



## Free vibration of axially functionally graded nanobeam with an attached mass based on nonlocal strain gradient theory via new ADM numerical method

M. Eghbali<sup>1</sup>, S. A. Hosseini<sup>2\*</sup>, O. Rahmani<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Mechanical Engineering Department, Zanjan University, Zanjan, Iran

<sup>2</sup> Mechanical Engineering Department, Buein Zahra Technical University, Qazvin, Iran

**ABSTRACT:** The purpose of this paper is to study the free vibrations along a longitudinal line of a targeted graded nano beam with an attached mass based on the theory of nonlocal strain gradient theory using the asymptotic development method. nowadays due to the importance and usage of nano structures, investigation and recognition of their mechanical and mechanical properties seem necessary. Due to its small size and behavior depending on its size and the inability of classical theories to predict dependant mechanical behaviors, non-classical theories have been used. The governing equations and boundary condition relations of targeted graded nano beam with five boundary conditions simple simple, clamped-free, clamped-clamped, clamped simple, and clamped-attached mass have derived by using Hamiltonian principle. Then differential equation is solved analytically to obtain the frequency equations for the five boundary conditions. In the following, dimensionless frequencies by using the solving zero and the first order of numerical asymptotic development method have derived. Advantage of this method is simplicity, noncomplex mathematical relations and proper coding execution time. Eventually, the effect of nonlocal parameters, material length scale, type of material, the ratio of length to thickness, and mode number on free vibration nano beam has been investigated.

### Review History:

Received: Sep. 06, 2019

Revised: Nov. 25, 2019

Accepted: Jan. 26, 2020

Available Online: Feb. 23, 2020

### Keywords:

Nano Beam

Nonlocal Strain Gradient Theory

Axially Functionally Graded

Natural Frequencies

Asymptotic Development Method

## 1. INTRODUCTION

Nonlocal elasticity theory is presented by Eringen [1]. In this theory, the stress at a point is dependent on the strain at all points. Strain gradient theory was first presented by Mindlin [2]. In elastic gradient elasticity theory, strain gradient is used to express the effect of four measured parameters. The modified strain gradient theory is presented by Lam et al. [3]. In this theory, the effect of three different length scales is used to express the effect of the effect. Couple stress theory is presented by Toupin [4].

Cao et al. [5], studied the free vibration of an axially functionally graded beam with different boundary conditions and compared the results with finite element results and the results of other literature, in this paper, the effect of the gradient parameter on three natural frequencies is discussed.

## 2. METHODOLOGY

The purpose of this study is to investigate the free vibration of a nano beam functionally graded nano beam with concentrated mass using strain gradient theory. The solution of this paper will be done using the new method of approximate development. After extracting the differential equations of the beam and then nondimensionalization of equations, the first frequencies for boundary conditions are extracted from the solution of the frequency equation. In the following, the displacement equation is extended as a series that is multiplied by a small perturbation parameter. This method consists of two order solving (zero and one order)

solving, which is extended to one sentence to solve the zero frequency of frequencies and is extended to solve the order of one to two sentences. Finally, the dimensionless equations are solved by solving the differential equations

## 3. RESULTS AND DISCUSSION

In this section, we use the proposed method for free vibration analysis of a functionally graded nano beam with different boundary conditions. In this paper, nano beam is considered from aluminum and titanium. It is the right side of the pure titanium and the left side of the pure aluminum. The nano beam dimensions are  $\frac{L}{H} = 10, B = 2H$ .

In Fig. 2, the effect of size-dependent parameters on the first dimensionless natural frequencies of a functional nano beam for the simply boundary condition is plotted.

Increasing the dimensionless nonlocal parameter decreases the dimensionless natural frequencies as well as increasing the dimensionless longitudinal parameter, which increases the frequency values due to the nano beam stiffness changes due to the effect of size on the nano beam. It is also seen in Fig. 2 that the dimensionless natural frequencies can be larger or smaller than the classical model, depending on the different values of the nonlocal parameter and the longitudinal scale parameter of the material. Classical theories are not suitable for modeling nano beam and must consider the nonlocal effects in the static and dynamic analysis of these structures. The effect of the small-scale parameter of the nano beam makes the nanotube behavior closer to the softer nano beam.

\*Corresponding author's email: hosseini@znu.ac.ir



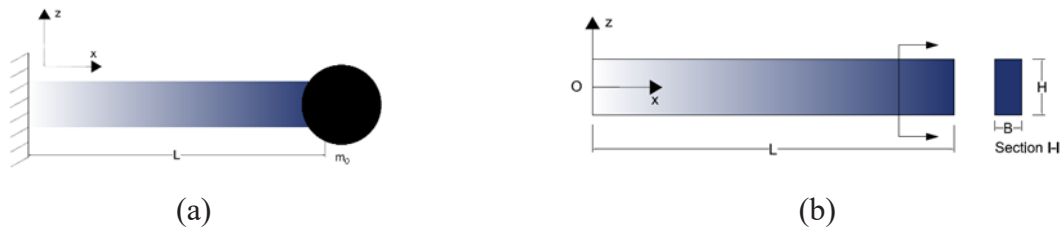


Fig. 1. The geometry and coordinate system of an FG nano beam (a) with attached mass (b) without attached mass

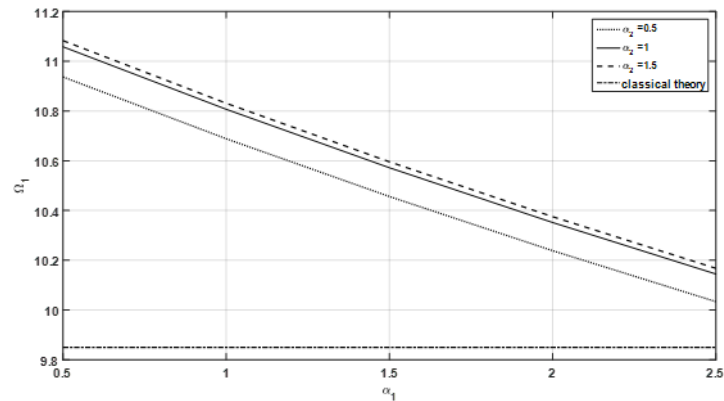


Fig. 2. The first order of dimensionless natural frequencies varying with the size-dependent parameters  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  for simply supported FG beams ( $k=1$ )

#### 4. CONCLUSION

- As the power index parameter ( $k$ ) increases, the natural frequencies increase, indicating the influence of the power index parameter on the natural frequencies. As the nanotube changes, Young's modulus increases and the mass density decreases and also increases the natural frequency and the non-local effects on the frequency response.

-Longitudinal free vibration analysis revealed that different length-thickness ratios did not affect the values of natural frequencies.

-The dimensionless natural frequencies decreased with increasing nonlocal parameter ( $ea$ ) and increased with increasing length scale parameter ( $l$ ).

-The natural frequencies of the nonlocal strain gradient model, depending on the values of the size-dependent parameters, can be larger or smaller than the classical model. By increasing the parameter length of the material scale as well as decreasing the nonlocal parameter, it results in increased scaling behavior of the functional nano beam.

-The use of strain gradient theory in nano and micro scale is considered necessary. As the size is smaller, the linear frequency ratio of these theories leads to more classical theory.

#### REFERENCES

- [1] A.C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of applied physics*, 54(9) (1983) 4703-4710.
- [2] R. Mindlin, H. Tiersten, Effects of couple-stresses in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11(1) (1962) 415-448.
- [3] D.C. Lam, F. Yang, A. Chong, J. Wang, P. Tong, Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51(8) (2003) 1477-1508.
- [4] R.A. Toupin, Theories of elasticity with couple-stress, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 17(2) (1964) 85-112.
- [5] D. Cao, Y. Gao, M. Yao, W. Zhang, Free vibration of axially functionally graded beams using the asymptotic development method, *Engineering Structures*, 173 (2018) 442-448.

#### HOW TO CITE THIS ARTICLE

M. Eghbali, S.A. Hosseini, O. Rahmani, Free vibration of axially functionally graded nanobeam with an attached mass based on nonlocal strain gradient theory via new ADM numerical method. *Amirkabir J. Mech Eng.*, 53(special issue 2) (2021) 275-276.

