



## تحلیل ناپایداری دینامیکی تیر ساندویچی ضخیم با هسته انعطاف پذیر تابعی تحت اثر نیروی تعقیب کننده

غلامحسن پایگانه<sup>\*۱</sup>، کرامت ملک زاده فرد<sup>۲</sup>، فهیمه راشد سقاواز<sup>۲</sup>

۱- دانشکده مهندسی مکانیک، تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران  
۲- دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸-۰۲-۰۹  
بازنگری: ۱۳۹۸-۰۷-۲۰  
پذیرش: ۱۳۹۸-۰۸-۱۴  
ارائه آنلاین: ۱۳۹۸-۱۰-۰۵

### کلمات کلیدی:

سازه‌های هوایی  
سازه‌های ساندویچی  
ناپایداری دینامیکی  
روش حل عددی  
هسته انعطاف پذیر تابعی

**خلاصه:** سازه‌های هوایی هنگامی که تحت اثر نیروهای ناپایستار، به ویژه نیروهای تعقیب کننده قرار می‌گیرند، ممکن است علاوه بر ناپایداری استاتیکی در معرض ناپایداری دینامیکی (پدیده فلاتر) نیز قرار بگیرند. به همین علت ضروری است، سازه به نحوی طراحی گردد، تا از وقوع ناپایداری‌های استاتیکی و دینامیکی جلوگیری شود. در این مقاله به کمک تئوری مرتبه بالای تیرهای ساندویچی جدید برای اولین بار، ناپایداری دینامیکی تیر ساندویچی ضخیم با هسته انعطاف پذیر تابعی تحت اثر نیروی تعقیب کننده مورد بررسی قرار گرفته است. تیر ساندویچی از دو رویه و یک هسته انعطاف پذیر تشکیل شده است. سطح مشترک هسته با رویه‌ها شامل اتصال کامل است، که قابلیت تحمل تنش‌های برشی و عمودی را دارا می‌باشد. تیر ساندویچی به صورت الاستیک خطی با جابجایی‌ها و چرخش‌های کوچک در نظر گرفته شده است. معادلات حرکت تیر ساندویچی مرتبه بالا، تحت اثر نیروی تعقیب کننده به کمک اصل همیلتون استخراج شده است. با اعمال شرایط مرزی و با کمک روش حل عددی تربیع مربعات، پدیده فلاتر مورد بررسی قرار گرفته است. علاوه بر صحت‌گذاری نتایج، اثر پارامترهای مختلف هندسی و موادی تیر نیز بر آستانه نیروی فلاتر مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد، برای تیرهای بلند، مقدار نیروی تعقیب کننده آستانه پدیده فلاتر به نتایج متناظر در تیر تیموشنکو میل می‌کند.

### ۱- مقدمه

جت، روتور توربین‌های گازی و نیروی نگه‌دارنده ترمزهای دیسکی اشاره کرد. در مسائل لایپلز و هگر نیرو به صورت گسترده روی سازه اعمال می‌گردد. نیرو در یکی با توزیع یکنواخت در طول تیر و در دیگری با توزیع خطی در طول تیر اعمال شده است. به عنوان مثال از کاربردهای مسائل لایپلز و هگر می‌توان به نیروی وارد بر بدنه مخازن انتقال سوخت مایع اشاره کرد.

با توجه به اهمیت و کاربرد فراوان نیروهای تعقیب کننده در سازه‌ها، بررسی رفتار و پایداری دینامیکی سازه تحت اثر نیروی تعقیب کننده موضوع مورد علاقه بسیاری از پژوهشگران است. برای اولین بار مسئله پایداری سازه الاستیک، تحت اثر نیروی تعقیب کننده توسط نیگلای مورد بررسی قرار گرفته است [۱]. می‌توان گفت بررسی نیروهای تعقیب کننده در سازه‌ها به صورت جدی، همزمان با طرح سه مسئله کلاسیک، توسط بک، لایپلز و هگر که به نام خودشان مشهور شده است، مورد علاقه پژوهشگران قرار گرفته است [۲-۵]. در مسئله بک، ستونی تحت اثر نیروی تعقیب کننده متمرکز در انتهای خود است. می‌توان از کاربردهای مسئله بک در صنعت، به نیروی پیشران در

در پنج دهه گذشته مطالعات بسیاری بر روی پایداری تیرها، صفحه‌ها و پوسته‌ها با شرایط مرزی مختلف صورت گرفته است [۶-۱۳]. برخی از آن‌ها مانند مسئله بک، بولوتین [۱۴] و زیگلر [۱۵] دارای حل تحلیلی هستند. بیلی و هینز [۱۶] نیز با استفاده از اصل همیلتون، راه حل تحلیلی مستقیم برای سیستم‌های پایستار و ناپایستار با بارگذاری و شرایط مرزی مختلف، پیشنهاد کردند. آن‌ها

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: g.payganeh@sru.ac.ir



مقدار نیروی آستانه فلاتر را محاسبه و منحنی‌های پاسخ فرکانسی را ترسیم نمودند. لی [۱۷] یک حل دقیق، برای تحلیل پایداری یک ستون غیریکنواخت، تحت اثر ترکیبی از نیروهای تعقیب‌کننده گسترده و متمرکز ارائه داده است. او نشان داد نتایج به‌دست آمده، مطابقت قابل قبولی با نتایج محاسبه شده با روش اجزاء محدود دارد. الخالدی و همکاران [۱۸] تغییر شکل‌های بزرگ تیر تحت نیروی ناپایستار و ممان پایستار را مورد بررسی قرار دادند. به‌دلیل پیچیدگی‌های مربوط به پایداری دینامیکی، بسیاری از حالات به یک حل تحلیلی منجر نمی‌شوند. روش‌هایی نظیر گلرکین، رانج-کوتا، تفاضل محدود، اجزاء محدود و غیره از جمله روش‌هایی هستند که در تحلیل مسائل مربوط به پایداری دینامیکی سازه‌های مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند. کولکاووسکی و ریزمن [۱۹] به مطالعه پدیده کماتش صفحات، تحت نیروهای تعقیب‌کننده لبه‌ای با شرایط مرزی مختلف پرداخته‌اند. فرشاد [۲۰]، پایداری صفحات یک‌سرگردار که تحت اثر همزمان نیروهای پایستار و ناپایستار قرار دارند را، با روش گلرکین مورد بررسی قرار داده است. لاپلز [۲۱ و ۲۲] پایداری صفحات مستطیلی با تکیه‌گاه‌های مفصلی تحت اثر نیروی تعقیب‌کننده مماسی را بررسی کرده است. کین و کیم [۲۳]، پایداری صفحات را به کمک روش اجزاء محدود مورد مطالعه قرار دادند.

امروزه با گسترش روزافزون استفاده از مواد کامپوزیتی و ساندویچی در صنایع مختلف، بررسی رفتار آن‌ها در شرایط و بارگذاری‌های گوناگون مورد توجه پژوهش‌گران قرار گرفته است. با توجه به پیچیدگی‌های فراوان حاکم بر معادلات سازه‌های کامپوزیتی و ساندویچی که تحت اثر نیروی تعقیب‌کننده قرار دارند، برای بسیاری از آن‌ها به جز در موارد خاص حل تحلیلی وجود ندارد. بنابراین استفاده از روش‌های عددی در تحلیل پایداری دینامیکی این دسته از سازه‌ها شایع‌تر است.

گویال و کاپانیا [۲۴] به بررسی پایداری دینامیکی تیرهای کامپوزیت لایه‌ای تحت بار نقطه‌ای ناپایستار، به کمک روش اجزاء محدود پرداختند. کیم و لی [۲۵] پدیده‌های دیورژانس و فلاتر تیر یک ساخته شده از مواد کامپوزیت لایه‌ای را مورد مطالعه قرار دادند. اسمچنسکی و بلاندزی [۲۶] به بررسی پایداری دینامیکی و استاتیکی تیر ساندویچی پنج‌لایه فشرده‌شده محوری پرداختند. هدف آن‌ها از این تحقیق به‌دست آوردن یک مدل ریاضی برای تاثیر

لایه‌های چسبندگی اتصالات تیر است. ناپایداری استاتیکی و دینامیکی تیر کامپوزیتی لایه‌ای شکاف‌دار تحت نیروی متمرکز تعقیب‌کننده، توسط علیدوست و رضایی‌پژند [۲۷] مورد بررسی قرار گرفت. در این مطالعه آن‌ها از تئوری تیر اویلر-برنولی و تئوری کلاسیک بهره بردند. همچنین علیدوست و رضایی‌پژند [۲۸] به بررسی ارتعاشات آزاد و کماتش لمینیت کامپوزیتی دارای چندین ترک، تحت اثر بار ناپایستار فشرده پرداختند. کیانگ و همکاران [۲۹] تجزیه و تحلیل مودال مخروط غشاء پر شده تحت نیروی دنبال‌کننده را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در مطالعه خود اثر فشار را در تجزیه و تحلیل ارتعاش سازه در نظر گرفتند، سپس بر اساس اصل کار مجازی و تئوری تیر تیموشینکو یک مدل تیر بهبودیافته را با توجه به اثر فشار، ارائه دادند. تاکنون مطالعات اندکی در خصوص پایداری دینامیکی سازه‌های ساندویچی تحت اثر نیروهای دنبال‌کننده انجام شده است. رفتار سازه‌های ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر هدفمند تحت اثر نیروهای دنبال‌کننده هنوز مورد بررسی قرار نگرفته است. در این مقاله برای اولین بار به کمک تئوری مرتبه بالای پیشنهاد شده نویسندگان [۳۰] به بررسی ناپایداری دینامیکی و احتمال وقوع پدیده فلاتر در تیر یک‌سرگردار ساندویچی ضخیم تحت اثر بار تعقیب‌کننده فشاری پرداخته شده است. معادلات حرکت به کمک اصل همیلتون استخراج شده و با اعمال شرایط مرزی و با کمک، یک روش حل عددی، پدیده فلاتر مورد بررسی قرار گرفته است. اثر پارامترهای مختلف هندسی و مکانیکی تیر بر مقدار نیروی فلاتر نیز مورد مطالعه قرار گرفته است.

## ۲- تئوری تیر ساندویچی

در یک پنل ساندویچی با هسته میانی انعطاف‌پذیر تابعی<sup>۱</sup>، فرض یکسان بودن خیز روبه‌های بالایی و پایینی و نیز فرض تغییرات خطی تغییر مکان‌های صفحه‌ای در جهت ضخامت هسته میانی، نادرست بوده و باعث خطای زیادی می‌گردد. این بدین معنی است که روش حل کلاسیک همراه با خطای زیاد است. در تئوری کلاسیک شرایط مرزی، برای دو رویه و هسته میانی یکسان فرض می‌شود، یعنی در کل ارتفاع مقطع، شرط مرزی را یکسان فرض می‌کنند که در حالت واقعی چنین فرضی دور از اعتبار است، برای در نظر گرفتن رفتار غیرخطی هسته میانی و نیز واقعی‌تر در نظر گرفتن شرایط تکیه‌گاهی از تئوری

1 Improved Higher-order Sandwich Plate Theory (IHSAPT)  
2 Functionally Graded Materials (FGM)

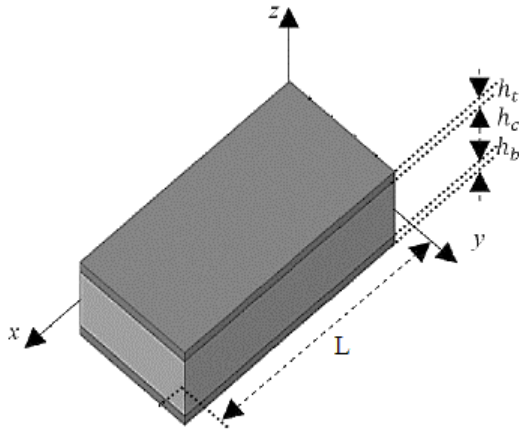


Fig. 1. Geometrical properties of Beck's sandwich beam [35]

