



مطالعه تحلیلی و آزمایشگاهی دینامیک سقوط قطرات نیوتنی در رژیم لختی با اعداد رینولدز پایین

امین امامیان، محمود نوروزی*، حسین عبدالنژاد

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷-۰۹-۰۶
بازنگری: ۱۳۹۸-۰۴-۱۶
پذیرش: ۱۳۹۸-۰۶-۱۱
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸-۰۶-۱۹

کلمات کلیدی:

دینامیک قطره
عدد رینولدز
سرعت حد
نیروی درگ

خلاصه: بررسی جریان‌های دو فازی به‌خصوص بررسی‌های مربوط به حرکت قطرات یک سیال در سیالی دیگر دارای کاربرد گسترده‌ای از جمله در صنایع نفت و گاز، صنایع پزشکی و داروسازی، استخراج فلزات، نیروگاه‌ها و مبدل‌های حرارتی دارد. در مقاله حاضر، دینامیک یک قطره نیوتنی در حال سقوط در رژیم آرام مورد مطالعه قرار گرفته است. به منظور ایجاد جریان لختی از ویسکوزیته ۳۴۰ سانتی پویز برای سیال بیرون استفاده شده است. در بخش آزمایشگاهی، از آب یون زدایی شده (دیونیزه) و گلیسرین با نسبت‌های حجمی ۷۹:۲۱ و ۸۳:۱۷ به عنوان فاز قطره استفاده شده است. با افزایش حجم قطره و به تبع آن افزایش نیروی لختی، شکل قطره در حال سقوط در فاز نیوتنی از حالت کروی خارج می‌شود و حفره‌ای در قسمت انتهایی آن ایجاد می‌شود. نیروهای لختی، کشش سطحی و تنش‌های هیدرودینامیکی بیشترین تأثیر را روی شکل قطره در حال سقوط دارند. با افزایش حجم قطره نیوتنی در حال سقوط، حفره انتهایی قطره رشد کرده و در نتیجه نیروی درگ آن افزایش و به تبع آن سرعت حد قطره کاهش پیدا می‌کند. طبق مشاهدات آزمایشگاهی، تغییرات نسبت لزجت روی شکل قطرات تأثیر چندانی ندارد و افزایش عدد رینولدز باعث کاهش ضریب فشار قطره می‌شود. همچنین نشان داده می‌شود که نتایج آزمایشگاهی با نتایج تحلیلی مطابقت خوبی دارند.

۱- مقدمه

تشکیل قطره^۱ از انتهای یک نازل و نحوه حرکت آن در محیط اطراف، از جمله موضوعات جذاب و پرکاربردی است که توجه بسیاری از پژوهشگران را به خود جلب کرده است. بررسی جریان‌های دو فازی^۲ به‌خصوص بررسی‌های مربوط به حرکت قطرات یک سیال در سیالی دیگر از اهمیت ویژه‌ای در صنایع پزشکی و داروسازی (تولید پنی‌سیلین و ...)، حوضچه‌های ته‌نشینی مراکز تصفیه آب (در عملیات لخته سازی جامدهای شناور در آب)، مبردها و ... دارد. شناخت بهتر فیزیک قطرات و آشنایی با عوامل مؤثر در تشکیل، جدایش^۳ و حرکت قطره، موجب بهبود و افزایش بازده فرایندهای صنعتی مرتبط می‌گردد. جهت آشکار شدن اهمیت و جایگاه این موضوع به تعدادی از کاربردهایی که پدیده رشد، تشکیل و حرکت قطره در آن‌ها اهمیت

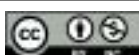
- 1 drop
- 2 Two-phase flows
- 3 Separation

بسیاری دارد، اشاره می‌شود.

در موارد مختلفی می‌توان شاهد ریزش و برخورد قطره روی سطوح مایع و یا جامد بود. در فرایند رنگ‌زنی خودرو با شناخت رفتار قطره می‌توان ضخامت لایه رنگ را کنترل کرده و از پاشش قطرات اضافی و ایجاد قطرات ثانویه که باعث کاهش کیفیت رنگ می‌شود، جلوگیری نمود و همچنین زمان پروسه رنگ‌زنی را کاهش داد. از دیگر کاربردهای مهم قطره در صنعت، به نقش آن در استخراج مایع در مایع^۴ می‌توان اشاره کرد که موضوع مشترکی در بسیاری از زمینه‌ها همچون مهندسی مکانیک، مهندسی شیمی، متالورژی و علوم کاربردی فیزیک و شیمی به شمار می‌آید. این نوع استخراج به عنوان یک فرایند مناسب و مقرون به‌صرفه در بسیاری از صنایع نظیر نفت (جداسازی ترکیبات آروماتیک از روغن پایه موتور و پالایش آن)، پلیمر، شیمیایی (جداسازی الفین‌ها و پارافین)، دارویی، غذایی، مهندسی هوا فضا، مواد و متالورژی (ذوب و ریخته‌گری) بصورت

4 Liquid-liquid extraction

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: mnorouzi@shahroodut.ac.ir



جمله لختی^۵ از معادلات اندازه حرکت^۶ حذف گردیده و تبدیل به معادلات استوکس می‌گردد. آن‌ها دریافتند که شکل قطره در حال سقوط در غیاب لختی کاملاً کروی بوده و سرعت حد با افزایش حجم قطره افزایش می‌یابد. پس از آن، تیلور و آکریووس [۸] به صورت تحلیلی نشان دادند در حالاتی که اعداد بی‌بعد رینولدز^۷ بسیار کم و اعداد موینگی^۸ محدود باشند قطره دقیقاً کروی باقی می‌ماند و فقط در اعداد رینولدز پایین شکل قطره کرویت خود را از دست داده و شکلی پهن‌شده^۹ به‌خود می‌گیرند.

امین‌زاده و همکاران [۹] حرکت و تغییر شکل یک قطره و یک دنباله از قطرات در حال بالاروی در آب را بصورت آزمایشگاهی مطالعه نمودند. آن‌ها تغییر شکل و ضرائب پسای مربوط به یک قطره منفرد و یک قطره مشخص در دنباله قطرات را بررسی کردند. در این پژوهش، تأثیر خواص غیرنیوتنی مایعات بر رفتارهای مذکور بررسی شده و مشخص گردید، افزودن ویژگی‌های ویسکوالاستیک^{۱۰} به قطرات موجب افزایش پایداری در شکل آن‌ها می‌گردد. امامیان و همکاران [۱۰] سقوط یک قطره نیوتنی در اعداد رینولدز پایین را به صورت تحلیلی بررسی کردند و نشان دادند که با افزایش حجم قطره، حفره‌ای^{۱۱} در انتهای قطره ایجاد خواهد شد. آن‌ها از تکنیک اغتشاشات^{۱۲} برای حل تحلیلی مسئله و از اعداد بی‌بعد رینولدز و موینگی به‌عنوان پارامتر اغتشاشی استفاده کردند. آن‌ها نشان دادند که با افزایش اعداد بی‌بعد رینولدز و موینگی حفره ایجاد شده در انتهای قطره رشد پیدا خواهد کرد.