DOI: 10.22060/mej.2020.17013.6495





## بررسی ارتعاشات آزاد یک نانو تیر مدرج هدفمند طولی به همراه جرم متمرکز با استفاده از روش عددی جدید توسعه تقریبی و تئوری غیرموضعی گرادیان کرنشی

محمدرضا اقبالی<sup>۱</sup>، سید امیرحسین حسینی<sup>۲\*</sup>، امید رحمانی<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup> دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

<sup>۲</sup> دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه فنی مهندسی بوبین زهرا، بوبین زهرا، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸/۰۶/۱۵

بازنگری: ۱۳۹۸/۰۹/۰۴

پذیرش: ۱۳۹۸/۱۱/۰۶

ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۱۲/۰۴

### کلمات کلیدی:

نانو تیر

تئوری گرادیان کرنشی غیرمحل

مدرج هدفمند طولی

فرکانسهای طبیعی

روش توسعه تقریبی

**خلاصه:** در این مقاله هدف، مطالعه ارتعاشات آزاد طولی یک نانو تیر مدرج هدفمند به همراه جرم متمرکز براساس تئوری غیرموضعی گرادیان کرنشی با استفاده از روش عددی توسعه تقریبی می‌باشد. امروزه با توجه به اهمیت و کاربرد روز افزون نانو سازه‌ها، بررسی و شناخت خصوصیات مکانیکی و ارتعاشی آن‌ها ضروری به نظر می‌رسد. به دلیل ابعاد کوچک سازه و رفتار وابسته به اندازه آن و عدم توانایی تئوری‌های کلاسیک در پیش‌بینی رفتارهای مکانیکی وابسته به اندازه، از تئوری‌های غیرکلاسیک استفاده گردیده است. معادلات حاکم و روابط شرایط مرزی با استفاده از اصل همیلتون استخراج گردیده و برای نانو تیر مدرج هدفمند با پنج شرط مرزی لولا-لولا، گیردار-آزاد، گیردار-گیردار، گیردار-لولا و گیردار-جرم متمرکز ارائه شده است. سپس، معادله دیفرانسیل به صورت تحلیلی حل گردیده است تا معادله‌های فرکانس برای پنج شرط مرزی به دست آیند. در ادامه با استفاده از روش عددی توسعه تقریبی و با حل مرتبه صفر و مرتبه یک، فرکانس‌های بی‌بعد استخراج گردیده است. مزایای استفاده از این روش سادگی روابط و زمان اجرا مناسب در کدنویسی می‌باشد. در نهایت تاثیر پارامترهایی مانند پارامتر غیرموضعی، مقیاس طول ماده، تاثیر نوع تغییر ماده و نسبت طول به ضخامت بر روی ارتعاشات آزاد نانو تیر بررسی شده است.

### ۱- مقدمه

صنایع ساخت و تولید، سازه‌های با ابعاد میکرومتری راه خود را در این صنایع گشوده‌اند. در میان این سازه‌ها، تیرهای با ابعاد میکرو، به سبب کاربردهای گسترده‌ای که در میکروسکوپ‌های نیروی اتمی، حسگرهای زیستی، میکرومحرک‌ها و میکروکاوشرها دارند، مورد توجه ویژه‌ای قرار گرفته‌اند. در این کاربردها، معمولاً به سبب ابعاد کوچک، خواص فیزیکی متفاوت و جدیدی در تیر مشاهده می‌شود. تشدیدگر میکروالکترومکانیکی<sup>۱</sup> دستگاهی میکروالکترومکانیکی و بسیار کوچک است که به عنوان دستگاهی برای سنجش دقیق زمان مورد استفاده می‌گیرد. تشدیدگر میکروالکترومکانیکی از یک میکروتیر دوسرگیردار تشکیل شده است که با فرکانسی بسیار بالا ارتعاش می‌کند. علاوه بر این، چندین میکروحسگر و مدار تحریک نیز

مواد مدرج تابعی یک نوع جدید از مواد هستند که تغییرات مداومی در خواص مواد از یک جزء به جزء دیگر دارند. به دلیل خواص مکانیکی و حرارتی آن‌ها، این مواد معمولاً در انواع سازه‌های مهندسی با هندسه تیر، صفحه و پوسته به طور گسترده در محیط‌های مهندسی، به ویژه برای توربین گاز و مهندسی هوافضا مورد استفاده قرار می‌گیرند. از سوی دیگر مطالعه ارتعاشات این سازه‌ها اهمیت زیادی دارد. همچنین به دلیل مقاومت حرارتی عالی و تمرکز تنش پایین‌تر، امروزه مفهوم مواد مدرج تابعی در سیستم‌های مقیاس کوچک مانند سیستم‌های میکرو/نانو الکترومکانیکی به کار می‌رود. به سبب پیشرفت‌های اخیر حاصل شده در علوم مهندسی و

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: hosseini@bzte.ac.ir

1 Micro Electro Mechanic Resonator



چهار پارامتر مقیاس اندازه استفاده می‌شود. تئوری گرادیان کرنشی اصلاح شده توسط لام و همکاران [۱۴]، ارائه شده است. در این تئوری برای بیان اثر اندازه از سه پارامتر مقیاس طول استفاده می‌شود. تئوری تنش کوپل توسط توپین [۱۵] ارائه شده است. در این تئوری برای بیان اثر اندازه از دو پارامتر مقیاس طول استفاده می‌شود. تئوری تنش کوپل در بسیاری از مراجع تحت عنوان تئوری تنش کوپل کلاسیک شناخته می‌شود. تئوری تنش کوپل اصلاح شده توسط یانگ [۱۶]، ارائه شده است. او در این پژوهش با بیان معادله دیگری به نام کوپل ممان (علاوه بر تعادل نیرو تعادل ممان) متقارن بودن تانسور کوپل تنش را اثبات نمود و تعداد پارامتر مقیاس طول برای بیان اثر اندازه را، از دو به یک کاهش داد. کاهش تعداد پارامترهای مقیاس طول در تئوری تنش کوپل منجر به سودمند بودن و کاربرد بیشتر این تئوری نسبت به تئوری تنش کوپل کلاسیک گردیده است. تئوری تنش کوپل اصلاح شده حالت ساده شده تئوری گرادیان کرنش است که در آن از چرخش به جای کرنش برای بدست آوردن تانسور انحنا استفاده شده است.

لی و همکاران [۱۷] یک روش ماتریس انتقال دقیق را برای تجزیه و تحلیل ویژگی‌های ارتعاشات آزاد مواد مدرج تابعی ارائه دادند. در این مقاله خواص مواد در راستای ضخامت تیر تغییر می‌کند. در ادامه روابط با استفاده از اصل همیلتون استخراج گردید و نتایج با استفاده از تئوری کلاسیک تیر برای شرایط مرزی مختلف محاسبه شده است. ابراهیمی و همکاران [۱۸] به بررسی آنالیز ارتعاشات یک نانو تیر پیرو مگنتیک مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک پرداختند. روابط با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلّی ارینگن و همچنین با کمک روش همیلتون استخراج شد و نتایج عددی براساس تئوری مرتبه سوم تیر محاسبه گردیدند. لی و همکاران [۱۹] به بررسی کماتش و ارتعاشات آزاد یک نانو تیر مدرج تابعی محوری با استفاده از تئوری گرادیان کرنش غیرمحلّی براساس روش مربع سازی تفاضلی تعمیم یافته<sup>۱</sup> پرداختند. با استفاده از اصل همیلتون معادلات حرکت و شرایط مرزی به دست آمد و در ادامه تاثیر اثر اندازه بر روی پارامترهای کماتش و فرکانس‌های طبیعی بررسی گردید.

ژانگ و همکاران [۲۰] مدل سازی عدم قطعیت را برای رفتار ارتعاشات و کماتش یک نانوتیر مدرج تابعی در محیط گرمایی مورد

سایر بخش‌های تشدیدگر را تشکیل می‌دهند. میکروتشدیدگرها در سال‌های آینده به عنوان دستگاه‌های سنجش زمان در دستگاه‌هایی نظیر گوشی‌های تلفن همراه یا رایانه‌ها به کار خواهند رفت. در تشدیدگرهای میکروالکترومکانیکی، فرکانس ارتعاشی میکروتیر به عنوان مرجعی برای سنجش گذر زمان مورد استفاده قرار می‌گیرد. به منظور سنجش دقیق زمان، فرکانس ارتعاش میکروتیر می‌بایست به طور دقیق تعیین شود، چراکه کوچکترین خطا یا انحراف ممکن است به ایجاد اختلاف فاحش و غیرقابل قبول بین زمان اعلام شده توسط میکروتشدیدگر و زمان واقعی بینجامد. به همین جهت رسیدن به یک مدل سازی دقیق که بتواند ارتعاش سیستم را با بیشترین دقت محاسبه کند به موضوع تحقیقاتی مهمی تبدیل شده است [۱-۵].

