



مساله متقارن کروی در نظریه گرادیان دوم کرنش

فرزانه اجاق نژاد*

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه الزهراء، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸/۰۳/۲۲

بازنگری: ۱۳۹۸/۰۶/۲۹

پذیرش: ۱۳۹۸/۰۸/۱۴

ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۰۸/۲۴

کلمات کلیدی:

نظریه گرادیان دوم کرنش

اثر اندازه

اثر سطح

لمه‌گونه کروی

تقارن کروی

خلاصه: هدف، حل مساله متقارن کروی یک/دو فازی با استفاده از الاستیسیته گرادیان دوم کرنش و مقایسه با الاستیسیته کلاسیک است. نظر به قابلیت گرادیان دوم کرنش در پیش‌بینی اثرات سطح، اندازه و ماهیت گسسته مواد، مساله متقارن کروی مدل‌سازی و تحت اثرات مذکور مطالعه می‌شود. با تبیین گرادیان دوم کرنش در دستگاه مختصات کروی، معادلات تعادل، میدان تنش و کرنش، روابط آن‌ها و نیروهای سطحی استخراج می‌شود. بعد از آسایش سطحی، بارگذاری خارجی متقارن روی سازه اعمال و پاسخ مکانیکی بررسی می‌شود. خواص مکانیکی پوسته تک‌فازی از بلور الماس و پوسته دوفازی از سیلیکون بلوری با پوشش کربنی مطالعه می‌شود. مقادیر ثابت‌های مواد توسط محاسبات کوانتومی، نظریه دینامیک شبکه و مدل‌سازی محیط پیوسته محاسبه می‌شود. محاسبات نشان می‌دهد که پیش‌بینی نظریه تقویت‌یافته از خواص نانوسازه تفاوت چشمگیری با پیش‌بینی کلاسیک دارد. مثلاً، در پوسته کربنی با شعاع داخلی و خارجی به ترتیب ۲ و ۱۰ برابر پارامتر شبکه، تحت بارگذاری فشاری خارجی یک‌گانه شده $0/0001$ ، تنش شعاعی کلاسیک یک‌گانه، ثابت و حدود $0/0001$ است، در حالی که در گرادیان کرنش، تنش شعاعی یک‌گانه از مقادیر $0/0001$ و $0/0002$ در مرزهای داخلی و خارجی، به ترتیب، به $0/0003$ در میانه متغیر است. با افزایش شعاع داخلی، اختلاف دو نظریه در میانه محیط کاهش می‌یابد اما در نزدیکی سطوح اختلاف قابل ملاحظه است.

۱- مقدمه

سه بعد و داشتن شکل هندسی متقارن است. بدیهی است که به دلیل وجود اثر سطح به عنوان یک خرابی دوبعدی و همچنین اثر اندازه در نانو ساختارها، بررسی دقیق خواص مکانیکی نانوسازه‌ها در چهارچوب نظریه الاستیسیته کلاسیک امکان‌پذیر نیست و ناگزیر باید از روش‌های آزمایشگاهی و عددی برای حل مسایل مکانیکی بهره برد [۱-۳]. همین مساله در حدود سال‌های ۱۹۶۰ الی ۱۹۷۵ انگیزه‌ای قوی برای ارائه‌ی نظریه‌های الاستیسیته تقویت‌یافته به عنوان یک راهکار محیط پیوسته برای بررسی و مطالعه ویژگی‌های مکانیکی نانوسازه‌ها بوده است. به عنوان مثال، لازار [۴] نظریه محیط پیوسته‌ی نابجایی غیرتکین را با استفاده از الاستیسیته گرادیان کرنش بسط و توسعه داده است. در مقاله‌ای دیگر، لازار و آگیاسوفیتو [۵] کمیت‌های بنیادی را در الاستیسیته تعمیم‌یافته و

در سال‌های اخیر، نانوسیم‌ها، نانوکرات، نانوتیوب‌ها و نانوذرات به عنوان نانوسازه‌های متقارن ساخته شده از موادی مانند فلزات، نیمه‌رساناها، عایق‌ها و مواد طبیعی، بسیار مورد علاقه و بررسی محققین بوده است. دلیل این رویکرد و جهت‌گیری به سوی این نانوسازه‌ها کاربرد فراوانی است که این نانوشکل‌ها در صنایع مختلف مانند الکترونیک، باتری‌ها، تبدیل انرژی، اپتیک، سنسورهای شیمیایی، درمان سرطان و غیره پیدا کرده است. کاربردهای فراوان مذکور، مطالعه و بررسی، جهت تعیین خواص مکانیکی و فیزیکی نانوسازه‌های مورد اشاره را اجتناب‌ناپذیر می‌نماید. لازم به یادآوری است که مهمترین ویژگی این ساختارها نانو مقیاس بودن در یک الی

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: f.ojaghnezhad@alzahra.ac.ir



داده‌اند. بر این اساس، تحلیل مکانیکی کامپوزیت‌های با تقارن کروی در چهارچوب نظریه گرادیان دوم کرنش با توجه به کاربرد وسیعی که این مسایل در صنایع نوین امروزی (به خصوص در صنعت باتری) دارند و همچنین ارائه مثال‌های عددی برای نشان دادن اهمیت کاربرد این تئوری در سازه‌های نانومقیاس مهمترین دستاورد مقاله پیش روست. با استفاده از روش سری فروبینیس معادله تعادل برای محیط با تقارن کروی حل شده، جواب‌های مستقل معادله حاصل می‌شود. سپس، با اعمال شرایط مرزی مناسب، مکانیک نانومحیط مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای به‌دست آوردن نتایج عددی و نمودار کمیت‌ها، داشتن مقادیر عددی ثابت‌های مواد لازم و ضروری است. در نظریه‌های الاستیسیته تعمیم‌یافته علاوه بر ثابت‌های متداول لمه، ثابت‌های مواد جدید در تئوری وارد می‌شود. به عنوان مثال، در تئوری گرادیان دوم کرنش میندلین، شانزده ثابت ماده جدید معرفی می‌شود. در سال‌های اخیر فعالیت‌های قابل توجهی در زمینه تعیین مقادیر عددی ثابت‌های اضافی مواد در چهارچوب نظریه‌های گرادیان اول و دوم کرنش صورت گرفته است [۱۱، ۱۲، ۲۱-۱۸].

با توجه به اهمیت و کاربرد وسیع نانوکرات سیلیکونی با پوشش کربنی در افزایش کارایی باتری‌های لیتیومی [۳۱-۲۲]، تعیین خواص فیزیکی و مکانیکی این قبیل سازه‌ها در اثر آسایش سطحی^۱، اثر سطح و اثر اندازه و بارگذاری خارجی متقارن کروی، مساله مهمی به نظر می‌رسد. در این مطالعه، بر اساس راهکار ارائه شده توسط شجاع و همکاران [۱۹] که برای ماده با ساختار مکعبی در نظریه گرادیان اول کرنش ارائه شده است، ثابت‌های لمه و شانزده پارامتر اضافی میندلین، با در نظر گرفتن تئوری دینامیک شبکه و محاسبات اصول اولیه کوانتمی برای عناصر بلوری سیلیکون و کربن که ساختار الماس دارند، محاسبه می‌شود. با در دست داشتن مقادیر عددی ثابت‌های مواد، اثرات سطح و مرز در پیکربندی متعادل^۲ نانوکره توخالی کربنی و نانوکره توخالی سیلیکونی با پوشش کربنی در چهارچوب نظریه گرادیان دوم کرنش مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس، بارگذاری با تقارن کروی بر سطوح داخلی و خارجی نانوکره توخالی پوشش‌دار و بدون پوشش با پیکربندی متعادل سطحی اعمال می‌شود و پاسخ مکانیکی نانوسازه با پاسخ کلاسیک مقایسه

نظریه نابجایی بلورها ارائه داده‌اند. همچنین، از فعالیت‌های پژوهشی صورت گرفته در این زمینه می‌توان به استخراج تانسور گرین برای نظریه گرادیان اول کرنش غیرهمسانگرد توسط پو و همکاران [۶] اشاره کرد. در فعالیتی دیگر، دلفانی و همکاران [۷] با استفاده از الاستیسیته گرادیان دوم کرنش، مدول برشی موثر را برای مواد مرکب تخمین زده‌اند. با توجه به فعالیت‌های پژوهشی ذکر شده در زمینه الاستیسیته تعمیم‌یافته در سال‌های اخیر، لازم است تاریخچه مختصری برای نظریه گرادیان کرنش ارائه شود. در نظریه گرادیان اول کرنش، توپین [۸] فرض کرد که چگالی انرژی کرنشی تابعی از تانسور مرتبه دوم کرنش و گرادیان اول آن است. تناظر بین این نظریه با ساختار اتمی ماده توسط توپین و گزیس [۹] با در نظر گرفتن اندرکنش هر اتم با همسایه‌های اول و دوم نشان داده شد و آن‌ها دریافتند که لایه نخست اتمی در موادی که تقارن مرکزی ندارند، بر اثر خواص سطحی و بر اساس نظریه گرادیان اول کرنش به سمت داخل یا خارج حرکت می‌کند. برای این‌که اثر سطح در مواد با تقارن مرکزی نیز مشاهده شود، میندلین [۱۰] چگالی انرژی کرنشی را به‌صورت تابعی از تانسور کرنش و گرادیان‌های اول و دوم در نظر گرفت. در این نظریه، میندلین پارامتری به نام مدول چسبندگی معرفی می‌کند که منجر به لحاظ شدن اثر سطح در تحلیل نانوسازه‌ها در چهارچوب این نظریه است [۱۱]. اخیراً، با توجه به توانایی نظریه گرادیان دوم کرنش در احتساب اثر سطح در سازه‌ها، اجاق‌نژاد و شجاع [۱۲] نظریه الاستیسیته سطح‌گرتین و مرداک [۱۳] را در قالب الاستیسیته گرادیان دوم کرنش صورت‌بندی کردند و ارتباط میان پارامترهای الاستیک سطح و ثابت‌های میندلین را مورد بررسی قرار دادند.

به منظور استفاده از نظریه گرادیان دوم کرنش برای تحلیل خواص مکانیکی نانوکرات، لازم است که این نظریه در مختصات منحنی‌الخط متعامد کروی نوشته شود. با استفاده از ابزار ریاضی ارائه شده توسط ارینگن [۱۴] و نماد کریستوفل، این تبدیل دستگاه مختصات صورت می‌گیرد. جی و همکاران [۱۵] صورت‌بندی کلی نظریه گرادیان اول کرنش ساده شده توسط ژو و همکاران [۱۶] را در دستگاه منحنی‌الخط متعامد ارائه کرده‌اند. اجاق‌نژاد و شجاع [۱۷] معادلات تعادل، شرایط مرزی و روابط بنیادی تنش-کرنش را در چهارچوب الاستیسیته گرادیان دوم کرنش میندلین در دستگاه مختصات منحنی‌الخط ارائه

1 Surface Relaxation

2 Relaxed Configuration

سوم جابجایی به شکل زیر تعریف می‌شود [۱۰]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^1 = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla), \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^2 = \nabla \nabla \mathbf{u}, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^3 = \nabla \nabla \nabla \mathbf{u}. \quad (3)$$

برای ماده مافوق کشسان^۱، میدان‌های تنش مراتب دوم، سوم و چهارم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{\tau}^1 = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^1}, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\tau}^2 = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2}, \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\tau}^3 = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^3}. \quad (6)$$

بر اساس تحلیل صورت گرفته توسط میندلین، برای محیط مادی با حجم V که توسط سطح S احاطه شده است، چنانچه نیروی حجمی برابر \mathbf{f} باشد، معادله برداری تعادل جسم به شکل زیر استخراج می‌شود [۱۰]:

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}^1 - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^2 + \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^3) + \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (7)$$

ضرب اسکالر دو نقطه‌ای در عبارت فوق، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^3 = \tau_{ijkl,ij} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l, \quad (8)$$

که در رابطه فوق، بردار پایه در جهت k است. همچنین، اگر \mathbf{n} بردار واحد برون‌سو برای سطح S باشد، نیروهای سطحی^۲ در مرز به صورت زیر به دست می‌آید [۱۰]:

می‌شود. پرواضح است که جواب الاستیسیته کلاسیک برای حالتی که نانوتیوب پوشش‌دار و بدون پوشش بدون هیچ بارگذاری خارجی در نظر گرفته می‌شود و صرفاً تحت اثر سطح آسوده می‌شود، پاسخ بدیهی (پاسخ صفر) است. این درحالیست که نظریه گرادیان دوم کرنش برای این مساله پاسخ غیربدیهی (غیر صفر) دارد. توزیع کرنش شعاعی در این سازه‌ها بعد از آسایش سطحی در بخش نتایج به صورت نمودار آورده شده است. همچنین، کرنش شعاعی متوسط که برابر تغییر ضخامت در اثر آسایش سطحی به ضخامت اولیه است، برای چند حالت هندسی رسم و مقایسه شده است. به عنوان مثال، برای یک نانوتیوب کربنی با شعاع داخلی ۱۰ برابر پارامتر شبکه و ضخامت ۳ برابر پارامتر شبکه، تغییر ضخامت به ضخامت اولیه حدود ۰/۱- است و برای نانوتیوب با شعاع داخلی ۲ برابر پارامتر شبکه و همان ضخامت، تغییر ضخامت به ضخامت اولیه حدود ۰/۳۱- است. بعد از رسیدن به حالت متعادل سطحی، بارگذاری خارجی متقارن روی سطوح داخلی و خارجی سازه‌ها اعمال می‌شود و پاسخ حاصل با پاسخ کلاسیک مقایسه می‌شود. به عنوان مثال، در مساله نانوتیوب سیلیکونی با پوشش کربنی با شعاع داخلی ۱۰ برابر پارامتر شبکه سیلیکون، ضخامت لایه سیلیکون برابر یک برابر پارامتر شبکه سیلیکون، ضخامت لایه کربنی برابر یک برابر پارامتر شبکه کربن و تحت بارگذاری داخلی و خارجی حدود ۰/۰۰۰۱- برابر مدول یانگ کربن، تغییر ضخامت در پوسته کربنی بر اساس الاستیسیته کلاسیک، افزایشی اما بر اساس نظریه گرادیان دوم کرنش، کاهش می‌شود. نکته مهم در این است که در همه مسایل در نظر گرفته شده، با افزایش ابعاد، پاسخ نظریه گرادیان دوم کرنش، مطابق انتظار، به پاسخ الاستیسیته کلاسیک همگرا می‌شود.