شکل ۱: مشخصات هندسی تیر ساندویچی در مسئله بک [۳۵]

$$w_j(x, z, t) = w_0^j(x, t), \quad j = t, b \quad (ب-۱)$$

برای هسته تیر، معادلات میدان جابجایی به صورت روابط (۲) می‌باشند [۳۱].

$$u_c(x, z, t) = u_0(x, t) + z_c u_1(x, t) + z_c^2 u_2(x, t) + z_c^3 u_3(x, t) \quad (۲-الف)$$

$$w_c(x, z, t) = w_0(x, t) + z_c w_1(x, t) + z_c^2 w_2(x, t) \quad (۲-ب)$$

با توابع جابجایی تعریف شده در روابط (۱) و (۲) به راحتی می‌توان توزیع کرنش و تنش را در هر یک از لایه‌ها تعیین کرد. با در نظر گرفتن شرط تماس کامل بین لایه‌ها، شرط مرزی بین آن‌ها به سادگی تعریف می‌شود. یعنی جابجایی عرضی و طولی هسته با مقادیر مشابه در رویه‌های بالایی و پایینی در محل اتصال برابرند. شرایط سازگاری در روابط (۳-الف) تا (۳-ت) آورده شده است.

$$w_1^c = \frac{1}{h_c} (w_0^t - w_0^b) \quad (۳-الف)$$

$$w_2^c = \frac{1}{(h_c)^2} \{ 2(w_0^t + w_0^b) - 4w_0^c \} \quad (ب-۳)$$

$$u_2^c = \frac{1}{(h_c)^2} \left\{ 2(u_0^t + u_0^b) - \left[ h_t \psi_x^t + h_b \psi_x^b - 4u_0^c \right] \right\} \quad (پ-۳)$$

مرتبه بالای سه‌لایه استفاده می‌شود. این تئوری در واقع تعمیم‌یافته تئوری‌های جمع آثار و حل کلاسیک است. به کمک تئوری مرتبه بالا می‌توان تیرها و پنل‌های ساندویچی را مدل و بررسی کرد. در فرمول‌بندی مسئله برای دو رویه‌ی پنل، از تئوری‌های مشخص و شناخته شده ورق‌ها یا تیرها استفاده کرد و برای هسته میانی از تئوری الاستیسیته استفاده نمود. در این صورت می‌توان بارگذاری‌های مختلف، شرایط مرزی مختلف و نیز رفتار غیرخطی هسته میانی را در نظر گرفت [۳۱]. مدل مورد استفاده در مقاله حاضر بر پایه توزیع جابجایی‌های هسته به صورت چند جمله‌ای در راستای ضخامت است، که بر اساس نتایج بدست آمده از مدل اول فراستیگ و تامسن [۳۱] است، با این تفاوت که ضرایب چندجمله‌ای‌ها به صورت مجهول در نظر گرفته شده است. در این مقاله برای اولین بار معادلات در حالت کلی برای تیر ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر تابعی استخراج شده است که توانایی کاربرد برای انواع تیر ساندویچی با هر جنس رویه و نوع هسته را دارند. معادلات دینامیکی، اینرسی‌های چرخشی و شرایط مرزی مورد نیاز به وسیله اصل همیلتون استخراج شده است. فرمولاسیون ریاضی تئوری مرتبه بالا<sup>۱</sup> برای پنل‌ها و ورق‌های تک‌جهته در مراجع [۳۲-۳۴] موجود است. تیر ساندویچی به صورت الاستیک خطی با جابجایی‌های کوچک و شامل یک هسته با دو رویه نازک و شامل سفتی خمشی می‌باشد. در مقاله حاضر تنش‌های برشی و نرمال صفحه‌ای هسته که در تئوری مرتبه بالا و تئوری مرتبه بالای بهبود یافته [۳۰] از آن‌ها چشم‌پوشی شده است نیز در نظر گرفته شده است. سطح مشترک هسته با رویه‌ها شامل اتصال کامل است، که قابلیت تحمل تنش‌های برشی و عمودی را دارا می‌باشد. بار خارجی نیز می‌تواند بر روی رویه‌های بالا و یا بر روی رویه‌های پایین وارد شود. در شکل ۱ ساختار سازه مورد نظر نشان داده شده است. همانطور که از شکل مشاهده می‌شود، رویه بالایی تیر ساندویچی با ضخامت  $h_t$ ، هسته انعطاف‌پذیر تابعی با ضخامت  $h_c$  و رویه پایینی با ضخامت  $h_b$  نشان داده شده است.

میدان جابجایی در رویه‌ها به کمک تئوری برشی مرتبه اول به صورت روابط (۱) در نظر گرفته می‌شود [۳۵] که به ترتیب توابع توزیع جابجایی تیر در راستای X و Z را نشان می‌دهند.

$$u_j(x, z, t) = u_0^j(x, t) + z \psi_x^j(x, t) \quad (۱-الف)$$

1 Higher-order Sandwich Plate Theory (HSAPT)

$$Q_{xz}^i = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \sigma_{xz}^i dz_i, \quad i = t, b \quad (\text{پ} - ۵)$$

برای استخراج معادلات حاکم بر تیر ساندویچی و انجام تحلیل‌های دینامیکی مورد نظر، از اصل همیلتون استفاده شده است [۳۱] (رابطه (۶)). بر طبق این اصل  $\delta T$  تغییرات انرژی جنبشی،  $\delta U$  تغییرات انرژی کرنشی و  $\delta V$  نیز تغییرات انرژی پتانسیل ناشی از کار نیروهای خارجی است.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(-T + U + V) dt = 0 \quad (۶)$$

تغییرات انرژی جنبشی از رابطه (۷) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \delta T = & \int_{V_t} (\rho_t \dot{u}_t \delta \dot{u}_t + \rho_t \dot{w}_t \delta \dot{w}_t) dv + \\ & \int_{V_b} (\rho_b \dot{u}_b \delta \dot{u}_b + \rho_b \dot{w}_b \delta \dot{w}_b) dv + \\ & \int_{V_{core}} (\rho_c \dot{u}_c \delta \dot{u}_c + \rho_c \dot{w}_c \delta \dot{w}_c) dv \end{aligned} \quad (۷)$$

در رابطه (۷)،  $\rho$  چگالی است. با جایگذاری توابع جابجایی تعریف شده از روابط (۱) و (۲)، می‌توان مقدار انرژی جنبشی را محاسبه کرد. جزئیات محاسبات در مرجع [۳۶] ارائه شده است. تغییرات انرژی کرنشی تیر ساندویچی از رابطه (۸) قابل محاسبه است [۳۱]:

$$\delta U = \sum_{i=t,b} \left( \int (\sigma_{xx}^i \delta \varepsilon_{xx}^i + \tau_{xz}^i \delta \gamma_{xz}^i) dV_i \right) + \quad (۸)$$

$$\int (\sigma_{xx}^c \delta \varepsilon_{xx}^c + \sigma_{zz}^c \delta \varepsilon_{zz}^c + \tau_{xz}^c \delta \gamma_{xz}^c) dV_c$$

با فرض رابطه خطی بین تنش و کرنش و همچنین با جایگذاری توابع جابجایی معرفی شده در روابط (۱) و (۲)، می‌توان تغییرات انرژی کرنشی را محاسبه نمود. تغییرات کار نیروی خارجی تعقیب‌کننده با فرض وارد شدن نیرو در نقطه میانی هسته یعنی  $Z_c = 0$  به کمک شکل ۲ محاسبه می‌شود [۳۷]. در این شکل تیری با طول  $l$  تحت اثر نیروی ثابت تعقیب‌کننده  $P$  قرار گرفته است.  $b_1$  و  $b_2$  بردارهای یکه در راستای افقی و عمودی در صفحه تغییر شکل تیر می‌باشند. جابجایی هر نقطه از تیر در محل اعمال بار شامل یک جابجایی طولی  $u_c(x, t)$  و یک جابجایی عرضی  $w_c(x, t)$  است.

در تیر تغییر شکل یافته، مختصات هر نقطه از تیر روی خط

$$u_3^c = \frac{2}{(h_c)^3} \left\{ 2(u_0^t - u_0^b) - \left[ (h_t \psi_x^t + h_b \psi_x^b) - 2h_c u_1^c \right] \right\} \quad (\text{ت} - ۳)$$

با کاهش مجهولات حاکم بر مسئله، تعداد مجهولات از ۱۳ به ۹ (  $u_0^t, u_0^c, \psi_x^t, w_0^t, u_0^b, \psi_x^b, w_0^b, u_1^c, w_0^c$  ) می‌رسد. نتیجه‌های تنش در هسته به صورت روابط (۴-الف) تا (۴-ج) تعریف می‌شوند [۳۰]:

$$N_{xx}^c = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \sigma_{xx}^c dz_c \quad (\text{الف} - ۴)$$

$$M_{nxx}^c = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} z_c^n \sigma_{xx}^c dz_c, \quad n = 1, 2, 3 \quad (\text{ب} - ۴)$$

$$N_{xz}^c = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \sigma_{xz}^c dz_c \quad (\text{پ} - ۴)$$

$$M_{nxz}^c = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} z_c^n \sigma_{xz}^c dz_c, \quad n = 1, 2, 3 \quad (\text{ت} - ۴)$$

$$R_z^c = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \sigma_{zz}^c dz_c \quad (\text{ث} - ۴)$$

$$M_z^c = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} z_c \sigma_{zz}^c dz_c \quad (\text{ج} - ۴)$$

به همین ترتیب می‌توان نتیجه‌های تنش در رویه‌های بالا و پایین را به صورت روابط (۵-الف) تا (۵-پ) تعریف کرد [۳۰]:

$$N_{xx}^i = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \sigma_{xx}^i dz_i, \quad i = t, b \quad (\text{الف} - ۵)$$

$$M_{xx}^i = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} z_i \sigma_{xx}^i dz_i, \quad i = t, b \quad (\text{ب} - ۵)$$

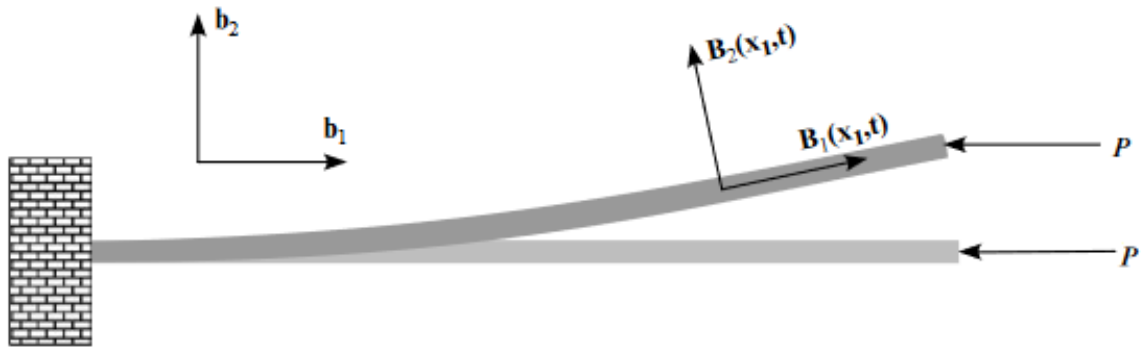


Fig. 2. Beck's beam geometry and its related parameters [37]

شکل ۲: هندسه تیر بک و پارمترهای مرتبط با آن [۳۷]

با صرف نظر از جملات مرتبه بالای  $\partial w_c / \partial x$ ، کار مجازی بار تعقیب کننده در یک جابجایی مجازی برابر رابطه (۱۵) است.

$$\delta W = P \left( \int_0^L \frac{\partial w_c}{\partial x} \frac{\partial \delta w_c}{\partial x} dx - \frac{\partial w_c}{\partial x}(L, t) \delta w_c(L, t) b_2 \right) \quad (15)$$

با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء و شرط مرزی  $w_c(0, t) = 0$ ، تغییرات کار مجازی بار تعقیب کننده به صورت رابطه (۱۶) حاصل می شود.

$$\delta W_{ext} = -P \int_0^L \frac{\partial^2 w_c}{\partial x^2} \delta w_c dx = -P \int_0^L \frac{\partial^2 w_0^c}{\partial x^2} \delta w_0^c dx \quad (16)$$

