



## تحلیل گذرا و ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی ناقص مدرج تابعی در معرض فشار متحرک

احسان سلاحی<sup>۱\*</sup>، علیرضا ستوده<sup>۲</sup>، مسعود طهانی<sup>۳</sup>

۱- گروه مهندسی مکانیک، واحد مرودشت، دانشگاه آزاد اسلامی، مرودشت، ایران

۲- دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

۳- گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸/۰۴/۲۷

بازنگری: ۱۳۹۸/۰۸/۱۵

پذیرش: ۱۳۹۸/۰۹/۱۸

ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۱۰/۰۶

### کلمات کلیدی:

مواد مدرج تابعی

پوسته مخروطی

فشار متحرک

روش مربعات دیفرانسیلی

تئوری لایه‌ای

**خلاصه:** در این مقاله روشی کارآمد و دقیق برای تحلیل گذرا و ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی ناقص مدرج تابعی در معرض فشار متحرک متقارن داخلی و خارجی توسعه داده شده است. خواص مواد پوسته دارای تغییرات پیوسته در جهت شعاعی است و از مدل‌های موری-تاناکا و کسر حجمی قانون توزیع توانی پیروی می‌کند. برای بررسی این مساله روشی حل عددی که ترکیبی از روش‌های تئوری لایه‌ای، روش مربعات دیفرانسیلی و بسط سری فوریه است بکار گرفته شد. از بسط سری فوریه برای مدل‌سازی تغییرات جابجایی و فشار دینامیکی در جهت محوری استفاده می‌شود. سپس با بکارگیری تئوری لایه‌ای در راستای ضخامت و اعمال آن در اصل هامیلتون، معادلات حرکت و شرایط مرزی تعیین گردید. در آخر از روش مربعات دیفرانسیلی جهت مدل‌سازی تغییرات جابجایی در معادلات حاکم در دامنه زمانی استفاده گردید. این تحقیق دارای نتایج مفیدی جهت طراحی پوسته‌های مدرج تابعی در معرض فشار متحرک می‌باشد. نتایج بدست آمده از این مدل‌سازی به صورت موفقیت‌آمیزی با نتایج مشابه موجود در مقالات مورد مقایسه قرار گرفت. مطالعه روند همگرایی، سرعت بالای همگرایی این روش را اثبات نمود. نتایج بدست آمده بیانگر این است که تحریک ناشی از عبور فشار متحرک در پوسته موجب ایجاد ارتعاشات آزاد با دامنه ارتعاشی قابل توجهی می‌شود.

### ۱- مقدمه

یکی از مهم‌ترین مشکلات کامپوزیت‌های لایه‌ای، ایجاد تنش‌های بین لایه‌ای در سطح مشترک بین لایه‌ها است. بنابراین دسته جدیدی از مواد کامپوزیتی ایجاد گردید که در آن تغییر خواص ماده به صورت تدریجی و پیوسته می‌باشد. به این مواد، مواد مدرج تابعی می‌گویند. مواد مدرج تابعی پتانسیل زیادی جهت بکارگیری در شرایط ویژه دارند که باعث افزایش تمایل به استفاده از آن‌ها در صنایع مختلف مانند: هوافضا، خودروپی و تجهیزات درمانی شده است. ویژگی‌های بسیار زیاد مواد مدرج تابعی در مقایسه با مواد متداول صنعتی در کنار کاربردهای صنعتی زیاد پوسته‌ها، موجب جلب توجه زیاد محققان به بررسی رفتار دینامیکی آن‌ها شده است. پوسته‌های مخروطی ناقص،

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: selahi@miau.ac.ir

سازه اصلی سیستم‌های رانش در هواپیماها، فضاپیماها و راکت‌ها می‌باشند. تمامی این سازه‌ها به کرات در معرض بارهای دینامیکی قرار می‌گیرند. بنابراین ارائه راه حلی دقیق در تحلیل دینامیکی رفتار این سازه‌ها جهت طراحی و ساخت بهینه آن‌ها بسیار با اهمیت می‌باشد. اکثر تحقیقات انجام شده در زمینه تحلیل دینامیکی پوسته‌های مدرج تابعی، متمرکز بر پوسته‌های استوانه‌ای بوده است که اهم آن‌ها به شرح زیر است. سانتز و همکاران [۱] با ارائه مدل اجزا محدود در محیط الاستیک خطی به تحلیل ترموالاستیک پوسته مدرج تابعی استوانه‌ای در معرض شوک حرارتی متقارن محوری پرداختند. فانگ و همکاران [۲] پراکندگی چندگانه امواج برشی و ایجاد تنش دینامیکی در پوسته استوانه‌ای زیرسطحی در یک ماده مدرج تابعی متصل شده به یک ماده همگن را بررسی نمودند. شهابیان و حسینی [۳] به

روش ترکیبی تئوری لایه‌ای و روش مربعات دیفرانسیلی، رفتار گذرای پوسته‌های مخروطی مدرج تابعی در معرض فشارهای دینامیکی متقارن و نامتقارن را بررسی نمودند. صیدی [۱۷] با استفاده از تئوری بهبودیافته مرتبه بالا و روش حل گلرکین، کمانش سازه مخروطی ناقص ساندویچی، با هسته نرم و روکش‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی را مطالعه نمود.

تئوری لایه‌ای دارای دقت بالایی در محاسبه میدان جابجایی و به دنبال آن محاسبه تانسورهای کرنش و تنش در مقایسه با تئوری‌های مرتبه اول و بالاتر دارد [۱۸]. روش مربعات دیفرانسیلی نیز، یک روش عددی توانمند با دقت بالا و همگرایی سریع در حل معادلات دیفرانسیلی حاکم است [۵]. تحقیقات انگشت‌شماری در زمینه تحلیل پوسته‌های کامپوزیتی لایه‌ای و مدرج تابعی در معرض بار متحرک انجام شده است که تقریباً تمامی آن‌ها نیز منحصر به پوسته‌های استوانه‌ای است که در ادامه به معرفی آن‌ها پرداخته می‌شود.

زنگ و هاپکینز [۱۹] به مدل‌سازی امواج خمشی در جداره استوانه کامپوزیتی در معرض فشاری متحرک داخلی پرداختند. فاریا [۲۰]، پنل استوانه‌ای در معرض نیرو و یا جرم متحرک را توسط روش روش اجزا محدود شبیه‌سازی نمود. میرزایی [۲۱] روش‌های حل فرم بسته‌ای جهت بررسی پاسخ سازه‌ای و همچنین امواج تنشی خمشی و برشی در تیوپ استوانه‌ای جدار نازک در معرض فشار متحرک داخلی، معرفی نمود. شنگ و وانگ [۲۲ و ۲۳] معادلات حاکم در تحلیل پاسخ استوانه مدرج تابعی دارای لایه پیزوالکتریک در معرض شوک حرارتی و بار متحرک را ارائه نمودند.

سوفیو [۲۴] روشی تحلیلی جهت بررسی رفتار دینامیکی استوانه مدرج تابعی بسیار طویل در معرض بارهای ترکیبی، کشش محوری، فشار داخلی و بار متحرک فشاری حلقه‌ای ارائه نمود. ملک‌زاده و همکاران [۲۵ و ۲۶] با بکارگیری روش ترکیبی مربعات دیفرانسیلی و روش اجزا محدود، انتقال حرارت و پاسخ دینامیکی گذرای استوانه مدرج تابعی در معرض بارهای متحرک ترمو-مکانیکی و شار حرارتی مرزی متحرک را بررسی نمودند. کارتونن و هرترن [۲۷] با استفاده از مدل یک‌بعدی بستر پسترناک با میرایی کلونین-ویت، رفتار دینامیکی روکش الاستیک استوانه‌ای در معرض بار متحرک را مطالعه نمودند. میرزایی و همکاران [۲۸] با مدل‌سازی عددی و انجام تست‌های تجربی به بررسی زوال دینامیکی و نرم لوله فولادی در معرض فشار

بررسی پاسخ پویای تصادفی یک استوانه جدار ضخیم مدرج تابعی با خواص مادی نامشخص در معرض بار شوک مکانیکی پرداختند. طهانی و همکاران [۴] مشخصه‌های دینامیکی استوانه جدار ضخیم مدرج تابعی با خواص مستقل از دما در معرض شوک حرارتی را مطالعه نمودند. ستوده و همکاران [۵] و طهانی و همکاران [۶] با ارائه یک روش عددی ترکیبی رفتار دینامیکی پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی در معرض فشار دینامیکی متقارن و نامتقارن محوری را مورد بررسی قرار دادند. درویزه و همکاران [۷] پدیده فلاتر در پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تحت فشار ناشی از جریان مافوق صوت سیال را مطالعه نمودند. هادی و همکاران [۸] با بکارگیری روش حل گسترش موج، ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی احاطه شده در بستر الاستیک و در معرض نیروی محوری و فشار جانبی با شرایط مرزی مختلف را بررسی نمودند. اخیراً نیز سلاحي و همکاران [۹] با ارائه مدل عددی سه‌بعدی، رفتار دینامیکی پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم مدرج تابعی در معرض فشار دینامیکی نامتقارن و شوک حرارتی و با خواص مادی وابسته به دما را مورد مطالعه قرار دادند.

پوسته‌های مخروطی ناقص دارای کاربرد زیادی مانند: نازل‌ها، سر مخازن و در بدنه هواپیماها و فضاپیماها می‌باشند. این در حالی است که تحقیقات اندکی در زمینه بررسی رفتار دینامیکی این‌گونه پوسته‌ها انجام شده است. سوفیو [۱۰] با بکارگیری روش گلرکین و اصل هامیلتون به مطالعه پایداری پوسته مدرج تابعی مخروطی ناقص در معرض فشارهای متناوب و ناگهانی وارد بر سطح خارجی پوسته پرداخت. او همچنین کمانش دینامیکی این پوسته در معرض بار فشاری محوری یکنواخت و متغیر با زمان را بررسی نمود [۱۱].