سوستارز و بلمونته [۱۱] سقوط قطره ویسکوالاستیک در فاز سیال نیوتنی را برای جریان خزشی به صورت آزمایشگاهی و تحلیلی بررسی کردند. در قسمت آزمایشگاهی، از محلول پلیمری زانتام در فاز حلال آب و گلیسیرین استفاده شده است. آن‌ها از محلول آب و گلیسیرین با درصد حجمی ۸۰:۲۰ و پلیمر زانتام با درصد وزنی ۰/۱۶٪ به عنوان فاز قطره و از روغن پلی‌دیمتیل سیلوکزان به عنوان فاز سیال ویسکوز در حل آزمایشگاهی بهره بردند. در قسمت دوم

وسعی کاربرد دارد. برای طراحی بهینه عملیات استخراج مایع در مایع، وجود اطلاعات دقیقی از اندازه و شکل قطره در هر زمان و سرعت قطره دارای اهمیت بسیار زیادی می‌باشد. همچنین ایده بکارگیری قطرات در مبدل‌های حرارتی تماس مستقیم^۱ از جمله کاربردهای صنعتی این موضوع است. در مبدل‌هایی که عمل انتقال حرارت میان دو مایع مخلوط نشدنی صورت می‌گیرد، وجود دیواره‌های جدا کننده بین دو مایع به میزان چشم‌گیری بازده انتقال حرارت را کاهش و هزینه‌ها را افزایش می‌دهد. به‌منظور دستیابی به طراحی بهینه چنین فرایندهایی، داشتن اطلاعات دقیق از اندازه، تغییرشکل، سرعت، جریان‌های چرخشی درون قطره و نیز تأثیر جریان‌های متلاطم محیطی بر حرکت قطره بسیار مهم است. اگر علاوه بر این زمینه‌های کاربردی مهم، به نقش این پدیده در تحولات فیزیکی و شیمیایی، زیست محیطی و کاربردهای جدیدتری همچون زمینه‌های نانو تکنولوژی، بیومکانیک، ساخت ذرات میکرو توجه شود، به وضوح می‌توان به اهمیت بالای این مبحث در زندگی روزمره و تکنولوژی روز دنیا پی‌برد. در طول چند دهه گذشته، مطالعاتی مربوط به ناپایداری قطره در حال سقوط به ویژه مواردی که شامل سطوح آزاد می‌باشد، بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. این نوع از مطالعات را می‌توان برای بهینه‌سازی فرآیندهای طراحی از جمله: صنعت نفت، فرآیندهای پزشکی، استخراج فلز، رنگ‌ها و نیروگاه‌ها مرتبط دانست [۱-۴]

محاسبه سرعت ته نشینی قطره در حال سقوط، از مهم‌ترین مسائل مورد نیاز در صنایع نفتی می‌باشد. از دیگر کاربردهای این موضوع می‌توان به صنایع تولید چاپگرها و پاشش رنگ اشاره کرد که از رنگ به صورت قطره‌ای استفاده می‌کنند. در این صنایع، تحقیقات روزافزونی در راستای اندازه‌گیری سایز و حرکت این قطرات در حال انجام گیری است [۵]. هادامارد [۶] و ریسیزنسکی [۷] سقوط خزشی^۲ قطره نیوتنی در یک سیال نیوتنی را به صورت تحلیلی بررسی نمودند. از فرضیات مسئله غیر قابل انحلال بودن سیالات در یکدیگر می‌باشند. نتایج این تحقیق شامل سرعت حد^۳ (سرعت سقوط و یا بالا رفتن قطره) و نیروی پسا اعمال شونده روی سطح قطره با استفاده از معادلات استوکس^۴ است. به سبب خزشی بودن جریان،

5 Inertia
6 Momentum equation
7 Reynolds
8 Capillary
9 Oblate
10 viscoelastic
11 Dimple
12 Perturbation

1 Direct-contact heat exchangers
2 Creep
3 Terminal velocity
4 Stokes equations

تصاویر حاصل شده از دوربین سرعت بالا به عنوان روش آزمایش به کار رفته است.

موخاراجی و سرکار [۱۴] با مدل‌های عددی سقوط یک قطره ویسکوالاستیک را در سیال نیوتنی شبیه سازی کردند. نتیجه حاصل از این تحقیق شامل مقدار سرعت حد قطره بود. همچنین در ادامه شکل قطرات پیش بینی شده به همراه جریان‌های داخلی و خارجی قطره به تصویر کشیده شده است. آن‌ها دریافتند که افزایش الاستیسیته می‌تواند باعث افزایش جریان‌های داخلی و خارجی قطره شود و سرعت حد سقوط قطره با افزایش عدد بی‌بعد دوبرا کاهش می‌یابد. اخیراً، اسمائیل و همکاران [۱۵] تهنشینی قطره سیال بینگهام^۴ تغییر پذیر در سیال نیوتنی بی‌نهایت با استفاده از روش معادله انتگرالی^۵ را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نشان دادند که تغییرات شکل قطره به ازای اعداد موئینگی کم همانند شکل قطره نیوتنی در حال سقوط می‌باشد و توانستند محدوده بحرانی عدد موئینگی را برای ناپایداری شکل قطره و تبدیل قطره کروی به پهن و دوکی شکل به دست آورند. در این تحقیق همچنین شکل و توزیع تنش‌های ویسکوالاستیک موجود در قطره نسبت به گذشت زمان محاسبه شد.

وامرزی و همکاران [۱۶] سقوط خزشی یک قطره ویسکوالاستیک در میان یک فاز مایع را به صورت تحلیلی بررسی کردند و نشان دادند که با افزایش حجم قطره، حفره‌ای در انتهای قطره ایجاد خواهد شد. آن‌ها از تکنیک اغتشاشات برای حل تحلیلی مسئله و از اعداد بی‌بعد دوبرا و موئینگی به عنوان پارامتر اغتشاشی استفاده کردند. مدل مورد استفاده شده برای قطره ویسکوالاستیک، مدل اولدرویید-بی می‌باشد. آن‌ها نشان دادند که با افزایش اعداد بی‌بعد دوبرا و موئینگی حفره ایجاد شده در انتهای قطره رشد پیدا خواهد کرد. سقوط قطره نیوتنی در سیال غیرنیوتنی توسط لورنتنا و همکاران [۱۷] به صورت آزمایشگاهی و پوتاچو و همکاران [۱۸] و سینگ و دین [۱۹] به صورت عددی بررسی شده است. در ادامه این سری از بررسی‌ها آکارایا و همکاران [۲۰ و ۲۱] یک سری بررسی‌هایی روی خاصیت ویسکوزیته^۶ سیالاتی که با افزایش نرخ برش کاهش می‌یابند انجام دادند و حتی یک رابطه ریاضی برای تنش برشی حالتی که عدد رینولدز پایین است پیشنهاد کردند. در برخی از تحقیقات دیگر، اثر الاستیسیته روی