۲- نظریه گرادیان دوم کرنش

در این بخش، نظریه گرادیان دوم کرنش به طور مختصر ارائه می‌شود. بر اساس نظریه ارائه شده توسط میندلین، در یک ماده خطی، الاستیک، همگن و همسانگرد با تقارن مرکزی، چگالی انرژی کرنشی (W) علاوه بر میدان کرنش ($\boldsymbol{\varepsilon}$) به گرادیان دوم میدان جابجایی ($\boldsymbol{\varepsilon}^2$) و همچنین گرادیان سوم آن ($\boldsymbol{\varepsilon}^3$) وابسته است. فرض کنید که میدان جابجایی مربوط به یک نقطه مادی به وسیله بردار \mathbf{u} نشان داده شود، در این صورت میدان کرنش و گرادیان‌های دوم و

1 Hyperelastic

2 Traction Boundary Conditions

$$\begin{aligned} \tau_{pqr} = & \frac{2}{3} b_1 \varepsilon_{ijj} \delta_{pqrs} + \frac{2}{3} b_2 \varepsilon_{jki} \delta_{jkpqrs} + \\ & \frac{1}{6} b_3 ((\varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{ikj}) \delta_{jkpqrs} + 2 \varepsilon_{jsi} \delta_{jpqr}) + \\ & \frac{2}{3} b_4 \varepsilon_{ijs} \delta_{jpqr} + \frac{2}{3} b_5 \varepsilon_{ijs} \delta_{jpqr} + 2 b_6 \varepsilon_{pqrs} + \\ & \frac{2}{3} b_7 (\varepsilon_{qrsp} + \varepsilon_{rspq} + \varepsilon_{spqr}) + \frac{1}{3} c_1 \varepsilon_{ii} \delta_{pqrs} + \\ & \frac{1}{3} c_2 \varepsilon_{ij} \delta_{ijpqrs} + \frac{1}{3} c_3 \varepsilon_{is} \delta_{pqrs} + \frac{1}{3} b_0 \delta_{pqrs}, \end{aligned} \quad (15)$$

در روابط فوق δ_{ij} تابع دلتای کرانیکر^۲ است و همچنین:

$$\begin{aligned} \delta_{ijkl} = & \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}, \\ \delta_{ijklmn} = & \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} + \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn}. \end{aligned} \quad (16)$$

با استفاده از روابط تنش-کرنش ارائه شده و تعاریف کرنش‌های مرتبه دو، سه و چهار و جایگذاری در معادله (۷)، معادله تعادل بر حسب میدان جابجایی به صورت زیر حاصل می‌شود [۱۰]:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)(1 - (\ell_{11}^2 + \ell_{12}^2) \nabla^2 + \ell_{11}^2 \ell_{12}^2 \nabla^4) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \\ \mu(1 - (\ell_{21}^2 + \ell_{22}^2) \nabla^2 + \ell_{21}^2 \ell_{22}^2 \nabla^4) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (17)$$

طول‌های مشخصه ظاهر شده در عبارت فوق به صورت زیر برای

$j = 1, 2$ تعریف می‌شود:

$$2(\lambda + 2\mu) \ell_{1j}^2 = \bar{a} - 2\bar{c} \pm ((\bar{a} - 2\bar{c})^2 - 4\bar{b}(\lambda + 2\mu))^{\frac{1}{2}}, \quad (18)$$

$$2\mu \ell_{2j}^2 = \bar{a}' - c_3 \pm ((\bar{a}' - c_3)^2 - 4\bar{b}'\mu)^{\frac{1}{2}}, \quad (19)$$

تعاریف مربوط به پارامترهای ظاهر شده در تعریف طول‌های

مشخصه عبارتند از:

$$\begin{aligned} \bar{a} = & 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5), \\ \bar{b} = & 2(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7), \\ \bar{c} = & c_1 + c_2 + c_3, \\ \bar{a}' = & 2(a_3 + a_4), \\ \bar{b}' = & 2(b_5 + b_6). \end{aligned} \quad (20)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \nabla \nabla : \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{L} \cdot (\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{L} \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) - (\nabla \cdot \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau})), \quad (9)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{nn} : (\boldsymbol{\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{L} \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau})) + \mathbf{L} \cdot (\mathbf{nn} : \boldsymbol{\tau}), \quad (10)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{nnn} : \boldsymbol{\tau}, \quad (11)$$

در عبارات فوق، عملگرهای گرادیان سطح، ∇ و \mathbf{L} به صورت $\mathbf{L} = \mathbf{n} \nabla \cdot \mathbf{n} - \nabla$ و $\nabla = \nabla - \mathbf{nn} \nabla$ تعریف می‌شود. با در نظر گرفتن قرارداد جمع اندیسی انیشتن، چگالی انرژی کرنشی را برای ماده الاستیک و همسانگرد می‌توان به صورت زیر نوشت [۱۰]:

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + a_1 \varepsilon_{ijj} \varepsilon_{ikk} + a_2 \varepsilon_{iik} \varepsilon_{kjj} + \\ & a_3 \varepsilon_{iik} \varepsilon_{jjk} + a_4 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} + a_5 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kji} \\ & + b_1 \varepsilon_{ijj} \varepsilon_{kkll} + b_2 \varepsilon_{ijkk} \varepsilon_{ijll} + b_3 \varepsilon_{ijjk} \varepsilon_{jkl} + b_4 \varepsilon_{ijjk} \varepsilon_{llkj} + \\ & b_5 \varepsilon_{ijjk} \varepsilon_{lljk} + b_6 \varepsilon_{ijkl} \varepsilon_{ijkl} + b_7 \varepsilon_{ijkl} \varepsilon_{jkli} \\ & + c_1 \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jjkk} + c_2 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ijkk} + c_3 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kkij} + b_0 \varepsilon_{ijj}, \end{aligned} \quad (12)$$

در رابطه، ε_{ij} ، ε_{ijk} و ε_{ijkl} به ترتیب، مولفه‌های تانسورهای ε ، ε و ε است. ضرایب λ و μ ثابت‌های لمه و ضرایب a_1 تا a_5 ، b_1 تا b_7 ، c_1 تا c_3 و b_0 ثابت‌های اضافی میندیلین نامیده می‌شود. ثابت b_0 که دارای بعد نیرو است تحت عنوان مدول چسبندگی^۱ تعریف می‌شود. با استفاده از روابط (۴) تا (۶) و (۱۲)، معادلات تنش-کرنش به صورت زیر قابل استخراج است:

$$\tau_{pq} = \lambda \varepsilon_{ii} \delta_{pq} + 2\mu \varepsilon_{pq} + c_1 \varepsilon_{ijj} \delta_{pq} + c_2 \varepsilon_{pqii} + \frac{1}{2} c_3 (\varepsilon_{iipq} + \varepsilon_{iiqp}), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tau_{pqr} = & a_1 (\varepsilon_{pii} \delta_{qr} + \varepsilon_{qii} \delta_{pr}) + \\ & \frac{1}{2} a_2 (\varepsilon_{iipq} \delta_{qr} + 2 \varepsilon_{rii} \delta_{qp} + \varepsilon_{iiq} \delta_{pr}) + \\ & 2 a_3 \varepsilon_{iir} \delta_{pq} + 2 a_4 \varepsilon_{pqr} + a_5 (\varepsilon_{rqp} + \varepsilon_{rpq}), \end{aligned} \quad (14)$$

2 Kronecker Delta

1 Modulus of Cohesion

از توابع زیر خواهد بود:

$$u_r(r) = L \left\{ r, \frac{1}{r} \cosh \frac{r}{\ell_{11}} - \frac{\ell_{11}}{r^2} \sinh \frac{r}{\ell_{11}}, \right. \\ \left. \frac{1}{r} \cosh \frac{r}{\ell_{12}} - \frac{\ell_{12}}{r^2} \sinh \frac{r}{\ell_{12}}, \right. \\ \left. \frac{1}{r^2}, \frac{\ell_{11}+r}{r^2} e^{-\frac{r}{\ell_{11}}}, \frac{\ell_{12}+r}{r^2} e^{-\frac{r}{\ell_{12}}} \right\}. \quad (24)$$

از شش جواب مستقل معادله دیفرانسیل مذکور، سه جواب در صفر و سه جواب در بینهایت تعریف نشده هستند. همچنین، با استفاده از روابط (۹) تا (۱۱) مولفه‌های غیر صفر نیروهای سطحی در روی سطوح فضای مورد نظر که تقارن کروی دارد، به صورت زیر استخراج خلاصه می‌شود:

$$t_r = -\frac{2b_0}{r^2} + \left(\frac{2\lambda}{r} - \frac{4(a_4 + a_5 + \bar{a}) - 2c_2 - 2c_3}{r^3} \right) \\ - \frac{8(\bar{b} - 2b_1 + 4b_6 + 4b_7)}{r^5} u_r \\ + (\lambda + 2\mu + \frac{4(a_4 + a_5 + \bar{a} + c_1) - 10\bar{c}}{r^2} + \\ \frac{8(\bar{b} - 2b_1 + 4b_6 + 4b_7)}{r^4}) u_{r,r} \\ + (\frac{4\bar{c} - 2\bar{a} + 2c_1}{r} + \frac{8(b_2 + b_3 + b_4 + b_5)}{r^3}) u_{r,rr} + \\ (2\bar{c} - \bar{a} - \frac{10\bar{b}}{r^2}) u_{r,rrr} + \frac{4\bar{b} u_{r,rrrr}}{r} + \bar{u}_{r,rrrr}, \quad (25)$$

$$t_r = \frac{2b_0}{r} + \left(\frac{4(a_1 + a_2 + a_3) + 4c_1 + 2\bar{c}}{r^2} + \frac{8(\bar{b} - 2b_1 + 4b_6 + 4b_7)}{r^4} \right) u_r \\ + \left(\frac{4(a_1 + a_2 + a_3)}{r} - \frac{8(\bar{b} - 2b_1 + 4b_6 + 4b_7)}{r^3} \right) u_{r,r} \\ + (\bar{a} - \bar{c} + \frac{12\bar{b} - 8(b_2 + b_3 + b_4 + b_5)}{r^2}) u_{r,rr} - \frac{2\bar{b}}{r} u_{r,rrr} - \bar{b} u_{r,rrrr}, \quad (26)$$

$$t_r = b_0 + \left(\frac{2c_1}{r} + \frac{8(b_2 + b_3 + b_4 + b_5)}{r^3} \right) u_r + \left(\bar{c} - \frac{8(b_2 + b_3 + b_4 + b_5)}{r^2} \right) u_{r,r} \\ + \left(\frac{2\bar{b} + 4b_1 - 4b_6 - 4b_7}{r} \right) u_{r,rr} + \bar{b} u_{r,rrr}, \quad (27)$$

با در دست داشتن جواب معادله دیفرانسیل برای مساله با تقارن کروی، همچنین روابط تنش- کرنش و نیروهای سطحی روی مرز محیط مورد نظر، در ادامه مساله لمه کروی و مساله دو پوسته کروی بررسی و مطالعه می‌شود.

همانطور که ملاحظه می‌شود، علاوه بر ثابت‌های لمه متداول تئوری الاستیسیته، در نظریه گرادیان دوم کرنش برای ماده همگن و همسانگرد، شانزده ثابت ماده جدید در روابط مربوط به معادله تعادل، تنش-کرنش و نیروهای سطحی در مرزها وارد می‌شود.