راجش و همکاران [۱۲] با بهره‌گیری از روش اجزا محدود و تئوری تغییر فرم برشی مرتبه اول، ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی مدرج تابعی را شبیه‌سازی نمودند. تورنابن و همکاران [۱۳] بر پایه تئوری تغییر فرم برشی مرتبه اول، معادلات حاکم بر رفتار دینامیکی پوسته‌های مخروطی، استوانه‌ای و ورقه مدور را تعیین و با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته این معادلات را حل نمودند. طالبی توتی [۱۴] با بکارگیری تئوری لایه‌ای و روش مربعات دیفرانسیلی، ارتعاشات آزاد پوسته کامپوزیتی لایه‌ای جدار ضخیم مخروطی دوار را بررسی نمود.

ستوده و همکاران [۱۵] و سلاحي و همکاران [۱۶] با ارائه نمودن

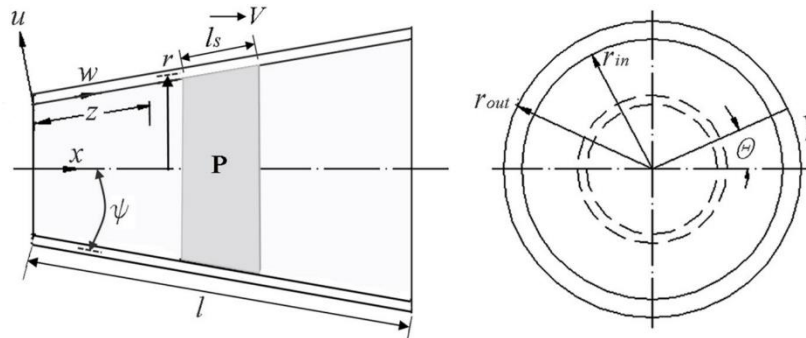


Fig. 1. FG truncated conical shell subjected to a local moving pressure

شکل ۱: پوسته مخروطی ناقص مدرج تابعی در معرض فشار محلی متحرک

این مدل، مدول حجمی مؤثر و مدول برشی در راستای شعاعی در هر نقطه به ترتیب با استفاده از روابط (۱) و (۲) محاسبه می‌شوند [۳۱].

$$\frac{K - K_f}{K_c - K_f} = \frac{V_c}{1 + (1 - V_c) \frac{3(K_c - K_f)}{3K_f + 4G_f}} \quad (1)$$

$$\frac{G - G_f}{G_c - G_f} = \frac{V_c}{1 + (1 - V_c) \frac{G_c - G_f}{G_f + f_1}} \quad (2)$$

که در روابط بالا [۳۱]:

$$f_1 = \frac{G_f (9K_f + 8G_f)}{6(K_f + 2G_f)} \quad (3)$$

$$V_c = \left( \frac{2(r - r_{mid}) + h}{2h} \right)^n, \quad V_f = 1 - V_c \quad (4)$$

با تعیین مدول حجمی مؤثر و مدول برشی، مقادیر مدول الاستیسیته و ضریب پواسون، در هر نقطه از پوسته با استفاده از روابط (۵) و (۶) تعیین می‌گردند:

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \quad (5)$$

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \quad (6)$$

دینامیکی با سرعت بالا پرداختند. مالکان و همکاران [۲۹] با استفاده از نرم‌افزار اجزا محدود آباکوس، رفتار ترمو-مکانیکی، لوله استوانه‌ای در معرض فشار شوک داخلی و همچنین عبور امواج فشاری ناشی از شوک را مدل‌سازی نمودند. اخیراً نیز رضانی و میرزایی [۳۰]، پاسخ سازه‌ای الاستودینامیک گذرای پوسته استوانه‌ای تحت شرایط تکیه‌گاهی دو سر ساده، دو سر گیردار و گیردار-آزاد و در معرض شوک انفجاری متحرک را بررسی نمودند.

با توجه به تحقیقات معرفی شده در بالا و اهمیت این موضوع، در این مقاله به مطالعه رفتار دینامیکی پوسته‌های مدرج تابعی در معرض فشار متحرک محلی و همچنین ارتعاشات آزاد ناشی از تحریک بار متحرک پرداخته می‌شود. از آنجایی که حل تحلیلی برای این مساله وجود ندارد، بنابراین در این تحقیق در ابتدا روشی عددی توانمند با دقت و سرعت همگرایی بالا که ترکیبی از روش‌های مربعات دیفرانسیلی، تئوری لایه‌ای و بسط فوریه است، ارائه گردید.

## ۲- تئوری مدل‌سازی

### ۲-۱- تعریف مساله

مطابق شکل ۱، یک پوسته مخروطی ناقص ساخته شده از مواد مدرج تابعی که خواص آن در راستای ضخامت تغییر می‌کند، در نظر گرفته شده است. این پوسته تحت بار فشاری محلی متحرک (متقارن محوری) با طول  $l_s$  قرار گرفته است که با سرعت  $V$ ، در راستای محوری در حال حرکت می‌باشد.

در پوسته مخروطی، شعاع داخلی و شعاع خارجی تابعی از موقعیت محوری می‌باشند. در این مدل‌سازی فرض شده است که توزیع خواص مکانیکی ماده مدرج تابعی از مدل موری-تاناکا پیروی می‌نماید. در

$$\phi_i(r(z)) = \begin{cases} 0 & r \leq r_{i-1} \\ \frac{r - r_{i-1}(z)}{h_{i-1}(z)} & r_{i-1} \leq r \leq r_i \\ \frac{r_{i+1}(z) - r}{h_i(z)} & r_i \leq r \leq r_{i+1} \\ 0 & r \geq r_{i+1} \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, N \quad (11)$$

همچنین در این مدل سازی، مقدار چگالی پوسته در هر نقطه از مخروط مدرج تابعی با استفاده از رابطه توانی (۷) تخمین زده می شود:

$$\rho(r, z) = \rho_f + (\rho_c - \rho_f) \left( \frac{2(r - r_{mid}(z)) + h}{2h} \right)^n \quad (7)$$

## ۲-۲- میدان جابجایی، کرنش و معادلات متشکله

برای تقریب مؤلفه های میدان جابجایی پوسته مخروطی مدرج تابعی در معرض بار متحرک، از بسط فوریه در جهت محوری مطابق رابطه (۸) استفاده می شود:

$$u(r, z, t) = \sum_{m=0}^M U_m(r, t) \cos(\lambda_m z) \quad (8)$$

$$w(r, z, t) = \sum_{m=0}^M W_m(r, t) \sin(\lambda_m z)$$

در رابطه بالا  $\lambda_m = m\pi/L$  است. با به کارگیری قانون جمع روی اندیس های تکراری معادله (۸) به صورت زیر ساده خواهد شد:

$$u(r, z, t) = U_m(r, t) \cos(\lambda_m z) \quad (9)$$

$$w(r, z, t) = W_m(r, t) \sin(\lambda_m z)$$

برای مدل سازی تغییرات مؤلفه های جابجایی در راستای شعاعی از تئوری لایه ای ردی استفاده شده است [۱۸]. بر اساس این تئوری ضخامت پوسته به  $N-1$  لایه محاسباتی تقسیم می شود و تغییرات مؤلفه های جابجایی  $U_m$  و  $W_m$  مطابق معادله (۱۰) بیان می شود [۱۵]:

$$U_m(r, t) = \sum_{i=1}^{N_r} U_{im}(t) \phi_i(r(z)) = U_{im}(t) \phi_i(r(z)) \quad (10)$$

$$W_m(r, t) = \sum_{i=1}^{N_r} W_{im}(t) \phi_i(r(z)) = W_{im}(t) \phi_i(r(z))$$

که  $U_{im}(t)$  و  $W_{im}(t)$  بیانگر میدان جابجایی متقارن محوری در پایین لایه  $i$  ام است.  $\phi_i(r(z))$  نیز تابعی پیوسته از موقعیت لایه محاسباتی  $i$  ام است که در اینجا با استفاده از تابع خطی آورده شده در رابطه (۱۱) تعریف می گردد [۱۵]:

با جایگزینی معادله (۱۰) در معادله (۹)، مؤلفه های میدان جابجایی بر اساس تئوری لایه ای مطابق رابطه (۱۲) بدست می آید:

$$u(r, z, t) = U_{im}(t) \phi_i(r(z)) \cos(\lambda_m z) \quad (12)$$

$$w(r, z, t) = W_{im}(z, t) \phi_i(r(z)) \sin(\lambda_m z)$$

با توجه به رابطه (۱۲)، معادلات کرنش-جابجایی در مختصات استوانه ای برای پوسته مخروطی مورد بررسی از معادله (۱۳) بدست می آید:

$$\varepsilon_r = U_{im} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \cos(\lambda_m z) \quad (13)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\{U_{im} \cos(\lambda_m z) \cos \psi + W_{im} \sin(\lambda_m z) \sin \psi\} \phi_i}{r}$$

$$\varepsilon_z = W_{im} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \sin(\lambda_m z) + W_{im} \phi_i \lambda_m \cos(\lambda_m z)$$

$$\gamma_{zr} = U_{im} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cos(\lambda_m z) - U_{im} \phi_i \lambda_m \sin(\lambda_m z) + W_{im} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \sin(\lambda_m z)$$

فرم کلی روابط تنش-کرنش در پوسته متقارن محوری به صورت معادله (۱۴) می باشد.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \sigma_{zr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 \\ & & C_{33} & 0 \\ Sym. & & & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{zr} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

که اعضای ماتریس سفتی است که از رابطه (۱۵) بدست می آید.

$$C_{aa} = \frac{(1-\nu)E(r)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_{ab} = \frac{\nu C_{aa}}{(1-\nu)}, \quad (15)$$

$$C_{55} = \frac{E(r)}{2(1+\nu)} \quad (a, b = 1, 2, 3 \text{ and } a \neq b),$$

### ۳-۲- معادلات حرکت

(برای  $m=0$ ) داریم:

$$-2 \left[ C_{11}^{ij} + F_{12}^{ij} \cos(\psi) + F_{21}^{ji} \cos(\psi) + E_{22}^{ij} \cos^2(\psi) + H_{55}^{ij} \right] U_{,i0} + \frac{2}{L} \int_0^L \left[ r_{in} \bar{P}_{in_m}(t) \delta_{j1} - r_{out} \bar{P}_{out_m}(t) \delta_{jNr} \right] \cos^2(\lambda_0 \theta) dz = 2I^U \ddot{U}_{,i0} \quad (22)$$