پس از جایگذاری مقادیر تغییرات انرژی کرنشی، تغییرات انرژی جنبشی و تغییرات کار نیروی خارجی در اصل همیلتون و ساده سازی آن به کمک روش انتگرال گیری جزء به جزء، معادلات حرکت تیر ساندویچی به کمک روابط (۱۷-الف) تا (۱۷-خ) به دست می آیند.

$$\delta u_0^t : N'_{xx,x} + \frac{2}{h_c^2} M'_{xx2,x} + \frac{4}{h_c^3} M'_{xx3,x} - \frac{4}{h_c^2} M'_{xz} - \frac{12}{h_c^3} M'_{xz2} = \left( I_{0t} + \frac{4I_{4c}}{h_c^4} + \frac{16I_{5c}}{h_c^5} + \frac{16I_{6c}}{h_c^6} \right) u_0^t + \left( \frac{4I_{4c}}{h_c^4} - \frac{16I_{6c}}{h_c^6} \right) u_0^b + \left( I_{1t} - \frac{2h_t I_{4c}}{h_c^4} - \frac{8h_t I_{5c}}{h_c^5} - \frac{8h_t I_{6c}}{h_c^6} \right) \psi_x^t + \left( \frac{2h_b I_{4c}}{h_c^4} - \frac{8h_b I_{6c}}{h_c^6} \right) \psi_x^b + \left( \frac{2I_{2c}}{h_c^2} + \frac{4I_{3c}}{h_c^3} - \frac{8I_{4c}}{h_c^4} - \frac{16I_{5c}}{h_c^5} \right) u_0^c + \left( \frac{2I_{3c}}{h_c^2} + \frac{4I_{4c}}{h_c^3} - \frac{8I_{5c}}{h_c^4} - \frac{16I_{6c}}{h_c^5} \right) u_1^c \quad (17-f)$$

$Z_c = 0$  با بردار موقعیت  $r$  به کمک رابطه (۹) نوشته می شود.

$$r = (x + u_c) b_1 + w_c b_2 \quad (9)$$

با فرض عدم تغییر طول تیر می توان بردار واحد مماس بر راستای تیر تغییر شکل یافته ( $B_1$ ) را، به صورت رابطه (۱۰) معرفی نمود.

$$B_1 = \frac{\partial r}{\partial x} = \left( 1 + \frac{\partial u_c}{\partial x} \right) b_1 + \frac{\partial w_c}{\partial x} b_2 \quad (10)$$

به دلیل واحد بودن طول بردار مماس بر تیر، شرط رابطه (۱۱) باید بر مشتقات میدان جابجایی تیر حاکم باشد.

$$\left( 1 + \frac{\partial u_c}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_c}{\partial x} \right)^2 = 1 \quad (11)$$

با ساده سازی رابطه (۱۱) بین بردارهای جابجایی رابطه (۱۲)، یا رابطه (۱۳) ایجاد می گردد.

$$\frac{\partial u_c}{\partial x} = \sqrt{1 - \left( \frac{\partial w_c}{\partial x} \right)^2} - 1 \approx -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_c}{\partial x} \right)^2 \quad (12)$$

$$u_c(x, t) = -\frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{\partial w_c(\xi, t)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \quad (13)$$

با توجه به رابطه (۱۲) به دست آمده بین بردارهای جابجایی در راستای افقی و قائم، بردار یکه مماس بر تیر تغییر شکل یافته رابطه (۱۰) به صورت رابطه (۱۴) نوشته خواهد شد.

$$B_1 \approx \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_c}{\partial x} \right)^2 \right) b_1 + \frac{\partial w_c}{\partial x} b_2 \quad (14)$$

$$\left( I_{1c} - \frac{8I_{3c}}{h_c^2} + \frac{16I_{5c}}{h_c^4} \right)^{-c} u_0 + \left( I_{2c} - \frac{8I_{4c}}{h_c^2} + \frac{16I_{6c}}{h_c^4} \right)^{-c} u_1$$

$$\delta u_0^c : N_{xx,x}^c - \frac{4}{h_c^2} M_{xx2,x}^c + \frac{8}{h_c^2} M_{xz}^c = \left( \frac{2I_{2c}}{h_c^2} + \frac{4I_{3c}}{h_c^3} - \frac{8I_{4c}}{h_c^4} - \frac{16I_{5c}}{h_c^5} \right)^{-t} u_0 + \left( \frac{2I_{2c}}{h_c^2} - \frac{4I_{3c}}{h_c^3} - \frac{8I_{4c}}{h_c^4} + \frac{16I_{5c}}{h_c^5} \right)^{-b} u_0 + \left( \frac{-h_t I_{2c}}{h_c^2} - \frac{2h_t I_{3c}}{h_c^3} + \frac{4h_t I_{4c}}{h_c^4} + \frac{8h_t I_{5c}}{h_c^5} \right)^{-t} \psi_x + \left( \frac{h_b I_{2c}}{h_c^2} - \frac{2h_b I_{3c}}{h_c^3} - \frac{4h_b I_{4c}}{h_c^4} + \frac{8h_b I_{5c}}{h_c^5} \right)^{-b} \psi_x + \left( I_{0c} - \frac{8I_{2c}}{h_c^2} + \frac{16I_{4c}}{h_c^4} \right)^{-c} u_0 + \left( I_{1c} - \frac{8I_{3c}}{h_c^2} + \frac{16I_{5c}}{h_c^4} \right)^{-c} u_1$$

(ج-۱۷)

$$\delta w_0^t : Q'_{xz,x} - \frac{1}{h_c} R_z - \frac{4}{h_c^2} M_z^c + \frac{1}{h_c} M_{xz,x}^c + \frac{2}{h_c^2} M_{xz2,x}^c = \left( I_{0t} + \frac{I_{2c}}{h_c^2} + \frac{4I_{3c}}{h_c^3} + \frac{4I_{4c}}{h_c^4} \right)^{-t} w_0 + \left( -\frac{I_{2c}}{h_c^2} + \frac{4I_{4c}}{h_c^4} \right)^{-b} w_0 + \left( \frac{I_{1c}}{h_c} + \frac{2I_{2c}}{h_c^2} - \frac{4I_{3c}}{h_c^3} - \frac{8I_{4c}}{h_c^4} \right)^{-c} w_0$$

(ج-۱۷)

$$\delta w_0^b : Q_{xz,x}^b + \frac{1}{h_c} R_z - \frac{4}{h_c^2} M_z^c - \frac{1}{h_c} M_{xz,x}^c + \frac{2}{h_c^2} M_{xz2,x}^c = \left( I_{0b} + \frac{I_{2c}}{h_c^2} - \frac{4I_{3c}}{h_c^3} + \frac{4I_{4c}}{h_c^4} \right)^{-b} w_0 + \left( -\frac{I_{2c}}{h_c^2} + \frac{4I_{4c}}{h_c^4} \right)^{-t} w_0 + \left( -\frac{I_{1c}}{h_c} + \frac{2I_{2c}}{h_c^2} + \frac{4I_{3c}}{h_c^3} - \frac{8I_{4c}}{h_c^4} \right)^{-c} w_0$$

(ج-۱۷)

$$\delta w_0^c : N_{xz,x}^c + \frac{8}{h_c^2} M_z^c - \frac{4}{h_c^2} M_{xz2,x}^c - Pw_{0,xx}^c = \left( \frac{I_{1c}}{h_c} + \frac{2I_{2c}}{h_c^2} - \frac{4I_{3c}}{h_c^3} - \frac{8I_{4c}}{h_c^4} \right)^{-t} w_0 + \left( -\frac{I_{1c}}{h_c} + \frac{2I_{2c}}{h_c^2} + \frac{4I_{3c}}{h_c^3} - \frac{8I_{4c}}{h_c^4} \right)^{-b} w_0 + \left( I_{0c} - \frac{8I_{2c}}{h_c^2} + \frac{16I_{4c}}{h_c^4} \right)^{-c} w_0$$

(خ-۱۷)

که در روابط (۱۷-الف) تا (۱۷-خ)  $I_{nj}$  برابر با رابطه (۱۸) است.

$$I_{nj} = \int_{-\frac{h_j}{2}}^{\frac{h_j}{2}} \rho_j z_j^n dz_j, \quad j = t, b, c$$

$\in j = t, b \rightarrow n = 0, 1, 2$   
 $\in j = c \rightarrow n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

(۱۸)

$$\delta u_0^b : N_{xx,x}^b + \frac{2}{h_c^2} M_{xx2,x}^c - \frac{4}{h_c^3} M_{xx3,x}^c - \frac{4}{h_c^2} M_{xz}^c + \frac{12}{h_c^3} M_{xz2}^c = \left( I_{0b} + \frac{4I_{4c}}{h_c^4} - \frac{16I_{5c}}{h_c^5} + \frac{16I_{6c}}{h_c^6} \right)^{-b} u_0 + \left( \frac{4I_{4c}}{h_c^4} - \frac{16I_{6c}}{h_c^6} \right)^{-t} u_0 + \left( \frac{-2h_t I_{4c}}{h_c^4} + \frac{8h_t I_{6c}}{h_c^6} \right)^{-t} \psi_x + \left( I_{1b} + \frac{2h_b I_{4c}}{h_c^4} - \frac{8h_b I_{5c}}{h_c^5} + \frac{8h_b I_{6c}}{h_c^6} \right)^{-b} \psi_x + \left( \frac{2I_{2c}}{h_c^2} - \frac{4I_{3c}}{h_c^3} - \frac{8I_{4c}}{h_c^4} + \frac{16I_{5c}}{h_c^5} \right)^{-c} u_0 + \left( \frac{2I_{3c}}{h_c^2} - \frac{4I_{4c}}{h_c^3} - \frac{8I_{5c}}{h_c^4} + \frac{16I_{6c}}{h_c^5} \right)^{-c} u_1$$

(ب-۱۷)

$$\delta \psi_x^t : M_{xx,x}^t - Q_{xz}^t - \frac{h_t}{h_c^2} M_{xx2,x}^c - \frac{2h_t}{h_c^3} M_{xx3,x}^c + \frac{2h_t}{h_c^2} M_{xz}^c + \frac{6h_t}{h_c^3} M_{xz2}^c = \left( I_{1t} - \frac{2h_t I_{4c}}{h_c^4} - \frac{8h_t I_{5c}}{h_c^5} - \frac{8h_t I_{6c}}{h_c^6} \right)^{-t} u_0 + \left( -\frac{2h_t I_{4c}}{h_c^4} + \frac{8h_t I_{6c}}{h_c^6} \right)^{-b} u_0 + \left( I_{2t} + \frac{h_t^2 I_{4c}}{h_c^4} + \frac{4h_t^2 I_{5c}}{h_c^5} + \frac{4h_t^2 I_{6c}}{h_c^6} \right)^{-t} \psi_x + \left( -\frac{h_b h_t I_{4c}}{h_c^4} + \frac{4h_b h_t I_{6c}}{h_c^6} \right)^{-b} \psi_x + \left( \frac{-h_t I_{2c}}{h_c^2} - \frac{2h_t I_{3c}}{h_c^3} + \frac{4h_t I_{4c}}{h_c^4} + \frac{8h_t I_{5c}}{h_c^5} \right)^{-c} u_0 + \left( \frac{-h_t I_{3c}}{h_c^2} - \frac{2h_t I_{4c}}{h_c^3} + \frac{4h_t I_{5c}}{h_c^4} + \frac{8h_t I_{6c}}{h_c^5} \right)^{-c} u_1$$