۳- محیط مادی با تقارن کروی

محیط پیوسته‌ای را در نظر بگیرید که دارای تقارن کروی در هندسه و بارگذاری است. در این صورت، تنها مولفه غیرصفر میدان جابجایی مولفه $u_r(r)$ است که در آن r متغیر فاصله از مرکز محیط با تقارن کروی است. در این حالت، با نوشتن معادلات تعادل، در دستگاه مختصات کروی و اعمال تقارن کروی مساله، معادله تعادل در چهارچوب نظریه گرادیان دوم کرنش بر حسب مولفه‌های تنش به صورت زیر خواهد بود:

$$\tau_{rr,r} - \tau_{rrr,rr} + \tau_{rrrr,rrr} + (2\tau_{rr} - 2\tau_{\theta\theta} - 4\tau_{rrr,r} + \\ 4\tau_{r\theta\theta,r} + 2\tau_{\theta\theta r,r} + 6\tau_{rrrr,rr} - 6\tau_{rr\theta\theta,rr} - 6\tau_{r\theta\theta r,rr}) / r \\ + (-2\tau_{rrr} + 8\tau_{r\theta\theta} + 4\tau_{\theta\theta r} + 6\tau_{rrrr,r} - 24\tau_{rr\theta\theta,r} - \\ 24\tau_{r\theta\theta r,r} + 6\tau_{\theta\theta\theta\theta,r} + 6\tau_{\theta\theta\phi\phi,r}) / r^2 \\ - (12\tau_{rr\theta\theta} + 12\tau_{r\phi\phi r} - 6\tau_{\theta\phi\phi\theta} - 6\tau_{\phi\phi\phi\phi}) / r^3 = 0, \quad (21)$$

که در آن (r, θ, ϕ) مختصات نقطه در دستگاه مختصات کروی است. با جایگذاری مولفه‌های تنش از روابط (۱۳) تا (۱۵)، معادله تعادل بر حسب میدان جابجایی به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$r^6 u_r'''''' + 6r^5 u_r'''''' - (6r^4 + p_1 r^6) u_r'''''' - 4r^5 p_1 u_r'''''' + \\ (4p_1 r^4 + p_2 r^6) u_r'''' + 2p_2 r^5 u_r'' - 2p_2 r^4 u_r = 0, \quad (22)$$

که در آن:

$$p_1 = \frac{\ell_{11}^2 + \ell_{12}^2}{\ell_{11}^2 \ell_{12}^2}, \quad p_2 = \frac{1}{\ell_{11}^2 \ell_{12}^2}. \quad (23)$$

معادله دیفرانسیل (۲۲) یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۶ خطی همگن است. با در نظر گرفتن جواب معادله فوق به صورت سری فروبینیس^۱، جواب عمومی این معادله دیفرانسیل یک ترکیب خطی

1 Frobenius series

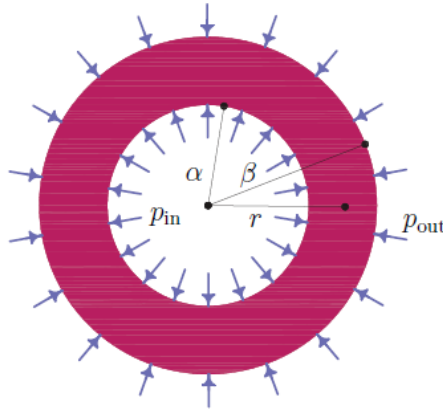


Fig. 1. The spherical Lamé-type problem with inner and outer radii α and β under the external pressures p_{in} and p_{out} .
 شکل ۱: مساله لمه‌گونه کروی با شعاع داخلی α و شعاع خارجی β تحت فشار داخلی و خارجی p_{in} و p_{out} .

۳-۱- مساله لمه

مساله لمه کروی با استفاده از یک محیط با تقارن کروی که شعاع داخلی و خارجی آن به ترتیب با نمادهای α و β نمایش داده می‌شود و تحت فشار داخلی و خارجی p_{in} و p_{out} قرار دارد، مطابق شکل ۱ در نظر گرفته می‌شود.

میدان جابجایی این مساله بر اساس الاستیسیته گرادیان دوم کرنش با استفاده از رابطه (۲۴) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$u_r(r) = A_1 r + A_2 \left(\frac{1}{r} \cosh \frac{r}{\ell_{11}} - \frac{\ell_{11}}{r^2} \sinh \frac{r}{\ell_{11}} \right) + A_3 \left(\frac{1}{r} \cosh \frac{r}{\ell_{12}} - \frac{\ell_{12}}{r^2} \sinh \frac{r}{\ell_{12}} \right) + \frac{A_4}{r^2} + A_5 \frac{\ell_{11} + r}{r^2} e^{-\frac{r}{\ell_{11}}} + A_6 \frac{\ell_{12} + r}{r^2} e^{-\frac{r}{\ell_{12}}}, \quad (28)$$

که ضرایب A_1 الی A_6 در رابطه فوق، با استفاده از شرایط مرزی مساله به دست می‌آید. شرایط مرزی مساله لمه با استفاده از مقادیر نیروهای سطحی (روابط ، و) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} & t_r(r = \alpha) = -p_{in}, \\ & t_r(r = \alpha) = 0, \\ & t_r(r = \alpha) = 0, \\ & t_r(r = \beta) = -p_{out}, \\ & t_r(r = \beta) = 0, \\ & t_r(r = \beta) = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

با محاسبه نیروهای سطحی بر حسب میدان جابجایی از روابط (۲۵) تا (۲۷) و (۲۸) و حل معادلات جبری (۲۹) ضرایب مجهول بر حسب α ، β ، p_{in} و p_{out} به دست می‌آید. با در دست داشتن ضرایب A_1 الی A_6 ، میدان تنش مرتبه دوم در ماده از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \tau_{rr} = & A_1(3\lambda + 2\mu) + \\ & A_2(-2\ell_{11}r(c_2 + c_3 + 2\ell_{11}^2\mu) \cosh(\frac{r}{\ell_{11}}) + \\ & ((c_1 + \lambda\ell_{11}^2)r^2 + (c_2 + c_3 + 2\ell_{11}^2\mu)(2\ell_{11}^2 + r^2)) \\ & \sinh(\frac{r}{\ell_{11}})) / (\ell_{11}^3 r^3) + \\ & A_3(-2\ell_{12}r(c_2 + c_3 + 2\ell_{12}^2\mu) \cosh(\frac{r}{\ell_{12}}) \\ & + ((c_1 + \lambda\ell_{12}^2)r^2 + \\ & (c_2 + c_3 + 2\ell_{12}^2\mu)(2\ell_{12}^2 + r^2)) \\ & \sinh(\frac{r}{\ell_{12}})) / (\ell_{12}^3 r^3) - \frac{4A_4\mu}{r^3} \\ & - A_5 e^{-\frac{r}{\ell_{11}}} ((c_2 + c_3 + 2\ell_{11}^2\mu)(2\ell_{11}^2 + 2\ell_{11}r + r^2) \\ & + r^2(c_1 + \ell_{11}^2\lambda)) / (\ell_{11}^3 r^3) \\ & - A_6 e^{-\frac{r}{\ell_{12}}} ((c_2 + c_3 + 2\ell_{12}^2\mu)(2\ell_{12}^2 + 2\ell_{12}r + r^2) \\ & + r^2(c_1 + \ell_{12}^2\lambda)) / (\ell_{12}^3 r^3), \end{aligned} \quad (30)$$

کروی معرفی می‌شود. با توجه به شکل ۲، در این مساله یک محیط کروی با شعاع‌های α ، β و ζ در نظر گرفته می‌شود که تحت فشار P_{in} و P_{out} به ترتیب روی سطوح خارجی و داخلی قرار دارد. در این مساله نیز، مشابه مساله لمه، میدان جابجایی مطابق رابطه (۲۸) برای محیط‌های S_1 و S_2 به صورت جداگانه نوشته می‌شود. به این ترتیب دوازده ضریب نامعلوم در این مساله وجود دارد که با استفاده از شرایط مرزی به دست می‌آید. شرایط مرزی مربوط به نیروهای سطحی در این مساله به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} t_r(r=\alpha) &= -p_{in}, & t_r(r=\beta) &= t_r(r=\beta), & t_r(r=\zeta) &= -p_{out}, \\ t_r(r=\alpha) &= 0, & t_r(r=\beta) &= t_r(r=\beta), & t_r(r=\zeta) &= 0, \\ t_r(r=\alpha) &= 0, & t_r(r=\beta) &= t_r(r=\beta), & t_r(r=\zeta) &= 0, \end{aligned} \quad (34)$$

و همچنین، شرایط مرزی مربوط به میدان جابجایی و مشتقات عمود بر مرز آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} u_r^{S_2}(r=\beta) &= u_r^{S_1}(r=\beta), \\ u_{r,r}^{S_2}(r=\beta) &= u_{r,r}^{S_1}(r=\beta), \\ u_{r,rr}^{S_2}(r=\beta) &= u_{r,rr}^{S_1}(r=\beta), \end{aligned} \quad (35)$$

که در روابط فوق، بالانویس S_1 و S_2 بیانگر نیروی سطحی یا جابجایی به ترتیب، در فضای پوسته داخلی و پوسته خارجی است. با استفاده از دوازده شرط مرزی بالا، دوازده ضریب مجهول مربوط به دو محیط مادی در نظر گرفته شده، محاسبه می‌شود.

۴- نتایج

به منظور ارائه نتایج عددی برای خواص مکانیکی نانو سازه، ابتدا باید مقادیر عددی ثابت‌های مواد در نظریه گرادیان دوم کرنش تعیین شود. مطابق راهکار ارائه شده توسط اجاق نژاد و شجاع [۱۱ و ۱۲] و شجاع و همکاران [۱۹]، ثابت‌های لمه و طول‌های مشخصه میندلین به وسیله محاسبات کوانتومی اصول اولیه، توصیف محیط پیوسته مواد و نظریه دینامیک شبکه تعیین می‌شود. بعلاوه، از معادل کردن چگالی انرژی کرنشی حاصل از دیدگاه دینامیک شبکه با چگالی انرژی کرنشی حاصل از توصیف محیط پیوسته روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \tau_{\theta\theta} = \tau_{\phi\phi} &= A_1(3\lambda + 2\mu) + \\ &A_2(\ell_{11}r(c_2 + c_3 + 2\ell_{11}^2\mu) \cosh(\frac{r}{\ell_{11}}) + (c_1r^2 \\ &- \ell_{11}^2(c_2 + c_3 + 2\ell_{11}^2\mu - \lambda r^2)) \\ &\sinh(\frac{r}{\ell_{11}})) / (\ell_{11}^3r^3) + \\ &A_3(\ell_{12}r(c_2 + c_3 + 2\ell_{12}^2\mu) \cosh(\frac{r}{\ell_{12}}) \\ &+ (c_1r^2 - \ell_{12}^2(c_2 + c_3 + 2\ell_{12}^2\mu - \lambda r^2)) \\ &\sinh(\frac{r}{\ell_{12}})) / (\ell_{12}^3r^3) + \frac{2A_4\mu}{r^3} \\ &+ A_5e^{-\frac{r}{\ell_{11}}}((c_2 + c_3 + 2\ell_{11}^2\mu)\ell_{11}(\ell_{11} + r) \\ &- r^2(c_1 + \ell_{11}^2\lambda)) / (\ell_{11}^3r^3) \\ &+ A_6e^{-\frac{r}{\ell_{12}}}((c_2 + c_3 + 2\ell_{12}^2\mu)\ell_{12}(\ell_{12} + r) \\ &- r^2(c_1 + \ell_{12}^2\lambda)) / (\ell_{12}^3r^3). \end{aligned} \quad (31)$$

در چهارچوب صورت‌بندی کلاسیک الاستیسیته، میدان جابجایی به صورت زیر است:

$$u_r(r) = B_1r + \frac{B_2}{r^2}, \quad (32)$$

و میدان تنش به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= \frac{p_{out}(r^3 - \alpha^3)\beta^3 + p_{in}(\beta^3 - r^3)\alpha^3}{r^3(\alpha^3 - \beta^3)}, \\ \tau_{\theta\theta} = \tau_{\phi\phi} &= \frac{p_{out}(2r^3 + \alpha^3)\beta^3 - p_{in}(\beta^3 + 2r^3)\alpha^3}{2r^3(\alpha^3 - \beta^3)}. \end{aligned} \quad (33)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود میدان تنش در چهارچوب نظریه گرادیان دوم کرنش به مشخصه‌های طولی در ماده که منعکس‌کننده ساختار اتمی و گسسته محیط است، بستگی دارد.

۳-۲- مساله دوپوسته‌ای^۱

در این قسمت مساله دوپوسته‌ای به عنوان دومین مساله با تقارن

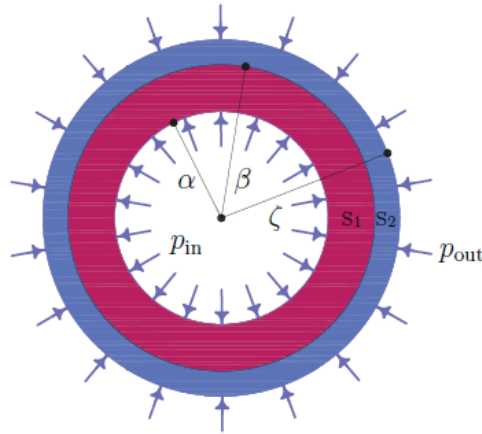


Fig. 2. The spherical coated shell with radii α , β , and ζ under the external pressures p_{in} and p_{out}
 شکل ۲: مساله دو پوسته‌ای با شعاع‌های α ، β و ζ تحت فشار داخلی و خارجی p_{in} و p_{out}

جدول ۱: ثابت‌های لمه بر حسب الکترون-ولت بر آنگستروم به توان ۳، طول‌های مشخصه حجمی بر حسب آنگستروم، طول مشخصه سطح بر حسب آنگستروم، مدول چسبندگی بر حسب الکترون-ولت بر آنگستروم و پارامتر شبکه‌ای بر حسب آنگستروم برای سیلیکون و کربن بلوری با ساختار الماس

Table 1. Lamé constants in terms of $eV/\text{Å}$, bulk and surface characteristic lengths in terms of Å , modulus of cohesion in terms of $eV/\text{Å}$, and lattice parameter in terms of Å for crystalline silicon and carbon with diamond structure

a_0	b_0	l_{10}	l_{21}, l_{22}	l_{11}, l_{12}	μ	λ	عنصر
۵/۴۶	-۰/۷۷	۱/۵۱	$۱۱/۱ \pm ۳۵/۱۹$	$۰۱/۰ \pm ۷۱/۴۴$	۰/۶۲	۰/۴۵	سیلیکون
۳/۵۹	۳/۹۱	۱/۹۴	$۱۱/۰ \pm ۰۵/۸۷$	$۰۱/۰ \pm ۸۴/۶۷$	۲/۹۴	۰/۹۴	کربن

آنگستروم محاسبه شده است.