(برای  $m \neq 0$ ) داریم:

$$\begin{aligned} & - \left( C_{11}^{ij} + F_{12}^{ij} \cos(\psi) + F_{21}^{ji} \cos(\psi) + \right. \\ & \left. E_{22}^{ij} \cos^2(\psi) + \lambda_m^2 A_{44}^{ij} + H_{55}^{ij} \right) U_{im} - \\ & (B_{13}^{ji} + D_{23}^{ij} \cos(\psi) - B_{55}^{ij}) W_{im} \\ & + \frac{2}{L} \int_0^L \left( r_{in} \bar{P}_{in_m}(t) \delta_{j1} - r_{out} \bar{P}_{out_m}(t) \delta_{jNr} \right) \cos^2(\lambda_m z) dz = I^U \ddot{U}_{im} \\ & - \left( E_{22}^{ij} \sin^2(\psi) + J_{32}^{ji} \sin(\psi) + \right. \\ & \left. J_{23}^{ij} \sin(\psi) + C_{55}^{ij} + H_{33}^{ij} + \lambda_m^2 E_{44}^{ij} \right) W_{im} - \\ & \lambda_m (B_{13}^{ij} + D_{23}^{ij} \cos(\psi) - B_{55}^{ji}) U_{im} = I^U \ddot{W}_{im} \end{aligned} \quad (23)$$

که در روابط بالا:

$$\begin{aligned} A_{ab}^{ij} &= \int_{r_{in}}^{r_{out}} C_{ab} \phi_i \phi_j r dr, \quad B_{ab}^{ij} = \int_{r_{in}}^{r_{out}} C_{ab} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \phi_j r dr, \\ C_{ab}^{ij} &= \int_{r_{in}}^{r_{out}} C_{ab} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} r dr, \quad D_{ab}^{ij} = \int_{r_{in}}^{r_{out}} C_{ab} \phi_i \phi_j dr \\ E_{ab}^{ij} &= \int_{r_{in}}^{r_{out}} C_{ab} \frac{\phi_i \phi_j}{r} dr, \quad F_{ab}^{ij} = \int_{r_{in}}^{r_{out}} C_{ab} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \phi_j dr, \\ G_{ab}^{ij} &= \int_{r_{in}}^{r_{out}} C_{ab} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \phi_j r dr, \quad H_{ab}^{ij} = \int_{r_{in}}^{r_{out}} C_{ab} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} r dr \\ I_{ab}^{ij} &= \int_{r_{in}}^{r_{out}} C_{ab} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} r dr, \quad J_{ab}^{ij} = \int_{r_{in}}^{r_{out}} C_{ab} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial z} dr, \\ I^{ij} &= \int_{r_{in}}^{r_{out}} \rho \phi_i \phi_j r dr \end{aligned} \quad (24)$$

برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم از روش مربعات دیفرانسیلی که دارای دقت و سرعت جواب‌دهی بالایی می‌باشد، استفاده گردید. در این روش، دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم به دستگاه‌های معادلات جبری تبدیل می‌شوند که به ترتیب در روابط (۲۵) و (۲۶) ارائه شده‌اند. بدین منظور با استفاده از روش مربعات

در این تحقیق پوسته مخروطی مورد تحلیل در سطح‌های داخلی و خارجی می‌تواند تحت بارهای فشاری متحرک داخلی و یا خارجی قرار گیرد که از روابط (۱۶) پیروی می‌کنند:

$$\begin{aligned} p_{in}(z, t) &= \bar{P}_{in}(t) \{ u_s [z - z_1(t)] - u_s [z - z_2(t)] \} \\ p_{out}(z, t) &= \bar{P}_{out}(t) \{ u_s [z - z_1(t)] - u_s [z - z_2(t)] \} \end{aligned} \quad (16)$$

که  $z_1(t)$  و  $z_2(t)$  به ترتیب نقاط ابتدایی و انتهایی بارگذاری هستند. مشابه با مؤلفه‌های جابجایی، فشار متحرک را نیز می‌توان با استفاده از تبدیل فوریه، بسط داد.

$$P_n(t, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{P}_{in_m}(t) \cos(\lambda_m z) = \bar{P}_{in_m}(t) \cos(\lambda_m z) \quad (17)$$

$$P_{out}(t, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{P}_{out_m}(t) \cos(\lambda_m z) = \bar{P}_{out_m}(t) \cos(\lambda_m z)$$

حال با به‌کارگیری اصل همیلتون معادله (۱۸) معادلات حرکت برای پوسته مدرج تابعی مخروطی تحت بار متحرک فشاری در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$ ، به شرح زیر به‌دست خواهد آمد [۹]:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta \hat{T} - \delta(\hat{U} - \hat{W})) dt = 0 \quad (18)$$

که انرژی جنبشی، انرژی کرنشی و کار نیروی خارجی به ترتیب از روابط (۱۹) تا (۲۱) بدست می‌آیند [۹].

$$\delta \hat{T} = \int_V \rho (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dV \quad (19)$$

$$\delta \hat{U} = \int_V (\sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \sigma_{r\theta} \delta \gamma_{r\theta} + \sigma_{rz} \delta \gamma_{rz} + \sigma_{\theta z} \delta \gamma_{\theta z}) dV \quad (20)$$

$$\delta \hat{W} = \int_V \rho (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dV \quad (21)$$

با جایگزینی معادلات (۱۹) تا (۲۱) در معادله (۱۸)، دستگاه معادلات حاکم به فرم تئوری لایه‌ای مطابق معادلات (۲۲) و (۲۳) بدست می‌آیند:

ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی ناقص مدرج تابعی به فرم روش مربعات دیفرانسیلی مطابق روابط (۲۸) بدست می‌آید [۱۵]:

$$\begin{aligned} & -\left(C_{11}^{ij} + E_{22}^{ij} \cos^2 \psi + F_{12}^{ij} \cos \psi + F_{21}^{ij} \cos \psi + H_{55}^{ij}\right) \bar{U}_{ikp} \\ & -\left(G_{55}^{ij} - G_{55}^{ij}\right) a_{kl} \bar{U}_{ilp} + A_{55}^{ij} b_{kl} \bar{U}_{ilp} - \left(B_{31}^{ij} + B_{55}^{ij} + D_{32}^{ij} \cos \psi\right) a_{kl} \bar{W}_{ilp} \\ & -\left(F_{21}^{ij} \sin \psi + I_{31}^{ij} + I_{55}^{ij} + J_{32}^{ij} \cos \psi + E_{22}^{ij} \cos \psi \sin \psi\right) \bar{W}_{ikp} \quad (28) \\ & + r_{in} P_{in}(t) \delta_{j1} - r_{out} P_{out}(t) \delta_{jNr} = -I^{ij} \omega^2 \bar{U}_{ikp} \\ & -\left(E_{22}^{ij} \cos \psi \sin \psi + J_{23}^{ij} \cos \psi + F_{12}^{ij} \sin \psi + I_{13}^{ij} + I_{55}^{ij}\right) \bar{U}_{ikp} \\ & -\left(B_{55}^{ij} - B_{13}^{ij} - D_{23}^{ij} \cos \psi\right) a_{kl} \bar{U}_{ilp} \\ & + \left(G_{33}^{ij} - G_{33}^{ij} - \left(D_{32}^{ij} + D_{23}^{ij}\right) \sin \psi\right) a_{kl} \bar{W}_{ilp} - \\ & \left(H_{33}^{ij} + C_{55}^{ij} + I_{32}^{ij} \sin \psi + J_{23}^{ij} \sin \psi + E_{22}^{ij} \sin^2 \psi\right) \bar{W}_{ikp} \\ & + A_{33}^{ij} b_{kl} \bar{W}_{ilp} = -I^{ij} \omega^2 \bar{W}_{ikp} \end{aligned}$$

معادله بالا را می‌توان به فرم معادله (۲۹) نوشت:

$$\left([K] - \omega^2 [M]\right) \{d\} = \{0\} \quad (29)$$

با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس  $\left([K] - \omega^2 [M]\right)$ ، مقادیر فرکانس‌های طبیعی پوسته مدرج تابعی تعیین می‌گردند.

### ۳- نتایج عددی و نتیجه‌گیری

#### ۳-۱- تعریف خواص مادی و هندسی پوسته مدرج تابعی

مخروط مورد بررسی ترکیبی از سرامیک زیرکینیا و فلز آلومینیوم می‌باشد به‌گونه‌ای که سطح خارجی، تمام سرامیک و سطح داخلی، تمام فلز است. سطح داخلی پوسته تحت بار فشاری متحرک قرار گرفته است که از رابطه (۳۰) پیروی می‌کند. در جدول ۱ مشخصات هندسی و مادی مخروط مورد بررسی ارائه شده است.

$$p_{in}(t, z) = \left\{ u_s [z - 100t] - u_s [z - 100(t + 0.001)] \right\} \quad (30)$$

همچنین جهت بدون بعدسازی، از پارامترهای بدون بعد تعریف شده در رابطه (۳۱) استفاده خواهد شد که در آن  $1 \text{ MPa} = p$ ،  $k^* = 100 \text{ GPa}$  و  $t_e = 0/009 \text{ sec}$  انتخاب شده است.