به منظور مطالعه رفتار نانو ساختارها، روش‌های متعددی استفاده شده است. شبیه سازی دینامیک مولکولی از جمله روش‌های مورد استفاده در مدل سازی نانوساختارها می‌باشد. با این حال، این روش‌ها بسیار وقت گیر است به نحوی که مدل سازی عملکرد ساختارهای پیچیده با تعداد اتم بالا تقریباً غیرممکن است. برای غلبه بر این مشکل تئوری‌های مرتبط با اثرات اندازه توسعه یافته است. فرض بنیادین در تئوری‌های کلاسیک الاستیسیته، پیوستگی محیط مادی و میدان‌های تانسوری تنش و کرنش در این محیط‌ها است. در نانو سازه‌ها، فضای خالی بین اتم‌ها نسبت به ابعاد نانو سازه قابل توجه بوده و نمی‌توان از آن صرف نظر کرد. عدم توجه به این موضوع می‌تواند باعث انحراف زیاد از رفتار واقعی آنان گردد. همچنین، در نانوساختارها، فرضیات پیوستگی محیط مادی دیگر اعتبار نخواهد داشت. بنابراین استفاده از تئوری‌های مبتنی بر مکانیک محیط‌های پیوسته‌ی کلاسیک، که براساس فرض پیوستگی محیط مادی استوار است، برای مدل سازی نانو سازه‌ها صحیح نمی‌باشد.

تئوری الاستیسیته غیرمحلّی توسط ارینگن [۶] ارائه شده است. در این تئوری تنش در یک نقطه به کرنش در تمام نقاط وابسته می‌باشد. در نهایت برای اجسام همگن و ایزوتروپیک، تئوری خطی منجر به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل برای میدان جابجایی می‌شود که به طور کلی حل آن دشوار است. این تئوری به وسیله بسیاری از اشخاص مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است [۷-۱۲]. تئوری گرادیان کرنشی اولین بار توسط میندلین ارائه شده است [۱۳]. در تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی برای بیان اثر اندازه از

با استفاده از اصل همیلتون و تئوری الاستیسیته غیر محلی برای یک تیر تیموشینکو استخراج گردید. در ادامه ارتعاشات گرمایی و کمانش گرمایی برای شرایط مرزی مختلف با استفاده از روش المان محدود و روش مربع سازی تفاضلی تعمیم یافته به دست آمد، به ازای پارامترهای مختلف اثر اندازه با یکدیگر مقایسه گردید. بخشی خانیکی [۲۷] ارتعاشات نانوتیر مدرج تابعی را مورد مطالعه قرار داد. سپس معادلات با استفاده از تئوری ارینگن و همچنین اصل همیلتون استخراج شد و با استفاده از روش مربع سازی تفاضلی تعمیم یافته فرکانس های نانو تیر برای شرایط مرزی مختلف محاسبه گردید. لیو و همکاران [۲۸] ارتعاشات آزاد غیرخطی یک نانو تیر مدرج تابعی سانودیچی را مورد بررسی قرار دادند. سپس معادلات با استفاده از روش همیلتون و تئوری گرادیان کرنش غیرمحلی استخراج شد. در ادامه فرکانس های طبیعی به ازای پارامترهای مختلف اثر اندازه برای تمامی شرایط مرزی محاسبه گردید.

قدیری و همکاران [۲۹] آنالیز ارتعاشات عرضی یک نانوتیر مدرج تابعی به همراه جرم متمرکز با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول غیرمحلی مورد بررسی قرار دادند. در ادامه معادلات نانوتیر بر مبنای تئوری الاستیسیته غیرمحلی و و نظریه تیر تیموشینکو و همچنین روش همیلتون استخراج می گردد. سپس با اعمال روش تحلیلی برای شرط مرزی فرکانس های طبیعی به دست می آید. در نهایت به مطالعه تاثیر پارامترهای اثر اندازه، جرم انتهای تیر، ضخامت تیر و شاخص توانی بر روی فرکانس های طبیعی پرداخته شده است. تولگا و همکاران [۳۰] ارتعاشات آزاد یک تیر کامپوزیتی دوار با جرم نقطه ای متصل به آن را مورد بررسی قرار دادند. سپس معادلات تیر برای شرط مرزی بسته-آزاد با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم استخراج گردید. در ادامه با استفاده از روش ریتز فرکانس های طبیعی به دست آمد. در نهایت به مطالعه تاثیر پارامترهای سرعت چرخش، نسبت جرم متصل به جرم تیر و نسبت طول به ضخامت بر روی فرکانس های طبیعی پرداخته شده است.

هدف از این پژوهش بررسی ارتعاشات آزاد یک نانو تیر مدرج هدمند طولی به همراه جرم متمرکز با استفاده از تئوری غیرموضعی گرادیان کرنشی می باشد. حل مساله حاضر در این مقاله با استفاده از روش جدید توسعه تقریبی انجام خواهد شد. مبنای کار این روش بدین صورت می باشد که بعد از استخراج معادلات دیفرانسیل تیر

بررسی قرار دادند. سپس روابط با استفاده از روش همیلتون و تئوری الاستیسیته غیرمحلی ارینگن استخراج گردید. در ادامه با استفاده از روش تجزیه و تحلیل فاصله زمانی مبتنی بر حساسیت نتایج محاسبه شد. لیو و همکاران [۲۱] ارتعاشات یک نانوتیر مگنتو-الکترو-ویسکوالاستیک مدرج تابعی بر بستر ویسکو الاستیک را مورد بررسی قرار دادند. روابط با استفاده از روش انرژی و تئوری الاستیسیته غیرمحلی ارینگن برای یک تیر تیموشینکو استخراج گردید. سپس نتایج استخراج شده با نتایج مقاله دیگر به ازای پارامترهای مختلف اثر اندازه و همچنین شرایط مرزی مختلف مقایسه گردید. کائو و همکاران [۲۲] با استفاده از روش توسعه تقریبی به بررسی ارتعاشات آزاد تیر مدرج تابعی محوری با شرایط مرزی مختلف پرداختند و نتایج به دست آمده را با نتایج المان محدود و نتایج مقالات دیگر مقایسه نمودند همچنین، در این مقاله تاثیر پارامتر گرادیان در سه فرکانس طبیعی مورد بحث قرار گرفته است.

یانگ و همکاران [۲۳] ارتعاشات آزاد غیرخطی یک نانوتیر مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک را مورد مطالعه قرار دادند. سپس با استفاده از روش همیلتون و تئوری گرادیان کرنش غیرمحلی معادلات و شرایط مرزی استخراج گردید در ادامه با استفاده از روش تجزیه و تحلیل فاصله زمانی مبتنی بر حساسیت و روش تجزیه و تحلیل زمانبندی مبتنی بر الگوریتم تطبیقی فرکانس های بی بعد استخراج گردید. کمانش و ارتعاشات یک نانوتیر مدرج تابعی توسط ایمانی آریا و همکاران [۲۴] بر اساس یک مدل المان محدود غیرمحلی مطالعه گردید. سپس با استفاده از روش همیلتون و تئوری الاستیسیته غیرمحلی روابط استخراج شد. المان تیر پیشنهادی شامل پنج نقطه و ده گره می باشد، در ادامه نتایج با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای شرایط مرزی مختلف محاسبه گردید. ترابلسی و همکاران [۲۵] ارتعاشات آزاد و اجباری یک نانوتیر تیموشینکو مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک را مورد بررسی قرار دادند. سپس معادلات با استفاده از اصل همیلتون و تئوری ارینگن استخراج گردید. در نتیجه نتایج حاصل به ازای پارامترهای مختلف اثر اندازه و با روش مقیاس اندازه، روش مجذور هارمونیک و روش مجذور تفاضلی مقایسه گردیدند.