در جدول ۱، طول‌های مشخصه حجمی، $l_{11}, l_{12}, l_{21}, l_{22}$ از روابط (۱۸) و (۱۹) محاسبه می‌شود. همچنین، طول مشخصه سطحی بر اساس رابطه $l_{10}^2 = \bar{c} / (\lambda + 2\mu)$ تعریف و تعیین می‌شود.

۱-۴- مساله لمه

در این قسمت، یک نانوکره توخالی کربنی با جداره نازک، ابتدا تحت اثر سطح در چهارچوب نظریه گرادیان دوم کرنش مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این حالت، بارگذاری خارجی صفر در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه اثر سطح، و البته تقارن کروی فضا، نظریه گرادیان دوم کرنش پیش‌بینی می‌کند که یک کرنش شعاعی در فضای کروی القا شود و تغییر ضخامت در نانوکره توخالی کربنی به وجود آید. سپس، بارگذاری به صورت فشار داخلی و خارجی برابر ($p_{in} = p_{out}$) بر نانوکره توخالی کربنی اعمال می‌شود. در اثر بارگذاری متقارن کروی اعمال شده بر نانوکره توخالی، کرنش شعاعی

$$\begin{aligned}
 a_1 &= a_2 = a_3, \\
 2a_3 &= a_4, \\
 2c_1 &= c_2 = c_3, \\
 4b_1 &= 2b_2 = b_3 = 4b_4 = 2b_7, \\
 2b_5 &= 3b_6.
 \end{aligned} \tag{۳۶}$$

با بهره‌گیری از روابط ارائه شده برای انرژی سطح و تنش سطح توسط اجاق‌نژاد و شجاع [۱۲] و داشتن مقادیر عددی این کمیت‌ها با استفاده از راهکار ارائه شده توسط اجاق‌نژاد و شجاع [۳۲] و استفاده از محاسبات کوانتومی، تمام ثابت‌های اضافی میندلین مطابق جدول ۱ محاسبه می‌شود. با استفاده از محاسبات اصول اولیه^۱ مقدار انرژی سطح برای $C(001)$ و $Si(001)$ به ترتیب برابر $۰/۰۷۹$ و $۰/۳۲$ الکترون-ولت بر مجذور آنگستروم و مقدار تنش سطح برای $Si(001)$ و $C(001)$ به ترتیب برابر $۰/۰۵۳$ و $-۰/۸۲$ الکترون-ولت بر مجذور

1 Ab Initio Calculations

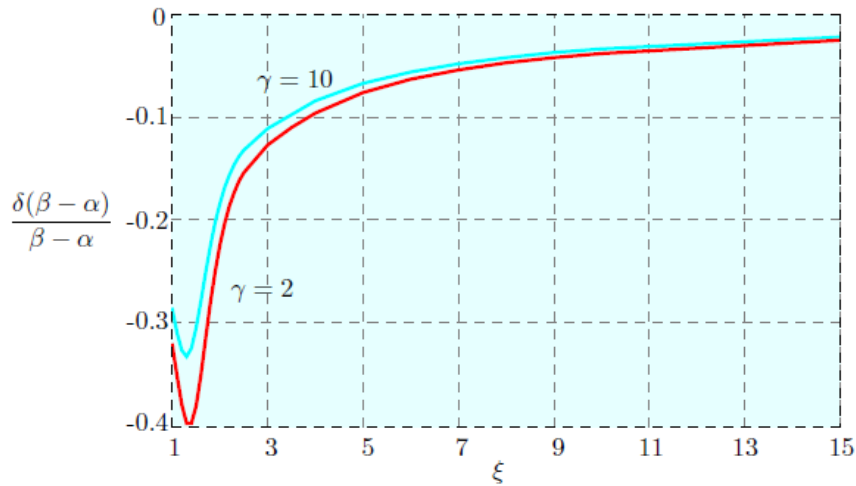


Fig. 3. The average radial strain in the carbon shell due to the surface relaxation versus ξ for two values of $\gamma = 2, 10$ in second strain gradient theory.

شکل ۳: کرنش شعاعی متوسط ایجاد شده در اثر سطح در نانوکره توخالی کربنی بر حسب ξ بر اساس نظریه گرادیان دوم کرنش برای دو حالت هندسی $\gamma = 2, 10$

همانطور که ملاحظه می‌شود، کرنش شعاعی القایی در اثر سطح در نزدیکی سطوح داخلی و خارجی نانوکره زیاد است و هر چه ضخامت نانوکره توخالی افزایش می‌یابد، بخش وسیعی از نواحی داخلی دارای کرنش شعاعی نزدیک به صفر خواهد بود و اثر سطح به همسایگی سطوح داخلی و خارجی محدود خواهد بود.

بعد از محاسبه اثر سطح توسط نظریه گرادیان دوم کرنش (بعد از آسایش سطحی)، بارگذاری خارجی به صورت فشاری (یا کششی) روی سطوح داخلی و خارجی نانوکره توخالی به صورت مساوی $(p_{in} = p_{out})$ اعمال می‌شود. درصد تغییر ضخامت نسبت به ضخامت اولیه نانوکره (ضخامت نانوکره بعد از آسایش سطحی و قبل از اعمال بار خارجی)، بر حسب درصد بارگذاری فشاری (یا کششی) روی سطوح داخلی و خارجی (یکه شده نسبت به مدول یانگ کربن) برای دو هندسه مختلف در شکل‌های ۵ (الف) و (ب) رسم شده است. در این اشکال، درصد تغییر ضخامت، به ترتیب، برای دو حالت هندسی $\gamma = 2, 10$ و $\xi = 10$ ، $\gamma = 10$ بر اساس نظریه گرادیان دوم کرنش^۱ و نظریه الاستیسیته کلاسیک^۲ رسم شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، در حالتی که ضخامت نانوکره توخالی کم است، پاسخ گرادیان دوم کرنش تفاوت چشمگیری با

جدیدی به وجود می‌آید و تغییر ضخامت القا می‌شود. به منظور ارائه نتایج، پارامترهای γ و ξ که بیانگر شعاع داخلی و ضخامت اولیه نانوکره توخالی به صورت بی‌بعد هستند، بر حسب پارامتر شبکه‌ای کربن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \alpha &= \gamma a_0^c, \\ \beta - \alpha &= \xi a_0^c, \end{aligned} \quad (37)$$

که a_0^c پارامتر شبکه‌ای بلور کربن با ساختار الماس است. به منظور بررسی اثر سطح در تغییر ضخامت نانوکره توخالی کربنی به نسبت ضخامت اولیه، که به صورت کرنش متوسط شعاعی قابل تعبیر است، پارامتر γ برابر ۲ و ۱۰ در نظر گرفته شده، کرنش شعاعی متوسط در نانوکره کربنی بر حسب ξ در شکل ۳ رسم شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، کرنش شعاعی متوسط با افزایش ξ به سمت صفر میل می‌کند و اثر سطح در کاهش ضخامت نانوکره توخالی با افزایش γ ، مطابق انتظار، کاهش پیدا می‌کند.

توزیع کرنش شعاعی القا شده در شعاع نانوکره توخالی برای مقادیر $\gamma = 10$ و $\xi = 2, 10, 50$ به ترتیب در شکل‌های ۴ (الف) تا ۴ (ج) بر حسب پارامتر η که به صورت $\eta = \gamma a_0^c + \xi a_0^c$ تعریف شده است، نشان داده شده است. پارامتر η در ضخامت نانوکره از مقدار صفر در جدار داخلی تا مقدار یک در جدار خارجی تغییر می‌کند.

1 Second Strain Gradient Theory (SSGT)

2 Classic Theory of Elasticity (CT)

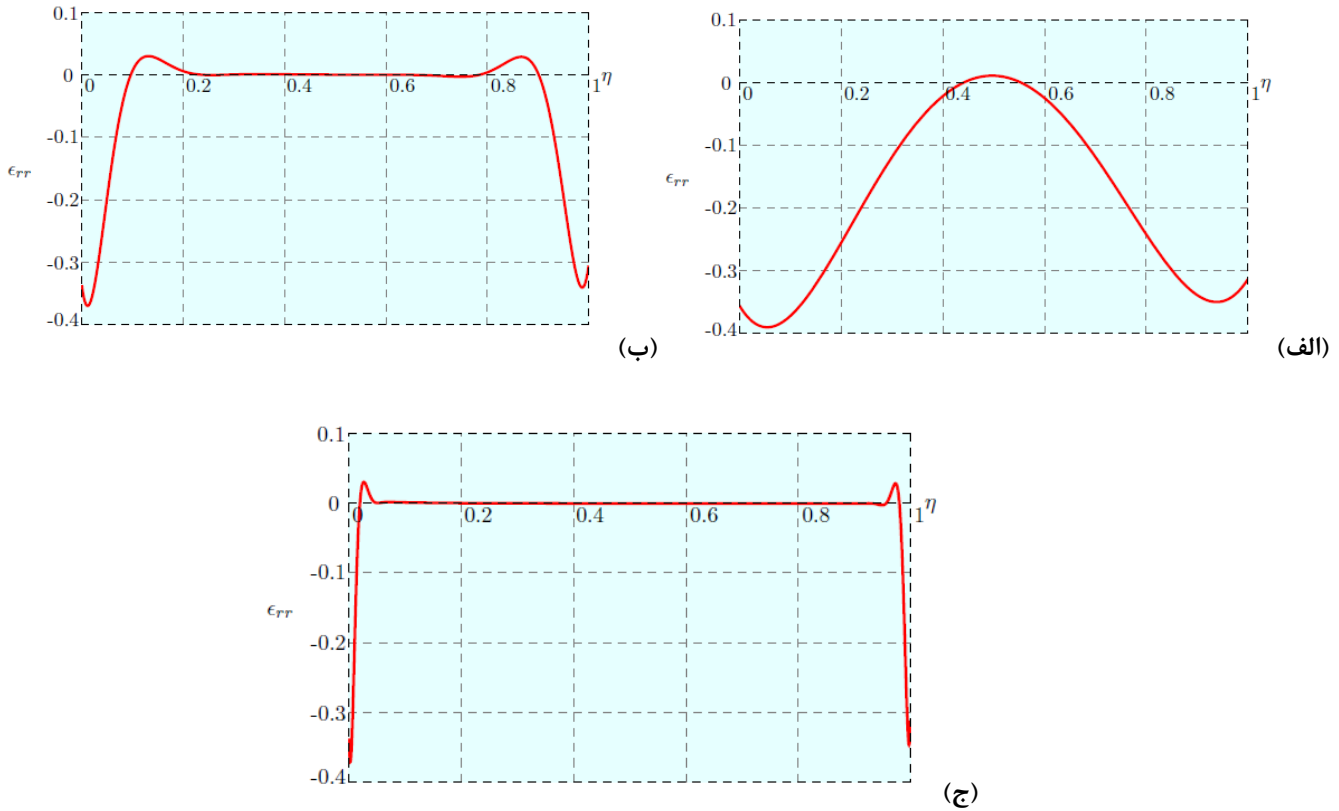


Fig. 4. The radial distribution of the radial strain versus η due to the surface effect in the carbon shell for $\gamma = 10$ and a) $\xi = 2$, b) $\xi = 10$, and c) $\xi = 50$ in second strain gradient theory.

شکل ۴: توزیع شعاعی کرنش ناشی از اثر سطح در نانوکره توخالی کربنی بر اساس نظریه گرادیان دوم کرنش به ازای $\gamma = 10$ و (الف) $\xi = 2$ ، (ب) $\xi = 10$ و (ج) $\xi = 50$ بر حسب η .

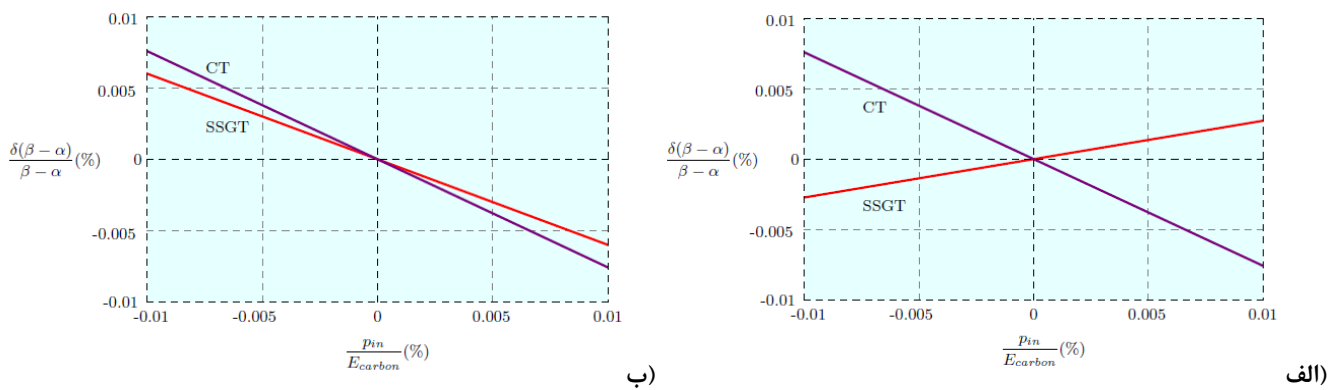


Fig. 5. The thickness change normalized with respect to the initial thickness in the carbon shell under the equal inner and outer external pressure (tension) normalized with respect to the carbon Young's modulus for a) $\gamma = 10, \xi = 2$ and b) $\gamma = 10, \xi = 10$ in second strain gradient as well as classic elasticity.