این تحقیق سوستارز و بلمونته از تکنیک اغتشاشات به عنوان روش حل تحلیلی برای قطره ویسکوالاستیک خزشی در حال سقوط در فاز نیوتنی بهره بردند. از مدل سیال مرتبه سه^۱ برای مدل‌سازی قطره ویسکوالاستیک به عنوان معادله ساختاری استفاده شده است. در این تحقیق فرض شده است که سیالات غیر قابل انحلال هستند و سرعت سقوط قطره در فاز سیال خارجی آن قدر کم باشد که آن را بتوان جریان خزشی لحاظ کرد. در این تحقیق، اعداد دوبرا^۲ و موئینگی به عنوان پارامترهای اغتشاشی مورد استفاده قرار گرفتند. قطرات کوچک ویسکوالاستیک به دلیل غلبه کردن نیروی کشش سطحی^۳ بر سایر نیروهای وارد بر قطره، همچنان شکل کروی خود را حفظ می‌کردند. با افزایش حجم قطره (قطر معادل قطره)، شکل قطره ناپایدار شده و کروییت خود را از دست می‌دهد و به شکل یک قطره پهن شده تبدیل می‌گردد. با افزایش پارامتر دوبرا در انتهای قطره یک فرورفتگی ایجاد می‌شود که قسمت بالایی قطره را به سمت داخل خود کشیده و یک حفره در قسمت فوقانی قطره ایجاد می‌نماید. نتایج به دست آمده از حل تحلیلی دارای تطابق خوبی با نتایج حاصل از مشاهدات آزمایشگاهی است. افزایش شعاع قطره یا عبارتی افزایش پارامتر دوبرا باعث رشد این فرورفتگی تا حدی می‌تواند شود که قطره شکل یک دونات را به خود بگیرد و سیال خارجی از داخل سیال داخلی عبور کند. این نوع تغییر شکل برای قطرات خیلی بزرگتر رخ خواهد داد که این قطرات نسبت به قطرات کوچکتر نیاز به فاصله زیادی از ابتدای سقوط قطره دارند، تا به حالت پایدار خود برسند.

آگراوال و سرکار [۱۲] تغییر شکل یک قطره ویسکوالاستیک در سیال نیوتنی برای عدد رینولدز پایین را بصورت عددی بررسی کردند. در این پژوهش از معادله ساختاری اولدرویید-بی برای مدل کردن قطره در حال حرکت استفاده شده است. آن‌ها همچنین نمودار تغییر شکل پایا نسبت به عدد بی‌بعد موئینگی برای مقادیر مختلف دوبرا نمایش دادند. امین‌زاده و همکاران [۱۳] حرکت قطرات نیوتنی و غیرنیوتنی را به صورت آزمایشگاهی بررسی کردند. برای ارزیابی اثر سیال بیرونی که قطره در آن حرکت می‌کند از آب و هوا به عنوان سیالات با خواص متفاوت که دارای کاربری وسیع صنعتی هستند، استفاده شده است. محدوده رژیم جریان آن‌ها بین محدوده ۵۰ و ۵۰۰ بوده و آنالیز

4 Bingham-fluid
5 Integral equation method
6 Viscosity

1 The third order constitutive equation
2 Deborah
3 Surface tension

است. همچنین در مقاله حاضر، تأثیر متغیرها بر روی نیروی درگ و ضریب فشار مورد مطالعه قرار گرفته است که در کارهای قبلی به این موضوع پرداخته نشده است. علاوه بر تفاوت‌های ذکر شده می‌توان اشاره کرد، مهم‌ترین تفاوت مقاله حاضر نسبت به تحقیقات پیشین این است که سقوط قطره نیوتنی در فاز نیوتنی در رژیم آرام به صورت آزمایشگاهی مورد مطالعه قرار گرفته است و مشاهده می‌شود، نتایج آزمایشگاهی مقاله حاضر تطابق خوبی با حل تحلیلی مطالعات پیشین دارد. نتایج تحلیلی مطالعات پیشین در قسمت آزمایشگاهی تحقیق حاضر مورد مطالعه قرار گرفته است و نشان داده شده است که تغییرات نسبت لزجت روی شکل قطرات تأثیر چندانی ندارد.

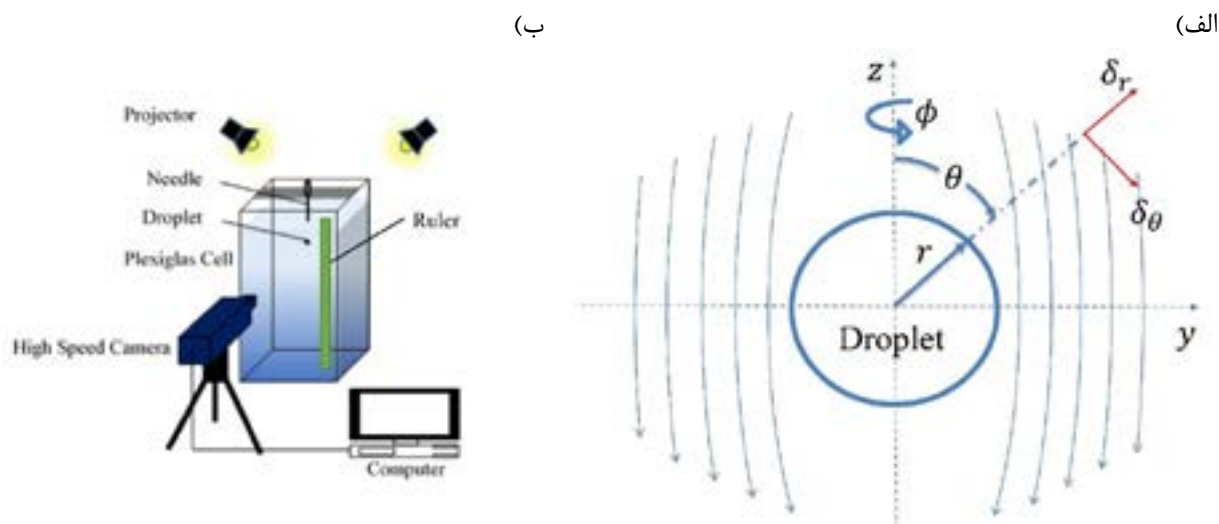
۲- مشاهدات آزمایشگاهی

در این قسمت به توضیح نحوه تولید قطره نیوتنی و سیال محیط و برخی خواص آن پرداخته شده است. از آب یون زدایی شده (دیونیزه) و گلیسرین برای محلول اول با نسبت حجمی ۷۹:۲۱ و برای محلول دوم با نسبت حجمی ۸۳:۱۷ به عنوان فاز قطره استفاده شده است. در ابتدای امر آب را درون بشر ریخته و سپس گلیسرین را طی ۴ مرحله (هر ۱ ساعت) به آب درون بشر اضافه کرده و سیال برای مدت ۴ ساعت توسط هات‌پلیت هم خورده تا به یک محلول کاملاً همگن تبدیل شود. گلیسرین، الکل سه عاملی است که به دلیل دارا بودن پیوند هیدروژنی با هر نسبتی در آب حل می‌شود. پس به دلیل انحلال‌پذیری سریع و خوب این مواد به آسانی می‌توان مخلوط همگنی از آب دیونیزه و گلیسرین تولید نمود. خصوصیات فیزیکی فاز قطره شامل: چگالی ۲/۱ گرم بر سانتی‌متر مکعب و ویسکوزیته برای محلول اول ۱/۶۰ سانتی‌پویز و برای محلول دوم ۱۷/۸۳ سانتی‌پویز می‌باشد. برای نشان دادن سیال داخلی از نماد (-) و بدون علامت مربوط به سیال بیرونی می‌باشد. به عنوان فاز خارجی روغن سیلیکون بکار گرفته شده است. به منظور ایجاد جریان لختی از ویسکوزیته ۳۴۰ سانتی پویز استفاده شده است. به منظور تخمین حجم قطره، وزن محلول و نازل قبل از تزریق قطره و بعد از تزریق قطره به وسیله ترازوی دارای دقت بالا (دقت ترازو: یک ده هزارم گرم) اندازه‌گیری شده و با توجه به رابطه چگالی و داشتن چگالی قطره می‌توان حجم قطره را به دست آورد. در میان روش‌های آزمایشگاهی برای به دست آوردن کشش سطحی، روش قطره معلق از محبوبیت و دقت بالایی برخوردار است