دیفرانسیلی، مشتقات زمانی مؤلفه‌های جابجایی شعاعی و محوری در هر لایه محاسباتی توسط مجموع ضرایب وزنی این مؤلفه‌های جابجایی تقریب زده می‌شوند. توضیحات بیشتر در مورد چگونگی استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی در حل مشتقات زمانی در مراجع [۱۶ و ۱۵] ارائه شده است.  
(برای  $m=0$ ) داریم:

$$\begin{aligned} & -2\left[C_{11}^{ij} + F_{12}^{ij} \cos(\psi) + F_{21}^{ij} \cos(\psi) + E_{22}^{ij} \cos^2(\psi) + H_{55}^{ij}\right] U_{i0} + \\ & \frac{2}{L} \int_0^L \left[ r_{in} \bar{p}_{in_m}(t) \delta_{j1} - r_{out} \bar{p}_{out_m}(t) \delta_{jNr} \right] \cos^2(\lambda_0 \theta) dz \quad (25) \\ & = 2I^{ij} \left( A_{p1}' U_{i01} + B_{p1}' U_{i01} + B_{pq}' U_{i0q} \right) \end{aligned}$$

(برای  $m \neq 0$ ) داریم:

$$\begin{aligned} & -\left(C_{11}^{ij} + F_{12}^{ij} \cos(\psi) + F_{21}^{ij} \cos(\psi) + E_{22}^{ij} \cos^2(\psi) + \lambda_m^2 A_{44}^{ij} + H_{55}^{ij}\right) U_{im} + \\ & \frac{2}{L} \int_0^L \left( r_{in} \bar{p}_{in_m}(t) \delta_{j1} - r_{out} \bar{p}_{out_m}(t) \delta_{jNr} \right) \cos^2(\lambda_m z) dz \quad (26) \\ & -\left(B_{13}^{ij} + D_{23}^{ij} \cos(\psi) - B_{55}^{ij}\right) W_{im} = I^{ij} \left( A_{p1}' U_{im1} + B_{p1}' U_{im1} + B_{pq}' U_{imq} \right) \\ & -\lambda_m \left( B_{13}^{ij} + D_{23}^{ij} \cos(\psi) - B_{55}^{ij} \right) U_{im} - \\ & \left( E_{22}^{ij} \sin^2(\psi) + J_{32}^{ij} \sin(\psi) + J_{23}^{ij} \sin(\psi) + C_{55}^{ij} + H_{33}^{ij} + \lambda_m^2 E_{44}^{ij} \right) W_{im} \\ & = I^{ij} \left( A_{p1}' W_{im1} + B_{p1}' W_{im1} + B_{pq}' W_{imq} \right) \end{aligned}$$

با حل معادلات حرکت، به ازای هر یک از مقادیر  $m$  و اعمال مقادیر جابجایی به‌دست آمده در معادله (۸) مؤلفه‌های جابجایی شعاعی و محوری در گره‌های مختلف پوسته مخروطی ناقص مدرج تابعی، برای گره‌های زمانی مختلف به‌دست می‌آیند. سپس به ترتیب مقادیر مؤلفه‌های کرنش و تنش با استفاده از معادلات (۱۳) و (۱۴) محاسبه خواهند گردید. جهت مدل‌سازی و تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی ناقص مدرج تابعی از کار مجازی ناشی از نیروی خارجی صرف‌نظر می‌شود. همچنین فرض می‌شود که مؤلفه‌های جابجایی  $U_{im}(z, t)$  و  $W_{im}(z, t)$  از روابط هارمونیک (۲۷) پیروی می‌نمایند.

$$\begin{aligned} U_i(z, t) &= \bar{U}_i(z) e^{k\omega t} \\ W_i(z, t) &= \bar{W}_i(z) e^{k\omega t} \end{aligned} \quad (27)$$

که  $k = \sqrt{-1}$  است. با به‌کارگیری رابطه (۲۷)، معادلات

جدول ۱: خواص هندسی و مادی پوسته مخروطی مدرج تابعی

Table 1. Geometric and material properties of the FG truncated conical shell

$K_f$ (GPa)	$K_c$ (GPa)	$G_f$ (GPa)	$G_c$ (GPa)	$\rho_f$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho_c$ (kg/m <sup>3</sup> )	$L$ (m)	$r_{out}$ (m)	$r_{in}$ (m)
۵۸/۳	۱۲۵/۸	۲۶/۹	۵۸/۱	۲۷۰۷	۳۰۰۰	۱	$0.07 + 0.03x$	$0.05 + 0.03x$

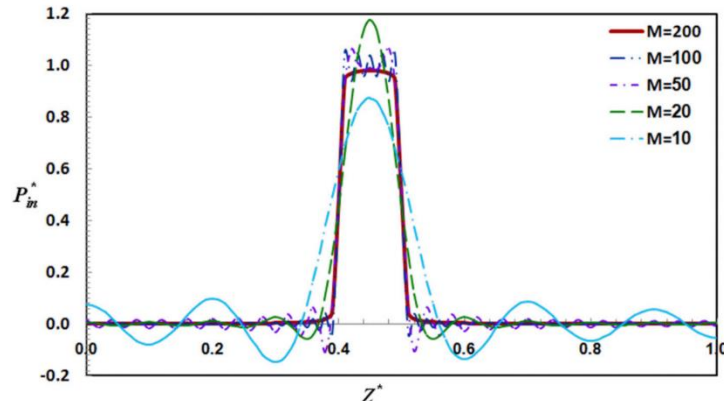


Fig. 2. Diagrams of the Fourier expansion for the variations of  $P^*$  at  $t^*=0.5$  in terms of the axial position of the truncated cone and for different values of  $M$ .

شکل ۲: نمودارهای حاصل از بسط فوری جهت بیان فشار بدون بعد  $p^*$  در  $t^*=0/5$ ، به ازای مقادیر مختلف  $M$ ، برحسب موقعیت محوری مخروط

جهت انتخاب بهینه تعداد لایه‌های محاسباتی و تعداد گره‌ها در دامنه زمانی می‌باشد. اولین بخش بررسی همگرایی، جهت انتخاب بهینه پیشینه تعداد موج‌های محوری  $M$ ، مورد نیاز در مدل‌سازی رفتار مخروط ناقص تحت بار متحرک با رابطه (۳۰) می‌باشد. بدین منظور فشار بدون بعد  $p_{in}^*$  توسط بسط فوری، مطابق معادله (۳۳) بسط داده می‌شود. در شکل ۲، نمودارهای حاصل از بسط فوری جهت بیان تغییرات فشار بدون بعد اعمالی  $p_{in}^*$  به ازای مقادیر مختلف  $M$  در میانه دوره بارگذاری ( $t^*=0/5$ ) برحسب موقعیت محوری مخروط نشان داده شده است. مشاهده می‌گردد که به ازای  $M=200$ ، نمودار بسط فوری بسیار نزدیک به تابع پله‌ای مورد نظر خواهد شد.

$$t^* = \frac{t}{t_e}, \quad z^* = \frac{z}{L}, \quad r^* = \frac{r}{r_{in}},$$

$$(U^*, V^*, W^*) = \frac{(U, V, W)}{P_0 h / k^*}, \quad (31)$$

$$\sigma_i^* = \frac{\sigma_i}{P_0} \quad i = r, \theta, z,$$

$$\sigma_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij}}{P_0} \quad (i, j = r, \theta, z), (i \neq j)$$

شرایط مرزی بکار گرفته شده در ابتدا ( $Z^*=0$ ) و انتهای ( $Z^*=1$ ) مساله، شرایط مرزی شبه تکیه‌گاه ساده و به شرح زیر می‌باشد:

$$W^* = 0 \quad \text{at} \quad z^* = 0, 1$$

$$U^* = 0 \quad \text{at} \quad z^* = 0, 1 \quad \text{and} \quad r = r_{out} \quad (32)$$

۳-۲- تحلیل همگرایی

در مرحله دوم تحلیل همگرایی جهت انتخاب بهینه تعداد لایه‌های محاسباتی و تعداد گره‌ها در دامنه زمانی انجام می‌شود. بدین منظور

بررسی همگرایی مساله تشریح شده شامل دو بخش بررسی همگرایی در بسط فوری برای تابع پله‌ای و بررسی رفتار همگرایی



جدول ۲. مشخصات مادی استوانه مدرج تابعی [۲۴]

Table 2. Material properties of the FG cylinder [24]

$\nu_f$	$\nu_c$	$\rho_f$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho_c$ (kg/m <sup>3</sup> )	$E_f$ (GPa)	$E_c$ (GPa)
۰/۳۲	۰/۲۴	۸۱۶۶	۲۳۷۰	۲۰۷/۷۸۷۷	۳۲۲/۲۷

مشخصات مادی استوانه مدرج تابعی مورد بررسی در مرجع [۲۴] در جدول ۲، آورده شده است. گفتنی است که در این مدل استوانه مورد بررسی بسیار طویل فرض شده است و تغییرات خواص در راستای شعاعی از رابطه توانی درجه دوم ( $n=2$ ) (۳۶) پیروی می‌کند.

$$E(r, z) = E_f + (E_c - E_f) \left( \frac{2(r - r_{mid}) + h}{2h} \right)^n$$

$$\nu(r, z) = \nu_f + (\nu_c - \nu_f) \left( \frac{2(r - r_{mid}) + h}{2h} \right)^n \quad (36)$$

$$\rho(r, z) = \rho_f + (\rho_c - \rho_f) \left( \frac{2(r - r_{mid}) + h}{2h} \right)^n$$

در جدول ۳ به ازای سرعت‌های مختلف حرکت بار متحرک و در نسبت‌های مختلف شعاع به ضخامت ( $r/h$ )، مقادیر بیشینه خیز دینامیکی محاسبه شده، با نتایج به دست آمده در مرجع [۲۴] مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که نتایج به دست آمده بسیار نزدیک به نتایج محاسبه شده توسط سوفیو می‌باشد. بگونه‌ای که بیشترین درصد اختلاف با نتایج تست تجربی برابر با ۱۴ درصد (با میانگین درصد اختلاف ۳ درصد) و بیشترین درصد اختلاف با نتایج محاسبه شده در مرجع [۲۴] برابر با ۱ درصد می‌باشد.

در دومین مرحله اعتبارسنجی، ابتدا اولین فرکانس طبیعی مربوط به ارتعاشات متقارن محوری پوسته مخروطی ناقص جدار نازک با شرایط مرزی دو سر گیردار در پنج حالت: تمام فلز (SUS304)، تمام سرامیک ( $\text{Si}_3\text{Ni}_4$ )، مدرج تابعی  $\text{SUS304}/\text{Si}_3\text{Ni}_4$  با ضریب توانی یک، مدرج تابعی با ضریب توانی دو و مدرج تابعی با ضریب توانی معکوس دو، به روش معرفی شده و به ازای زاویه‌های  $\psi$  مختلف

مقادیر حداکثر جابجایی‌های شعاعی و محوری بدون بعد و حداکثر تنش‌های مماسی و محوری بدون بعد در سطح داخلی مخروط، برای تعداد گره‌های مختلف شعاعی و زمانی مورد بررسی قرار گرفته است که نتایج آن در نمودارهای ارائه شده در شکل ۳، نشان داده شده است.

