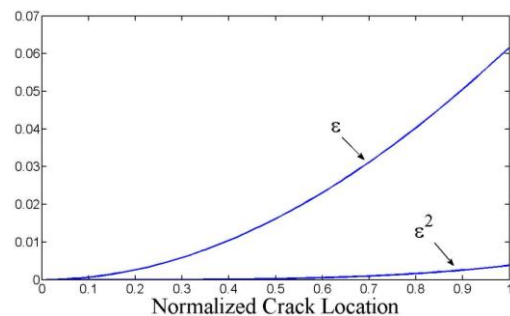
در بیشتر تحقیقات انجام شده بر روی تیرهای ترک‌دار، ترک بر روی تیر به صورت یک شیار باریک توسط اره ایجاد شده است.



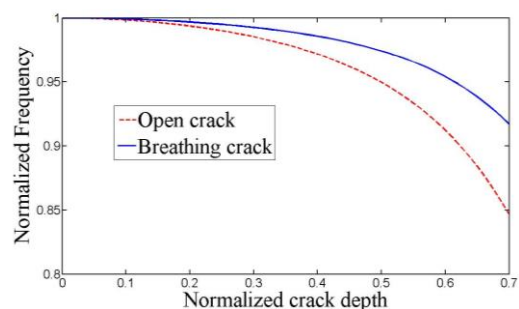
شکل (۱۳): تغییرات پارامترهای ϵ و ϵ^2 به صورت تابعی از عمق نسبی ترک در موقعیت نسبی $\beta = 0.9$

در شکل ۱۴ تغییرات پارامتر ϵ و ϵ^2 به صورت تابعی از موقعیت نسبی ترک در یک عمق نسبی ثابت نشان داده شده است. با افزایش β و نزدیک‌تر شدن ترک به انتهای گیردار، اندازه پارامترهای ϵ و ϵ^2 نیز افزایش می‌یابد که نشان‌دهنده افزایش تأثیر باز و بسته شدن ترک در پاسخ ارتعاشی تیر ترک‌دار است.

در شکل ۱۵ تغییر فرکانس طبیعی سیستم با فرض ترک باز و فرض ترک باز و بسته شونده به صورت تابعی از عمق نسبی ترک در یک موقعیت نسبی ثابت نشان داده شده است.



شکل (۱۴): نسبت تغییرات پارامترهای ϵ و ϵ^2 به صورت تابعی از موقعیت نسبی ترک در عمق نسبی $\alpha = 0.5$



شکل (۱۵): تغییر فرکانس طبیعی سیستم با فرض ترک باز (---) و فرض ترک باز و بسته شونده (—) بر حسب عمق نسبی ترک در موقعیت نسبی $\beta = 0.9$

در شکل ۱۶ تغییر فرکانس‌های طبیعی سیستم با دو فرض اخیر به صورت تابعی از موقعیت نسبی ترکی با عمق نسبی

لازم به ذکر است با توجه عمق نسبی کم ترک خستگی ایجاد شده بر روی نمونه تیر مورد بررسی فقط اولین مؤلفه هارمونیک قابل مشاهده است. این امر به دلیل دشواری کنترل عمق ترک خستگی بر روی نمونه تیر مورد بررسی است چرا که عمق‌های نسبی بالاتر منجر به شکست قطعه می‌شوند.

۷- بحث و نتیجه‌گیری

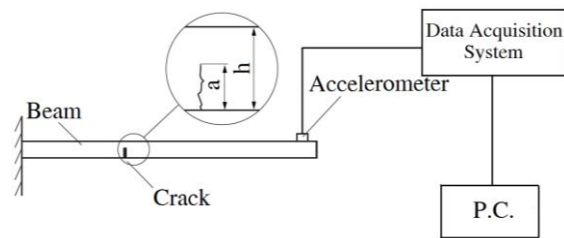
در تحقیق حاضر رفتار غیرخطی ارتعاشات آزاد یک تیر یکسرگردار دارای ترک خستگی عرضی از دیدگاه تئوری و تجربی مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور مدل جدیدی برای سختی دوخطی تیر دارای ترک خستگی ارائه شده است و با استفاده از این مدل معادله دیفرانسیل دوخطی حاکم بر مدل تیر ترک‌دار به شکل قابل تحلیل به روش لیندست- پوانکاره نوشته شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که در تحلیل انجام شده به روش لیندست- پوانکاره پاسخ به دست آمده از مجموع پاسخ سیستم خطی متناظر و مجموعه‌ای از جملات تصحیح تشکیل شده است. در حقیقت جملات تصحیح اثرات تغییر در سختی معادل سیستم در هنگام ارتعاش را که ناشی از باز و بسته شدن ترک است، در پاسخ نهایی منظور می‌کنند و شامل مؤلفه‌های هارمونیک در ضرایب صحیحی از فرکانس طبیعی سیستم هستند. بر این اساس، تحلیل انجام شده نحوه ارتباط مشخصه‌های غیرخطی رفتار تیر دارای ترک خستگی یا همان اجزای هارمونیک موجود در پاسخ را که در ادبیات فن نیز به حضور آنها اشاره شده است، با پارامترهای ترک و خصوصیات سیستم روشن می‌کند. در حقیقت جملات تصحیح در برگیرنده مؤلفه‌های هارمونیک در پاسخ بوده و ضابطه حاکم بر آنها بیان‌کننده رابطه تحلیلی بین این مؤلفه‌ها از یک سو و پارامترهای ترک و خصوصیات سیستم از سوی دیگر می‌باشند. در این بین جمله تصحیح مرتبه اول که شامل مؤلفه‌های هارمونیک در مضارب زوجی از فرکانس طبیعی سیستم می‌باشد، نسبت به جملات تصحیح مراتب بالاتر تأثیر بیشتری در پاسخ دارد.