(ب-۱۷)

$$\delta \psi_x^b : M_{xx,x}^b - Q_{xz}^b + \frac{b}{h_c^2} M_{xx2,x}^c - \frac{2h_b}{h_c^3} M_{xx3,x}^c - \frac{2h_b}{h_c^2} M_{xz}^c + \frac{6h_b}{h_c^3} M_{xz2}^c = \left( \frac{2h_b I_{4c}}{h_c^4} - \frac{8h_b I_{6c}}{h_c^6} \right)^{-t} u_0 + \left( I_{1b} + \frac{2h_b I_{4c}}{h_c^4} - \frac{8h_b I_{5c}}{h_c^5} + \frac{8h_b I_{6c}}{h_c^6} \right)^{-b} u_0 + \left( -\frac{h_b h_t I_{4c}}{h_c^4} + \frac{4h_b h_t I_{6c}}{h_c^6} \right)^{-t} \psi_x + \left( I_{2b} + \frac{h_b^2 I_{4c}}{h_c^4} - \frac{4h_b^2 I_{5c}}{h_c^5} + \frac{4h_b^2 I_{6c}}{h_c^6} \right)^{-b} \psi_x + \left( \frac{h_b I_{2c}}{h_c^2} - \frac{2h_b I_{3c}}{h_c^3} - \frac{4h_b I_{4c}}{h_c^4} + \frac{8h_b I_{5c}}{h_c^5} \right)^{-c} u_0 + \left( \frac{h_b I_{3c}}{h_c^2} - \frac{2h_b I_{4c}}{h_c^3} - \frac{4h_b I_{5c}}{h_c^4} + \frac{8h_b I_{6c}}{h_c^5} \right)^{-c} u_1$$

(ت-۱۷)

$$\delta u_1^c : M_{xx,x}^c - N_{xz}^c - \frac{4}{h_c^2} M_{xx3,x}^c + \frac{12}{h_c^2} M_{xz2}^c = \left( \frac{2I_{3c}}{h_c^2} + \frac{4I_{4c}}{h_c^3} - \frac{8I_{5c}}{h_c^4} - \frac{16I_{6c}}{h_c^5} \right)^{-t} u_0 + \left( \frac{2I_{3c}}{h_c^2} - \frac{4I_{4c}}{h_c^3} - \frac{8I_{5c}}{h_c^4} + \frac{16I_{6c}}{h_c^5} \right)^{-b} u_0 + \left( \frac{-h_t I_{3c}}{h_c^2} - \frac{2h_t I_{4c}}{h_c^3} + \frac{4h_t I_{5c}}{h_c^4} + \frac{8h_t I_{6c}}{h_c^5} \right)^{-t} \psi_x + \left( \frac{h_b I_{3c}}{h_c^2} - \frac{2h_b I_{4c}}{h_c^3} - \frac{4h_b I_{5c}}{h_c^4} + \frac{8h_b I_{6c}}{h_c^5} \right)^{-b} \psi_x$$

(ث-۱۷)

ماتریس سفتی جفت شده بین کشش و خمش و ماتریس سفتی تیر است [۲۸]. به همین ترتیب می‌توان منته‌های تنش درسه لایه را به صورت رابطه (۲۱) تعریف کرد.

$$N_{xxt} = At_{11} \left( \frac{\partial}{\partial x} u'_0(x,t) \right) + Bt_{11} \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_t(x,t) \right) \quad (۲۱-الف)$$

$$M_{xxt} = Bt_{11} \left( \frac{\partial}{\partial x} u'_0(x,t) \right) + Dt_{11} \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_t(x,t) \right) \quad (۲۱-ب)$$

$$Q_{xzt} = At_{55} \psi_t(x,t) + At_{55} \left( \frac{\partial}{\partial x} w'_0(x,t) \right) \quad (۲۱-پ)$$

$$N_{xxb} = Ab_{11} \left( \frac{\partial}{\partial x} u^b_0(x,t) \right) + Bb_{11} \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_b(x,t) \right) \quad (۲۱-ت)$$

$$M_{xxb} = Bb_{11} \left( \frac{\partial}{\partial x} u^b_0(x,t) \right) + Db_{11} \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_b(x,t) \right) \quad (۲۱-ث)$$

$$Q_{xzb} = Ab_{55} \psi_b(x,t) + Ab_{55} \left( \frac{\partial}{\partial x} w^b_0(x,t) \right) \quad (۲۱-ج)$$

$$N_{xxt} = - \frac{2E_{11,3} h_b \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_b(x,t) \right)}{h_c^3} + \frac{E_{11,2} h_b \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_b(x,t) \right)}{h_c^2} -$$

$$\frac{2E_{11,3} h_t \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_t(x,t) \right)}{h_c^3} - \frac{E_{11,2} h_t \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_t(x,t) \right)}{h_c^2} -$$

$$- \frac{4E_{11,3} \left( \frac{\partial}{\partial x} u^b_0(x,t) \right)}{h_c^3} + \frac{2E_{11,2} \left( \frac{\partial}{\partial x} u^b_0(x,t) \right)}{h_c^2} -$$

$$\frac{4E_{11,2} \left( \frac{\partial}{\partial x} u^c_0(x,t) \right)}{h_c^2} + \frac{4E_{11,3} \left( \frac{\partial}{\partial x} u^t_0(x,t) \right)}{h_c^3} -$$

$$- \frac{4E_{11,3} \left( \frac{\partial}{\partial x} u^c_1(x,t) \right)}{h_c^2} + E_{11,0} \left( \frac{\partial}{\partial x} u^c_0(x,t) \right) +$$

$$\frac{2E_{11,2} \left( \frac{\partial}{\partial x} u^t_0(x,t) \right)}{h_c^2} + E_{11,1} \left( \frac{\partial}{\partial x} u^c_1(x,t) \right) \quad (۲۱-ج)$$

$$M_{xxt} = - \frac{2E_{11,4} h_b \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_b(x,t) \right)}{h_c^3} + \frac{E_{11,3} h_b \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_b(x,t) \right)}{h_c^2} -$$

$$\frac{2E_{11,4} h_t \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_t(x,t) \right)}{h_c^3} - \frac{E_{11,3} h_t \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_t(x,t) \right)}{h_c^2} -$$

شرایط مرزی حاکم بر مسئله تیر یک به کمک انتگرال‌های جزء به جزء در معادله اصل همپلتون به صورت روابط (۱۹-الف) تا (۱۹-خ) حاصل می‌گردند.

$$\left( \frac{N_{xxt} h_c^3 + 2M_{xx2c} h_c + 4M_{xx3c}}{h_c^3} \right) \delta u^t_0 = 0 \quad (۱۹-الف)$$

$$\left( \frac{N_{xxt} h_c^3 - M_{xx2c} h_c h_t - 2M_{xx3c} h_t}{h_c^3} \right) \delta \psi_t = 0 \quad (۱۹-ب)$$

$$\left( \frac{N_{xxb} h_c^3 + 2M_{xx2c} h_c - 4M_{xx3c}}{h_c^3} \right) \delta u^b_0 = 0 \quad (۱۹-پ)$$

$$\left( \frac{M_{xxb} h_c^3 + M_{xx2c} h_b h_c - 2M_{xx3c} h_b}{h_c^3} \right) \delta \psi_b = 0 \quad (۱۹-ت)$$

$$\left( \frac{N_{xxt} h_c^2 - 4M_{xx2c}}{h_c^2} \right) \delta u^c_0 = 0 \quad (۱۹-ث)$$

$$\left( \frac{M_{xxt} h_c^2 - 4M_{xx3c}}{h_c^2} \right) \delta u^c_1 = 0 \quad (۱۹-ج)$$

$$\left( \frac{Q_{xzt} h_c^2 + 2M_{xzc} h_c + 2M_{xz2c}}{h_c^2} \right) \delta w^t_0 = 0 \quad (۱۹-چ)$$

$$\left( \frac{Q_{xzb} h_c^2 - M_{xzc} h_c + 2M_{xz2c}}{h_c^2} \right) \delta w^b_0 = 0 \quad (۱۹-ح)$$

$$\left( \frac{Q_{xzt} h_c^2 - 4M_{xz2c}}{h_c^2} \right) \delta w^c_0 = 0 \quad (۱۹-خ)$$

منتجه‌های تنش بر حسب توابع جابجایی در رویه‌ها و هسته به صورت رابطه (۲۰) ساده می‌شوند. با جایگذاری منته‌های تنش در روابط (۱۷) به فرم روابط ماتریسی معادله حرکت می‌رسیم.

$$N_{xx}^j = A_{11}^j u_{0,x}^j + B_{11}^j \psi_{x,x}^j, \quad j = t, b \quad (۲۰-الف)$$

$$M_{xx}^j = B_{11}^j u_{0,x}^j + D_{11}^j \psi_{x,x}^j, \quad j = t, b \quad (۲۰-ب)$$

$$Q_{xz}^j = kA_{55}^j (w_{0,x}^j + \psi_x^j), \quad j = t, b \quad (۲۰-پ)$$

ماتریس‌های  $A_{ij}$ ،  $B_{ij}$  و  $D_{ij}$  به ترتیب ماتریس سفتی در کشش،

$$N_{zxc} = \frac{4E_{33,1}w_0^b(x,t)}{h_c^2} - \frac{E_{33,0}w_0^b(x,t)}{h_c} + \frac{4E_{33,1}w_0^t(x,t)}{h_c^2} + \frac{E_{33,0}w_0^t(x,t)}{h_c} - \frac{8E_{33,1}w_0^c(x,t)}{h_c^2} \quad (\text{د-۲۱})$$

$$M_{zxc} = \frac{4E_{33,2}w_0^b(x,t)}{h_c^2} - \frac{E_{33,1}w_0^b(x,t)}{h_c} + \frac{4E_{33,2}w_0^t(x,t)}{h_c^2} + \frac{E_{33,1}w_0^t(x,t)}{h_c} - \frac{8E_{33,2}w_0^c(x,t)}{h_c^2} \quad (\text{و-۲۱})$$

$$M_{xzc} = E_{55,1}u_1^c(x,t) + \frac{2E_{55,2}h_b\psi_b(x,t)}{h_c^2} - \frac{2E_{55,2}h_t(x,t)}{h_c^2} - \frac{8E_{55,2}u_0^c(x,t)}{h_c^2} + \frac{4E_{55,2}u_0^b(x,t)}{h_c^2} + \frac{4E_{55,2}u_0^t(x,t)}{h_c^2}$$

$$- \frac{6E_{55,3}\psi_b(x,t)}{h_c^3} - \frac{12E_{55,3}u_1^c(x,t)}{h_c^2} - \frac{6E_{55,3}h_t\psi_t(x,t)}{h_c^3} - \frac{12E_{55,3}u_0^b(x,t)}{h_c^3} + \frac{12E_{55,3}u_0^t(x,t)}{h_c^3} \quad (\text{ج-۲۱})$$

$$+ E_{55,1} \left( \frac{\partial}{\partial x} w_0^c(x,t) \right) - \frac{E_{55,2} \left( \frac{\partial}{\partial x} w_0^c(x,t) \right)}{h_c} + \frac{E_{55,2} \left( \frac{\partial}{\partial x} w_0^t(x,t) \right)}{h_c} - \frac{4E_{55,3} \left( \frac{\partial}{\partial x} w_0^c(x,t) \right)}{h_c^2} + \frac{2E_{55,3} \left( \frac{\partial}{\partial x} w_0^b(x,t) \right)}{h_c^2} + \frac{2E_{55,3} \left( \frac{\partial}{\partial x} w_0^t(x,t) \right)}{h_c^2}$$

$$M_{xzc} = E_{55,2}u_1^c(x,t) + \frac{2E_{55,3}h_b\psi_b(x,t)}{h_c^2} - \frac{2E_{55,3}h_t\psi_t(x,t)}{h_c^2} - \frac{8E_{55,3}u_0^c(x,t)}{h_c^2} + \frac{4E_{55,3}u_0^b(x,t)}{h_c^2} + \frac{4E_{55,3}u_0^t(x,t)}{h_c^2}$$

$$- \frac{6E_{55,4}\psi_b(x,t)}{h_c^3} - \frac{12E_{55,4}u_1^c(x,t)}{h_c^2}$$

$$- \frac{4E_{11,4} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_0^b(x,t) \right)}{h_c^3} + \frac{2E_{11,3} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_0^b(x,t) \right)}{h_c^2} - \frac{4E_{11,3} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_0^c(x,t) \right)}{h_c^2} + \frac{4E_{11,4} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_0^t(x,t) \right)}{h_c^3} \quad (\text{ح-۲۱})$$

$$- \frac{4E_{11,4} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_1^c(x,t) \right)}{h_c^2} + E_{11,1} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_0^c(x,t) \right) + \frac{2E_{11,3} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_0^t(x,t) \right)}{h_c^2} + E_{11,2} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_1^c(x,t) \right)$$

$$M_{x2c} = - \frac{2E_{11,5}h_b \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_b(x,t) \right)}{h_c^3} + \frac{E_{11,4}h_b \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_b(x,t) \right)}{h_c^2} - \frac{2E_{11,5}h_t \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_t(x,t) \right)}{h_c^3} - \frac{E_{11,4}h_t \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_t(x,t) \right)}{h_c^2}$$

$$- \frac{4E_{11,5} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_0^b(x,t) \right)}{h_c^3} + \frac{2E_{11,4} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_0^b(x,t) \right)}{h_c^2} - \frac{4E_{11,4} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_0^c(x,t) \right)}{h_c^2} + \frac{4E_{11,5} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_0^t(x,t) \right)}{h_c^3}$$