شکل قطره، برای حالتی که سیال داخلی نیوتنی و سیال بیرونی ویسکوالاستیک می‌باشد، مورد بررسی قرار گرفته است [۲۲-۲۴]. از سوی دیگر، راه حل تحلیلی یک زمینه جذاب برای مطالعه و پژوهش است که نتیجه آن دقیق‌تر و قابل اطمینان است [۲۵-۲۷]. واگنر و اسلاتری [۲۸] با استفاده از حل تحلیلی توانستند شکل پایای قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط در سیال ویسکوالاستیک محیط را به دست آورند. آن‌ها برای مدل‌سازی فاز قطره و سیال محیط از مدل سیال مرتبه سه برای هر دو فاز بهره بردند. روش حل آن‌ها استفاده از تکنیک حساب اغتشاشات برای هر دو سیال قطره و محیط بوده است. در تحقیق حاضر، دینامیک قطره نیوتنی در حال سقوط در سیال نیوتنی در رژیم لختی آرام مورد بررسی قرار گرفته است. اهمیت این موضوع را می‌توان در ته‌نشینی در مراکز تصفیه آب، برج‌های خنک کن نیروگاه‌ها و ... مشاهده نمود. از دیگر کاربردهای سقوط قطره می‌توان به جداسازی سیالات مخلوط در صنعت نفت، مبدل‌های تماس مستقیم، ته‌نشینی املاح موجود در فاضلاب‌های صنعتی و خانگی و ... اشاره نمود. در قسمت آزمایشگاهی مطالعه حاضر، از آب دو بار دیونیزه شده (دیونیزه) و گلیسرین برای محلول اول با نسبت حجمی ۷۹:۲۱ و برای محلول دوم با نسبت حجمی ۸۳:۱۷ به عنوان فاز قطره استفاده شده است. چون جریان رینولدز پایین مد نظر می‌باشد، لازم است که بتوان سرعت سقوط قطرات را به حدی پایین نگه داشت که عدد بی‌بعد رینولدز برابر یک، در آن برقرار باشد. با توجه به این نکته، به منظور تولید جریان لختی (جریانی که ترم جابجایی (ترم غیرخطی) در معادلات اندازه حرکت در نظر گرفته می‌شود ولی در مطالعات پیشین به دلیل خزشی بودن جریان، این ترم صرف نظر شده است) از روغن سیلیکون با ویسکوزیته ۳۴۰ استفاده شده است. به جهت اطمینان از پایدار شدن شکل قطره در این تحقیق، دوربین سرعت بالا جهت عکس برداری در ارتفاع ۳۵ سانتی متری از لبه ابتدایی سلول قرار گرفته است.

نوآوری و یا به عبارتی تفاوت مقاله حاضر با کارهای گذشته این است که در کارهای قبلی، برای ساده‌سازی محاسبات از تئوری پلین و پل [۲۹] برای محاسبه نیروی درگ^۱ استفاده شده است. در مقاله حاضر، از فرمول دقیق برای محاسبه نیروی درگ استفاده شده است که فرمول دقیق نیروی درگ در بخش معادلات حاکم آورده شده

1 Drag force



شکل ۱: الف) هندسه حل تحلیلی ب) چیدمان آزمایش
Fig. 1. a) The geometry of analytical solution b) Experimental setup employed

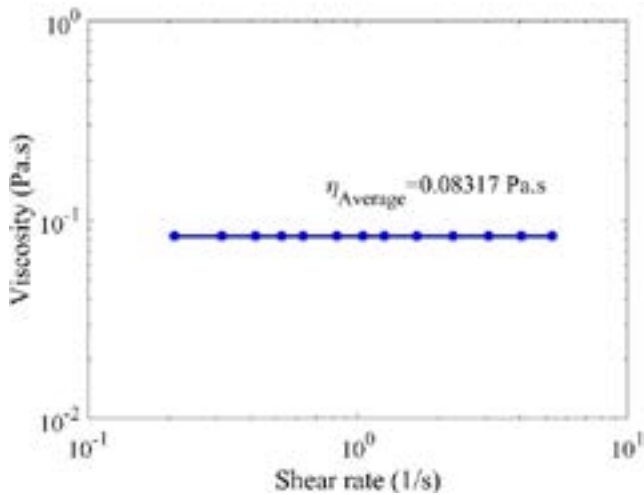
شکل قطره در این تحقیق، دوربین سرعت بالا در ارتفاع ۳۵ سانتی‌متر از لبه ابتدایی سلول قرار گرفته است. برای تزریق قطره در محیط نیوتنی از سرنگ معمولی استفاده شده است همچنین برای تولید قطرات با قطر بزرگتر می‌توان از بورت کمک گرفت. نکته بسیار مهم در مورد مکانیزم آزمایش این است که باید سر سرنگ در سیال نیوتنی قرار داشته باشد. نکته بسیار مهم دیگر در تولید قطرات این است که، سر سرنگی که برای تشکیل قطرات استفاده می‌شود باید کاملاً صاف باشد زیرا در صورت زاویه‌دار بودن سر سوزن قطره تولیدی کاملاً متقارن نخواهد شد، بنابراین بر حرکت و تغییر شکل قطره تأثیر نامطلوب می‌گذارد و قطره تولیدی متقارن نخواهد شد. شکل ۱-الف هندسه حل تحلیلی (دستگاه مختصات کروی در فضای سه بعدی با استفاده از سه مختصه که شامل: فاصله شعاعی یک نقطه از یک مبدأ ثابت (r) ، زاویه از قسمت مثبت محور z (θ) و زاویه از قسمت مثبت محور x (ϕ) است، نمایش داده می‌شود) و شکل-ب سلول آزمایشگاهی که حجمی برابر ۱۱ لیتر دارد و از روغن سیلیکون پر شده است را نشان می‌دهد. همانطور که در شکل ۱-الف مشاهده می‌شود، قطره در داخل محیط بیرون سقوط کرده و شرایط مرزی حاکم بر مسئله در قسمت معادلات حاکم (معادلات (۵))، آورده شده است. تعیین تغییرات جابجایی قطره بر اساس ثبت تغییر موقعیت قطره بر روی خط کش مشخص می‌شود و نقش فریم‌ها در تعیین زمان طی شده توسط قطره مورد استفاده قرار می‌گیرد. چیدمان خط کش در انجام آزمایش‌ها دارای اهمیت است. نحوه جانمایی خط کش که نقش مهمی در اندازه‌گیری جابجایی قطره دارد در چیدمان،

بنابراین با استفاده از روش قطره معلق و دستگاه اندازه‌گیری نوری زاویه تماس کمپانی دیتا فیزیک^۱، مقدار کشش سطحی بین دو سیال برای هر دو محلول ۲۱ میلی نیوتن بر متر به دست آمده است.