مشاهده می‌شود که به ازای  $N_r = 9$  و  $N_r = 37$ ، مؤلفه‌های بدون بعد جابجایی و تنش به همگرایی خواهند رسید. بنابراین این مقادیر می‌توانند انتخابی بهینه برای مساله بالا باشند. همچنین مساله شرح داده شده در بالا به سه زیر دامنه ( $N_D=3$ ) تقسیم شده است که دوره هر کدام ( $i=1, 2, 3$ )  $t_{ei}=0/003$  sec است.

### ۳-۳- اعتبارسنجی روش عددی

جهت تایید صحت مدل و روابط ارائه شده و همچنین روش ترکیبی عددی معرفی شده، نتایج حاصل از تحلیل دینامیکی گذرا و ارتعاشات آزاد پوسته‌های مدرج تابعی، با نتایج تجربی و مدل‌سازی ریاضی ارائه شده در دو تحقیق به شرح زیر مقایسه گردید. در اولین اعتبارسنجی، نتایج ارائه شده در مرجع [۲۴] برای پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی تحت بار متحرک حلقه‌ای، با نتایج حاصل از مدل‌سازی به روش ارائه شده در این تحقیق مقایسه می‌گردد. در مدل‌سازی مرجع بالا فرض شده است که بار متحرک اعمالی از رابطه (۳۴) پیروی می‌نماید:

$$p_{in}(t, z) = \bar{p}_{in}(t) \delta[z - z_1(t)] \quad (34)$$

با اعمال بسط فوریه در راستای طولی در رابطه بالا، می‌توان آن را به صورت معادله (۳۵) نوشت:

$$\bar{p}_{in}(t) \delta[z - z_1(t)] = \bar{p}_{in_m}(t) \cos(\lambda_m z) \quad (35)$$



جدول ۳: مقایسه بیشینه خیز دینامیکی بدست آمده توسط روش ارائه شده با نتایج تجربی و تحلیلی ارائه شده توسط سوفیو [24]

Table 3. Comparison of maximum dynamic displacements obtained by the presented method with the experimental and analytical results reported by Sofiyev [24]

تجربی [۲۴]	تحلیلی [۲۴]	نتایج حاضر	V (m/sec)	r/h
۰/۱۲۶۵	۰/۱۲۷۱	۰/۱۲۷۰	۴۰۰	۵
۰/۱۲۸۵	۰/۱۳۰۰	۰/۱۲۹۱	۶۰۰	۵
۰/۱۳۱۵	۰/۱۳۴۳	۰/۱۳۴۳	۸۰۰	۵
۰/۱۳۵۶	۰/۱۴۰۵	۰/۱۴۱۴	۱۰۰۰	۵
۰/۱۲۶۵	۰/۱۲۷۱	۰/۱۲۵۴	۲۰۰	۲۰
۰/۱۳۱۵	۰/۱۳۴۳	۰/۱۳۶۰	۴۰۰	۲۰
۰/۱۴۱۲	۰/۱۴۹۵	۰/۱۴۸۱	۶۰۰	۲۰
۰/۱۵۹۳	۰/۱۸۳۲	۰/۱۸۶۵	۸۰۰	۲۰
۰/۱۲۶۰	۰/۱۲۶۳	۰/۱۲۵۶	۱۰۰	۵۰
۰/۱۲۸۹	۰/۱۳۰۶	۰/۱۳۰۵	۲۰۰	۵۰
۰/۱۳۴۴	۰/۱۳۸۷	۰/۱۴۰۵	۳۰۰	۵۰

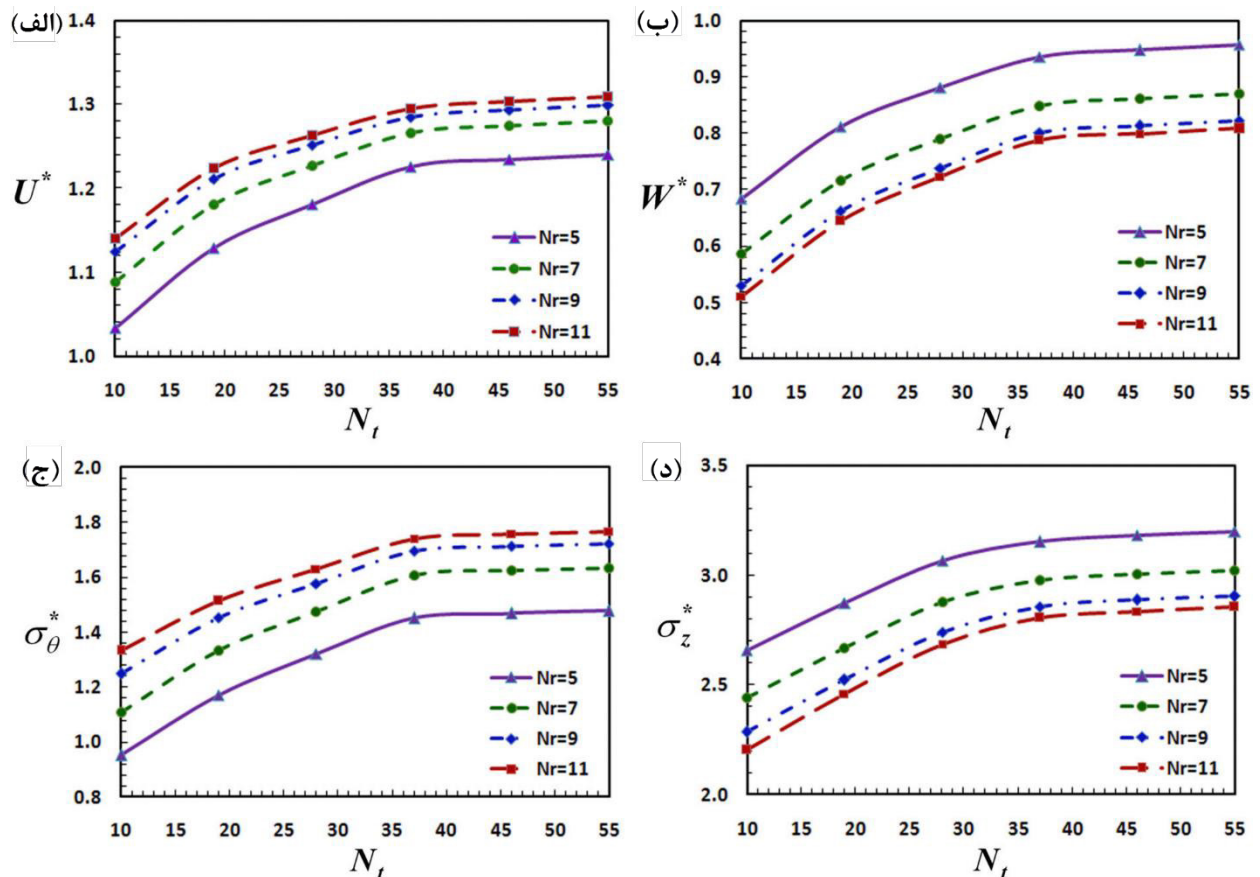


Fig. 3. Investigation of convergence behavior for dimensionless a) radial displacement, b) axial displacements, c) tangential stress and d) axial stress components on the inner surface of the FG truncated conical shell.

شکل ۳: بررسی رفتار همگرایی برای بیشینه مؤلفه های بدون بعد (الف) جابجایی شعاعی، (ب) جابجایی محوری، (ج) تنش مماسی و (د) تنش محوری واقع در میانه طول پوسته و در سطح داخلی مخروط ناقص مدرج تابعی

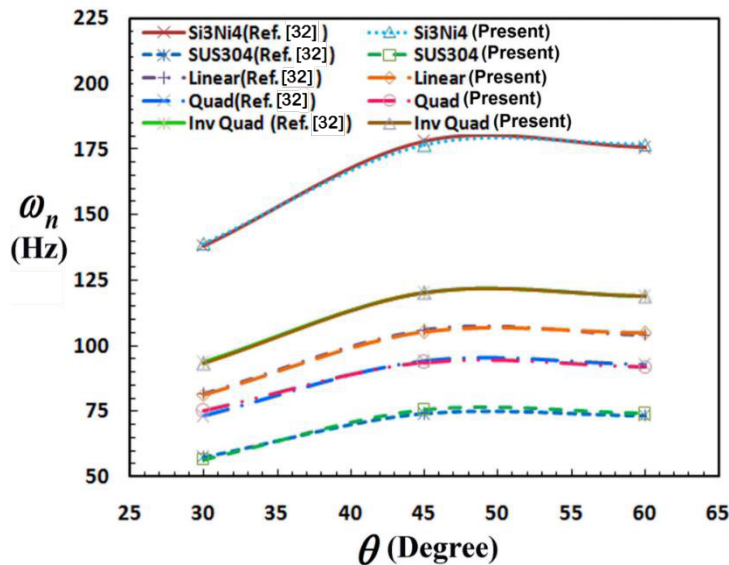


Fig. 4. Comparisons of natural frequencies of truncated conical shell for five different

شکل ۴: مقایسه فرکانس‌های طبیعی در پوسته مخروطی در پنج ترکیب مختلف برحسب زاویه راس مخروط

جدول ۴: خواص هندسی و مادی پوسته مخروطی ناقص مدرج تابعی مورد بررسی در مرجع [۳۲]

Table 4. Geometrical and material properties of the FG shell investigated in Ref. [32]

$E_f$ (GPa)	$E_c$ (GPa)	$\rho_f$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho_c$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\nu_f$	$\nu_c$	$h$ (m)	$r_2$ (m)	$r_1$ (m)
۲۰۷/۷۸۷۷	۳۲۲/۲۷	۸۱۶۶	۲۳۷۰	۰/۳۱۸	۰/۲۴	۰/۰۱	۲	۱

کامل بار متحرک از آن نیز نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که به علت غیریکنواخت بودن فشار اعمالی، جابجایی پوسته نیز در موقعیت‌های محوری مختلف و در زمان‌های یکسان، غیریکنواخت می‌باشد. از طرف دیگر همانگونه که انتظار می‌رود، بیشینه مقادیر جابجایی در هر موقعیت طولی، در زمان عبور فشار متحرک در همان موقعیت رخ خواهد داد که از میان سه موقعیت شرح داده شده در شکل‌های ۵ تا ۷، مقادیر بیشینه جابجایی در موقعیت  $z^* = 0/5$ ، به علت دورتر بودن از شرایط تکیه‌گاهی، اندکی بیشتر از دو حالت دیگر است. همچنین مشاهده می‌شود که موقعیت شعاعی تاثیر بسیار کمی در مقدار جابجایی محوری دارد. علاوه بر این با توجه به شکل ۶ مشاهده می‌شود که دامنه ارتعاشات آزاد پوسته به علت وجود  $\dot{U}$  و  $\dot{V}$  بالا در لحظه انتهایی عبور بار از لوله، (در مقایسه با دامنه ارتعاشی ایجاد شده ناشی از فشار گذرای سرتاسری [۱۵])، قابل توجه می‌باشد.