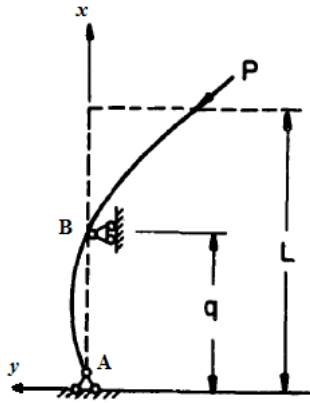
$$- \frac{4E_{11,5} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_1^c(x,t) \right)}{h_c^2} + E_{11,2} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_0^c(x,t) \right) + \frac{2E_{11,4} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_0^t(x,t) \right)}{h_c^2} + E_{11,3} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_1^c(x,t) \right)$$

$$M_{x3c} = - \frac{2E_{11,6}h_b \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_b(x,t) \right)}{h_c^3} + \frac{E_{11,5}h_b \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_b(x,t) \right)}{h_c^2} - \frac{2E_{11,6}h_t \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_t(x,t) \right)}{h_c^3} - \frac{E_{11,5}h_t \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi_t(x,t) \right)}{h_c^2}$$

$$- \frac{4E_{11,6} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_0^b(x,t) \right)}{h_c^3} + \frac{2E_{11,5} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_0^b(x,t) \right)}{h_c^2} - \frac{4E_{11,5} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_0^c(x,t) \right)}{h_c^2} + \frac{4E_{11,6} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_0^t(x,t) \right)}{h_c^3}$$

$$- \frac{4E_{11,6} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_1^c(x,t) \right)}{h_c^2} + E_{11,3} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_0^c(x,t) \right) + \frac{2E_{11,5} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_0^t(x,t) \right)}{h_c^2} + E_{11,4} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_1^c(x,t) \right) \quad (\text{س-۲۱})$$





شکل ۳: هندسه تیر تعمیم‌یافته بک و پارامترهای مرتبط با آن [۳۸]  
Fig. 3. Beck's generalized beam geometry and its related parameters [38]

$$E_{33,n} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} z_c^n Q_{33}^c dz_c \quad n = 0, 1, 2 \quad (\text{ب-۲۲})$$

$$E_{55,n} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} z_c^n Q_{55}^c dz_c \quad n = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (\text{پ-۲۲})$$

روابط (۲۲) در روابط (۲۳) برقرار است.

$$Q_{11}^c = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (\text{الف-۲۳})$$

$$Q_{33}^c = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (\text{ب-۲۳})$$

$$Q_{55}^c = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{پ-۲۳})$$

### ۳- اعمال شرایط مرزی

مسئله تعمیم‌یافته بک شامل تیری با انتهای آزاد است که از نقطه انتهایی دیگر و همچنین نقطه‌ای میانی مقید شده است [۳۸]. در شکل ۳ هرچه تکیه‌گاه میانی به تکیه‌گاه انتهایی نزدیک‌تر شود، رفتار تیر به رفتار تیر یک‌سر گیردار میل می‌کند و هرچه تکیه‌گاه میانی به انتهای آزاد تیر نزدیک شود، شرایط مرزی به شرایط حاکم بر تیر دو سر لولا نزدیک می‌شود. با افزایش مقدار نیرو در تیر بک احتمال وقوع پدیده فلاتر و یا دیورژانس را داریم. از طرف دیگر وابستگی شدیدی بین مقدار فرکانس طبیعی نوسان تیر با محل تکیه‌گاه میانی وجود دارد. برای تیر دو سر لولا تحت اثر نیروی تعقیب‌کننده، ناپایداری

$$\begin{aligned} & \frac{6 E_{55,4} h_t \psi_t(x,t)}{h_c^3} - \frac{12 E_{55,4} u_0^b(x,t)}{h_c^3} + \\ & \frac{12 E_{55,4} u_0^t(x,t)}{h_c^3} + E_{55,2} \left( \frac{\partial}{\partial x} w_0^c(x,t) \right) - \\ & \frac{E_{55,3} \left( \frac{\partial}{\partial x} w_0^c(x,t) \right)}{h_c} + \frac{E_{55,3} \left( \frac{\partial}{\partial x} w_0^t(x,t) \right)}{h_c} - \\ & \frac{4 E_{55,4} \left( \frac{\partial}{\partial x} w_0^c(x,t) \right)}{h_c^2} + \frac{2 E_{55,4} \left( \frac{\partial}{\partial x} w_0^b(x,t) \right)}{h_c^2} + \\ & \frac{2 E_{55,4} \left( \frac{\partial}{\partial x} w_0^t(x,t) \right)}{h_c^2} \end{aligned} \quad (\text{ج-۲۱})$$

$$\begin{aligned} Q_{xzc} &= E_{55,0} u_1^c(x,t) + \frac{2 E_{55,1} h_b \psi_b(x,t)}{h_c^2} - \\ & \frac{2 E_{55,1} h_t \psi_t(x,t)}{h_c^2} - \frac{8 E_{55,1} u_0^c(x,t)}{h_c^2} + \\ & \frac{4 E_{55,1} u_0^b(x,t)}{h_c^2} + \frac{4 E_{55,1} u_0^t(x,t)}{h_c^2} - \\ & \frac{6 E_{55,2} \psi_b(x,t)}{h_c^3} - \frac{12 E_{55,2} u_1^c(x,t)}{h_c^2} - \\ & \frac{6 E_{55,2} h_t \psi_t(x,t)}{h_c^3} - \frac{12 E_{55,2} u_0^b(x,t)}{h_c^3} + \\ & \frac{12 E_{55,2} u_0^t(x,t)}{h_c^3} - \\ & + E_{55,0} \left( \frac{\partial}{\partial x} w_0^c(x,t) \right) - \frac{E_{55,1} \left( \frac{\partial}{\partial x} w_0^c(x,t) \right)}{h_c} + \\ & \frac{E_{55,1} \left( \frac{\partial}{\partial x} w_0^t(x,t) \right)}{h_c} - \frac{4 E_{55,2} \left( \frac{\partial}{\partial x} w_0^c(x,t) \right)}{h_c^2} \\ & + \frac{2 E_{55,2} \left( \frac{\partial}{\partial x} w_0^b(x,t) \right)}{h_c^2} + \frac{2 E_{55,2} \left( \frac{\partial}{\partial x} w_0^t(x,t) \right)}{h_c^2} \end{aligned} \quad (\text{س-۲۱})$$

که با استفاده از مدول‌های کششی و برشی هسته در جهت‌های مختلف، به کمک ثابت‌های رابطه (۲۲) تعریف شده است.

$$E_{11,n} = \int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} z_c^n Q_{11}^c dz_c \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (\text{الف-۲۲})$$

از حل همزمان سه معادله آخر شرایط مرزی برای رویه‌ها رابطه (۲۷) حاصل می‌شود.

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_7 & s_{10} & s_{13} & s_{16} & s_{19} & s_{22} \\ s_2 & s_4 & s_5 & s_8 & s_{11} & s_{14} & s_{17} & s_{20} & s_{23} \\ s_3 & s_5 & s_6 & s_9 & s_{12} & s_{15} & s_{18} & s_{21} & s_{24} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} w'_{0N}(x,t) \\ \frac{\partial}{\partial x} w^b_{0N}(x,t) \\ \frac{\partial}{\partial x} w^c_{0N}(x,t) \\ u'_{0N}(x,t) \\ \psi_{tN}(x,t) \\ u^b_{0N}(x,t) \\ \psi_{bN}(x,t) \\ u^c_{0N}(x,t) \\ u^c_{1N}(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

پس از اعمال شرایط مرزی در نقاط ابتدایی و انتهایی شبکه، تعداد مجهولات در رابطه (۲۸) به  $9(N-2)$  کاهش می‌یابد. یعنی با مشخص شدن توابع جابجایی در  $(N-2)$  نقطه شبکه‌ای مسئله حل می‌گردد. برای حل معادله کاهش یافته رابطه (۲۸) باید به ازای مقادیر مختلف نیروی  $P$  مقادیر ویژه محاسبه شوند و با توجه به مقادیر فرکانس‌های نوسانی، پایداری و یا ناپایداری حرکت تیر تحت اثر نیروی تعقیب‌کننده مشخص خواهد شد. روند حل به صورت مراحل زیر است.

۱- مشخص نمودن پارامترهای هندسی و مکانیکی تیر در روابط مانند طول تیر، مدول الاستیسیته و غیره. پس از این جایگذاری‌ها فقط دو مجهول  $P$  و  $w$  باقی خواهد ماند.

۲- به ازای نمو مقدار  $P$  از صفر تا یک مقدار حدی، مقادیر  $w$  از حل معادله تعیین می‌گردند. به این ترتیب پاسخ نیرو-فرکانس در تیر به دست خواهد آمد. به ازای هر مقداری از  $P$  که دو فرکانس طبیعی متوالی (اول و دوم) برابر شوند، فلاتر اتفاق خواهد افتاد.

#### ۴- حل معادلات

به دلیل میسر نبودن دست‌یابی به یک حل تحلیلی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل موجود، از روش حل عددی مربعات

فلاتر اتفاق نمی‌افتد و فقط کمانش استاتیکی ناپایداری غالب است. در شرایط مرزی دیگر مانند دیوار-لولا، لولا-دیوار و دیوار-دیوار با افزایش فاصله موقعیت مکانی تکیه‌گاه میانی از تکیه‌گاه انتهایی و با افزایش مقدار نیروی تعقیب‌کننده ابتدا پدیده فلاتر و سپس پدیده کمانش رخ می‌دهد [۳۸].