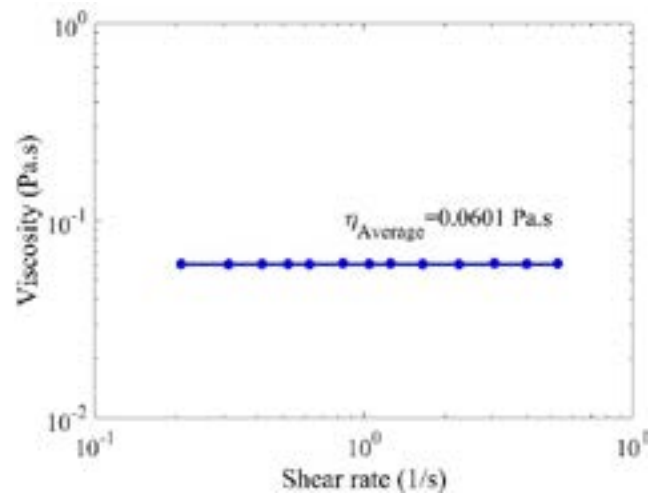
برای ثبت حرکت قطرات در حال سقوط با مکانیزم عکسبرداری از یک دوربین پرسرعت پی سی او. دایمکس^۲ استفاده شده است که دوربین سرعت بالای مورد استفاده قابلیت ذخیره حداکثر ۱۲۰۰۰ عکس در مدت زمان ۱ ثانیه را دارا می‌باشد (در مطالعه حاضر، در تنظیمات این دوربین حالت ۱۰۰۰ فریم بر ثانیه انتخاب شده است). با توجه به تعداد فریم‌های تغییر کرده و تغییر جابجایی قطره نسبت به خط کش جاسازی شده در سلول سرعت سقوط اندازه‌گیری می‌شود. جهت تصویربرداری با کیفیت بالا نیاز به نورپردازی مناسب است. بنابراین از ۲ پروژکتور ۲۰۰۰ وات شرکت یونیمت^۳ بهره‌گیری شده است. با توجه به تعداد عکس‌های ذخیره شده و مسافتی که قطره در طول مسیر عکس برداری طی خواهد کرد، می‌توان سرعت سقوط قطره را اندازه‌گیری کرد. برای اندازه‌گیری تغییرات ویسکوزیته سیال بر حسب نرخ برش از دستگاه ویسکومتر شرکت بروکفیلد^۴ استفاده شده است.

روغن سیلیکون مورد نظر به‌عنوان سیال نیوتنی در یک سلول پلکسی به ابعاد ۱۵×۱۵×۵۰ سانتی‌متر ریخته می‌شود تا اثرات دیواره سلول بر شکل قطره حذف شود [۳۰]. به جهت اطمینان از پایدار شدن

- 1 Data physics
- 2 pco.dimax
- 3 UNIMAT
- 4 Brookfield



شکل ۳: تغییرات لزجت در برابر نرخ برش برای محلول دوم
Fig. 3. Shear viscosity vs. shear rate of second solution



شکل ۲: تغییرات لزجت در برابر نرخ برش برای محلول اول
Fig. 2. Shear viscosity vs. shear rate of first solution

به منظور ساده‌سازی معادلات حاکم مرسوم است از حالت بی‌بعد آن‌ها استفاده شود. لازم به ذکر است که در اینجا و تمام متن مقاله حاضر تمامی پارامترهای ستاره‌دار حالات بعددار و پارامترهای بدون ستاره نمایانگر حالات بی‌بعد این پارامترها هستند. از آنجایی که اکثر پارامترها برای هر دو سیال داخلی و بیرونی یکی است. برای نشان دادن سیال داخلی از نماد (~) و بدون علامت مربوط به سیال بیرونی می‌باشد. پارامترهای بی‌بعد مورد استفاده برای جریان داخلی (قطره در حال سقوط) و جریان خارجی (سیال نیوتنی) شامل موارد زیر می‌باشد:

$$\tilde{\tau} = \frac{\tau^* R}{\tilde{\eta}_0 U_0}, \tilde{u} = \frac{u^*}{U_0}, \tilde{D} = \frac{D^* R}{U_0}, \tilde{P} = \frac{\tilde{P}^* R}{\tilde{\eta}_0 U_0} \quad (2\text{-الف})$$

$$\tau = \frac{\tau^* R}{\eta U_\infty}, u = \frac{u^*}{U_\infty}, D = \frac{D^* R}{U_\infty} \quad (2\text{-ب})$$

در پارامترهای بی‌بعد ذکر شده، R شعاع معادل قطره، U سرعت مرجع مربوط به داخل قطره، U_∞ سرعت حد قطره و سیال نیوتنی در مرز مشترک آن‌ها، τ^* ، u^* تانسورهای بعددار تنش و سرعت و D تانسور نرخ تغییر شکل است که به صورت معادله (۳) تعریف می‌شود:

$$D = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \quad (3)$$

در تحقیق حاضر از اعداد بی‌بعد Ca و Re برای جریان نیوتنی خارجی و داخلی که به صورت معادله (۴) تعریف می‌شوند،

در شکل ۱-ب نشان داده شده است. به منظور عکس‌برداری با دوربین سرعت بالا، سلول در فاصله ۵۰ سانتی‌متری (این فاصله بستگی به نوع لنز دارد) دوربین قرار می‌گیرد. جهت افزایش کیفیت عکس‌های گرفته شده از ۲ عدد پروژکتور ۲۰۰۰ وات در اطراف سلول استفاده شده است و از قسمت فوقانی سلول مورد نظر با استفاده از سرنگ، قطرات مورد نظر را تزریق و با استفاده از دوربین سرعت بالا، تصویر قطرات در حال سقوط ضبط می‌شود. همچنین در شکل ۲ و شکل ۳ تغییرات لزجت در برابر نرخ برش برای هر دو محلول نشان داده شده است. در مقاله حاضر، برای اطمینان از دقت آزمایش‌های انجام شده، تک تک آزمایش‌ها حداقل ۵ بار و حداکثر ۷ بار انجام شده است، که در برخی موارد تا ۱۰ بار نیز انجام شده است. در آزمایش حاضر باتوجه به اینکه نتایج بسیار به هم نزدیک بودند، به همین خاطر از متوسط گیری ۵ داده یا ۷ داده استفاده شده و نتیجه آن در مقاله حاضر ارائه شده است.

۳- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر قطره و سیال ویسکوز، معادلات پیوستگی و اندازه حرکت می‌باشند. معادلات پیوستگی و اندازه حرکت برای قطره نیوتنی به شرح زیر است [۳۱-۳۳]:

$$\nabla \cdot \tilde{u}^* = 0 \quad (1\text{-الف})$$

$$\tilde{\rho} \frac{D\tilde{u}^*}{Dt} = -\nabla \tilde{P}^* + \tilde{\rho} g + \nabla \cdot \tilde{\tau}^* \quad (1\text{-ب})$$

استفاده شده است:

$$\beta_3 = \frac{3\alpha_2(173k+142)}{700(k+1)} \quad (8-ب)$$

توابع $P_r(\mu)$ و $P_r(\mu)$ به ترتیب توابع لژاندر درجه دو و سه می‌باشند. برآیند نیروهای وارده بر قطره به صورت زیر می‌باشد.

$$F = F_D + F_B \quad (9)$$

در معادله (۹) نیروی حجمی وارده بر قطره به صورت معادله (۱۰) قابل محاسبه می‌باشد:

$$F_B = \frac{4\pi\rho g R^2(1-\gamma)}{3\eta U_\infty} \quad (10)$$

در کارهای قبلی، برای ساده‌سازی محاسبات از تئوری پلین و پل [۲۹] برای محاسبه نیروی درگ استفاده شده است. در اینجا از فرمول دقیق برای محاسبه نیروی درگ استفاده شده است. نیروی درگ را می‌توان از طریق معادله (۱۱) محاسبه کرد:

$$F_D = 2\pi \int_{-1}^1 [\mu(\tau_r - \mu p - (1-\mu^2)^{1/2} \tau_{r\theta})]_{r=1} d\mu \quad (11)$$