شکل ۵: درصد تغییر ضخامت نانوکره توخالی کربنی آسوده نسبت به ضخامت اولیه تحت بارگذاری فشاری (یا کششی) برابر روی سطوح داخلی و خارجی بر حسب درصد بارگذاری نسبت به مدول یانگ کربن برای (الف) $\gamma = 10, \xi = 2$ و (ب) $\gamma = 10, \xi = 10$ بر اساس نظریه گرادیان دوم کرنش و الاستیسیته کلاسیک.

در حالی است که با افزایش ضخامت نانوکره توخالی این دو پاسخ به یکدیگر همگرا می‌شود.

حالت کلاسیک دارد به‌گونه‌ای که پیش‌بینی دو نظریه در خصوص انقباض یا انبساط نانوکره در اثر بارگذاری بر عکس یکدیگر است. این

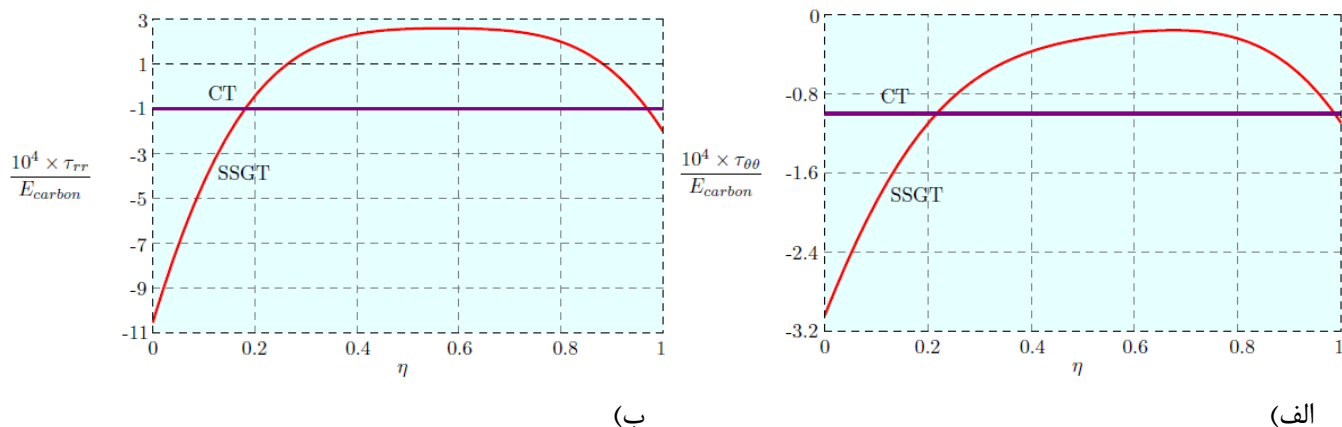


Fig. 6. The stress a) τ_{rr} and b) $\tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi}$ normalized with respect to the carbon Young's modulus in the carbon shell versus η under the external pressure $p_{in} = p_{out} = 0.0001E_{carbon}$ for $\gamma = 10, \xi = 2$ in second strain gradient as well as classic elasticity.

شکل ۶: توزیع مولفه تنش الف) τ_{rr} و ب) $\tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi}$ یکه شده بر حسب مدول یانگ کربن، در محیط نانوکره کربنی تو خالی بر حسب η در اثر بارگذاری خارجی فشاری $p_{in} / E_{carbon} = p_{out} / E_{carbon} = 0.0001$ برای حالت هندسی $\gamma = 10, \xi = 2$ بر اساس نظریه گرادیان دوم کرنش و نظریه الاستیسیته کلاسیک.

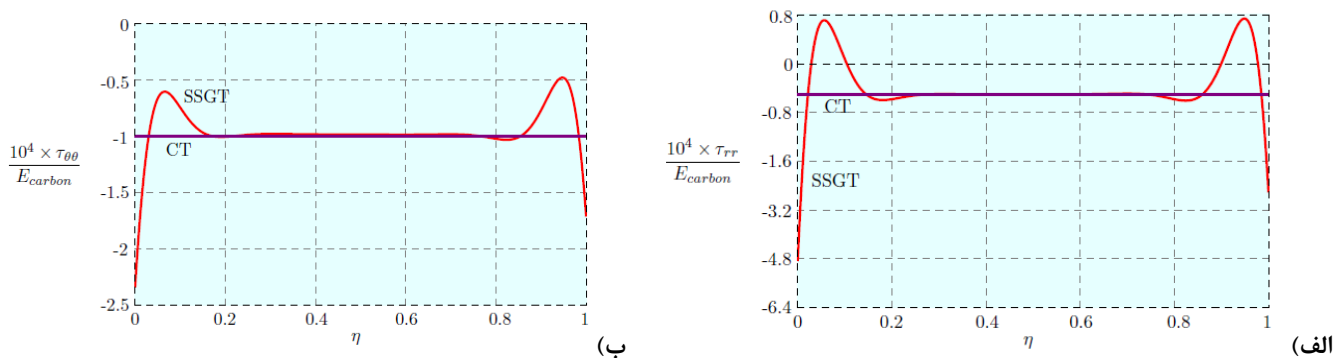


Fig. 7. The stress a) τ_{rr} and b) $\tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi}$ normalized with respect to the carbon Young's modulus in the carbon shell versus η under the external pressure $p_{in} = p_{out} = 0.0001E_{carbon}$ for $\gamma = 10, \xi = 10$ in second strain gradient as well as classic elasticity.

شکل ۷: توزیع مولفه تنش الف) τ_{rr} و ب) $\tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi}$ یکه شده بر حسب مدول یانگ کربن، در محیط نانوکره کربنی تو خالی بر حسب η در اثر بارگذاری خارجی فشاری $p_{in} / E_{carbon} = p_{out} / E_{carbon} = 0.0001$ برای حالت هندسی $\gamma = 10, \xi = 10$ بر اساس نظریه گرادیان دوم کرنش و نظریه الاستیسیته کلاسیک.

شده است.

همانطور که ملاحظه می‌شود، در این حالت بارگذاری، توزیع مولفه‌های تنش در ضخامت نانوکره در نظریه کلاسیک بر خلاف نظریه گرادیان دوم کرنش یکنواخت است. این درحالی است که بر اساس نظریه گرادیان دوم کرنش و برای ضخامت‌های کوچک نانوکره توخالی، توزیع مولفه‌های تنش در ضخامت بسیار متغیر است. با افزایش ضخامت نانوکره توزیع این مولفه‌های تنش در نقاط داخلی به جواب کلاسیک نزدیک می‌شود، در حالی که در نقاط نزدیک به سطوح

همچنین، در اثر بارگذاری پیکربندی آسوده نانوکره توخالی، مولفه‌های تنش τ_{rr} و $\tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi}$ در محیط نانوکره توخالی کربنی به صورت شعاعی توزیع می‌شود. به عنوان مثال، توزیع مولفه‌های تنش یکه شده نسبت به مدول یانگ کربن در اثر بارگذاری خارجی فشاری $p_{in} / E_{carbon} = p_{out} / E_{carbon} = 0.0001$ برای حالت هندسی $\gamma = 10, \xi = 2$ در شکل‌های ۶ الف) و ب) و $\gamma = 10, \xi = 10$ در شکل‌های ۷ الف) و ب) نمایش داده شده است. در این اشکال نیز، نتایج حاصل از نظریه گرادیان دوم کرنش با نظریه کلاسیک مقایسه

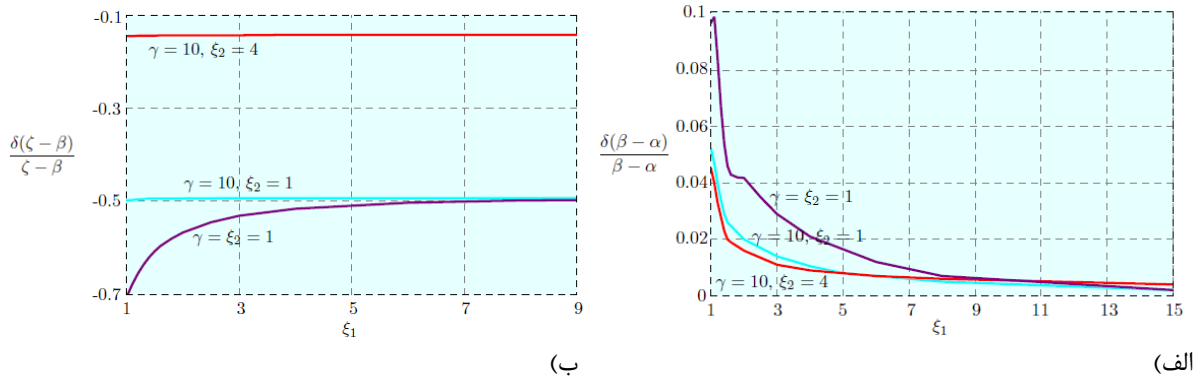


Fig. 8. The normalized thickness change in the a) carbon coating $\frac{\delta(\zeta - \beta)}{\zeta - \beta}$ and b) inner silicon shell $\frac{\delta(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha}$ versus ξ_1 due to the surface and size effect for the different geometries $\gamma = \xi_2 = 1$, $\gamma = 10, \xi_2 = 1$, $\gamma = 10, \xi_2 = 4$ in second strain gradient theory.

شکل ۸: تغییر ضخامت الف) پوسته کربنی خارجی $\frac{\delta(\zeta - \beta)}{\zeta - \beta}$ و ب) پوسته سیلیکونی داخلی $\frac{\delta(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha}$ بر حسب ξ_1 در اثر سطح و اندازه به ازای مقادیر مختلف ۱) $\gamma = \xi_2 = 1$ ، $\gamma = 10$ ، $\xi_2 = 1$ و $\gamma = 10$ ، $\xi_2 = 4$ بر اساس نظریه گرادیان دوم کرنش.

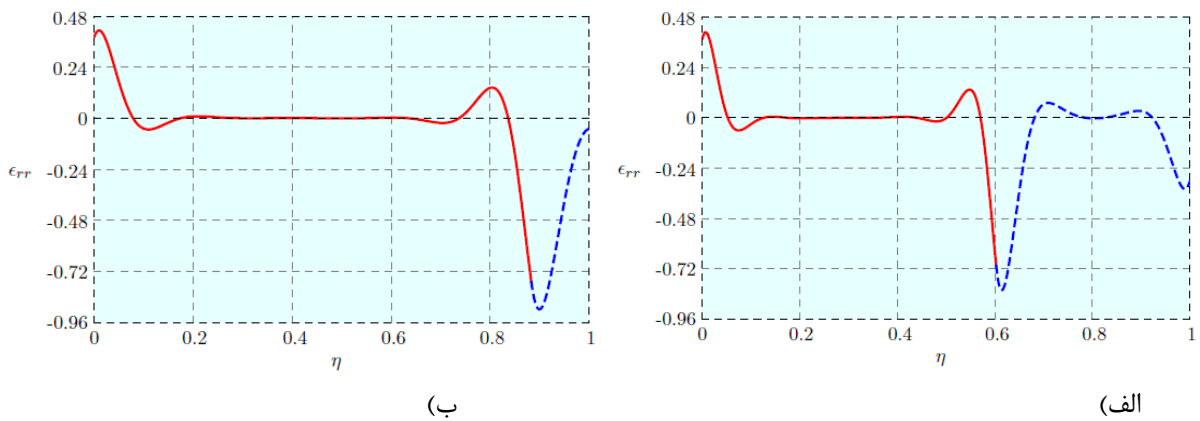


Fig. 9. The radial strain distribution under the surface and size effect in the spherical double shell versus η for a) $\gamma = 10, \xi_1 = 5, \xi_2 = 1$ and b) $\gamma = 10, \xi_1 = 5, \xi_2 = 5$ in second strain gradient theory.

شکل ۹: توزیع کرنش شعاعی حاصل از اثر سطح و اثر اندازه در فضای دو پوسته کروی بر حسب η برای الف) $\gamma = 10$ ، $\xi_1 = 5$ ، $\xi_2 = 1$ و ب) $\gamma = 10$ ، $\xi_1 = 5$ ، $\xi_2 = 5$ بر اساس نظریه گرادیان دوم کرنش.

اگر این ساختار تحت اثر سطح و بدون اعمال بارگذاری خارجی در چهارچوب نظریه گرادیان دوم کرنش مورد بررسی قرار گیرد، یک میدان جابجایی شعاعی غیربندی در فضای کروی دو پوسته القا می‌شود و در نتیجه یک تغییر شعاعی در ابعاد هندسی به دلیل اثر سطح و اثر اندازه به وجود می‌آید. به منظور نشان دادن پیش‌بینی گرادیان دوم کرنش در مورد اثر سطح، در شکل ۸-الف، میزان تغییر ضخامت پوسته داخلی سیلیکونی در اثر سطح و اندازه به ازای ضخامت اولیه این پوسته که با پارامتر بی بعد ξ_1 نمایش داده

داخلی و خارجی تغییرات ناگهانی و زیاد در مولفه‌ها ملاحظه می‌شود.