در شکل ۸ نیز تاریخچه زمانی مؤلفه‌های بدون بعد تنش‌های

محاسبه و با نتایج ارائه شده توسط سوفیو [۳۲]، مورد مقایسه قرار گرفته است که نتایج آن در نمودارهای شکل ۴ ارائه شده است. در جدول ۴ نیز خواص هندسی و مادی پوسته مخروطی فوق آورده شده است.

در جدول بالا  $r_1$  و  $r_2$  به ترتیب بیانگر شعاع پوسته در ابتدا و انتهای مخروط ناقص است. مجدداً مشاهده می‌شود که مقادیر فرکانس‌های طبیعی محاسبه شده تطابق زیادی با نتایج ارائه شده در مرجع [۳۲] دارد.

### ۳-۴- نتایج تحلیل دینامیکی پوسته مدرج تابعی

در شکل‌های ۵ تا ۷، تاریخچه زمانی مؤلفه‌های بدون بعد جابجایی‌های شعاعی و محوری در سطح‌های داخلی، میانی و خارجی پوسته مخروطی به ترتیب در  $z^* = 0/1$ ،  $z^* = 0/5$  و  $z^* = 0/7$  ارائه شده است. گفتنی است که در شکل ۶، علاوه بر نمودارهای جابجایی ناشی از عبور بار متحرک، ارتعاشات آزاد پوسته پس از عبور

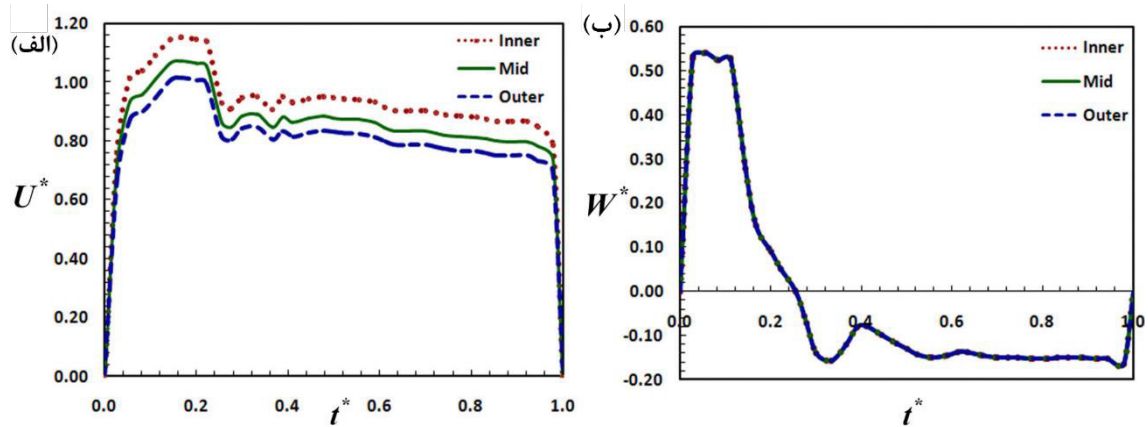


Fig. 5. Time histories of the dimensionless a) radial displacement and b) axial displacement on the inner, mid and outer surfaces of the FG truncated conical shell at  $z^* = 0.1$

شکل ۵: تاریخچه زمانی مؤلفه‌های بدون بعد (الف) جابجایی شعاعی و (ب) جابجایی محوری در سطح‌های داخلی، میانی و خارجی مخروط در  $z^* = 0.1$

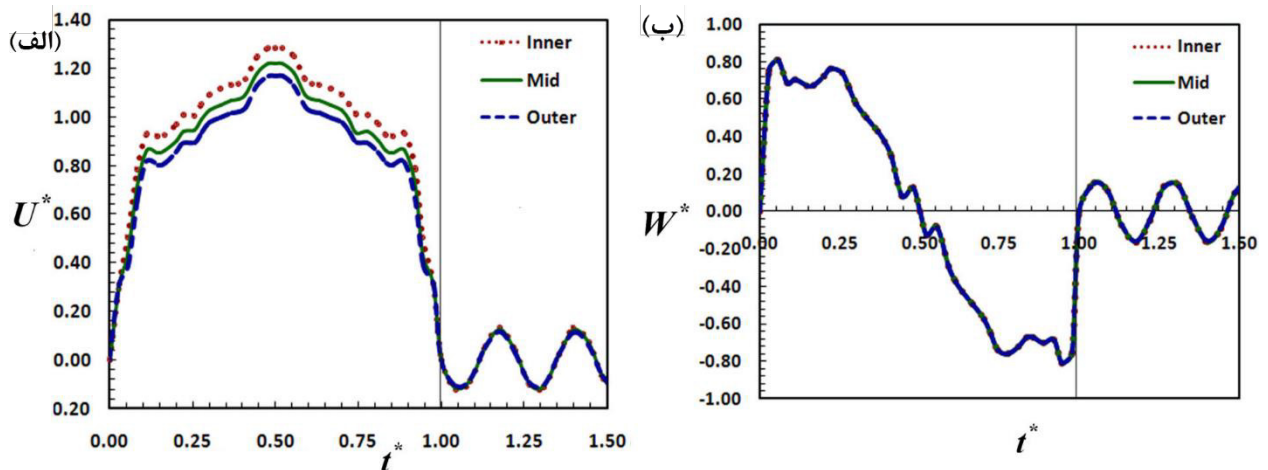


Fig. 6. Time histories of the dimensionless a) radial displacement and b) axial displacement on the inner, mid and outer surfaces of the FG truncated conical shell at  $z^* = 0.5$

شکل ۶: تاریخچه زمانی مؤلفه‌های بدون بعد (الف) جابجایی شعاعی و (ب) جابجایی محوری در سطح‌های داخلی، میانی و خارجی مخروط در  $z^* = 0.5$

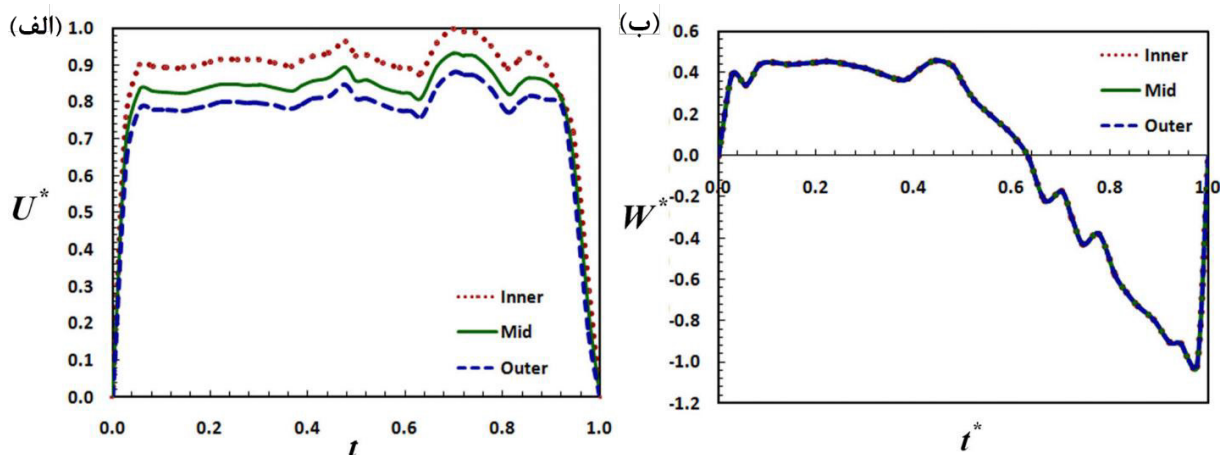


Fig. 7. Time histories of the dimensionless a) radial displacement and b) axial displacement on the inner, mid and outer surfaces of the FG truncated conical shell at  $z^* = 0.7$

شکل ۷: تاریخچه زمانی مؤلفه‌های بدون بعد (الف) جابجایی شعاعی و (ب) جابجایی محوری در سطح‌های داخلی، میانی و خارجی مخروط در  $z^* = 0.7$