نیروی کلی پسا وارده بر سطح قطره به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F_D = 2\pi \frac{3k+2}{k+1} + Re \frac{\pi}{4} \left(\frac{3k+2}{k+1} \right)^2 + \frac{2\pi\alpha_2 Re Ca}{5(k+1)^2} (5k^2 - 4k + 11) \quad (12)$$

سرعت حد قطره در حال سقوط با استفاده از بالانس نیروی حجمی وارده بر قطره و نیروی پسا کلی وارد شده بر سطح آن به صورت زیر محاسبه شده است:

$$U_\infty = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho g R^2 (\gamma - 1)}{\eta \left(\frac{2\pi \frac{3k+2}{k+1} + Re \frac{\pi}{4} \left(\frac{3k+2}{k+1} \right)^2}{5(k+1)^2} + \frac{2\pi\alpha_2 Re Ca}{5(k+1)^2} (5k^2 - 4k + 11) \right)} \quad (13)$$

$$Re = \frac{\rho U_\infty R}{\eta}, Ca = \frac{\eta U_\infty}{\Gamma} \quad (4-الف)$$

k نسبت ویسکوزیته قطره به ویسکوزیته سیال خارجی می‌باشد. با استفاده از این عدد می‌توان بین سرعت مرجع جریان داخل قطره U و سرعت حد U_∞ رابطه‌ای به وجود آورد که به صورت زیر می‌باشد:

$$U_0 = \frac{U_\infty}{(k+1)} \quad (4-ب)$$

شرایط مرزی بی‌بعد حاکم بر مسئله به صورت زیر می‌باشد:

$$(u)_r = 0, (\tilde{u})_r = 0 \quad (5-الف)$$

$$(u)_\theta = \frac{1}{k+1} (\tilde{u})_\theta \quad (5-ب)$$

$$(\tau)_{r\theta} = \frac{k}{k+1} (\tilde{\tau})_{r\theta} \quad (5-ج)$$

به منظور تخمین شکل حدودی قطره از معادله تنش‌های نرمال استفاده می‌شود [۳۴].

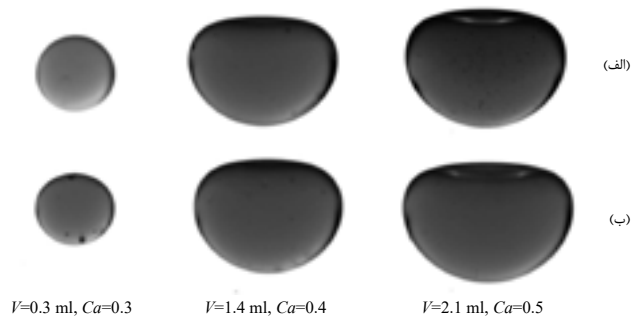
$$n \cdot \left(\tilde{\tau} - \frac{k}{k+1} \tau \right) \cdot n - p + \tilde{p} = \frac{1}{Ca} \left(2 - 2\xi - \frac{d}{d\mu} \left((1-\mu^2) \frac{d\xi}{d\mu} \right) \right) \quad (6)$$

امامیان و همکاران [۱۰] با استفاده از شرط مرزی تنش‌های نرمال تغییر شکل اصلاح شده نهایی را به شکل زیر به دست آوردند:

$$r(\theta) = 1 - \alpha_2 Re Ca P_2(\mu) - \beta_3 Re Ca^2 P_3(\mu) \quad (7)$$

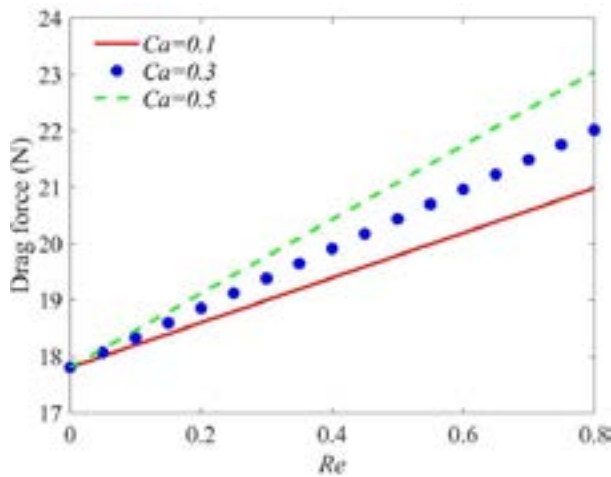
که در معادله (۷) مقادیر α_2 و β_3 به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\alpha_2 = \frac{1}{960} \frac{\left(\begin{matrix} -243k^3 + 20\gamma k - 684k^2 \\ +20\gamma - 638k - 200 \end{matrix} \right)}{(k+1)^3} \quad (8-الف)$$



شکل ۶: تغییرات شکل قطره نیوتنی با تغییرات حجم برای (الف) محلول اول ($k = 0.18$) و (ب) محلول دوم ($k = 0.25$)

Fig. 6. Changes in the shape of Newtonian drop for (a) first solution ($k=0.18$) and (b) second solution ($k=0.25$)

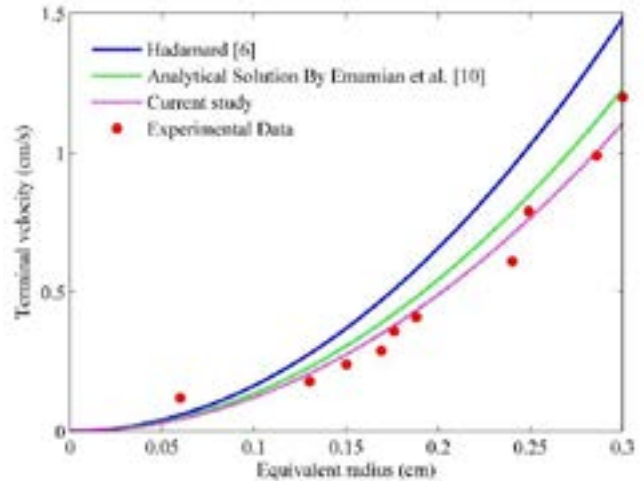


شکل ۷: تغییرات نیروی درگ سطح قطره با تغییر عدد بی بعد موینگی
Fig. 7. Drag force at free surface against the capillary number

مورد بررسی قرار داد. همانطور که در شکل ۵ مشاهده می شود نتایج آزمایشگاهی حاصل از تحقیق حاضر با حل تیلور و آکریوس [۸] تطابق خوبی دارد. با افزایش سایز قطره و به تبع آن افزایش اعداد رینولدز و موینگی شکل قطره از حالت کروی به یک حالت پهن شده تبدیل می شود. با ادامه این روند افزایشی یک فرورفتگی در انتهای قطره به وجود می آید.