۲-۴- مساله دوپوسته‌ای

در این قسمت، نتایج مربوط به مساله دو پوسته‌ای، با فرض یک پوسته سیلیکونی با پوشش کربنی در نظر گرفته و ارائه می‌شود. پارامترهای بی‌بعد هندسی برای این مساله به صورت $\alpha = \gamma a_0^{si}$ ، $\beta - \alpha = \xi_2 a_0^c$ و $\beta - \alpha = \xi_1 a_0^{si}$ تعریف می‌شود که a_0^c و a_0^{si} پارامترهای شبکه‌ای سیلیکون و کربن بلوری با ساختار الماس است.

می‌شود، برای مقادیر مختلف شعاع حفره داخلی (پارامتر بی بعد γ و ضخامت پوسته خارجی کربنی (پارامتر بی بعد ξ_2) ترسیم شده است. همچنین، در شکل ۸-ب، تغییر ضخامت پوسته کربنی خارجی در اثر سطح و اندازه نسبت به ضخامت اولیه این پوسته برای مقادیر مختلف γ و ξ_2 بر حسب ξ_1 رسم شده است. پرواضح است که در چهارچوب نظریه کلاسیک الاستیسیته، میدان جابجایی به وجود آمده در اثر سطح و اندازه و در غیاب بارگذاری خارجی جواب بدیهی صفر خواهد بود. همانطور که در شکل ۸-الف ملاحظه می‌شود، اثر اندازه و اثر سطح منجر به افزایش بعد شعاعی پوسته داخلی سیلیکونی می‌شود این در حالی است که بر اساس نتایج نشان داده شده در شکل ۸-ب، اثر سطح و اندازه منجر به کاهش بعد شعاعی پوسته خارجی کربنی می‌شود. میزان این افزایش یا کاهش در بعد شعاعی پوسته‌های داخلی یا خارجی با افزایش γ و/یا ξ_2 کاهش پیدا می‌کند. همچنین، مطابق انتظار، با افزایش ξ_1 تغییر در ضخامت پوسته داخلی به سمت صفر و تغییر در ضخامت پوسته خارجی به سمت یک عدد ثابت میل می‌کند. همچنین، از مقایسه شکل‌های ۸-الف و ب نتیجه می‌شود که حساسیت تغییر ضخامت پوسته داخلی به پارامتر ξ_1 بیشتر از حساسیت تغییر ضخامت پوسته خارجی به این پارامتر است که البته این نتیجه نیز منطقی به نظر می‌رسد.

علاوه بر این، توزیع میدان مولفه شعاعی کرنش حاصل از اثر سطح و اندازه در فضای دو پوسته در شکل‌های ۹ (الف) و (ب) بر حسب η برای دو حالت هندسی $\gamma = 10$ ، $\xi_1 = 5$ ، $\xi_2 = 1$ و $\xi_1 = \xi_2 = 1$ ، $\gamma = 10$ ، $\xi_1 = \xi_2 = 1$ و $\xi_1 = \xi_2 = 10$ به ترتیب در شکل‌های ۱۰ الی ۱۳ بر اساس نظریه‌های کلاسیک و گرادیان دوم کرنش نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که در حالتی که ضخامت هر دو پوسته کوچک است (شکل ۱۰)، اختلاف پیش‌بینی دو نظریه کلاسیک و گرادیان دوم کرنش در تغییر ضخامت هر دو پوسته چشمگیر است و حتی پیش‌بینی دو نظریه در مورد تغییر ضخامت پوسته خارجی عکس یکدیگر است. وقتی ضخامت پوسته داخلی کم و ضخامت پوسته خارجی زیاد است (شکل ۱۱)، اختلاف پیش‌بینی دو نظریه در تغییر

می‌شود، برای مقادیر مختلف شعاع حفره داخلی (پارامتر بی بعد γ و ضخامت پوسته خارجی کربنی (پارامتر بی بعد ξ_2) ترسیم شده است. همچنین، در شکل ۸-ب، تغییر ضخامت پوسته کربنی خارجی در اثر سطح و اندازه نسبت به ضخامت اولیه این پوسته برای مقادیر مختلف γ و ξ_2 بر حسب ξ_1 رسم شده است. پرواضح است که در چهارچوب نظریه کلاسیک الاستیسیته، میدان جابجایی به وجود آمده در اثر سطح و اندازه و در غیاب بارگذاری خارجی جواب بدیهی صفر خواهد بود. همانطور که در شکل ۸-الف ملاحظه می‌شود، اثر اندازه و اثر سطح منجر به افزایش بعد شعاعی پوسته داخلی سیلیکونی می‌شود این در حالی است که بر اساس نتایج نشان داده شده در شکل ۸-ب، اثر سطح و اندازه منجر به کاهش بعد شعاعی پوسته خارجی کربنی می‌شود. میزان این افزایش یا کاهش در بعد شعاعی پوسته‌های داخلی یا خارجی با افزایش γ و/یا ξ_2 کاهش پیدا می‌کند. همچنین، مطابق انتظار، با افزایش ξ_1 تغییر در ضخامت پوسته داخلی به سمت صفر و تغییر در ضخامت پوسته خارجی به سمت یک عدد ثابت میل می‌کند. همچنین، از مقایسه شکل‌های ۸-الف و ب نتیجه می‌شود که حساسیت تغییر ضخامت پوسته داخلی به پارامتر ξ_1 بیشتر از حساسیت تغییر ضخامت پوسته خارجی به این پارامتر است که البته این نتیجه نیز منطقی به نظر می‌رسد.

علاوه بر این، توزیع میدان مولفه شعاعی کرنش حاصل از اثر سطح و اندازه در فضای دو پوسته در شکل‌های ۹ (الف) و (ب) بر حسب η برای دو حالت هندسی $\gamma = 10$ ، $\xi_1 = 5$ ، $\xi_2 = 1$ و $\xi_1 = \xi_2 = 1$ ، $\gamma = 10$ ، $\xi_1 = \xi_2 = 10$ به ترتیب در شکل‌های ۱۰ الی ۱۳ بر اساس نظریه‌های کلاسیک و گرادیان دوم کرنش نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که در حالتی که ضخامت هر دو پوسته کوچک است (شکل ۱۰)، اختلاف پیش‌بینی دو نظریه کلاسیک و گرادیان دوم کرنش در تغییر ضخامت هر دو پوسته چشمگیر است و حتی پیش‌بینی دو نظریه در مورد تغییر ضخامت پوسته خارجی عکس یکدیگر است. وقتی ضخامت پوسته داخلی کم و ضخامت پوسته خارجی زیاد است (شکل ۱۱)، اختلاف پیش‌بینی دو نظریه در تغییر

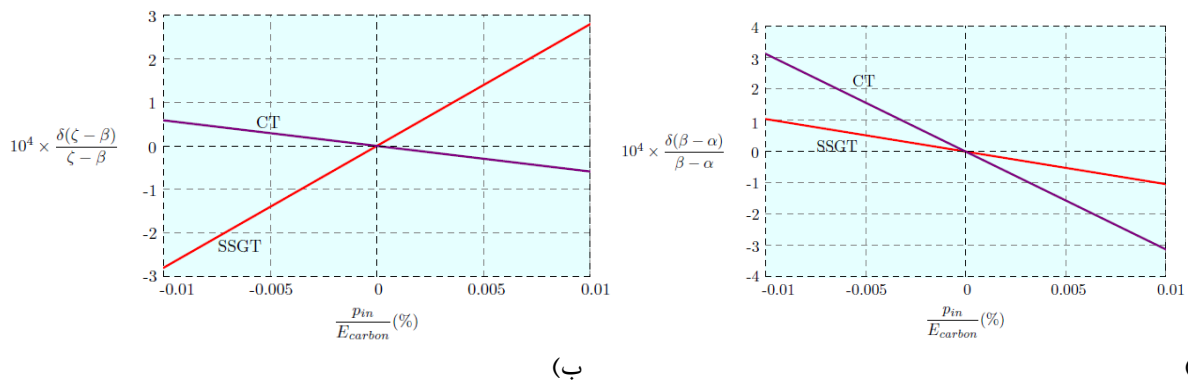


Fig. 10. The thickness change normalized with respect to the relaxed dimensions in the a) carbon coating and b) silicon inner shell versus the external loading normalized with respect to the carbon Young's modulus for $\gamma = 10$, $\xi_1 = \xi_2 = 1$ in second strain gradient as well as classic elasticity.

شکل ۱۰: تغییر ضخامت یک‌گانه نسبت به ابعاد بعد از آسایش سطحی در (الف) پوسته خارجی کربنی و (ب) پوسته داخلی سیلیکونی بر حسب بارگذاری خارجی یک‌گانه نسبت به مدول یانگ کربن برای $\gamma = 10$ ، $\xi_1 = \xi_2 = 1$ بر اساس نظریه‌های کلاسیک و گرادیان دوم کرنش.

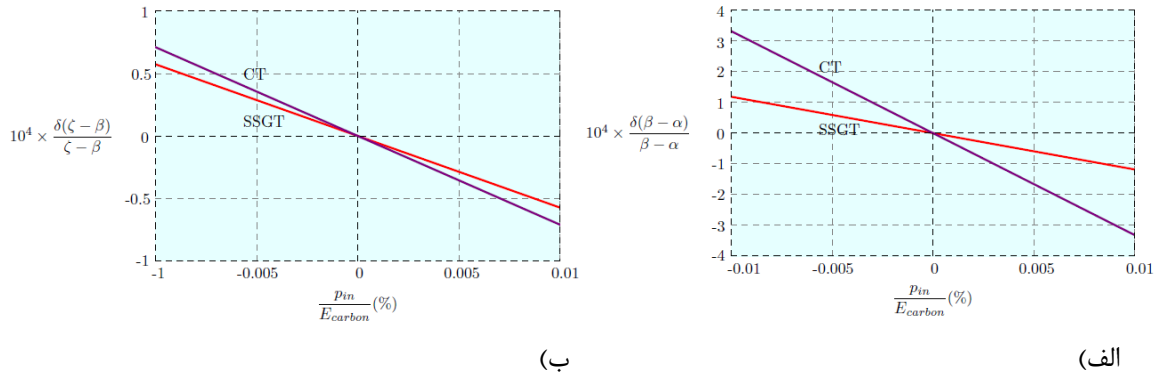


Fig. 11. The thickness change normalized with respect to the relaxed dimensions in the a) carbon coating and b) silicon inner shell versus the external loading normalized with respect to the carbon Young's modulus for $\gamma = 10, \xi_1 = 1, \xi_2 = 10$ in second strain gradient as well as classic elasticity.

شکل ۱۱: تغییر ضخامت یکه شده نسبت به ابعاد بعد از آسایش سطحی در الف) پوسته خارجی کربنی و ب) پوسته داخلی سیلیکونی بر حسب بارگذاری خارجی یکه شده نسبت به مدول یانگ کربن برای $\gamma = 10, \xi_1 = 1, \xi_2 = 10$ بر اساس نظریه‌های کلاسیک و گرادیان دوم کرنش.

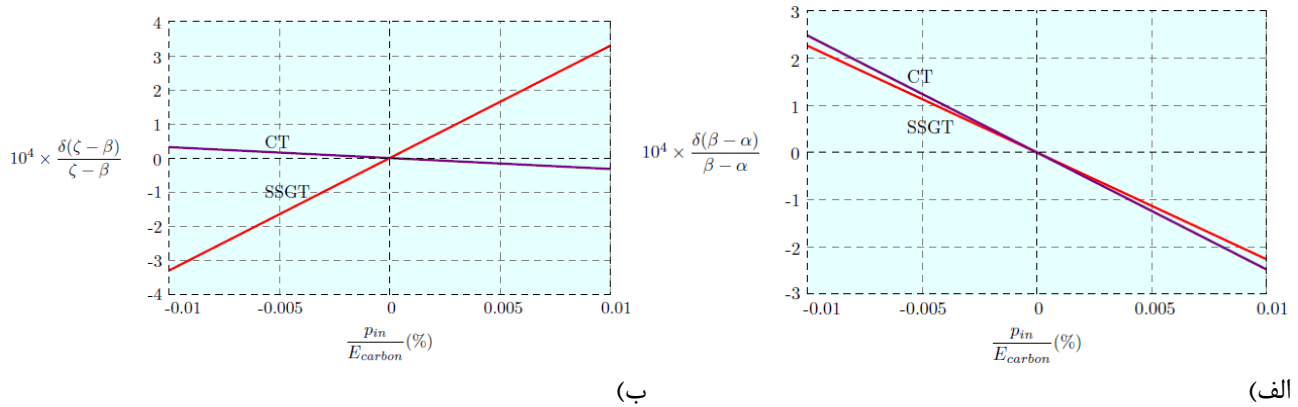


Fig. 12. The thickness change normalized with respect to the relaxed dimensions in the a) carbon coating and b) silicon inner shell versus the external loading normalized with respect to the carbon Young's modulus for $\gamma = 10, \xi_1 = 10, \xi_2 = 1$ in second strain gradient as well as classic elasticity.

شکل ۱۲: تغییر ضخامت یکه شده نسبت به ابعاد بعد از آسایش سطحی در الف) پوسته خارجی کربنی و ب) پوسته داخلی سیلیکونی بر حسب بارگذاری خارجی یکه شده نسبت به مدول یانگ کربن برای $\gamma = 10, \xi_1 = 10, \xi_2 = 1$ بر اساس نظریه‌های کلاسیک و گرادیان دوم کرنش.