ایمانی آریا و همکاران [۲۶] یک مدل المان محدود برای آنالیز ترموالاستیک یک نانوتیر مدرج تابعی ارائه نمودند. سپس روابط

این روش جدید یک روش ساده به لحاظ روابط ریاضی می‌باشد. برای نمونه روش توسعه تقریبی در مقایسه با روش بدون المان که انتخاب ناحیه تاثیر و تابع وزن مناسب (زنگوله‌ای، پله‌ای و غیره) از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد یا روش المان محدود که دارای پیچیدگی در المان‌بندی‌ها و فراخوانی ماتریس‌های سفتی دارند، به مراتب از روابط ساده‌تری برخوردار می‌باشد. همین ساده بودن روابط باعث می‌شود که در کدنویسی سرعت حل مسأله در مقایسه با روش‌های عددی دیگر سریع‌تر باشد. با توجه به درصد خطای پایین این روش در عین سادگی روابط ریاضی، روش توسعه تقریبی برای حل مسائل مختلف مکانیک با هندسه‌های گوناگون مناسب می‌باشد. در مطالعه پژوهش‌های پیشین تاکنون از این روش عددی در نانوتیرها استفاده نشده است.

## ۲- فرمول‌بندی مساله

این پژوهش، تیری با مقطع عرضی یکنواخت و ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی برای شرایط مرزی مختلف همچنین تاثیر جرم متمرکز

و سپس بی‌بعدسازی، ابتدا فرکانس‌های اولیه برای شرایط مرزی مورد نظر از حل معادله فرکانس استخراج می‌گردد. در ادامه معادله جابجایی به صورت یک سری که در یک پارامتر کوچک اغتشاش ضرب شده بسط داده می‌شود. معمولاً برای به دست آوردن فرکانس‌ها تا دو جمله بسط داده می‌شوند. این روش شامل دو مرتبه حل (مرتبه صفر و مرتبه یک) می‌باشد که در حل مرتبه صفر فرکانس‌ها تا یک جمله بسط داده شده است و در حل مرتبه یک تا دو جمله بسط داده می‌شود. در نهایت با حل معادله دیفرانسیل فرکانس‌های بی‌بعد شده استخراج می‌شود. در این مقاله یک معیار جدید بر مبنای کاهش پارامترهای ضریب کرنش که در تئوری الاستیسیته غیرمحلّی بیان شد ارائه گردیده است. همچنین به این موضوع اشاره گردید که مقیاس‌های طولی موجود در تئوری الاستیسیته غیرمحلّی و گرادیان کرنش باعث سردرگمی میان محققان شده و در ادامه با استفاده از دو تابع کرنل پایه به بیان تئوری گرادیان کرنش و الاستیسیته غیرمحلّی مرتبه بالا پرداخته شده است.

از ویژگی‌های روش توسعه تقریبی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

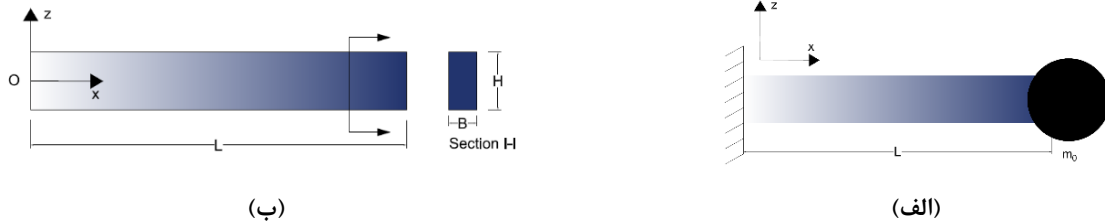


Fig. 1. The geometry and coordinate system of a FG nano beam (a) with attached mass (b) without attached mass.

شکل ۱: هندسه و سیستم مختصات یک نانوتیر (الف) به همراه جرم متمرکز (ب) بدون جرم متمرکز

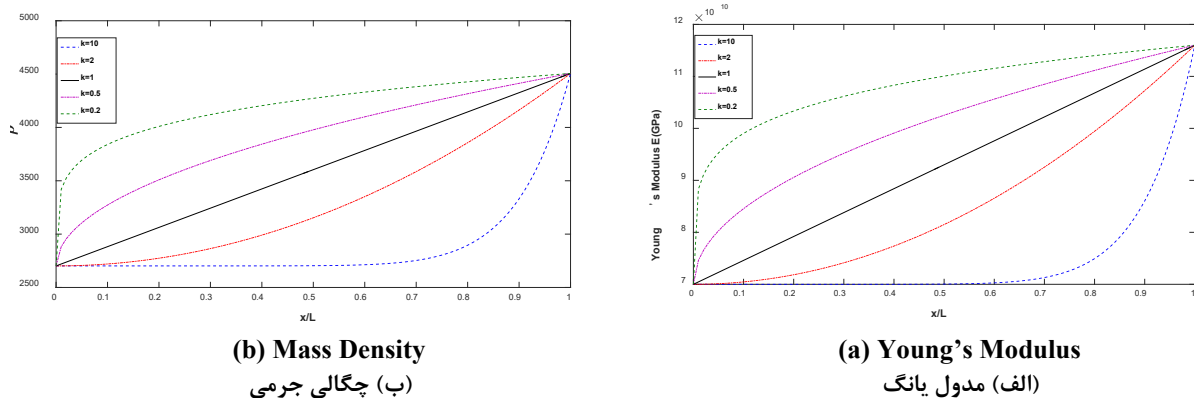


Fig. 2. The plots of variation of material properties of the functionally graded nano beam.

شکل ۲: نمودار تغییرات خواص مواد نانوتیر مدرج تابعی

شود [۱۴، ۳۱]. در رابطه (۴)،  $\alpha(x, x', ea)$  تابع کرنل غیرمحلی می‌باشد [۶]. بنابراین نتیجه می‌شود:

$$(1 - (ea)^2 \nabla^2) \sigma_{xx} = E(x) \varepsilon_{xx} \quad (5)$$

$$(1 - (ea)^2 \nabla^2) \sigma_{xx}^{(1)} = l^2 E(x) \varepsilon_{xx,x} \quad (6)$$

در روابط (۵) و (۶)،  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$  می‌باشد. با استفاده از روابط (۳)، (۵) و (۶) داریم:

$$[1 - (ea)^2 \nabla^2] t_{xx} = E(x) \varepsilon_{xx} - l^2 \nabla \cdot (E(x) \nabla \varepsilon_{xx}) \quad (7)$$

• تئوری پیوسته غیرمحلی: در معادله (۷)، اگر  $l = 0$  قرار دهیم خواهیم داشت:

$$[1 - (ea)^2 \nabla^2] t_{xx} = E(x) \varepsilon_{xx} \quad (8)$$

• تئوری گرادیان کرنشی: در معادله (۷)، اگر  $ea = 0$  قرار دهیم خواهیم داشت:

$$t_{xx} = E(x) \varepsilon_{xx} - l^2 \nabla \cdot (E(x) \nabla \varepsilon_{xx}) \quad (9)$$

#### ۴- معادله حاکم برای تیرهای مدرج تابعی وابسته به اندازه

فرمول‌بندی کرنش خطی تیر اویلر برنولی به صورت زیر استخراج می‌شود که در آن جابجایی طولی صفحه میانی تیر ( $u$ ) به دلیل کوچک بودن صرف نظر شده است.

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xx} = 0 \quad (10)$$

۴-۲- محاسبه معادلات تعادل به کمک اصل همیلتون

انرژی کرنش مجازی تیر مدرج تابعی وابسته به اندازه به صورت رابطه (۱۱) می‌باشد [۳۱]:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{xx}^{(1)} \nabla \delta \varepsilon_{xx}) dV \\ &= \int_V (\sigma_{xx} - \nabla \sigma_{xx}^{(1)}) \delta \varepsilon_{xx} dV + \left[ \int_A \sigma_{xx}^{(1)} \delta \varepsilon_{xx} dA \right]_0^L \\ &= \int_V t_{xx} \delta \varepsilon_{xx} dV + \left[ \int_A \sigma_{xx}^{(1)} \delta \varepsilon_{xx} dA \right]_0^L \end{aligned} \quad (11)$$

منتجه‌های تنش به صورت زیر استخراج می‌شود:

برروی فرکانس‌های طبیعی را مورد بررسی قرار می‌دهد. طول تیر، عرض، ارتفاع و جرم متمرکز به ترتیب  $L$ ،  $B$ ،  $H$  و  $m_0$  در شکل ۱ نشان داده شده است.