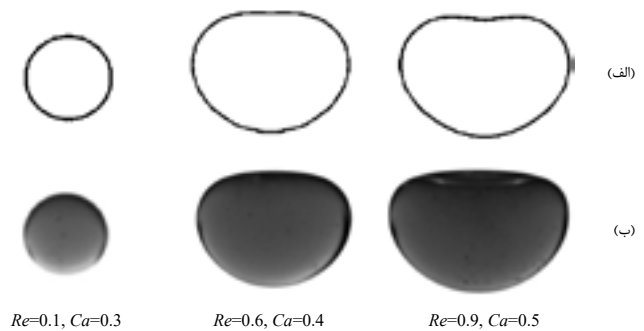
۴-۲- نتایج آزمایشگاهی

در شکل ۶ قطرات نیوتنی محلول اول و دوم را با سایزهای مختلف مشاهده می شود. با افزایش حجم قطره، اعداد بی بعد رینولدز و موینگی افزایش می یابند. با افزایش سایز قطرات، نیروی لختی بر نیروی کشش سطحی غلبه کرده و باعث می شود شکل قطرات پهن شود که با ادامه



شکل ۴: تغییرات سرعت حد بر حسب شعاع

Fig. 4. Variation of terminal velocity with equivalent radius



شکل ۵: مقایسه بین تغییر شکل به دست آمده از (الف) حل تحلیلی تیلور آکریوس [۸] (ب) نتایج آزمایشگاهی در $k = 0.25$

Fig. 5. A comparison between the steady shape of (a) the analytical solution of Taylor and Acrivos [8] (b) the experimental section at $k=0.25$

۴- نتایج و بحث

۴-۱- مقایسه حل تحلیلی و آزمایشگاهی

می توان نتایج آزمایشگاهی مطالعه حاضر را با حل امامیان و همکاران [۱۰] از لحاظ کمی بررسی و صحت تحقیق حاضر را مورد بررسی قرار داد. در شکل ۴ نتایج به دست آمده برای سرعت حد در حل تحلیلی امامیان و همکاران [۱۰] را با نتایج آزمایشگاهی حاضر مقایسه شده است. همان طور که دیده می شود نتایج آزمایشگاهی تطابق خوبی با نتایج تحلیلی دارد.

همچنین می توان نتایج آزمایشگاهی تحقیق حاضر را با حل تیلور و آکریوس [۸] از لحاظ کیفی بررسی و صحت تحقیق حاضر را

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \quad (14)$$

که P فشار نقطه مورد نظر و P_∞ فشار جریان آزاد است. در صورتی که فاصله ده برابر شعاع قطره باشد تغییرات C_p و P_∞ بسیار کوچک خواهد شد. بنابراین در تحقیق حاضر P_∞ در فاصله دور از سقوط قطره محاسبه شده است و مقدار آن ثابت است. سرعت حدی p چگالی سیال خارجی می‌باشد. در شکل ۸ تغییرات ضریب فشار در سطح مشترک قطره بررسی شده است. بدیهی است که کمترین مقدار C_p در نزدیکی قسمت بالای قطره ($\theta=0$) اتفاق می‌افتد. همچنین شکل ۸ نشان می‌دهد که با افزایش در رفتار لختی ضریب فشار در $\theta=0$ کاهش می‌یابد. کاهش بیشتر ضریب فشار می‌تواند به انحراف بیشتر شکل قطره از حالت کروی با افزایش عدد رینولدز، نسبت داده شود.

۵- نتیجه‌گیری

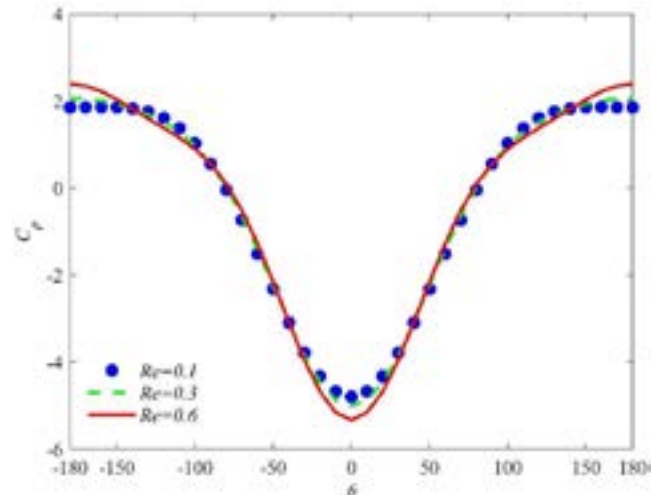
در مقاله حاضر، دینامیک یک قطره نیوتنی در حال سقوط در رژیم آرام مورد مطالعه قرار گرفته است. در قسمت آزمایشگاهی این تحقیق برای محلول اول از آب یون زدایی شده (دیونیزه) و گلیسرین با نسبت حجمی ۷۹:۲۱ و برای محلول دوم با نسبت حجمی ۸۳:۱۷ به عنوان فاز قطره استفاده شده است. در مطالعه حاضر، دینامیک قطره در حال سقوط نسبت به پارامترهای تأثیرگذار بررسی و مورد بحث قرار گرفته است. با بررسی پارامترهای تأثیر گذار روی دینامیک قطرات مشخص گردید که:

- طبق مشاهدات آزمایشگاهی، تغییرات نسبت لزجت k روی شکل قطرات تأثیر چندانی ندارد.
- افزایش عدد موینگی Ca ، به دلیل کاهش نیروی کشش سطحی، باعث ایجاد حفره‌ای در انتهای قطره شده و در نتیجه افزایش نیروی درگ را به دنبال دارد.
- افزایش عدد بی‌بعد رینولدز باعث کاهش ضریب فشار قطره می‌شود.

این روند یک فرورفتگی در انتهای قطره ایجاد می‌شود. همانطور که مشاهده می‌شود، تغییرات نسبت لزجت k روی شکل قطرات تأثیر چندانی ندارد.

۳-۴- تأثیر اعداد موینگی و رینولدز بر روی نیروی درگ و ضریب فشار
 شکل ۷ تغییرات نیروی درگ وارده بر سطح قطره در حال سقوط را در مقابل عدد رینولدز به ازای اعداد موینگی مختلف نشان می‌دهد. در این شکل می‌توان اثر نیروی لختی قطره را روی نیروی درگ مشاهده نمود. با توجه به این شکل، افزایش نیروی لختی در فاز قطره افزایش نیروی درگ وارده را در پی دارد. افزایش عدد موینگی سبب افزایش نیروی درگ در قطرات نیوتنی می‌شود. افزایش نیروی لختی قطره، افزایش تغییر شکل قطره را در پی دارد و ادامه روند افزایش آن سبب توسعه این تغییر شکل می‌شود. بنابراین، از شکل ۷ نتیجه می‌شود که رشد تغییر شکل پایای قطره نیوتنی به واسطه افزایش نیروی لختی یا موینگی، نیروی درگ وارده بر سطح آن را افزایش می‌دهد.

ضریب فشار یک پارامتر بی‌بعد است که بیانگر فشار نسبی در کل میدان جریان در دینامیک سیال می‌باشد. هر نقطه از سطح قطره دارای ضریب فشار منحصر به فرد است که بصورت رابطه (۱۴) ارائه می‌شود.