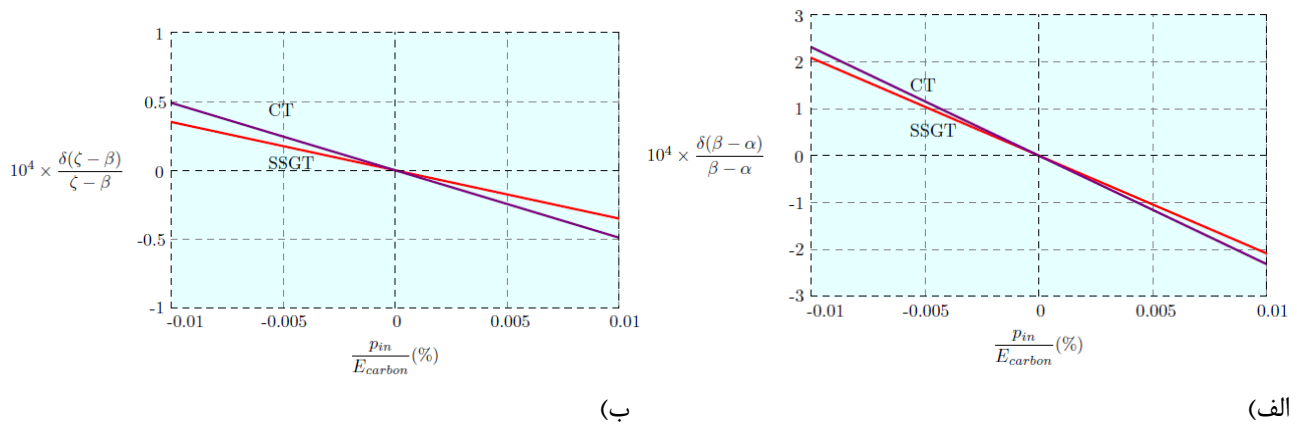


Fig. 13. The thickness change normalized with respect to the relaxed dimensions in the a) carbon coating and b) silicon inner shell versus the external loading normalized with respect to the carbon Young's modulus for $\gamma = \xi_1 = \xi_2 = 10$ in second strain gradient as well as classic elasticity.

شکل ۱۳: تغییر ضخامت یکه شده نسبت به ابعاد بعد از آسایش سطحی در الف) پوسته خارجی کربنی و ب) پوسته داخلی سیلیکونی بر حسب بارگذاری خارجی یکه شده نسبت به مدول یانگ کربن برای $\gamma = \xi_1 = \xi_2 = 10$ بر اساس نظریه‌های کلاسیک و گرادیان دوم کرنش.

علاوه بر این، توزیع مولفه‌های تنش τ_{rr} و $\tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi}$ یکده شده در فضای دو پوسته سیلیکونی و کربنی در اثر بارگذاری خارجی فشاری $p_{in}/E_{carbon} = p_{out}/E_{carbon} = 0/0.001$ روی سطوح داخلی و خارجی بر حسب موقعیت شعاعی یکده شده η ، برای چهار حالت هندسی مختلف $\gamma = 10$ ، $\xi_1 = \xi_2 = 1$ ، $\gamma = 10$ ، $\xi_1 = \xi_2 = 1$ ، $\gamma = 10$ ، $\xi_1 = 10$ ، $\xi_2 = 1$ و $\gamma = 10$ ، $\xi_1 = \xi_2 = 10$ به ترتیب در شکل‌های ۱۴ الی ۱۷ نمایش داده شده و با پاسخ کلاسیک مقایسه شده است. در این اشکال، مولفه‌های تنش در دو پوسته با رنگ‌های متفاوت ترسیم شده‌اند. همانطور که در این اشکال دیده می‌شود، جواب الاستیسیته کلاسیک در هر دو پوسته و در تمام حالات

ضخامت پوسته داخلی زیاد و در تغییر ضخامت پوسته خارجی کم است اما در هر دو پوسته پیش‌بینی دو نظریه همسو است. در شکل ۱۲، ضخامت پوسته داخلی زیاد و ضخامت پوسته خارجی کم است و بنا بر انتظار تفاوت پیش‌بینی دو نظریه در تغییر ضخامت پوسته داخلی و خارجی، به ترتیب کم و زیاد است. اما، این پیش‌بینی‌ها در مورد تغییر ضخامت پوسته خارجی عکس یکدیگر است. در نهایت، زمانی که ضخامت هر دو پوسته زیاد باشد (شکل ۱۳)، پیش‌بینی نظریه گرادیان دوم کرنش در مورد تغییر ضخامت هر دو پوسته، هم از نظر مقدار و هم از نظر جهت به پیش‌بینی نظریه کلاسیک میل می‌کند.

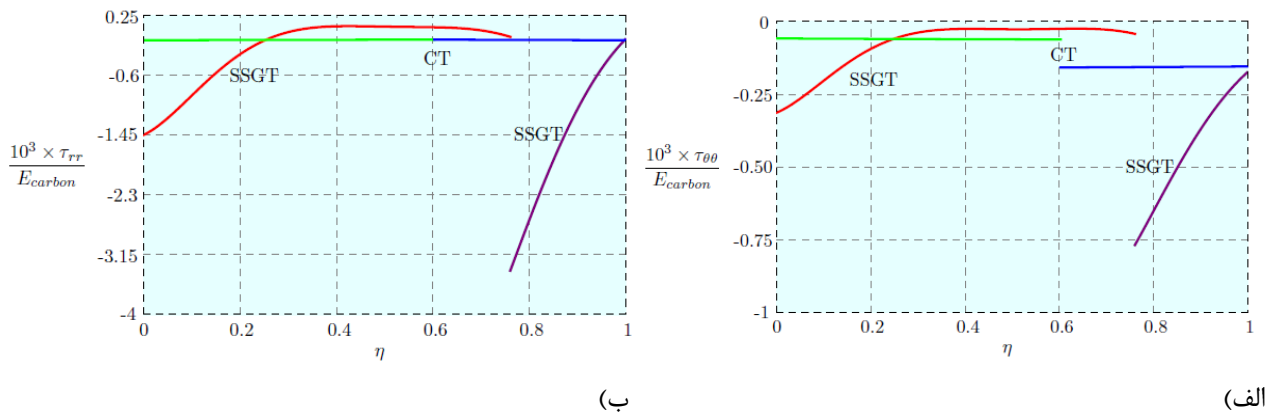


Fig. 14. The stress components a) τ_{rr} and b) $\tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi}$ normalized with respect to the carbon Young's modulus in the carbon and silicon double shell in second strain gradient as well as classic elasticity $\gamma = 10, \xi_1 = \xi_2 = 1$ versus η for

شکل ۱۴: توزیع مولفه‌های تنش الف) τ_{rr} و ب) $\tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi}$ در فضای دو پوسته سیلیکونی و کربنی که بر حسب مدول یانگ کربن یکده شده است، بر حسب η برای $\gamma = 10, \xi_1 = \xi_2 = 1$ بر اساس نظریه‌های کلاسیک و گرادیان دوم کرنش.

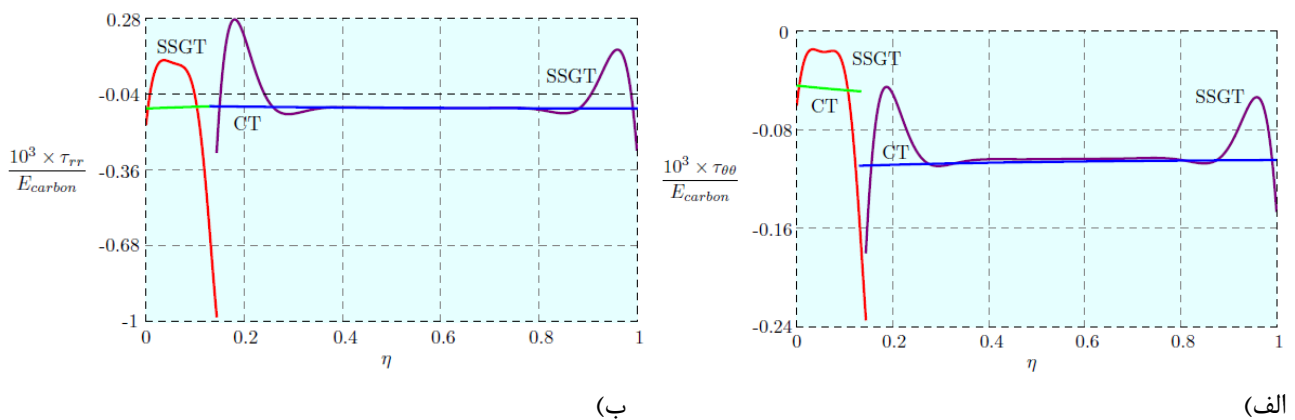


Fig. 15. The stress components a) τ_{rr} and b) $\tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi}$ normalized with respect to the carbon Young's modulus in the carbon and silicon double shell versus η for $\gamma = 10, \xi_1 = 1, \xi_2 = 10$ in second strain gradient as well as classic elasticity.

شکل ۱۵: توزیع مولفه‌های تنش الف) τ_{rr} و ب) $\tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi}$ در فضای دو پوسته سیلیکونی و کربنی که بر حسب مدول یانگ کربن یکده شده است، بر حسب η برای $\gamma = 10, \xi_1 = 1, \xi_2 = 10$ بر اساس نظریه‌های کلاسیک و گرادیان دوم کرنش.

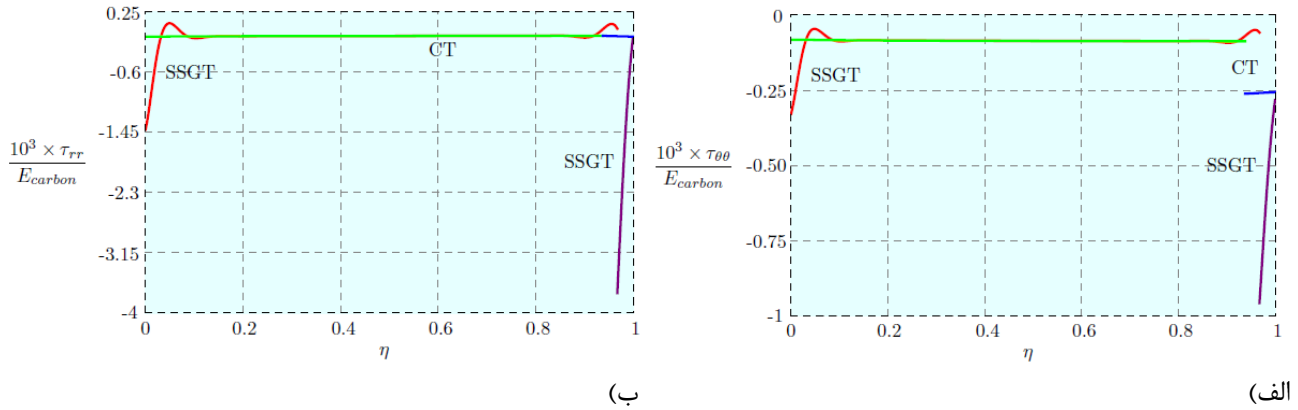


Fig. 16. The stress components a) τ_{rr} and b) $\tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi}$ normalized with respect to the carbon Young's modulus in the carbon and silicon double shell versus η for $\gamma=10, \xi_1=10, \xi_2=1$ in second strain gradient as well as classic elasticity.

شکل ۱۶: توزیع مولفه‌های تنش‌های تنش الف) τ_{rr} و ب) $\tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi}$ در فضای دو پوسته سیلیکونی و کربنی که بر حسب مدول یانگ کربن یک‌پارچه شده است، بر حسب η برای $\gamma=10, \xi_1=10, \xi_2=1$ بر اساس نظریه‌های کلاسیک و گرادیان دوم کرنش.

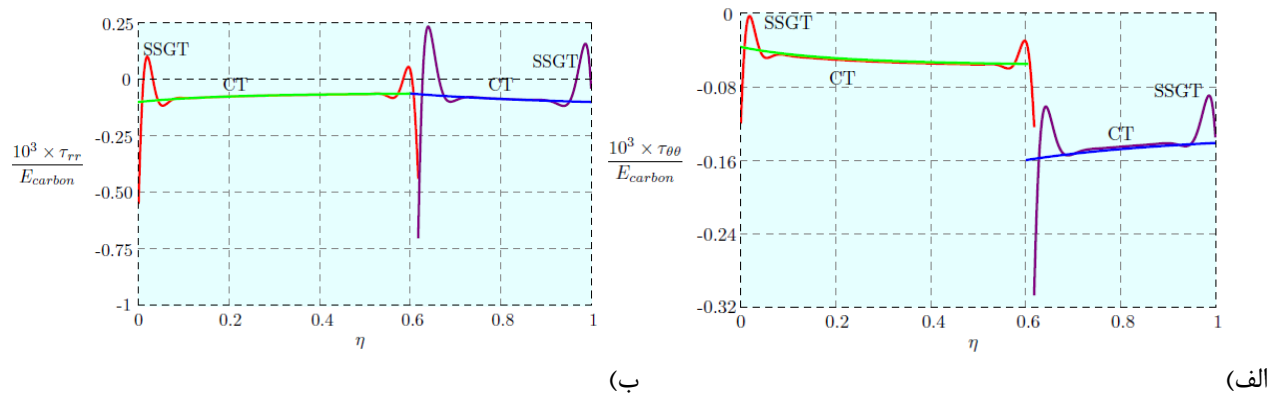


Fig. 17. The stress components a) τ_{rr} and b) $\tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi}$ normalized with respect to the carbon Young's modulus in the carbon and silicon double shell versus η for $\gamma = \xi_1 = \xi_2 = 10$ in second strain gradient as well as classic elasticity.