مقایسه رفتار حاصل از حل تحلیلی ارائه شده با حل عددی تطابق بسیار خوب دو پاسخ را به ازای بازه گسترده‌ای از پارامترهای ترک نشان می‌دهد. تست‌های تجربی انجام شده بر روی تیر فولادی با ترک خستگی واقعی نیز تأیید‌کننده رفتار غیرخطی سیستم به صورت حضور مؤلفه هارمونیک در پاسخ ارتعاشی تیر ترک‌دار است.

علاوه بر این نمودارهای مقایسه تغییرات فرکانس با

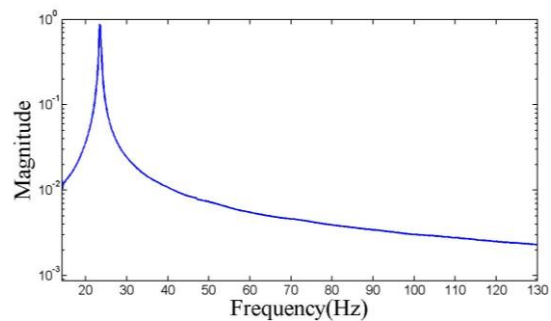
شیار ایجاد شده توسط آره هرقدر هم که باریک باشد، نمی‌تواند رفتار باز و بسته شونده مشابه یک ترک خستگی واقعی را داشته باشد [۲۰].

پس از آماده‌سازی تیر ترک‌دار تست‌های ارتعاشی متعددی بر روی آن انجام شد و پاسخ دینامیکی تیر توسط یک شتابسنج مدل 4507 B & K اندازه‌گیری شد. پاسخ نهایی اندازه‌گیری شده توسط دستگاه پردازنده سیگنال مدل 3109 B & K به دست آمده. در شکل ۱۸ شماتیکی از مجموعه به کار رفته برای انجام تست‌های تجربی ارتعاشی نشان داده شده است.



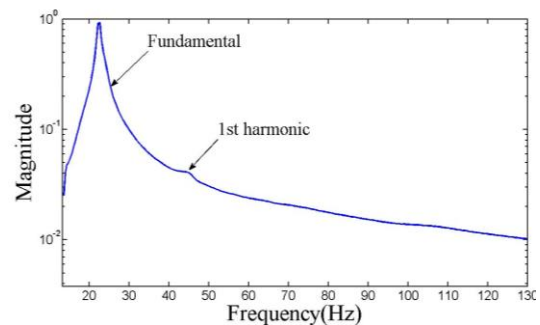
شکل (۱۸): شماتیک مجموعه به کار رفته برای تست‌های آنالیز مودال تجربی

در شکل ۱۹ طیف فرکانسی پاسخ به دست آمده از تست‌های تجربی بر روی تیر سالم و در شکل ۲۰ طیف فرکانسی پاسخ به دست آمده از تست‌های تجربی بر روی تیر ترک‌دار نشان داده شده است.



شکل (۱۹): طیف فرکانسی پاسخ به دست آمده از تست‌های تجربی بر روی

تیر سالم مورد بررسی



شکل (۲۰): طیف فرکانسی پاسخ به دست آمده از تست‌های تجربی بر روی

تیر ترک‌دار مورد بررسی

کمتر از کاهش فرکانس طبیعی ناشی از ترک باز است. نتایج تجربی ارائه شده در ادبیات فن نیز این واقعیت را تأیید می‌کند.