#### ۲-۱- ماده مدرج تابعی

در این مقاله خواص ماده تیر به طور پیوسته در جهت محوری با فرض گرادیان توانی تغییر می‌کند، بنابراین خواص مواد مانند مدول یانگ و چگالی جرمی در امتداد محور تیر به صورت زیر می‌باشد:

$$E(x) = (E_R - E_L) \left( \frac{x}{L} \right)^k + E_L \quad (1)$$

$$\rho(x) = (\rho_R - \rho_L) \left( \frac{x}{L} \right)^k + \rho_L \quad (2)$$

در روابط (۱) و (۲)،  $k$  پارامتر غیرمنفی شاخص توانی است. در  $x = L$ ،  $E = E_R$  و  $\rho = \rho_R$ ؛ و در  $x = 0$ ،  $E = E_L$  و  $\rho = \rho_L$  می‌باشند. در شکل ۲ تغییر خواص مواد تعریف شده در روابط (۱) و (۲) نشان داده می‌شود.

#### ۳- تئوری غیرموضعی گرادیان کرنشی

نظریه گرادیان کرنش غیرموضعی مرتبه بالا نشان می‌دهد [۳۱] که تنش شامل میدان تنش الاستیک غیر محلی و میدان تنش گرادیان کرنش می‌شود.

$$t_{xx} = \sigma_{xx} - \frac{d \sigma_{xx}^{(1)}}{dx} \quad (3)$$

در رابطه (۳)،  $\sigma_{xx}$  و  $\sigma_{xx}^{(1)}$  به ترتیب تنش کلاسیک و تنش مرتبه بالا می‌باشند که به صورت رابطه (۴) نشان داده می‌شوند [۳۱]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \int_0^L E(x) \alpha_0(x, x', ea) \varepsilon'_{xx}(x') dx' \\ \sigma_{xx}^{(1)} &= l^2 \int_0^L E(x) \alpha_1(x, x', ea) \varepsilon'_{xx,x}(x') dx' \end{aligned} \quad (4)$$

برای بررسی اهمیت میدان تنش الاستیسیته غیرمحلی، پارامترهای  $ea$  و  $ea$  (که در رابطه (۴)،  $ea$  و  $ea$  بیانگر پارامترهای غیرمحلی می‌باشند، در این مقاله فرض می‌شود  $e = e_1$ ) و پارامتر مشخصه مواد  $l$  (که به عنوان پارامتر مقیاس طول ماده نیز شناخته می‌شود) ارائه می‌گردد تا اهمیت میدان تنش گرادیان کرنش در نظر گرفته

رابطه (۲۱) ارائه می‌شود:

$$M = (ea)^2 [\rho(x)A\ddot{W}] - E(x)I W_{,xx} + I^2 \frac{\partial}{\partial x} (E(x)I \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}) \quad (20)$$

با ترکیب معادلات (۱۷) و (۲۰) معادله یک نانوتیر مدرج تابعی اویلر برنولی به صورت زیر استخراج می‌گردد:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (E(x)I \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}) - I^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (E(x)I \frac{\partial^4 W}{\partial x^4}) + (1 - (ea)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \left[ \rho(x)A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right] = 0 \quad (21)$$

### ۵- بی‌بعدسازی

در تیرهای مدرج تابعی مقادیر  $E(x)I$  و  $\rho(x)A$  هر دو متغیر هستند، که حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر را دشوار می‌سازد. در اینجا با فرض:

$$E(x) = E_0 I + \overline{E(x)I} \quad (22)$$

$$\rho(x)A = \rho_0 A + \overline{\rho(x)A}$$

$\overline{E(x)I}$  و  $\overline{\rho(x)A}$  به ترتیب قسمت متغیر سفتی خمشی و چگالی جسم در واحد طول می‌باشند و  $E_0 I$  و  $\rho_0 A$  در بخش ۳-۶ محاسبه می‌گردد. زمان، متغیر فضایی و پارامترهای غیرمحللی بی‌بعد به صورت زیر فرض شده است:

$$\tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{E_0 I}{\rho_0 A}}; \quad \xi = \frac{x}{L}; \quad \alpha_1 = \frac{ea}{L}; \quad \alpha_2 = \frac{l}{L} \quad (23)$$

با استفاده از معادلات (۲۱)، (۲۲) و (۲۳) فرم بی‌بعدشده معادله نانوتیر مدرج تابعی اویلر برنولی به صورت زیر استخراج می‌گردد:

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} (1 + f_1(\xi)) \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} - \alpha_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} (1 + f_1(\xi)) \frac{\partial^4 W}{\partial \zeta^4} + (1 + f_2(\xi)) \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} - \alpha_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} (1 + f_2(\xi)) \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0 \quad (24)$$

$$0 \leq \xi \leq 1$$

که در رابطه بالا:

$$f_1(\xi) = \frac{\overline{E(\xi)I}}{E_0 I}; \quad f_2(\xi) = \frac{\overline{\rho(\xi)A}}{\rho_0 A} \quad (25)$$

برای بررسی ارتعاشات آزاد فرض شده است:

$$M = \int_A z t_{,xx} dA; \quad M^{(1)} = \int_A z \sigma_{xx}^{(1)} dA \quad (12)$$

که  $M$  ممان کلاسیک و  $M^{(1)}$  ممان غیرکلاسیک می‌باشد. با توجه به روابط بالا انرژی مجازی پتانسیل و جنبشی به صورت رابطه (۱۳) می‌باشند:

$$\delta U = - \int_0^L M \delta W_{,xx} dx - [M^{(1)} \delta W_{,xx}]_0^L \quad (13)$$

$$\delta K = \int_0^L \rho(x)A \dot{W} \delta \dot{W} dx$$

برای ممان اینرسی داریم:

$$I = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z^2 dA \quad (14)$$

### ۳-۴- روش همیلتون

در این مقاله برای به‌دست‌آوردن معادله تیر از روش همیلتون استفاده شده است که به‌صورت رابطه (۱۵) ارائه شده است:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta U) dt = 0 \quad (15)$$

با استفاده از معادله (۱۳) و (۱۵) نتیجه می‌شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ -M \delta W_{,x} \Big|_0^L + M_{,x} \delta W \Big|_0^L - \int_0^L M_{,xx} \delta W - M^{(1)} \delta W_{,xx} \Big|_0^L \right] dt = 0 \quad (16)$$

با حل معادله (۱۶) و فاکتورگیری، معادله تعادل به صورت رابطه (۱۷) استخراج می‌شود:

$$\delta W : M_{,xx} - \rho(x)A \ddot{W} = 0 \quad (17)$$

که شرایط مرزی به صورت زیر به‌دست‌می‌آیند:

$$M_{,xx} \delta W \Big|_0^L = 0; \quad M \delta W_{,x} \Big|_0^L = 0; \quad M^{(1)} \delta W_{,xx} \Big|_0^L = 0 \quad (18)$$

با استفاده از روابط (۷)، (۱۰) و (۱۲) معادله ممان به صورت زیر استخراج می‌گردد:

$$M = (ea)^2 M_{,xx} - E(x)I W_{,xx} + I^2 I \frac{\partial}{\partial x} (E(x) \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}) \quad (19)$$