شکل ۸: تغییرات ضریب فشار سطح قطره با تغییر عدد بی‌بعد رینولدز برای $Ca=0.25$ و $k=20$

Fig. 8. Pressure coefficient distribution at the surface of falling drop for different Reynolds numbers for $Ca=0.25$, $k=20$

فهرست علائم

- moving simulation of non-isothermal elliptical particles, Journal of Thermal Analysis and Calorimetry, 1-15.
- [5] O. Breslouer, Rayleigh-Plateau Instability: Falling Jet, Project Report, (2010) pp. 1-10.
- [6] J. Hadamard, Mouvement permanent lent d'une sphère liquid et visqueuse dans un liquide visqueux, CR Hebd. Seances Acad. Sci. Paris, 152 (1911) 1735-1738. (in French)
- [7] W. Rybczynski, Über die fortschreitende Bewegung einer flussigen Kugel in einem zahren Medium, Bull. Acad. Sci. Cracovie A, 1 (1911) 40-46. (in German)
- [8] T. Taylor, A. Acrivos, On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds number, Journal of Fluid Mechanics, 18(3) (1964) 466-476.
- [9] M. Aminzadeh, Z. A. Maleki, H. Afshin, B. Firoozabadi, Experimental Investigation on Rising of a Sequence of Drops in a Viscous Fluid, 1(12) (2011) 39-46.
- [10] A. Emamian, M. Norouzi, M. Davoodi, An analytical investigation on shape of a falling viscose drop at low Reynolds number, Modares Mechanical Engineering, 7(2) (2017) 251-262. (in Persian)
- [11] M.C. Sostarecz, A. Belmonte, Motion and shape of a viscoelastic drop falling through a viscous fluid, Journal of Fluid Mechanics, 497 (2003) 235-252.
- [12] N. Aggarwal, K. Sarkar, Deformation and breakup of a viscoelastic drop in a Newtonian matrix under steady shear, Journal of Fluid Mechanics, 584 (2007) 1-21.
- [13] M. Aminzadeh, A. Maleki, B. Firoozabadi, H. Afshin, On the motion of Newtonian and non-Newtonian liquid drops, Scientia Iranica, 19(5) (2012) 1265-1278.
- [14] S. Mukherjee, K. Sarkar, Viscoelastic drop falling through a viscous medium, Physics of Fluids, 23(1) (2011) 013101.
- [15] I. Smagin, M. Pathak, O.M. Lavrenteva, A. Nir, Motion and shape of an axisymmetric viscoplastic drop slowly falling through a viscous fluid, Rheologica Acta, 50(4) (2011) 361-374.
- عدد موینگی $Ca = \frac{\eta U_\infty}{\Gamma}$
- ضریب فشار $C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2}$
- تانسور تنش D
- برایند نیروها F (kgms^{-2})
- نیروی حجمی F_B (kgms^{-2})
- نیروی پسا F_D (kgms^{-2})
- نسبت لزجت $k = \frac{\dot{\eta}_0}{\eta}$
- بردار عمود بر سطح n
- عدد رینولدز $Re = \frac{\rho U_\infty R}{\eta}$
- جهت شعاعی دستگاه مختصات کروی r
- سرعت حد قطره U_∞ (ms^{-1})
- سرعت مرجع قطره U_0 (ms^{-1})
- حجم قطره V (m^3)
- علائم یونانی
- تابع تغییر شکل ζ
- لزجت دینامیکی η ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$)
- تانسور تنش سیال نیوتنی τ ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$)
- چگالی ρ (kgm^{-3})
- تانسور تنش قطره $\dot{\tau}$ ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$)
- جهت زاویه‌ای دستگاه مختصات کروی θ
- کشش سطحی Γ (kgs^{-2})
- مراجع
- [1] J. Choi, Y.-J. Kim, S. Lee, S.U. Son, H.S. Ko, V.D. Nguyen, D. Byun, Drop-on-demand printing of conductive ink by electrostatic field induced inkjet head, Applied Physics Letters, 93(19) (2008) 193508.
- [2] C. Hanson, Recent advances in liquid-liquid extraction, Elsevier, 2013.
- [3] K.W. Binder, A.J. Allen, J.J. Yoo, A. Atala, Drop-on-demand inkjet bioprinting: a primer, Gene Therapy and Regulation, 6(01) (2011) 33-49.
- [4] S. Karimnejad, A.A. Delouei, M. Nazari, M. Shahmardan, M. Rashidi, S. Wongwises, Immersed boundary—thermal lattice Boltzmann method for the

- and experimental study on dynamics of a circulating Boger drop translating through Newtonian fluids at inertia regime, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 267 (2019) 1-13.
- [26] M. Norouzi, H. Abdolnezhad, S. Mandani, An experimental investigation on inertia motion and deformation of Boger drops falling through Newtonian media, *Meccanica*, 54(3) (2019) 473-490.
- [27] M. Norouzi, M. Davoodi, O.A. Bég, A.A. Joneidi, Analysis of the effect of normal stress differences on heat transfer in creeping viscoelastic Dean flow, *International Journal of Thermal Sciences*, 69 (2013) 61-69.
- [28] M.G. Wagner, J.C. Slattery, Slow flow of a non-newtonian fluid past a droplet, *AIChE Journal*, 17(5) (1971) 1198-1207.
- [29] L.E. Payne, W.H. Pell, The Stokes flow problem for a class of axially symmetric bodies, *Journal of Fluid Mechanics*, 7(4) (1960) 529-549.
- [30] M.-J. Ni, S. Komori, N.B. Morley, Direct simulation of falling droplet in a closed channel, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49(1-2) (2006) 366-376.
- [31] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics Vol. 6 Fluid Mechanics*, Pergamon Press, 1959.
- [32] F.M. White, I. Corfield, *Viscous fluid flow*, McGraw-Hill New York, 2006.
- [33] R. Wanchoo, S.K. Sharma, R. Gupta, Shape of a Newtonian liquid drop moving through an immiscible quiescent non-Newtonian liquid, *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification*, 42(5) (2003) 387-393.
- [34] C.K. Batchelor, G. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge university press, 2000.
- [16] B. Vamerzani, M. Norouzi, B. Firoozabadi, Analytical solution for creeping motion of a viscoelastic drop falling through a Newtonian fluid, *Korea-Australia Rheology Journal*, 26(1) (2014) 91-104.
- [17] O.M. Lavrenteva, Y. Holenberg, A. Nir, Motion of viscous drops in tubes filled with yield stress fluid, *Chemical Engineering Science*, 64(22) (2009) 4772-4786.
- [18] A. Potapov, R. Spivak, O.M. Lavrenteva, A. Nir, Motion and deformation of drops in Bingham fluid, *Industrial & engineering chemistry research*, 45(21) (2006) 6985-6995.
- [19] J.P. Singh, M.M. Denn, Interacting two-dimensional bubbles and droplets in a yield-stress fluid, *Physics of Fluids*, 20(4) (2008) 040901.
- [20] A. Acharya, R. Mashelkar, J. Ulbrecht, Mechanics of bubble motion and deformation in non-Newtonian media, *Chemical Engineering Science*, 32(8) (1977) 863-872.
- [21] A. Acharya, R. Mashelkar, J. Ulbrecht, Mechanics of bubble motion and deformation in non-Newtonian media, *Chemical Engineering Science*, 32(8) (1987) 863-872.
- [22] M. Coutanceau, M. Hajjam, Viscoelastic effect on the behaviour of an air bubble rising axially in a tube, in: *Mechanics and Physics of Bubbles in Liquids*, Springer, 1982, pp. 199-207.
- [23] Y. Liu, T. Liao, D. Joseph, A two-dimensional cusp at the trailing edge of an air bubble rising in a viscoelastic liquid, *Journal of Fluid Mechanics*, 304 (1995) 321-342.
- [24] E. Zana, L. Leal, The dynamics and dissolution of gas bubbles in a viscoelastic fluid, *International Journal of Multiphase Flow*, 4(3) (1978) 237-262.
- [25] M. Norouzi, A. Emamian, M. Davoodi, An analytical