پارامترهای ترک در مدل باز و بسته شونده ترک به کار رفته در این تحقیق و مدل باز ترک، نشان می‌دهد که کاهش فرکانس طبیعی ناشی از ترک خستگی واقعی که رفتاری باز و بسته شونده دارد.

۸- مراجع

- [۱۰] Douka, E.; Hadjileontiadis, J. L., "Time-frequency analysis of the free vibration response of a beam with a breathing crack", NDT&E International, Vol. 38, pp. 3- 10, 2005.
- [۱۱] Pugno, N.; Surace, C.; Ruotolo, R., "Evaluation of the non-linear dynamic response to harmonic excitation of a beam with several breathing Cracks", Proc. EUFIT'97, vol. 1, pp. 335- 340, 1997.
- [۱۲] Saavedra, P. N.; Cuitino, L. A., "Crack detection and vibration behavior of cracked beams", Journal of Computers and Structures, vol. 79, pp. 1451- 69, 2001.
- [۱۳] Andreaus, U.; Casini, P.; Vestroni, F., "Non-linear dynamics of a cracked cantilever beam under harmonic excitation", International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 42, pp. 566- 575, 2007.
- [۱۴] Peng, Z. K.; Lang, Z. Q.; Billings, S. A., "Crack detection using nonlinear output frequency functions", Journal of Sound and Vibration, Vol. 301, pp. 777- 788, 2007.
- [۱۵] Newman, J. C.; Elber, W., "A comparison of measurement methods and numerical procedures for the experimental characterization of fatigue crack closure", Mechanics of fatigue crack closure, pp. 171- 185, 1989.
- [۱۶] Meirovitch, L., "Fundamentals of Vibration", 1st Edition, Mc Graw Hill Higher Education 2001.
- [۱۷] Clough, W. R.; Penzien, J., "Dynamics of Structures", 1st Edition, Mc Graw Hill, 1975.
- [۱۸] Dimarogonas, A. D., Paipetis, S. A., "Analytical Methods in Rotor Dynamics", Applied Science Publishers, 1983.
- [۱۹] Nayfeh, A. H.; Mook, D. T., "Nonlinear oscillations", 1st Edition, John Wiley & Sons, 1979.
- [۲۰] Dimarogonas, A. D., "Vibration of cracked structures: a state of the art review", Journal of Engineering Fracture Mechanics, Vol. 55, pp. 831- 857, 1996.
- [۱] Doebling, S. W., Farrar, C. R., Prime, M. B., and Shevitz D. W., "Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems for changes in their vibration characteristics: a literature review", Report no: LA-13070- MS, Los Alamos Laboratory, 1996.
- [۲] Elber, W., "Fatigue crack closure under cyclic tension", Engineering Fracture Mechanics, vol. 2, pp. 37- 45, 1970.
- [۳] Gudmunson, p., "Eigenfrequency changes of structures due to cracks, notches or other geometrical changes", Journal of mechanics and physics of solids, vol. 30, pp. 339- 353, 1982.
- [۴] Friswell, M. I.; Penny, J. E. T., "A simple nonlinear model of a cracked beam", Proceedings of 10th International Modal Analysis Conference, pp. 516- 521, 1992.
- [۵] Shen, M. H. H.; Chu, Y. C., "Vibrations of beams with a fatigue crack", Journal of Computers and Structures, vol. 45, pp. 79- 93, 1992.
- [۶] Shen, M. H. H.; Chu, Y. C., "Analysis of forced bilinear oscillators and the application to cracked beam dynamics", Am Inst Aeronaut Astronaut Journal, vol. 30, pp. 2512- 29, 1992.
- [۷] Ostachowicz, W. M.; Krawczuck, M., "Forced vibrations of a cantilever Timoshenko beam with a closing crack", Proc. ISMA 19, Leuven, Belgium, vol. 3, pp. 1067- 78, 1994.
- [۸] Abraham, O. N. L.; Brandon, J. A., "The modelling of the opening and closure of a crack", Journal of Vibration and Acoustics, vol. 117, pp. 370- 377, 1995.
- [۹] Cheng, S. M.; Wu, X. J.; Wallace, W.; Swamidas, A. S. J., "Vibrational response of a beam with a breathing crack", Journal of Sound and Vibration, Vol. 225, pp. 201- 208, 1999.

۹- زیر نویس ها

-
- ^۱ Breathing Crack Models
 - ^۲ Bilinear Stiffness
 - ^۳ Harmonic Balance Method
 - ^۴ Time Varying Connection Matrices
 - ^۵ Nonlinear Output Frequency Responce Functions
 - ^۶ Secular Terms
 - ^۷ Normalized Crack Depth
 - ^۸ Fast Fourier Transform