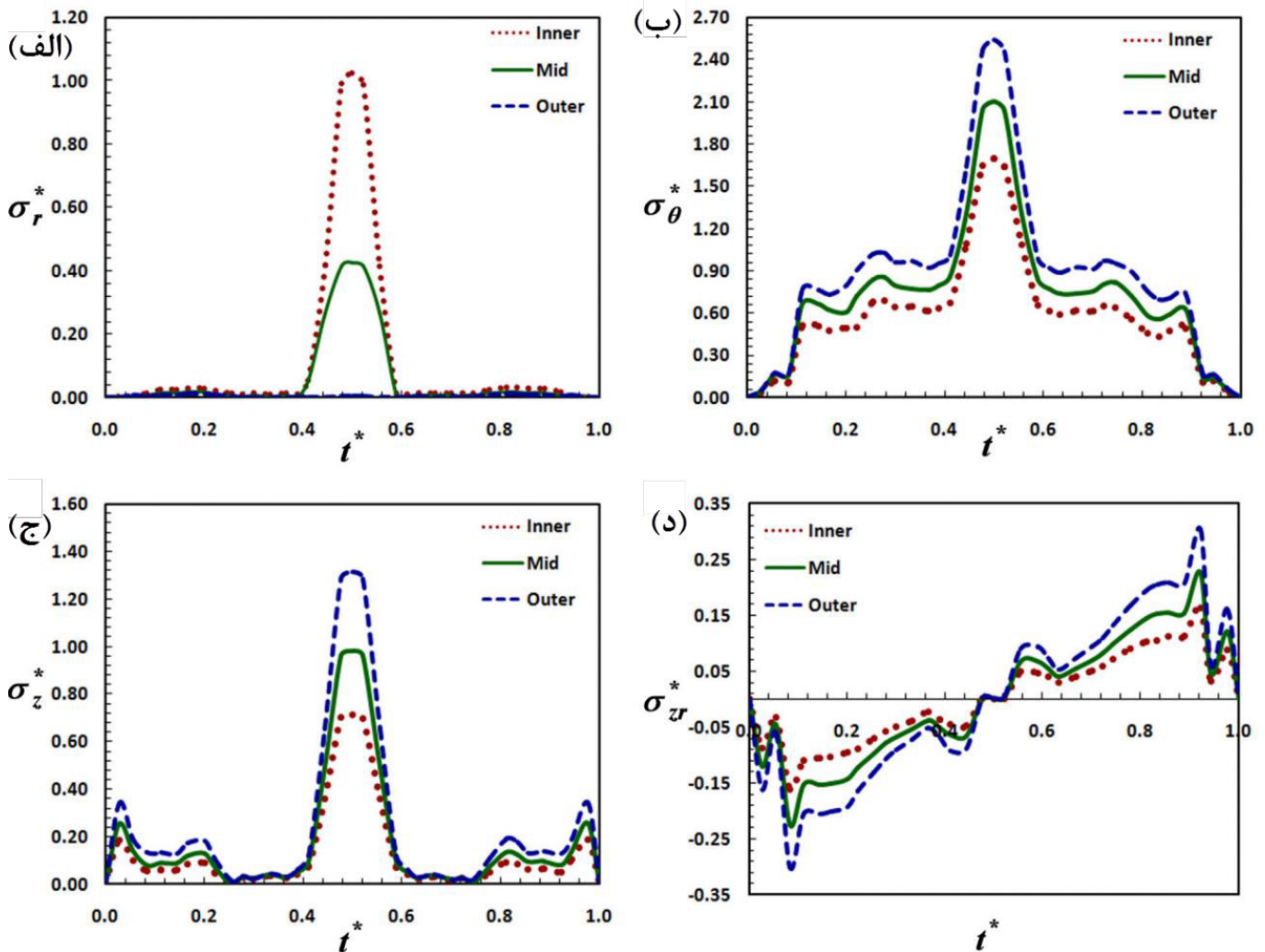


Fig. 8. Time histories of the a) dimensionless radial, b) tangential, c) axial and d) shear ( $\sigma_{zr}^*$ ) stress components on the inner, mid and outer surfaces of the FG shell at  $z^* = 0.5$

شکل ۸: تاریخچه زمانی مؤلفه‌های بدون بعد (الف) تنش شعاعی، (ب) تنش مماسی، (ج) تنش محوری و (د) تنش برشی در سطح‌های داخلی، میانی و خارجی مخروط در  $z^* = 0.5$

مماسی در سطح داخلی واقع در میانه طول مخروط، در دو حالت فشار ثابت و اندازه بار ثابت بررسی شده است. اطلاعات ارائه شده در جدول ۵ بیانگر این می‌باشد که در حالت فشار ثابت، با افزایش مساحت ناحیه تحت فشار متحرک، میزان جابجایی شعاعی و تنش مماسی نیز افزایش می‌یابد. این در حالی است که در حالت اندازه بار ثابت، با افزایش مساحت ناحیه تحت فشار متحرک، میزان فشار اعمالی با توجه به ثابت بودن اندازه نیروی اعمالی کاهش می‌یابد که این امر کاهش میزان جابجایی شعاعی و تنش مماسی را به دنبال دارد.

شعاعی، مماسی، محوری و برشی  $\sigma_{zr}^*$ ، در سطح‌های داخلی، میانی و خارجی مخروط در  $z^* = 0.5$  نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که نمودارهای فوق مانند نمودارهای ارائه شده در شکل ۶ دارای تقارن نسبت به زمان میانه بارگذاری است. همچنین مشاهده می‌شود که در پوسته مدرج تابعی انتخابی سطح خارجی (سطح تمام سرامیک) به علت برخورداری از سفتی بالاتر، دارای تنش بیشتری نیز می‌باشد.

در نهایت در جدول ۵ تاثیر مساحت ناحیه تحت بار فشاری متحرک بر بیشینه مقادیر بدون بعد جابجایی شعاعی و تنش

**Table 5. Effects of moving pressure area on maximum magnitudes of  $U^*$  and  $\sigma_\theta^*$  on the inner surface at  $z^*=0.5$ , for two cases of constant pressure and constant load magnitude**

**جدول ۵:** تاثیر مساحت تحت فشار متحرک بر بیشینه مقادیر بدون بعد جابجایی شعاعی و تنش مماسی در سطح داخلی واقع در میانه طول مخروط، در دو حالت فشار ثابت و اندازه بار ثابت

فشار ثابت		نیرو ثابت		$l/L$
$\sigma_\theta^*$	$U^*$	$\sigma_\theta^*$	$U^*$	
۱/۰۸۳۹	۱/۰۵۸۳	۱/۵۴۸۴	۱/۵۱۱۸	۰/۰۷
۱/۴۹۵۸	۱/۲۸۵۳	۱/۴۹۵۸	۱/۲۸۵۳	۰/۱۰
۱/۷۴۷۸	۱/۵۹۰۴	۱/۳۴۴۵	۱/۲۲۳۴	۰/۱۳
۲/۴۴۶۰	۳/۰۳۴۸	۰/۸۱۵۳	۱/۰۱۱۶	۰/۳۰
۳/۰۴۶۰	۴/۰۵۲۴	۰/۷۴۲۹	۰/۹۸۸۴	۰/۴۱
۳/۱۲۲۵	۴/۰۹۲۴	۰/۷۴۳۵	۰/۹۷۴۴	۰/۴۲
۳/۵۱۲۹	۴/۳۷۱۱	۰/۷۸۰۶	۰/۹۷۱۴	۰/۴۵
۳/۹۴۵۵	۴/۸۱۳۸	۰/۸۲۲۰	۱/۰۰۲۹	۰/۴۸
۴/۴۵۰۰	۵/۱۵۷۴	۰/۸۵۵۸	۰/۹۹۱۸	۰/۵۲
۴/۷۱۸۸	۵/۶۷۲۱	۰/۸۴۲۶	۱/۰۱۲۹	۰/۵۶
۵/۳۲۳۳	۵/۷۹۵۴	۰/۹۷۱۸	۰/۹۹۹۲	۰/۵۸

#### ۴- جمع بندی

در دو حالت فشار ثابت و اندازه بار ثابت پرداخته شده است. برخی از نتایج حاصل از تحلیل‌های انجام گرفته در این فصل به شرح زیر می‌باشند:

(الف) بیشترین جابجایی در هر موقعیت محوری در زمان عبور فشار متحرک از همان موقعیت رخ می‌دهد.

(ب) موقعیت شعاعی تاثیر بسیار کمی در مقدار جابجایی محوری دارد.

(ج) دامنه ارتعاشات آزاد ناشی از تحریک بار فشاری متحرک در پوسته مخروطی مدرج تابعی انتخابی (در مقایسه با دامنه ارتعاشی ایجاد شده ناشی از فشار گذرای سرتاسری [۱۵])، قابل توجه می‌باشد.

(د) به علت غیریکنواخت بودن فشار اعمالی در بارگذاری متحرک، شکل نمودارهای جابجایی پوسته در موقعیت‌های محوری مختلف و در زمان‌های یکسان، متفاوت می‌باشد.

(ه) بر خلاف پوسته‌های ایزوتروپیک، در این پوسته مدرج تابعی، بیشترین تنش‌ها در جداره خارجی ایجاد می‌شود.

(و) با افزایش مساحت ناحیه تحت اعمال فشار متحرک و با فرض ثابت بودن اندازه بار اعمالی (و به دنبال آن کاهش مقدار فشار متحرک)، میزان جابجایی شعاعی و تنش مماسی کاهش می‌یابد.

گفتنی است با توجه به این‌که، پوسته استوانه‌ای حالت ساده

در این مقاله با بهره‌گیری از روش مربعات دیفرانسیلی، تئوری لایه‌ای و بسط فوریه، یک روش عددی ترکیبی توانمند برای مدل‌سازی و تحلیل رفتار دینامیکی پوسته‌های مخروطی ناقص مدرج تابعی در معرض بار فشاری متحرک و همچنین ارتعاشات آزاد ناشی از تحریک بار متحرک ارائه گردید. در اولین گام با بکارگیری بسط سری فوریه، فشار دینامیکی و همچنین تغییرات مولفه‌های جابجایی در راستای محوری مدل‌سازی گردید. سپس با استفاده از تئوری لایه‌ای در راستای شعاعی و اعمال آن در اصل هامیلتون، معادلات حرکت و شرایط مرزی بدست آمد. در انتها نیز از روش مربعات دیفرانسیلی جهت بیان تغییرات زمانی مؤلفه‌های جابجایی در معادلات حاکم استفاده گردید.