با توجه به شرایط مرزی حاکم بر تیر یک که از اصل همیلتون به دست آمد، مقادیر توابع جابجایی مجهول در دو نقطه مرزی  $X_1$  و  $X_N$  با توجه به مقدار تابع در سایر نقاط شبکه‌ای محاسبه می‌شوند. در نقطه  $X_1$  با استفاده از شرایط مرزی هندسی رابطه (۲۴) برقرار است.

$$\begin{aligned} u'_0(X_1) &= u^b_0(X_1) = \psi'_x(X_1) = 0 \\ \psi^b_x(X_1) &= u^c_1(X_1) = w^t_0(X_1) = 0 \\ w^b_0(X_1) &= w^c_0(X_1) = u^c_0(X_1) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

بر طبق رابطه (۲۵) از حل همزمان شش معادله اول شرایط مرزی در  $X_N$  خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} \frac{du'_0}{dx} \Big|_{x=X_N} &= \frac{du^b_0}{dx} \Big|_{x=X_N} = \frac{d\psi'_x}{dx} \Big|_{x=X_N} = 0 \\ \frac{d\psi^b_x}{dx} \Big|_{x=X_N} &= \frac{du^c_1}{dx} \Big|_{x=X_N} = \frac{du^c_0}{dx} \Big|_{x=X_N} = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

بنابراین رابطه (۲۶) را می‌توان نوشت.

$$u'_0(X_N) = -\frac{1}{a_{NN}} \sum_{j=2}^{N-1} a_{Nj} u'_0(x_j) \quad (26\text{-الف})$$

$$u^b_0(X_N) = -\frac{1}{a_{NN}} \sum_{j=2}^{N-1} a_{Nj} u^b_0(x_j) \quad (26\text{-ب})$$

$$\psi^t_x(X_N) = -\frac{1}{a_{NN}} \sum_{j=2}^{N-1} a_{Nj} \psi^t_x(x_j) \quad (26\text{-پ})$$

$$\psi^b_x(X_N) = -\frac{1}{a_{NN}} \sum_{j=2}^{N-1} a_{Nj} \psi^b_x(x_j) \quad (26\text{-ت})$$

$$u^c_1(X_N) = -\frac{1}{a_{NN}} \sum_{j=2}^{N-1} a_{Nj} u^c_1(x_j) \quad (26\text{-ث})$$

$$u^c_0(X_N) = -\frac{1}{a_{NN}} \sum_{j=2}^{N-1} a_{Nj} u^c_0(x_j) \quad (26\text{-ج})$$

$$b_{ij} = 2a_{ij} \left( a_{ii} - \frac{1}{x_i - x_j} \right), \quad i \neq j \quad (۳۰-پ)$$

$$b_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N b_{ij} \quad (۳۰-ت)$$

$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{k=1, k \neq i}^N (x_i - x_k) \quad (۳۰-ث)$$

به کمک توابع وزنی معرفی شده، معادلات دیفرانسیل حرکت تیر بک به مجموعه‌ای از معادلات جبری تبدیل خواهند شد. برای این منظور با فرض جدایی‌پذیری بخش وابسته به زمان در توابع جابجایی تیر ساندویچی می‌توان رابطه (۳۱) را نوشت.

$$u_j(x, t) = e^{\omega t} u_j(x), \quad j = t, b, c \quad (۳۱-الف)$$

$$w_j(x, t) = e^{\omega t} w_j(x), \quad j = t, b, c \quad (۳۱-ب)$$

با جایگذاری روابط (۳۱) در روابط (۱۷) و (۱۹) و همچنین استفاده از روش تعمیم‌یافته مربعات دیفرانسیلی در تقریب مقادیر مشتق توابع، مجموعه معادلات حرکت تیر به مسئله مقدار ویژه رابطه (۳۲) تبدیل می‌شود.

$$[K]\{X\} = \omega^2 [M]\{X\} \quad (۳۲)$$

که در آن ماتریس‌های مربعی  $[K]$  و  $[M]$  به ترتیب معرف ماتریس سفتی و ماتریس جرم تیر است. این دو ماتریس از مرتبه  $9N$  می‌باشند. بردار مجهولات  $\{X\}$  نیز شامل مقادیر توابع جابجایی در نقاط شبکه‌ای است.

### ۵- اعتبارسنجی معادلات

برای صحت کار و اعتبارسنجی، از مقایسه نتایج بدست آمده مطالعه حاضر، با سایر نتایج مطالعات ناپایداری دینامیکی تیر یک‌سرگیردار کامپوزیت چندلایه استفاده شده است. در این رابطه مقایسه نتایج با مرجع [۲۴] صورت گرفته است. در این مرجع تیر مورد بررسی یک‌سرگیردار بوده که از سمت آزاد تیر تحت اثر نیروی متمرکز تعقیب‌کننده قرار دارد. مشخصات هندسی و مکانیکی تیر در جدول ۱ آورده شده است.

ضخامت لایه‌های تیر با یکدیگر یکسان در نظر گرفته شده است.

دیفرانسیلی تعمیم‌یافته<sup>۱</sup> استفاده می‌شود. این روش به منظور گسسته‌سازی معادلات حاکم و شرایط مرزی حاکم، برای بهبود روش مربعات دیفرانسیلی و نیز محاسبه ضرایب وزنی ارائه شده است. در سال‌های اخیر این روش به دلیل دقت و نرخ همگرایی بالا مورد توجه پژوهشگران شاخه‌های گوناگون علوم قرار گرفته است. ماهیت روش مربعات دیفرانسیلی مشتق جزئی تابع یکنواخت نسبت به متغیری می‌باشد که توسط مجموع وزنی مقادیر تابع در تمام نقاط گسسته در آن جهت تقریب زده شده است. ضرایب وزنی مربوط به آن، به مساله خاصی مربوط نیست و تنها به نقاط شبکه و مرتبه مشتق بستگی دارد. همچنین محدودیتی در انتخاب نقاط شبکه وجود ندارد هر چند که استفاده از شبکه‌های غیریکنواخت به همگرایی سریع‌تری منجر خواهد شد. جزئیات و مثال‌های فراوانی از این روش در مرجع [۳۹] معرفی شده است. در این روش به ترتیب مشتق‌های مرتبه اول و دوم هر تابع یکنواخت و مشتق‌پذیر  $f(x)$  در نقطه  $x = x_i$  توسط روابط (۲۸) با بسط تیلور تقریب زده می‌شوند [۳۹].

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \sum_{j=1}^N a_{ij} f(x_j) \quad (۲۸-الف)$$

$$\frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} = \sum_{j=1}^N b_{ij} f(x_j) \quad (۲۸-ب)$$

در روابط (۲۸) تعداد نقاط شبکه است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در این روش مشتقات تابع در هر نقطه از مجموع وزنی مقدار خود تابع در نقاط شبکه محاسبه می‌گردد. گسسته‌سازی طول تیر توسط رابطه (۲۹) انجام می‌شود.

$$X_i = a(1 - \cos[(2i - 3)\pi / 2(N - 2)] / 2, \quad (۲۹)$$

$$i = 2, 3, \dots, N - 1$$

مقدار ضرایب وزنی در این روش با استفاده از روابط (۳۰) محاسبه می‌شوند.

$$a_{ij} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j) M^{(1)}(x_j)}, \quad i \neq j \quad (۳۰-الف)$$

$$a_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} \quad (۳۰-ب)$$

جدول ۱: خواص ماده و هندسه تیرهای مورد مطالعه [۲۴]

Table 1. Material and geometrical properties of the beams of this study [24]

مقدار [۲۴]	پامتر هندسی/مکانیکی
۰/۳۵۶۷	$E_{11}$ (GPa)
۰/۱۰۳۸	$E_{22}$ (GPa)
۰/۰۴۶۳	$G_{12}$ (GPa)
۰/۳۳	$\nu_{12}$
۰/۰۰۵	$h$ (m)
۰/۰۲	$b$ (m)
۰/۱۸۶	$\rho$ (kg / m)

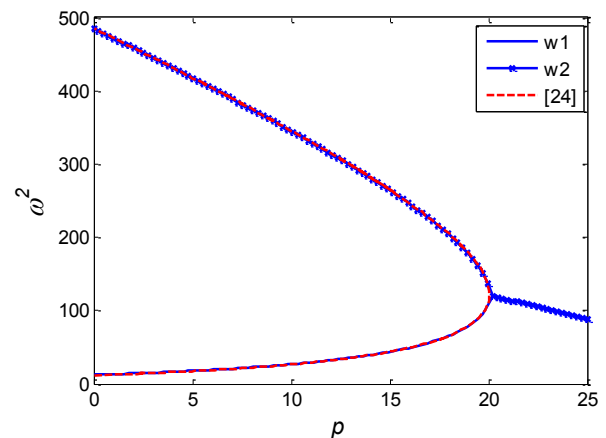


Fig. 4. The compression of the variation of the frequencies of the first and second oscillations of isotropic beam under follower force with reference [24]

شکل ۴: مقایسه تغییرات فرکانس‌های اول و دوم نوسانی بدست آمده از تیر ایزوتروپ تحت نیروی تعقیب‌کننده با مرجع [۲۴]

برای مشاهده دقت روش مورد مطالعه نتایج تیر ایزوتروپ در شکل ۴ و تیر کامپوزیتی در جدول ۲ و شکل ۵ مورد بررسی قرار گرفته است. تیر کامپوزیتی متقارن مورد مطالعه به صورت تک‌لایه ارتوتروپیک با زوایای صفر، ۱۵، ۳۰، ۶۰ و ۹۰ درجه در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل از روش مورد مطالعه با نتایج به‌دست آمده از روش المان محدود مرجع [۲۴] مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود نتایج از دقت کافی برخوردار می‌باشند.

تغییرات نیرو بر حسب فرکانس بی‌بعد به‌دست آمده برای دو زاویه صفر و ۹۰ درجه در شکل ۵ با مرجع [۲۴] مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود نتایج روش حاضر از دقت خوبی برخوردار است.

برای بررسی همگرایی نتایج ارائه شده با استفاده از روش عددی، اثر تعداد نقاط بر همگرایی پاسخ مسئله مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به مقدار فرکانس طبیعی تیر بلند تیموشنکو، انتظار می‌رود برای حالتی که در تیر ساندویچی مدول الاستیک رویه‌ها به صفر میل کند همان فرکانس طبیعی حاصل گردد. زیرا در این حالت فقط پاسخ هسته محاسبه خواهد شد. در شکل ۶ تغییرات فرکانس طبیعی اول تیر مورد نظر برای تعداد نقاط شبکه‌ای مختلف نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۶ مشاهده شده است به ازای  $N=7$  نیز پاسخ به مقدار مورد نظر همگرا شده است. بنابراین برای انجام تحلیل‌ها از ۱۱ نقطه گرهی استفاده شده است.

با ۱۱ نقطه گرهی مقایسه‌ای بین مقدار فرکانس طبیعی اول و دوم تیر تیموشنکو با مقادیر متناظر در هسته تیر ساندویچی انجام شده است. در شکل‌های ۷ و ۸ تغییرات این دو فرکانس را بر حسب نسبت طول به ضخامت هسته تیر نشان داده شده است. همانطور که انتظار می‌رفت برای تیرهای بلند این مقدار فرکانس طبیعی در این دو تیر به یک مقدار همگرا شده است.

در شکل‌های ۹ و ۱۰ تغییرات فرکانس‌های اول و دوم تیر ساندویچی با افزایش مقدار نیروی بدون بعد تعقیب‌کننده نشان داده شده است. در شکل ۹ تغییرات مقدار موهومی این دو فرکانس با نیروی بدون بعد و در شکل ۱۰ هم مقدار حقیقی آن‌ها نشان داده شده است. همانطور که مشاهده شد در لحظه‌ای که بخش موهومی فرکانس‌های اول و دوم با یکدیگر برابر می‌شوند، سیستم در آستانه ناپایداری قرار می‌گیرد.

تغییرات فرکانس‌های نوسانی اول و دوم یک تیر ساندویچی مرتبه بالا برای دو مقدار مختلف نسبت طول به ضخامت هسته در شکل ۱۱ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده شد با افزایش نسبت طول به ضخامت هسته، نیرو و فرکانس بالاتر نیز افزایش پیدا خواهند کرد. این افزایش نیرو و فرکانس به دلیل باریک‌تر و بلندتر شدن تیر است چون با افزایش نسبت طول به ضخامت هسته تیر بلندتر و نازک‌تر به حساب می‌آید و بخش زیادی از نیرو صرف نوسان تیر می‌شود.