با استفاده از روابط (۱۷) و (۱۹) معادله نهایی ممان به‌صورت



$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2}{d\xi^2} \frac{d^2 W_0}{d\xi^2} + \varepsilon \frac{d^2}{d\xi^2} f_1 \frac{d^2 W_0}{d\xi^2} + \varepsilon \frac{d^2}{d\xi^2} \frac{d^2 W_1}{d\xi^2} \\
 & + \varepsilon^2 \frac{d^2}{d\xi^2} f_1 \frac{d^2 W_1}{d\xi^2} - \alpha_2^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \frac{d^4 W_0}{d\xi^4} - \varepsilon \alpha_2^2 \frac{d^2}{d\xi^2} f_1 \frac{d^4 W_0}{d\xi^4} \\
 & - \varepsilon \alpha_2^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \frac{d^4 W_1}{d\xi^4} - \varepsilon^2 \alpha_2^2 \frac{d^2}{d\xi^2} f_1 \frac{d^4 W_1}{d\xi^4} \\
 & - (\omega_0^2 W_0 + \varepsilon \omega_0^2 W_1 + \varepsilon \omega_0^2 W_0 f_2 + \varepsilon^2 \omega_0^2 W_0 f_2) \\
 & - (\varepsilon^2 \omega_1^2 W_0 + \varepsilon^3 \omega_1^2 W_1 + \varepsilon^3 \omega_1^2 W_0 f_2 + \varepsilon^4 \omega_1^2 W_0 f_2) \\
 & - (2\varepsilon \omega_0 \omega_1 W_0 + 2\varepsilon^2 \omega_0 \omega_1 W_1 + 2\varepsilon^2 \omega_0 \omega_1 W_0 f_2 + 2\varepsilon^3 \omega_0 \omega_1 W_0 f_2) \\
 & + \alpha_1^2 (\omega_0^2 \frac{d^2}{d\xi^2} W_0 + \varepsilon \omega_0^2 \frac{d^2}{d\xi^2} W_1 + \varepsilon \omega_0^2 \frac{d^2}{d\xi^2} (W_0 f_2)) \\
 & + \varepsilon \omega_0^2 \frac{d^2}{d\xi^2} (W_0 f_2) + \alpha_1^2 (\varepsilon^2 \omega_1^2 \frac{d^2}{d\xi^2} W_0 + \varepsilon^3 \omega_1^2 \frac{d^2}{d\xi^2} W_1 \\
 & + \varepsilon^3 \omega_1^2 \frac{d^2}{d\xi^2} (W_0 f_2) + \varepsilon^4 \omega_1^2 \frac{d^2}{d\xi^2} (W_0 f_2)) + \alpha_1^2 (2\varepsilon \omega_0 \omega_1 \frac{d^2}{d\xi^2} W_0 \\
 & + 2\varepsilon^2 \omega_0 \omega_1 \frac{d^2}{d\xi^2} W_1 \\
 & + 2\varepsilon^2 \omega_0 \omega_1 \frac{d^2}{d\xi^2} (W_0 f_2) + 2\varepsilon^3 \omega_0 \omega_1 \frac{d^2}{d\xi^2} (W_0 f_2)) \quad (32)
 \end{aligned}$$

در رابطه (۳۲) با حذف مقادیر تکراری از بسط اول و توان‌های مرتبه دوم به بعد  $\varepsilon$  (به دلیل کوچک بودن) رابطه (۳۳) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2}{d\xi^2} f_1 \frac{d^2 W_0}{d\xi^2} + \frac{d^2}{d\xi^2} \frac{d^2 W_1}{d\xi^2} - \alpha_2^2 \frac{d^2}{d\xi^2} f_1 \frac{d^4 W_0}{d\xi^4} \\
 & - \alpha_2^2 \frac{d^6 W_1}{d\xi^6} - \omega_0^2 W_1 - \omega_0^2 W_0 f_2 - 2\omega_0 \omega_1 W_0 \\
 & + \alpha_1^2 \omega_0^2 \frac{d^2 W_1}{d\xi^2} + \alpha_1^2 \omega_0^2 \frac{d^2}{d\xi^2} (W_0 f_2) + 2\alpha_1^2 \omega_0 \omega_1 \frac{d^2 W_0}{d\xi^2} \quad (33)
 \end{aligned}$$

با مشتق‌گیری و مرتب‌سازی رابطه (۳۳) معادله دیفرانسیل به دست آمده از بسط دوم به صورت رابطه (۳۴) استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned}
 & -\alpha_2^2 \frac{d^6 W_1}{d\xi^6} + \frac{d^4 W_1}{d\xi^4} - \omega_0^2 W_1 + (\alpha_1 \omega_0)^2 \frac{d^2 W_1}{d\xi^2} \\
 & + h_1(\xi) - 2\omega_0 \omega_1 W_0 + 2\alpha_1^2 \omega_0 \omega_1 \frac{d^2 W_0}{d\xi^2} = 0 \quad (34)
 \end{aligned}$$

که در رابطه (۳۲)،  $h_1(\xi)$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 h_1(\xi) = & 2 \frac{df_1}{d\xi} \frac{d^3 W_0}{d\xi^3} + \frac{d^2 f_1}{d\xi^2} \frac{d^2 W_0}{d\xi^2} - \alpha_2^2 \frac{d^2 f_1}{d\xi^2} \frac{d^4 W_0}{d\xi^4} \\
 & - 2\alpha_2^2 \frac{df_1}{d\xi} \frac{d^5 W_0}{d\xi^5} + \omega_0^2 (-W_0 f_2 + \alpha_1^2 \frac{d^2 W_0}{d\xi^2} f_2 \\
 & + 2\alpha_1^2 \frac{dW_0}{d\xi} \frac{df_2}{d\xi} + \alpha_1^2 W_0 \frac{d^2 f_2}{d\xi^2}) \quad (35)
 \end{aligned}$$

$$w(\xi, \tau) = W(\xi) \sin \omega \tau \quad (26)$$

پس با جایگذاری (۲۶) در (۲۴) رابطه (۲۷) استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2}{d\xi^2} (1+f_1(\xi)) \frac{d^2 W}{d\xi^2} - \alpha_2^2 \frac{d^2}{d\xi^2} (1+f_1(\xi)) \frac{d^4 W}{d\xi^4} \\
 & - \omega^2 (1+f_2(\xi)) W + \omega^2 \alpha_1^2 \frac{d^2}{d\xi^2} (1+f_2(\xi)) W = 0 \quad (27) \\
 & 0 \leq \xi \leq 1
 \end{aligned}$$

## ۶- تعیین فرکانس طبیعی

### ۶-۱ روش توسعه تقریبی

در این بخش، با فرض رابطه (۲۸)، روش توسعه تقریبی برای به دست آوردن یک راه‌حل تفاضلی حول نقطه مرجع یک تیر همگن معرفی می‌شود [۲۲]:

$$f_1(\xi) = \varepsilon f_{11}(\xi), f_2(\xi) = \varepsilon f_{21}(\xi) \quad (28)$$

در رابطه (۲۸)،  $\varepsilon$  پارامتر اغتشاش کوچک می‌باشد. بسط برای  $\omega$  و  $W(\xi)$  با استفاده از روش به کاررفته در مرجع [۲۲]، در رابطه (۳۵-۳) فرض می‌شود:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (29)$$

$$W(\xi) = W_0(\xi) + \varepsilon W_1(\xi) + \varepsilon^2 W_2(\xi) + \dots$$

با جایگذاری (۲۸) و (۲۹) در (۲۷)، رابطه (۳۰) استخراج شده است:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2}{d\xi^2} (1 + \varepsilon f_{11}(\xi)) \frac{d^2 (W_0 + \varepsilon W_1)}{d\xi^2} \\
 & - \alpha_2^2 \frac{d^2}{d\xi^2} (1 + \varepsilon f_{11}(\xi)) \frac{d^4 (W_0 + \varepsilon W_1)}{d\xi^4} \\
 & - (\omega_0 + \varepsilon \omega_1)^2 (1 + \varepsilon f_{21}(\xi)) (W_0 + \varepsilon W_1) \\
 & + (\omega_0 + \varepsilon \omega_1)^2 \alpha_1^2 \frac{d^2}{d\xi^2} (1 + \varepsilon f_{21}(\xi)) (W_0 + \varepsilon W_1) = 0 \quad (30)
 \end{aligned}$$

در رابطه (۳۰) به‌ازای بسط اول فرضیات (به‌ازای یک جمله از رابطه (۲۹) یعنی  $\omega = \omega_0$  و  $W = W_0$  یا  $\varepsilon = 0$  در رابطه (۳۰))، رابطه (۳۱) به دست می‌آید:

$$-\alpha_2^2 \frac{d^6 W_0}{d\xi^6} + \frac{d^4 W_0}{d\xi^4} - \omega_0^2 W_0 + (\alpha_1 \omega_0)^2 \frac{d^2 W_0}{d\xi^2} = 0 \quad (31)$$

در رابطه (۳۰) به‌ازای بسط دوم (یعنی در رابطه (۲۹))،  $\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1$  و  $W = W_0 + \varepsilon W_1$ ، رابطه (۳۲) به دست می‌آید:

۲-۶- حل مرتبه صفر

با قراردادن شرط مرزی (۳۷) در معادله (۳۶)، رابطه (۳۹) استخراج می‌شود:

$$c_1 = c_3 = 0 \Rightarrow W_0 = c_2(\cos(\beta\xi) - \cosh(\beta\xi)) + c_4(\sin(\beta\xi)\sinh(\beta\xi)) \quad (39)$$