شکل ۱۷: توزیع مولفه‌های تنش‌های تنش الف) τ_{rr} و ب) $\tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi}$ در فضای دو پوسته سیلیکونی و کربنی که بر حسب مدول یانگ کربن یک‌پارچه شده است، بر حسب η برای $\gamma = \xi_1 = \xi_2 = 10$ بر اساس نظریه‌های کلاسیک و گرادیان دوم کرنش.

در خصوص این اشکال این است که مرز دو پوسته در نظریه گرادیان دوم کرنش محلی غیر از مرز دو پوسته در نظریه کلاسیک است که این مساله نیز به اثر سطح و جواب غیربدهی نظریه گرادیان دوم کرنش در خصوص اثر سطح و اندازه است که منجر به آسایش سطحی قبل از بارگذاری خارجی در نظریه گرادیان دوم کرنش می‌شود.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله مساله لمه‌گونه کروی در الاستیسیته گرادیان دوم

تقریباً در ضخامت ثابت است. این در حالی است که پاسخ مربوط به نظریه الاستیسیته تقویت شده در نزدیکی مرزها به شدت متغیر است و چنانچه ضخامت پوسته کم باشد، در کل تغییرات چشمگیر در میدان تنش ملاحظه می‌شود. همچنین، تنش τ_{rr} در پاسخ کلاسیک در مرز دو پوسته پیوسته است در حالی که مولفه‌های $\tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi}$ در مرز گسسته است. این در حالی است که در پاسخ گرادیان دوم کرنش همه مولفه‌های تنش در مرز گسسته است که با توجه به صورت‌بندی این نظریه، این مساله قابل پیش‌بینی بوده است. نکته قابل ذکر دیگر

پیش‌بینی می‌کند. با افزایش شعاع حفره داخلی در حالت $\gamma = 10$ ، $\xi_2 = 1$ این تغییر حدود ۵۰ درصد کاهش می‌یابد. بعد از رسیدن به آسایش سطحی، بارگذاری خارجی متقارن اعمال می‌شود. به عنوان مثال، برای بارگذاری خارجی یک‌گانه حدود $0/0001$ ، تنش شعاعی یک‌گانه در دوپوسته برای حالت هندسی $\gamma = 10$ ، $\xi_1 = \xi_2 = 1$ تقریباً در هر دو فاز ثابت و حدود $0/0001$ است؛ این در حالی است که بر اساس گرادیان دوم کرنش، تنش شعاعی یک‌گانه در مرز پیوسته نیست و مثلاً در فاز کربن و در مجاورت مرز دو فاز حدود $0/00315$ است.

منابع

- [1] H. Hatami, M. Hosseini, Elastic-plastic analysis of bending moment-axial force interaction in metallic beam of T-section, *J. Applied Comp. Mech.*, 5 (2019) 162-173.
- [2] H. Hatami, M. Hosseini, A.K. Yasuri, Perforation of thin Aluminum targets under hypervelocity impact of aluminum spherical projectiles, *Materials Evaluation*, 77 (2019) 411-422.
- [3] M. Shariati, H. Hatami, H.R. Eipakchi, H. Yarahmadi, H. Torabi, Experimental and numerical investigations on softening behavior of POM under cyclic strain-controlled loading, *Polymers-Plastics Technology and Engineering*, 50 (2011) 1576-1582.
- [4] M. Lazar, Dislocations and Cracks in Generalized Continua. *Encyclopedia of Continuum Mechanics*, Springer-Verlag GmbH, Germany, 2018.
- [5] M. Lazar, E. Agiasofitu, Fundamentals in generalized elasticity and dislocation theory of quasicrystals: Green tensor, dislocation key-formulas and dislocation loops, *Philosophical Magazine*, 94(35) (2014) 4080-4101.
- [6] G. Po, N.C. Admal, M. Lazar, The Green tensor of Mindlin's anisotropic first strain gradient elasticity, *Materials Theory*, 3(1) (2019) 3.
- [7] M.R. Delfani, S. Shojaeimanesh, V. Bagherpour, Effective shear modulus of functionally graded fibrous composites in second strain gradient elasticity, *Journal of Elasticity*, 137(1) (2018) 43-62.
- [8] R.A. Toupin, Theories of elasticity with couple-stress, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 17(2)

کرنش در دو حالت تک‌فازی و دو‌فازی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در گرادیان دوم کرنش میندلین، چگالی انرژی کرنشی در محیط پیوسته به صورت تابعی از تانسور کرنش و گرادیان‌های مرتبه اول و دوم آن نوشته می‌شود و علاوه بر ثابت‌های لمه، شانزده ثابت ماده جدید شامل مدول چسبندگی و همچنین چهار طول مشخصه حجمی و یک طول مشخصه سطحی معرفی می‌شود. به دلیل وجود مدول چسبندگی در صورت‌بندی میندلین، امکان تعادل محیط پیوسته تحت اثرات سطح و اندازه توسط نظریه گرادیان دوم کرنش فراهم می‌شود. به منظور حل مساله لمه‌گونه با تقارن کروی، ابتدا این نظریه در دستگاه مختصات کروی نوشته می‌شود و معادلات تعادل، شرایط مرزی نیرویی و جابجایی و روابط بنیادین تنش و کرنش در این دستگاه مختصات استخراج می‌شود. با لحاظ کردن تقارن کروی در مساله لمه‌گونه، معادله تعادل یک معادله دیفرانسیل مرتبه شش خطی می‌شود که با استفاده از سری فروبینیوس حل شده، جواب‌های معادله حاصل می‌شود. در این مقاله، نانوکره توخالی کربنی به عنوان مساله لمه‌گونه تک‌فازی و نانوکره توخالی سیلیکونی با پوشش کربنی به عنوان مساله لمه‌گونه دو‌فازی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. به منظور به دست آوردن نتایج عددی، مقادیر عددی ثابت‌های مواد و طول مشخصه‌های آن‌ها با استفاده از نظریه شبکه و محاسبات کوانتومی برای سیلیکون و کربن بلوری با ساختار الماس تعیین می‌شود. برای هر دو مساله، ابتدا آسایش سطحی در نتیجه اثرات سطح و اندازه مورد بررسی قرار می‌گیرد و میدان جابجایی و کرنش حاصل از آن تعیین می‌شود. سپس، هر دو مساله تحت بارگذاری خارجی قرار گرفته، میدان تنش و تغییرات شعاعی در آن‌ها محاسبه و ارائه می‌شود. برخی نتایج ارائه شده با نتایج الاستیسیته کلاسیک مقایسه می‌شود. اثرات سطح و اندازه در هر دو مساله لمه‌گونه و دوپوسته منجر به القای کرنش‌های شعاعی و در نتیجه تغییر ابعاد در محیط‌های مادی مورد بحث می‌شود. این در حالی است که الاستیسیته کلاسیک، کرنش شعاعی ناشی از اثرات سطح و اندازه را پیش‌بینی نمی‌کند. هنگامی که اندازه شعاع فازها بسیار کوچک باشد، اثر سطح و اندازه بر نتایج قابل ملاحظه است. با افزایش شعاع فازها نتایج دو نظریه تعمیم‌یافته و کلاسیک به یکدیگر همگرا می‌شود. به عنوان مثال، در مساله دوپوسته، اثر سطح و اندازه در گرادیان دوم کرنش، تغییر ضخامت به ضخامت اولیه را در فاز سیلیکون حدود $0/03$ برای $\xi_1 = 3$ و $\xi_2 = \gamma = 1$

- crystals of hexoctahedral class: Analytical expression of the material parameters in terms of the atomic force constants and evaluation via ab initio DFT, *Mechanics of Materials*, 123 (2018) 19-29.
- [20] H.M. Shodja, F. Ojaghnezhad, A. Etehadieh, M. Tabatabaei, Elastic moduli tensors, ideal strength, and morphology of stanene based on an enhanced continuum model and first principles, *Mechanics of Materials*, 110 (2017) 1-15.
- [21] H.M. Shodja, A. Zaheri, A. Tehranchi, Ab initio calculations of characteristic lengths of crystalline materials in first strain gradient elasticity, *Mechanics of Materials*, 61 (2013) 73-78.
- [22] Q. He, M. Ashuri, K. Zhang, S. Emani, M.S. Sawicki, J.S. Shamie, L.L. Shaw, Synthesis of carbon-coated hollow silicon nanospheres for Lithium-ion battery application, in: *Materials Science & Technology*, Pittsburgh, PA, USA, 2014.
- [23] B. Li, F. Yao, J.J. Bae, J. Chang, M.R. Zamfir, D.T. Le, D.T. Pham, Y. Hongyan, Y.H. Lee, Hollow carbon nanospheres/silicon/alumina core-shell film as an anode for lithium-ion batteries, *Scientific Reports*, 5 (2015).
- [24] A. Mukhopadhyay, B.W. Sheldon, Deformation and stress in electrode materials for Li-ion batteries, *Progress in Materials Science*, 63 (2014) 58-116.
- [25] X. Su, Q. Wu, J. Li, X. Xiao, A. Lott, W. Lu, B.W. Sheldon, J. Wu, Silicon-based nanomaterials for lithium-ion batteries: A review, *Advanced Energy Materials*, (2013).
- [26] L. Xue, G. Xu, Y. Li, S. Li, K. Fu, Q. Shi, X. Zhang, Carbon-coated Si nanoparticles dispersed in carbon nanotube networks as anode material for Lithium-ion batteries, *ACS Applied Materials & Interfaces*, 5(1) (2013) 21-25.
- [27] C. Yang, Y. Zhang, J. Zhou, C. Lin, F. Lv, K. Wang, J. Feng, Z. Xu, J. Li, S. Guo, Hollow Si/SiO nanosphere/nitrogen-doped carbon superstructure with a double shell and void for high-rate and long-life lithium-ion storage, *Journal of Materials Chemistry A*, 6(17) (2018) 8039-8046.
- [28] Y. Yao, M.T. McDowell, I. Ryu, H. Wu, N. Liu, L. Hu, W.D. Nix, Y. Cui, Interconnected silicon hollow nanospheres for lithium-ion battery anodes with long cycle life, *Nano* (1964) 85-112.
- [9] R.A. Toupin, D.C. Gazis, Surface effects and initial stress in continuum and lattice models of elastic crystals, in: Wallis (Ed.) *International Conference on Lattice Dynamics*, Pergamon press, Copenhagen, 1963, pp. 597-602.
- [10] R.D. Mindlin, Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 1 (1965) 417-438.
- [11] F. Ojaghnezhad, H.M. Shodja, A combined first principles and analytical determination of the modulus of cohesion, surface energy, and the additional constants in the second strain gradient elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 50(24) (2013) 3967-3974.
- [12] F. Ojaghnezhad, H.M. Shodja, Surface elasticity revisited in the context of second strain gradient theory, *Mechanics of Materials*, 93 (2016) 220-237.
- [13] M.E. Gurtin, A.I. Murdoch, A continuum theory of elastic material surfaces, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 57 (1975) 291-323.
- [14] A.C. Eringen, *Mechanics of continua*, Robert E. Krieger publishing compan, New York, 1980.
- [15] X. Ji, A.Q. Li, S.J. Zhou, The strain gradient elasticity theory in orthogonal curvilinear coordinates and its applications, *Journal of Mechanics*, 34(3) (2016) 311-323.
- [16] S. Zhou, A. Li, B. Wang, A reformulation of constitutive relations in the strain gradient elasticity theory for isotropic materials, *International Journal of Solids and Structures*, 80 (2016) 28-37.
- [17] F. Ojaghnezhad, H.M. Shodja, Second strain gradient theory in orthogonal curvilinear coordinates: Prediction of the relaxation of a solid nanosphere and embedded spherical nanocavity, *Applied Mathematical Modelling*, 76 (2019) 669-698.
- [18] H.M. Shodja, F. Ahmadpoor, A. Tehranchi, Calculation of the additional constants for fcc materials in second strain gradient elasticity: behavior of a nano-size Bernoulli-Euler beam with surface effects, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 79 (2012) 021008-021015.
- [19] H.M. Shodja, H. Moosavian, F. Ojaghnezhad, Toupin-Mindlin first strain gradient theory revisited for cubic

- [31] X. Zhou, A. Cao, L. Wan, Y. Guo, Spin-coated silicon nanoparticle/grapheme electrode as a binder-free anode for high-performance lithium-ion batteries, *Nano Research*, 5 (2012) 845-853.
- [32] F. Ojaghnezhad, H.M. Shodja, A combined first principles and analytical treatment for determination of the surface elastic constants: application to Si(001) ideal and reconstructed surfaces, *Philosophical Magazine Letters*, 92(1) (2012) 7-19.
- Letters, 11 (2011) 2949-2954.
- [29] K. Zhao, M. Pharr, S. Cai, J.J. Vlassak, Z. Suo, Large plastic deformation in high-capacity lithium-ion batteries caused by charge and discharge, *Journal of American Ceramic Society*, 94 (2011) 226-235.
- [30] K. Zhao, M. Pharr, L. Hartle, J.J. Vlassak, Z. Suo, Fracture and debonding in lithium-ion batteries with electrodes of hollow core-shell nanostructures, *Journal of Power Sources*, 218 (2012) 6-14.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

F. Ojaghnezhad, *Spherical Lamé-Type Problem in Second Strain Gradient Theory*, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 53(2) (2021) 713-732.

DOI: [10.22060/mej.2019.16554.6388](https://doi.org/10.22060/mej.2019.16554.6388)