در شکل ۱۲ اثر نسبت ضخامت هسته به ضخامت پوسته در مقدار نیروی آستانه ناپایداری یک تیر ساندویچی متقارن مورد بررسی قرار گرفته است. همانطور که از شکل ۱۲ مشاهده می‌شود در تیرهای بلند با افزایش ضخامت پوسته‌ها، بخش بزرگتری از نیروی تعقیب‌کننده به

جدول ۲: مقایسه نیرو و فرکانس بی‌بعد شده فلاتر روش حاضر با مرجع [۲۴] برای تیر کامپوزیت چندلایه ارتوتروپیک

Table 2. The compression of the force and the dimensionless flutter of the current work with [24] for the orthotropic multilayer composite beams

مقدار فرکانس مرجع [۲۴]	مقدار فرکانس روش حاضر	مقدار نیرو مرجع [۲۴]	مقدار نیرو روش حاضر	زاویه
۱۳/۳۰۷	۱۴/۰۲۱	۶۸/۶۸۹	۶۶/۲۶۲	۰
۱۶/۴۱۰	۱۶/۰۱۱	۶۰/۷۸۹	۵۸/۶۷۳	۱۵
۱۶/۳۲۲	۱۶/۲۰۱	۴۱/۸۳۶	۴۱/۹۶۵	۳۰
۱۱/۶۰۳	۱۱/۶۰۸	۲۱/۰۵۷	۲۱/۸۵۹	۶۰
۱۰/۹۰۳	۱۰/۸۲۵	۱۹/۸۵۰	۱۸/۹۶۵	۹۰

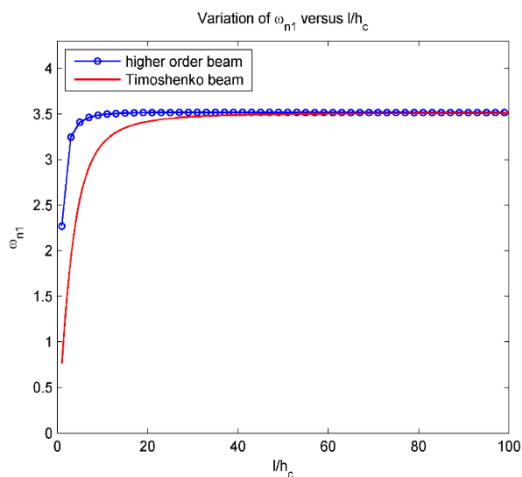


Fig. 7. The variation of the first dimensionless natural frequency with respect to the length to thickness ratio in sandwich and Timoshenko beams

شکل ۷: تغییرات فرکانس طبیعی اول بی‌بعد با نسبت طول به ضخامت در تیرهای ساندویچی و تیموشنکو

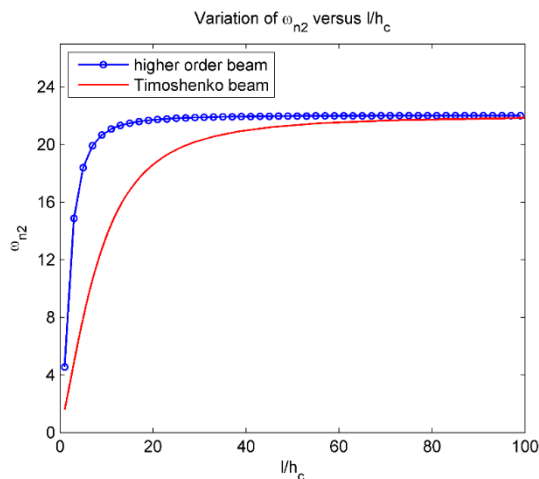


Fig. 8. The variation of the second dimensionless natural frequency with respect to the length to thickness ratio in sandwich and Timoshenko beams

شکل ۸: تغییرات فرکانس طبیعی دوم بی‌بعد با نسبت طول به ضخامت در تیرهای ساندویچی و تیموشنکو

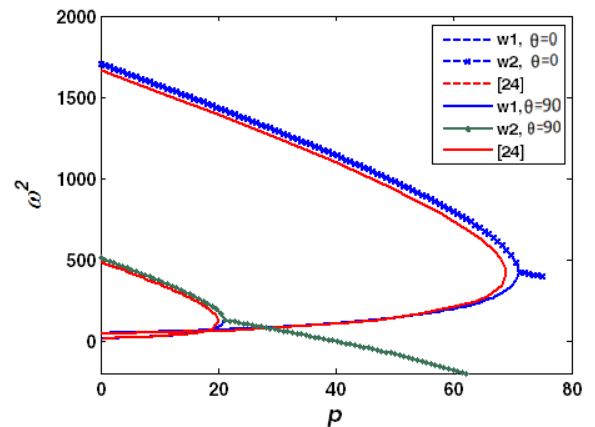


Fig. 5. The compression of the variation of the frequencies of the first and second oscillations of composite beam under follower force with reference [24]

شکل ۵: مقایسه تغییرات فرکانس‌های اول و دوم نوسانی بدست آمده از تیر کامپوزیت تحت نیروی تعقیب‌کننده با مرجع [۲۴].

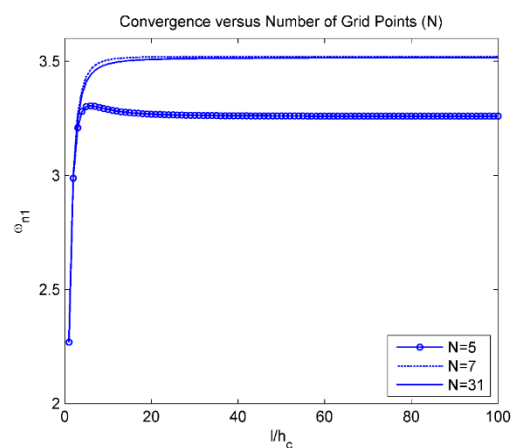


Fig. 6. The variation of the first natural frequency based on the length to core thickness ratio for different network grid points, neglecting the effect of shells on the beam's response

شکل ۶: تغییرات فرکانس طبیعی اول بر حسب نسبت طول به ضخامت هسته برای تعداد مختلف نقاط شبکه‌ای با صرف نظر از تاثیر پوسته‌ها بر پاسخ تیر

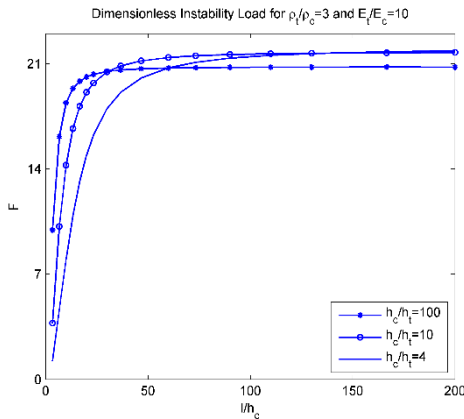


Fig. 12. Variation of the dimensionless flutter force with the length to core thickness ratio for different core thickness to shell thickness ratios

شکل ۱۲: تغییرات نیروی بدون بعد فلاتر با نسبت طول به ضخامت هسته برای نسبت‌های مختلف ضخامت هسته به پوسته

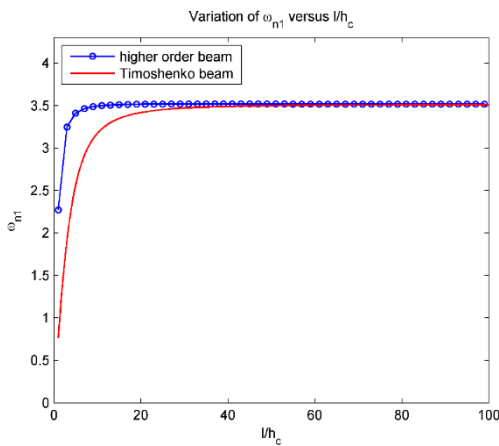


Fig. 13. The variation of the first dimensionless natural frequency with respect to the length to thickness ratio in sandwich and Timoshenko beams

شکل ۱۳: تغییرات فرکانس طبیعی اول بی بعد با نسبت طول به ضخامت در تیرهای ساندویچی و تیموشنکو

نوسان آن‌ها تعلق می‌گیرد و در نتیجه مقدار نیروی آستانه ناپایداری نیز بزرگتر خواهد شد.

در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ تغییرات بین مقدار فرکانس طبیعی اول و دوم تیر تیموشنکو با مقادیر متناظر در هسته تیر ساندویچی بر حسب نسبت طول به ضخامت هسته تیر نشان داده شده است. همانطور که انتظار می‌رفت برای تیرهای بلند این مقدار فرکانس طبیعی در این دو تیر به یک مقدار همگرا شده است.

در شکل ۱۵ مقایسه‌ای بین مقدار نیروی آستانه فلاتر در تیر تیموشنکو و هسته تیر ساندویچی انجام شده است. همانطور که در

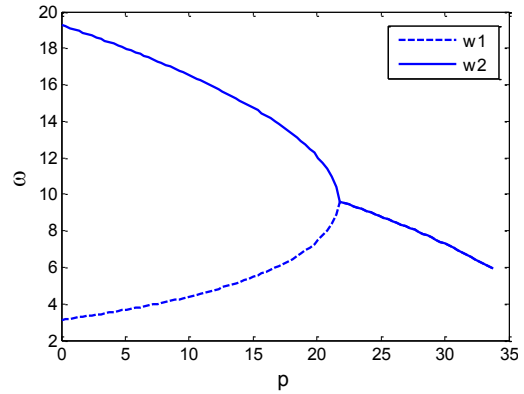


Fig. 9. The variation of the frequencies of the first and second oscillations of a higher order sandwich beam with the value of the follower force

شکل ۹: تغییرات فرکانس‌های اول و دوم نوسانی یک تیر ساندویچی مرتبه بالا با مقدار نیروی تعقیب‌کننده

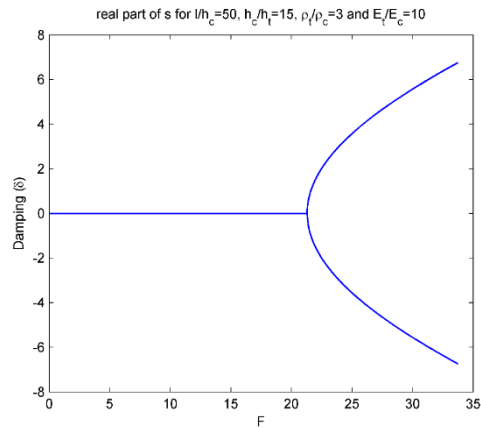


Fig. 10. The variation of the frequencies of the first and second damping of a higher order sandwich beam with the value of the follower force

شکل ۱۰: تغییرات میرایی‌های اول و دوم نوسانی یک تیر ساندویچی مرتبه بالا با مقدار نیروی تعقیب‌کننده

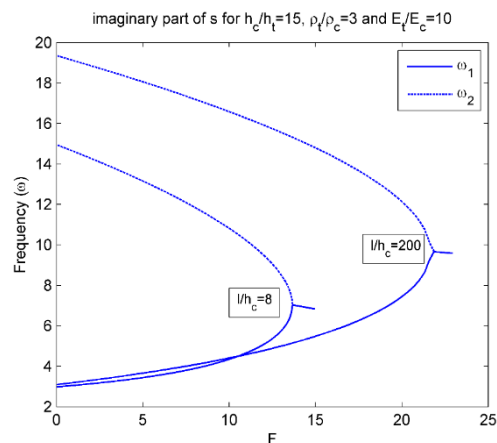


Fig. 11. Variation of the frequencies of the first and second oscillations of different values of the length to core thickness ratio

شکل ۱۱: تغییرات فرکانس‌های اول و دوم نوسانی یک تیر ساندویچی مرتبه بالا برای نسبت‌های مختلف طول به ضخامت هسته

فلاتر پرداخته شده است. برای استخراج روابط حاکم از تئوری‌های مرتبه بالا و از اصل همیلتون استفاده شد. حل معادله‌های بدست آمده با استفاده از روش حل عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته انجام شده است. نتایج این پژوهش به صورت زیر ارائه می‌گردد:

۱- در تیرهای بلند، مقدار نیروی آستانه پدیده فلاتر به نتایج متناظر در تیر تیموشنکو میل می‌کند.

۲- در لحظاتی که بخش موهومی فرکانس‌های اول و دوم با یکدیگر برابر می‌شوند، سیستم در آستانه ناپایداری قرار می‌گیرد و پدیده فلاتر رخ می‌دهد.

۳- در تیرهای بلند با افزایش ضخامت رویه‌ها، مقدار نیروی آستانه ناپایداری بزرگتر می‌شود.

۴- با افزایش نسبت طول به ضخامت هسته در تیر ساندویچی، نیرو و فرکانس فلاتر نیز افزایش می‌یابد.

۵- در تیر دو سر لولا تحت اثر نیروی تعقیب‌کننده، ناپایداری فلاتر رخ نمی‌دهد و فقط کمانش استاتیکی ناپایداری غالب است.