با استفاده از رابطه (۳۹) و شرط مرزی (۳۸)، رابطه (۴۰) به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \cos(\beta) + \cosh(\beta) & \sin(\beta L) + \sinh(\beta) \\ (-EI\beta^3)(\sin(\beta) - \sinh(\beta)) - (EI\beta^3)(\cos(\beta) + \cosh(\beta)) - \\ m_0\omega^2(\cos(\beta) - \cosh(\beta)) & m_0\omega^2(\sin(\beta) - \sinh(\beta)) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_2 \\ c_4 \end{Bmatrix} = 0 \quad (40)$$

با صفر قراردادن دترمینان ماتریس  $[K]$  در رابطه (۴۰) معادله فرکانس به دست می‌آید:

$$1 + \frac{1}{\cos\beta \cosh\beta} - R\beta L(\tan\beta - \tanh\beta) = 0 \quad (41)$$

در معادله (۴۱)،  $R = \frac{m_0}{\rho AL}$  می‌باشد. شکل حالت فضایی برای یک نانوتیر با شرط مرزی گیردار-جرم متمرکز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$W_0 = c_2 \begin{bmatrix} (\cos\beta\xi - \cosh\beta\xi) \\ -\frac{\cos(\beta) + \cosh(\beta)}{\sin(\beta) + \sinh(\beta)}(\sin\beta\xi \sinh\beta\xi) \end{bmatrix} \quad (42)$$

با حل معادله (۴۱)، فرکانس‌های اولیه به‌ازای جرم‌های متمرکز گوناگون محاسبه می‌گردد که در جدول ۱ آورده شده است. در جدول ۲ معادله‌های فرکانس تیر و شکل مدهای استخراج‌گردیده برای شرایط مرزی مختلف آورده شده است.

در این بخش با حل مرتبه صفر فرکانس‌های اولیه برای شرایط مرزی مختلف استخراج می‌گردد که برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی مورد نیاز است. برای حل معادله (۳۱) از رابطه (۳۶) استفاده شده است [۳۲]:

$$W_0 = c_1(\cos(\beta\xi) + \cosh(\beta\xi)) + c_2(\cos(\beta\xi) - \cosh(\beta\xi)) + c_3(\sin(\beta\xi) + \sinh(\beta\xi)) + c_4(\sin(\beta\xi) - \sinh(\beta\xi)) \quad (36)$$

در معادله (۳۶)،  $\beta = \sqrt{\omega_0}$  می‌باشد. شرایط مرزی برای حالت گیردار-جرم متمرکز به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \xi = 0 &\rightarrow W_0 = 0 \\ \xi = 0 &\rightarrow \frac{dW_0}{d\xi} = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \xi = 1 &\rightarrow EI \frac{d^2W_0}{d\xi^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2W_0}{d\xi^2} = 0 \\ \xi = 1 &\rightarrow \frac{d}{d\xi} \left( EI \frac{d^2W_0}{d\xi^2} \right) = m_0 \frac{d^2W_0}{d\xi^2} \\ &\Rightarrow \frac{d}{d\xi} \left( EI \frac{d^2W_0}{d\xi^2} \right) = -m_0\omega^2 W_0 \end{aligned} \quad (38)$$

جدول ۱: فرکانس‌های اولیه به‌ازای جرم متمرکزهای گوناگون

Table 1. The first dimensionless frequencies for various attached masses.

۱	۰/۱	۰/۰۱	R
۱/۲۴۸	۱/۷۲۳	۱/۸۵۲	$\beta_1$
۴/۰۳۱	۴/۳۹۹	۴/۶۵۰	$\beta_r$

جدول ۲: معادله‌های فرکانس و شکل مدها برای تیر با شرایط مرزی مختلف

Table 2. Frequency equations and mode shapes for various boundary conditions.

شکل مد	معادله فرکانس	شرط مرزی
$W_0 = \cosh(k\xi) - \cos(k\xi) + \frac{\sin k - \sinh k}{\cos k + \cosh k} [\sinh(k\xi) - \sin(k\xi)]$	$\cos k \cosh k + 1 = 0$	گیردار-آزاد
$W_0 = \sin(k\xi)$	$\sin k = 0$	لولا-لولا
$W_0 = \cosh(k\xi) - \cos(k\xi) + \frac{\sin(k) + \sinh(k)}{\cos(k) - \cosh(k)} [\sinh(k\xi) - \sin(k\xi)]$	$\cos k \cosh k - 1 = 0$	گیردار-گیردار
$W_0 = \cosh(k\xi) - \cos(k\xi) - \frac{\cosh k - \cos k}{\sinh k - \sin k} [\sinh(k\xi) - \sin(k\xi)]$	$\tan k - \tanh k = 0$	گیردار-لولا

۳-۶- حل مرتبه یک

در این بخش با ترکیب حل مرتبه صفر و حل مرتبه یک، مقادیر  $E_0I$  و  $\rho_0A$  که در بخش ۵ به آن اشاره گردید استخراج می‌شود. در معادله (۳۴)،  $h_1(\xi)$  و  $W_1$  وابستگی خطی با  $W_0$  دارند. معادله (۳۴) در صورتی قابل حل می‌باشد که شرط (۴۳) برقرار باشد [۲۲].

$$\int_0^1 \left[ h_1(\xi) - 2\omega_0\omega_1 W_0 + 2\alpha_1^2\omega_0\omega_1 \frac{d^2 W_0}{d\xi^2} \right] W_0 d\xi = 0 \quad (43)$$

در نتیجه:

$$\omega_1 = \frac{\int_0^1 h_1(\xi) W_0 d\xi}{2\omega_0 \left( \int_0^1 (W_0)^2 d\xi - \alpha_1^2 \int_0^1 \frac{d^2 W_0}{d\xi^2} d\xi \right)} \quad (44)$$

با ادغام بخش‌های قبل مقادیر نهایی  $E_0I$  و  $\rho_0A$  استخراج می‌شود.

$$E_0I = \frac{\left\{ \begin{aligned} & \frac{d[E(\xi)I]}{d\xi} \frac{d^2 W_0}{d\xi^2} W_0 + E(\xi)I \frac{d^3 W_0}{d\xi^3} W_0 \\ & - E(\xi)I \frac{d^2 W_0}{d\xi^2} \frac{dW_0}{d\xi} - \alpha_2^2 \frac{d[E(\xi)I]}{d\xi} \frac{d^4 W_0}{d\xi^4} W_0 \\ & + 3\alpha_2^2 E(\xi)I \frac{d^4 W_0}{d\xi^4} \frac{dW_0}{d\xi} \end{aligned} \right\}_0^1}{\left\{ \begin{aligned} & \frac{d^3 W_0}{d\xi^3} W_0 - \frac{d^2 W_0}{d\xi^2} \frac{dW_0}{d\xi} + 3\alpha_2^2 \frac{d^4 W_0}{d\xi^4} \frac{dW_0}{d\xi} \\ & - 3\alpha_2^2 \frac{d^3 W_0}{d\xi^3} \frac{d^2 W_0}{d\xi^2} - 2\alpha_2^2 E(\xi)I \frac{d^5 W_0}{d\xi^5} W_0 \end{aligned} \right\}_0^1} + \frac{\left\{ -3\alpha_2^2 E(\xi)I \frac{d^3 W_0}{d\xi^3} \frac{d^2 W_0}{d\xi^2} - 2\alpha_2^2 E(\xi)I \frac{d^5 W_0}{d\xi^5} W_0 \right\}_0^1}{\int_0^1 E(\xi)I \left( \frac{d^2 W_0}{d\xi^2} \right)^2 d\xi + 3\alpha_2^2 \int_0^1 E(\xi)I \left( \frac{d^3 W_0}{d\xi^3} \right)^2 d\xi} \dots \frac{\int_0^1 \left( \frac{d^2 W_0}{d\xi^2} \right)^2 d\xi + 3\alpha_2^2 \int_0^1 \left( \frac{d^3 W_0}{d\xi^3} \right)^2 d\xi}{\dots}$$