با توجه به اعتبارسنجی انجام گرفته و بررسی رفتار همگرایی، دقت و سرعت جواب‌دهی بسیار خوب و همچنین همگرایی سریع روش حل مورد تایید قرار گرفت. سپس با به‌کارگیری این روش عددی، یک پوسته مخروطی ناقص مدرج تابعی تحت بار فشاری متقارن متحرک مدل‌سازی و نتایج آن به تفصیل مورد بررسی قرار گرفت. در انتهای این فصل نیز به بررسی چگونگی تاثیر مساحت ناحیه تحت فشار متحرک، بر بیشینه مقادیر بدون بعد جابجایی شعاعی و تنش مماسی،



$\tau$	تنش برشی، Pa
$\sigma$	تنش عمودی، Pa
$\nu$	ضریب پواسون
$\omega$	فرکانس طبیعی، Hz
$\psi$	زاویه راس مخروط

زیرنویس

$c$	سرامیک
$f$	فلز
$i$	شماره لایه
$m$	تعداد موج محوری
$in$	داخلی
$out$	خارجی
$s$	ناحیه در معرض فشار متحرک

### مراجع

- [1] H. Santos, C.M. Mota Soares, C.A. Mota Soares, J.N. Reddy, A Semi-Analytical Finite Element Model for the Analysis of Cylindrical Shells Made of Functionally Graded Materials under Thermal Shock, *Composite Structures*, 86(1-3) (2008) 10-21.
- [2] X.Q. Fang, J.X. Liu, L.L. Zhang, Y.P. Kong, Dynamic Stress from a Subsurface Cylindrical Inclusion in a Functionally Graded Material Layer under Anti-Plane Shear Waves, *Materials and Structures*, 44(1) (2010) 67-75.
- [3] F. Shahabian, S.M. Hosseini, Stochastic Dynamic Analysis of a Functionally Graded Thick Hollow Cylinder with Uncertain Material Properties Subjected to Shock Loading, *Materials and Design*, 31(2) (2010) 894-901.
- [4] M. Tahani, S.M. Hosseini, T. Talebian, T. A., Transient and Dynamic Stress Analysis of Functionally Graded Thick Hollow Cylinders Subjected to Thermal Shock Loading Using an Analytical Method, *Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering*, 4(8) (2010) 1346-1359.
- [5] A.R. Setoodeh, M. Tahani, E. Selahi, Hybrid Layerwise-Differential Quadrature Transient Dynamic Analysis of Functionally Graded Axisymmetric Cylindrical Shells Subjected to Dynamic Pressure, *Composite Structures*,

شده‌ای از پوسته مخروطی ناقص می‌باشد، بنابراین روش عددی ارائه شده این قابلیت را دارد که با انجام ساده‌سازی‌های لازم، در مدل‌سازی و تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی در معرض بار فشاری متحرک نیز مورد استفاده قرار گیرد. همچنین روش ارائه شده قابلیت به‌کارگیری در تحلیل پوسته‌های کامپوزیتی لایه‌ای استوانه‌ای و مخروطی در معرض فشار متحرک را نیز دارا می‌باشد.

### فهرست علائم

#### علائم انگلیسی

$C$	ماتریس سفتی، Pa
$E$	مدول الاستیسیته، Pa
$h$	ضخامت لایه، m
$K$	مدول حجمی موثر، Pa
$G$	مدول برشی، Pa
$l$	طول، m
$n$	ضریب توزیع توانی
$p$	فشار، Pa
$r$	شعاع، m
$t$	زمان، s
$u$	جابجایی شعاعی، m
$v$	جابجایی مماسی، m
$w$	جابجایی محوری، m
$u_s$	تابع واحد
$V$	سرعت، m/s
$V_c$	درصد حجمی سرامیک
$V_f$	درصد حجمی فلز
$\hat{T}$	انرژی جنبشی، J
$\hat{U}$	انرژی کرنشی، J
$\hat{W}$	کار نیروی خارجی، J

#### علائم یونانی

$\gamma$	کرنش برشی
$\delta$	تابع دلتای دیراک
$\epsilon$	کرنش عمودی

- Differential Quadrature (LW-DQ) Method, *Archive of Applied Mechanics*, 83(5) (2013) 765-781.
- [15] A.R. Setoodeh, M. Tahani, E. Selahi, Transient Dynamic and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Truncated Conical Shells with Non-Uniform Thickness Subjected to Mechanical Shock Loading, *Composites: Part B*, 43(5) (2012) 2161-2171.
- [16] E. Selahi, A.R. Setoodeh, M. Tahani, Three-Dimensional Transient Analysis of Functionally Graded Truncated Conical Shells with Variable Thickness Subjected to an Asymmetric Dynamic Pressure, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 119 (2014) 29-38.
- [17] J. Seidi, Buckling Analysis of Truncated Conical Sandwich Shells with FGM Face Sheets Using Improved Higher-Order Theory, *Journal of Mechanical Engineering Tabriz University*, 48(4) (2018) 337-340.
- [18] J.N. Reddy, A Generalization of Two-Dimensional Theories of Laminated Composite Plates, *Communications in Applied Numerical Methods*, 3 (1978) 173-180.
- [19] J.T. Tzeng, D.A. Hopkins, Dynamic Response of Composite Cylinders Subjected to a Moving Internal Pressure, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 15(11) (1996) 1088-1105.
- [20] A.R. De Faria, Finite Element Analysis of the Dynamic Response of Cylindrical Panels under Traversing Loads, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 23(4) (2004) 677-687.
- [21] M. Mirzaei, On Amplification of Stress Waves in Cylindrical Tubes under Internal Dynamic Pressures, *International Journal of Mechanical Sciences*, 50(8) (2008) 1292-1303.
- [22] G.G. Sheng, X. Wang, Studies on Dynamic Behavior of Functionally Graded Cylindrical Shells with PZT Layers under Moving Loads, *Journal of Sound and Vibration*, 323(3-5) (2009) 772-789.
- [23] G.G. Sheng, X. Wang, Response and Control of Functionally Graded Laminated Piezoelectric Shells under Thermal Shock and Moving Loadings, *Composite Structures*, 93(1) (2010) 132-141.
- [24] A.H. Sofiyev, Dynamic Response of an FGM Cylindrical 93(11) (2011) 2663-2670.
- [6] M. Tahani, A.R. Setoodeh, E. Selahi, Three-Dimensional Transient Analysis of Functionally Graded Cylindrical Shells Subjected to Asymmetric Dynamic Pressure, *Science and Engineering of Composite Materials*, 20(1) (2013) 75-85.
- [7] M. Darvizeh, R. Ansari, A.R. Shahrokhzadeh, R. Gholami, Flutter Phenomenon of a Pressurized Functionally Graded Cylindrical Shell in Aerodynamic Supersonic Flow Based on the Flugge's Theory, *Iranian Journal of Mechanical Engineering (ISME)*, 16(3) (2014) 6-33.
- [8] A. Hadi, S. Shakheshi, H. Ovesy, J. Fazilati, Free Vibration of Functionally Graded Materials Cylindrical Shells on Elastic Foundation under Axial Force, Lateral Pressure and Different Boundary Conditions, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 50(5) (2018) 1097-1112.
- [9] E. Selahi, A.R. Setoodeh, M. Tahani, Transient Analysis of Functionally Graded Cylindrical Shells Subjected to Asymmetric Thermo-mechanical Shock Loads with Temperature Dependent Material Properties, *Journal of Solid and Fluid Mechanics*, 9(2) (2019).
- [10] A.H. Sofiyev, The Stability of Functionally Graded Truncated Conical Shells Subjected to a Periodic Impulsive Loading, *International Journal of Solids and Structures*, 41(13) (2004) 3411-3424.
- [11] A.H. Sofiyev, The Buckling of Functionally Graded Truncated Conical Shells under Dynamic Axial Loading, *Journal of Sound and Vibration*, 305(4-5) (2007) 808-826.
- [12] K. Rajesh, R.K. Bhangale, N. Ganesan, C. Padmanabhan, Linear Thermoelastic Buckling and Free Vibration Behavior of Functionally Graded Truncated Conical Shells, *Journal of Sound and Vibration*, 292(1-2) (2006) 341-371.
- [13] F. Tornabene, E. Viola, D.J. Inman, 2-D Differential Quadrature Solution for Vibration Analysis of Functionally Graded Conical, Cylindrical Shell and Annular Plate Structures, *Journal of Sound and Vibration*, 328(3) (2009) 259-290.
- [14] M. Talebitooti, Three-Dimensional Free Vibration Analysis of Rotating Laminated Conical Shells: Layerwise



- Journal of Impact Engineering, 85 (2015) 27-36.
- [29] M. Malekan, F.B. Barros, E. Sheibani, Thermo Mechanical Analysis of a Cylindrical Tube under Internal Shock Loading Using Numerical Solution, Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 38(8) (2016) 256-264.
- [30] H. Ramezani, M. Mirzaei, Study on Effect of Boundary Conditions in Transient Dynamic Stress Analysis of Thick Cylindrical Shells under Internal Moving Pressure, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, 50(5) (2018) 951-960.
- [31] T. Mori, K. Tanaka, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, Acta Metall, 21 (1973) 571-574.
- [32] A.H. Sofiyev, On the Vibration and Stability of Clamped FGM Conical Shells under External Loads, Journal of Composite Materials, 45 (2011) 771-788.
- Shell under Moving Loads, Composite Structures, 92(1) (2010) 58-66.
- [25] P. Malekzadeh, Y. Heydarpour, Response of Functionally Graded Cylindrical Shells under Moving Thermo-Mechanical Loads, Thin-Walled Structures, 58 (2012) 51-66.
- [26] P. Malekzadeh, M.R. Golbahar Haghighi, Y. Heydarpour, Heat Transfer Analysis of Functionally Graded Hollow Cylinders Subjected to an Axisymmetric Moving Boundary Heat Flux, Numerical Heat Transfer, Part A: Applications, 61(8) (2012) 614-632.
- [27] A.T. Karttunen, R. Herten, Dynamic Response of a Cylinder Cover under a Moving Load, International Journal of Mechanical Sciences, 82 (2014) 170-178.
- [28] M. Mirzaei, M. Najafi, H. Niasari, Experimental and Numerical Analysis of Dynamic Rupture of Steel Pipes under Internal High-Speed Moving Pressures, International

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

*E. Selahi, A. Setoodeh, M. Tahani, Transient Analysis and Free Vibration of Functionally Graded Truncated Conical Shells Subjected to Moving Pressure, Amirkabir J. Mech. Eng., 53(2) (2021) 897-912.*

DOI: [10.22060/mej.2019.16788.6440](https://doi.org/10.22060/mej.2019.16788.6440)