### فهرست علائم

#### علائم انگلیسی

جابه‌جایی تیر در راستای محور $x$	$u$
جابه‌جایی تیر در راستای محور $y$	$v$
جابه‌جایی تیر در راستای محور $z$	$w$
جابه‌جایی صفحه میانی تیر در راستای محور $x$	$u_0$
جابه‌جایی صفحه میانی تیر در راستای محور $y$	$v_0$
جابه‌جایی صفحه میانی تیر در راستای محور $z$	$w_0$
مختصات در راستای ضخامت تیر، $m$	$z$
نیروهای صفحه‌ای، $N/m$	$N_{ij}$
ممان‌های خمشی، $Nm$	$M_{ij}$
نیرو، $N$	$R$
نیرو، $N$	$Q$
انرژی جنبشی، $J$	$T$
انرژی پتانسیل ناشی از کار، $J$	$V$
جز حجمی، $m^3$	$dV$
مختصات محلی در راستای تیر، $m$	$b_1$
بردار مماسی	$B_1$
نیروی فلاتر، $N$	$P$
گشتاور $n$ ام رویه‌های بالایی، پایینی و هسته، $kg.m^4$	$I_{nj}$
ماتریس سفتی کششی	$A$
ماتریس سفتی جفت‌شدگی کششی-خمشی	$B$

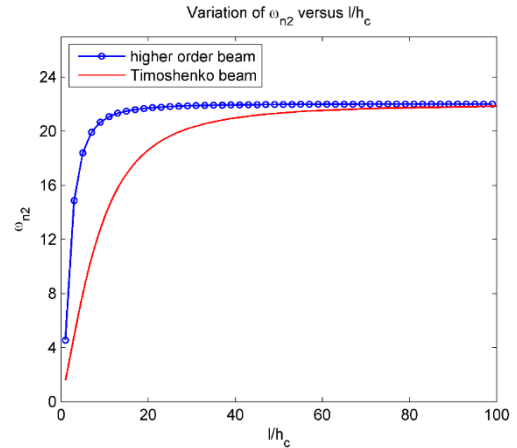


Fig. 14. The variation of the second dimensionless natural frequency with respect to the length to thickness ratio in sandwich and Timoshenko beams

شکل ۱۴: تغییرات فرکانس طبیعی دوم بی‌بعد با نسبت طول به ضخامت در تیرهای ساندویچی و تیموشنکو

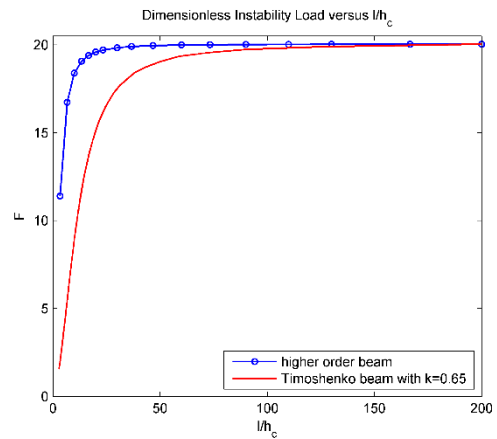


Fig. 15. The variation of the dimensionless flutter force with respect to the length to thickness ratio in Timoshenko beams and higher order beam's core

شکل ۱۵: تغییرات نیروی بدون بعد فلاتر با نسبت طول به ضخامت هسته در تیر تیموشنکو و هسته تیر مرتبه بالا

شکل ۱۵ مشاهده شد، به‌ازای مقادیر بزرگ نسبت طول به ضخامت هسته مقدار نیروی فلاتر این دو تیر به سمت یکدیگر میل می‌کنند.

### ۶- نتیجه‌گیری

هدف از انجام این پژوهش با توجه به خلا نتایج مطالعات پیشین در زمینه ناپایداری سازه‌های هدفمند، بررسی وقوع پدیده فلاتر تیر ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر هدفمند تابعی تحت اثر نیروهای دنبال‌کننده و نیز بدست آوردن نیروی آستانه فلاتر است. همچنین به بررسی اثر پارامترهای مختلف هندسی و مکانیکی تیر بر نیروی آستانه

buckling of composite plates containing rectangular delaminations using exact stiffness analysis and smearing method. *Computers & Structures*, 134 (2014) 32-47.

[8] G. He, X. Yang. Finite element analysis for buckling of two-layer composite beams using Reddy's higher order beam theory; *Finite Elements in Analysis and Design*, 83(2014) 49-57.

[9] C. W. Yap, G. B. Chai. Analytical and numerical studies on the buckling of delaminated composite beams. *Composite Structures*, 80(2007) 307-319.

[10] S. Katz, S. Givli. The post-buckling behavior of a beam constrained by springy walls. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 78 (2015)443-466.

[11] X. Li, H. L. Lv, G. C. Zhang, B. D. Ding. Seismic behavior of replaceable steel truss coupling beams with buckling restrained webs, *Journal of Constructional Steel Research*, 104 (2015) 167-176.

[12] A. Genoese, A. Bilotta, G. Garcea. Buckling analysis through a generalized beam model including section distortions. *Thin-Walled Structures*, 85 (2014) 125-141.

[13] N.S. Trahair. Bending and buckling of tapered steel beam structures. *Engineering Structures*, 59 (2014) 229-237.

[14] V. V. Bolotin. *The dynamic Stability of elastic systems*; Holden; Day, INC. London. (1964).

[15] H. Ziegler. *Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik*; Ing.-Arch, 20(1952) 49-56.

[16] C. D. Bailey, James L. Haines. Vibration and stability of non-conservative follower force systems. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 26 (1981) 1-31.

[17] Q. S. Li. Stability of non-uniform columns under the combined action of concentrated follower forces and variably distributed loads. *Journal of Constructional Steel research*, 64 (2008) 367-376.

[18] H. S. Alkhalidia, I. A. Alshaikha, R. A.Mallouhb, O. Ghazalb. Closed-form solution of large deflection of a spring-hinged beam subjected to non-conservative force and tip end moment. *European Journal of Mechanics*. 47 (2014) 271-279.

ماتریس سفتی خمشی  $D$

ضریب تصحیح برش  $k$

ماتریس ضرایب مشتق اول در روش حل عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته  $a_{ij}$

ماتریس سختی کل، N/m  $K$

بردار جابه‌جایی‌ها، m  $X$

ماتریس جرمی، kg  $M$

مدول الاستیسته، N/m<sup>4</sup>  $E$

ضخامت رویه بالا، m  $h_t$

ضخامت هسته، m  $h_c$

ضخامت رویه پایین، m  $h_b$

علائم یونانی

چگالی، kg/m<sup>3</sup>  $\rho$

مربع فرکانس، 1/s<sup>2</sup>  $\omega^2$

پارامتر محلی در راستای تیر، m  $\xi$

چرخش در صفحه، rad  $\psi$

تنش، N/m<sup>4</sup>  $\sigma$

کرنش  $\varepsilon$

کرنش برشی  $\gamma$

## مراجع

- [1] E. Nikolai. On the stability of the rectilinear form of equilibrium of a bar in compression and torsion. *Izv Leningr Politech.* (1928).
- [2] M. Beck. Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedruckten Stabes (The buckling load of the cantilever column subjected to tangential force). *Z. Angew. Math. Phys.* 3 (1952) 225-228.
- [3] H. H. E. Leipholz. On the sufficiency of the energy criterion for the stability of certain nonconservative systems of the follower-load type. *Journal of Applied Mechanics*, 39(1972) 717-722.
- [4] H. H. E. Leipholz. On principles of stationary for non-self-adjoint rod problems. *Computer Methods in Applied Mechanics*, 59(1986) 215- 226.
- [5] R.C. Kar, W. Hauger. Stability of a pretwisted tapered cantilever beam subjected to dissipative and follower forces. *Journal of Sound and Vibration*, 81(1982) 565-573.
- [6] Q. Chen, P. Qiao. Post-buckling Behavior of Imperfect Laminated Composite Plates with Rotationally-restrained Edges. *Composite Structures*, 125 (2015) 117-126.
- [7] M. Damghani, D. Kennedy, C. Featherston. *Global*



- Han Yan. Modal analysis of inflated membrane cone considering pressure follower force effect. *Thin-Walled Structures*. 132 (2018) 596-603.
- [30] K. Malekzadeh, M.R. Khalili, R.K. Mittal. Local and Global Damped Vibrations of Plates with a Viscoelastic Soft Flexible Core: An Improved High-order Approach. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 7 (2005) 431-456.
- [31] Y. Frostig, O. T. Thomsen. high-order free vibrations of sandwich panels with a Flexible core. *Journal of solid and structure*, 41(2004)1697-1724.
- [32] Y. Forsting, M. Baruch, O. Vinay, i. shteinman, i. higher-order theory for sandwich beams behavior with transversely flexible core. *journal of engineering mechanics*, 118 (1992)1026-1043.
- [33] Y. Forsting, M. Baruch. free vibration of sandwich beams with a transverse flexible core: a higher order approach. *journal of solids and vibration*, 176 (1994)195-208.
- [34] Frostig, Y.. Buckling of sandwich panels with a flexible core-high-order theory. *International Journal of Solids and Structures*. 35 (1998)183-204.
- [35] Reddy JN (2003) *Mechanics of laminated composite plates and shells, theory and application*. CRC Press, Boca Raton
- [36] KK. Malekzadeh, *Impact Analysis on Compound Structures, Structural Impact Dynamics and Contact Theories*, Almas Publishers, 1 (2016). (in Persian)
- [37] Simites, George J., and Dewey H. Hodges. *Fundamentals of structural stability*. Butterworth-Heinemann, 2006.
- [38] Elishakoff, Isaac, and Itzhak Lottati.. Divergence and flutter of nonconservative systems with intermediate support. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 66.2: (1988) 241-250.
- [39] Shu, Chang. *Differential quadrature and its application in engineering*. Springer Science & Business Media, (2012).
- [19] P.M. Culkowski, H. Reismann. Plate buckling due to follower edge forces. *Journal of Applied Mechanics*, 44 (1977) 768-769.
- [20] M. Farshad. Stability of cantilever plates subjected to biaxial sub-tangential loading. *Journal of Sound and Vibration*, 58(1978) 555-561.
- [21] H.H.E. Leipholz. Stability of rectangular simply supported plate subjected to nonincreasing tangential follower forces. *Journal of Applied Mechanics*, 45 (1978) 223-224.
- [22] H.H.E. Leipholz, F. Pfenndt. Application of extended equations of Galerkin to stability problems of rectangular plates with free edges subjected to uniformly distributed follower forces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 37(1983) 341-365.
- [23] J.H. Kin, H.S. Kim. A study on the dynamic stability of plates under a follower force, *Computers & Structures*, 74(2000) 351-363.
- [24] V. K. Goyala, R. K. Kapania. Dynamic stability of laminated beams subjected to non-conservative loading. *Thin-Walled Structures*, 46 (2008) 1359-1369.
- [25] N. I. Kim, J. Lee. Divergence and flutter behavior of Beck's type of laminated box beam. *International Journal of Mechanical Sciences*. 84 (2014) 91-101.
- [26] M. J. Smyczynski, E. Magnucka-Blandzi. Static and dynamic stability of an axially compressed five-layer sandwich beam. *Thin-Walled Structures*. 90(2015) 23-30.
- [27] H. Alidoost, J. Rezaeepazhand. Instability of a delaminated composite beam subjected to a concentrated follower force. *Thin-Walled Structures*. 120 (2017) 191-202.
- [28] H. Alidoost, J. Rezaeepazhand, Flutter of multi-cracked laminated composite beams subjected to a non-conservative compressive load, *Engineering Fracture Mechanics*, 199 (2018) 1-12. (in Persian)
- [29] Rui-Qiang Ma, Jian-Zheng Wei, Hui-Feng Tan, Zhi-

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

G. Payganeh, K. Malekzade Fard, F. Rashed Saghavaz, *Analysis of Dynamic Instability in Sandwich Thick Beams with Flexible Functional Core Subjected to a Follower Force*, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 53(2) (2021) 863-880.

DOI: [10.22060/mej.2019.16239.6308](https://doi.org/10.22060/mej.2019.16239.6308)