(۴۵)

$$\rho_0A = \frac{\left\{ \begin{aligned} & 3\alpha_1^2 \rho(\xi)A \frac{dW_0}{d\xi} W_0 + \alpha_1 \frac{d[\rho(\xi)A]}{d\xi} W_0^2 \\ & - \alpha_1^2 \rho(\xi)A \frac{dW_0^2}{d\xi} \end{aligned} \right\}_0^1}{-\int_0^1 \rho(\xi)A W_0^2 d\xi - 3\alpha_1^2 \int_0^1 \rho(\xi)A \left( \frac{dW_0}{d\xi} \right)^2 d\xi} \dots \frac{\left\{ \begin{aligned} & 3\alpha_1^2 \frac{dW_0}{d\xi} W_0 - \alpha_1^2 \frac{dW_0^2}{d\xi} \end{aligned} \right\}_0^1}{-\int_0^1 W_0 d\xi - 3\alpha_1^2 \int_0^1 \left( \frac{dW_0}{d\xi} \right)^2 d\xi} \dots \frac{+\alpha_1^2 \int_0^1 \rho(\xi)A \frac{d^2 W_0^2}{d\xi^2} d\xi}{+\alpha_1^2 \int_0^1 \frac{d^2 W_0^2}{d\xi^2} d\xi}$$

(۴۶)

با ترکیب حل مرتبه صفر و مرتبه یک، فرکانس‌های طبیعی تیر به دست می‌آیند:

$$\lambda_n = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{E_0I}{\rho_0A}} \omega_0 \quad (47)$$

که در رابطه (۴۷)،  $E_0I$  و  $\rho_0A$  از حل مرتبه یک و  $\omega_0$  از حل مرتبه صفر استخراج شده‌اند. در نهایت یک فرمول تقریبی از فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد برای یک نانوتیر یکنواخت به صورت رابطه (۴۸) می‌باشد:

$$\Omega_n = \lambda_n L^2 \sqrt{\frac{\rho_L A}{E_L I}} \quad (48)$$

در رابطه (۴۸)  $E_L$  و  $\rho_L$  به ترتیب چگالی و مدول یانگ سمت چپ نانوتیر می‌باشند که در جدول ۳ داده شده است.

۷- نتایج و بحث

در این بخش، از روش پیشنهادی برای تجزیه و تحلیل ارتعاشات آزاد یک نانوتیر مدرج تابعی با شرایط مرزی متفاوت استفاده می‌شود. در این مقاله جنس نانوتیر در نظر گرفته شده از آلومینیوم و تیتانیوم می‌باشد. سمت راست تیتانیوم خالص و سمت چپ آلومینیوم خالص است. خواص مواد برای نانوتیر مدرج تابعی در جدول ۳ ارائه شده است.

ابعاد نانوتیر عبارتند از:

جدول ۳: مشخصات ماده نانوتیر [۲۲، ۲۳]

Table 3. Material properties of the FG nano beam [22,33]

مشخصات	واحد	آلومینیوم	تیتانیوم
$E$	GPa	۷۰	۱۱۶
$\rho$	Kg/m <sup>3</sup>	۲۷۰۲	۴۵۰۶

تاکنون از این روش عددی در نانوتیرها استفاده نشده است.

در پژوهشی دیگر ویژگی‌های نانوتیر به شرح زیر می‌باشد [۱۹]:

$$E_{st} = 210 \text{ GPa}, \rho_{st} = 7800 \text{ Kg} / \text{m}^3$$

$$E_{Al_2O_3} = 390 \text{ GPa}, \rho_{Al_2O_3} = 3960 \text{ Kg} / \text{m}^3$$

ابعاد نانوتیر استفاده شده در این پژوهش به شرح زیر می‌باشد [۱۹]:

$$h = 17.6 \times 10^{-9} \text{ m}, b = 2h, L = 30h$$

در این پژوهش در سال ۲۰۱۷ لی و همکاران [۱۹] به بررسی کماتش و ارتعاشات آزاد یک نانو تیر مدرج تابعی محوری با استفاده از تئوری گرادیان کرنش غیرمحللی براساس روش مربع‌سازی تفاضلی تعمیم‌یافته پرداختند. با استفاده از اصل همپلتون معادلات حرکت و شرایط مرزی به دست آمد و در ادامه تاثیر اثر اندازه بر روی پارامترهای کماتش و فرکانس‌های طبیعی بررسی گردید. در ادامه به تاثیرات شاخص توانی (تغییر جنس ماده مدرج تابعی) بر روی مقادیر فرکانس‌های طبیعی و همچنین تاثیرات اثر اندازه بر روی کماتش بحرانی و فرکانس‌های طبیعی می‌پردازد. در شکل‌های ۳ تا ۶، فرکانس اول و دوم بی‌بعد تیرمدرج تابعی به ازای پارامترهای مختلف غیرمحللی و شاخص توانی  $k=1$  برای شرط مرزی گیردار-گیردار آورده شده است.

در شکل‌های ۳ تا ۶، درصد خطا کمتر از ۲ درصد می‌باشند که از دقت قابل‌قبولی برخوردار می‌باشند. همان گونه که مشاهده می‌شود

$$\frac{L}{H} = 10, B = 2H$$

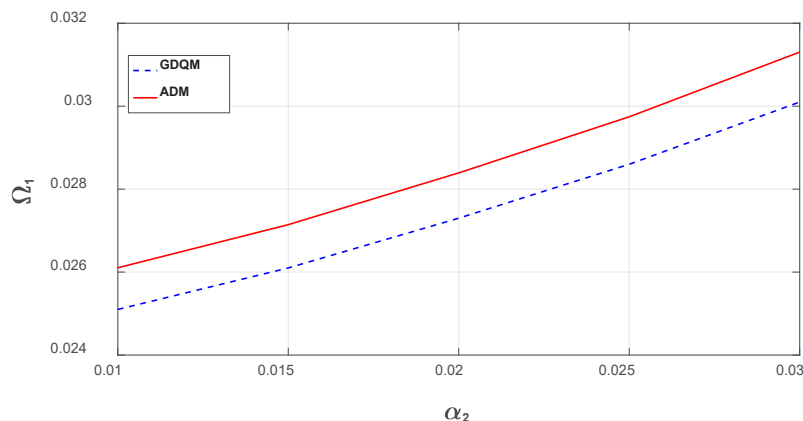
برای اعتبارسنجی روش معرفی شده در بخش ۶-۱، فرکانس‌های طبیعی یک نانوتیر با شرایط مرزی لولا (S-S) به‌ازای پارامترهای مختلف غیرمحللی ( $e_0 a$ ) مختلف و  $(l=0)$  و  $(\rho=1, \nu=0.3)$  و  $E=30 \text{ MPa}$  مورد ارزیابی قرار گرفته است که در جدول ۴ آورده شده است.

با توجه به فرکانس‌های به‌دست‌آمده در جدول ۴ مشاهده می‌شود که روش توسعه تقریبی برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی از دقت خوبی برخوردار می‌باشد. با توجه به سادگی روش عددی توسعه تقریبی در مقایسه با روش‌های عددی دیگر، در این مقاله از روش توسعه تقریبی استفاده شده است. در مطالعه پژوهش‌های پیشین

**جدول ۴:** فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد برای شرط مرزی لولا به ازای  $(\frac{L}{H} = 10)$

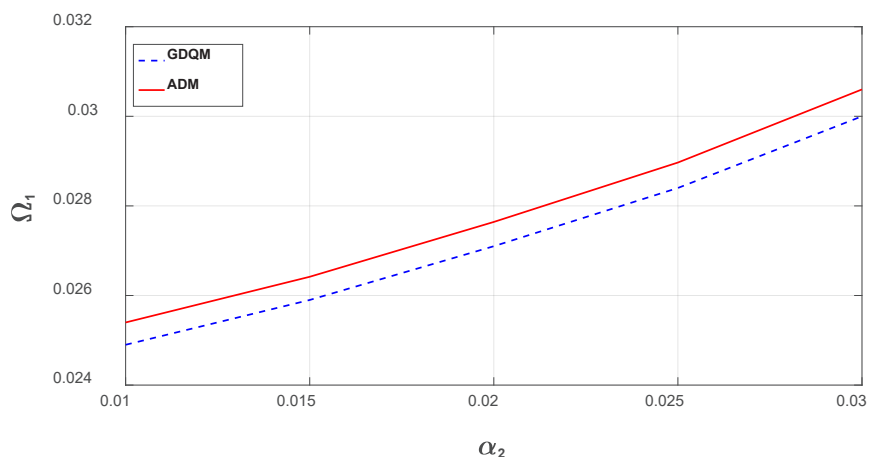
**Table 4. The dimensionless natural frequencies for simply supported with  $\frac{L}{H} = 10$**

مرجع [۳۴]	روش توسعه تقریبی	$e_0 a$
۹/۸۶۹۶	۹/۸۶۹۶	۰
۹/۶۳۴۷	۹/۶۳۴۷	۰/۵
۹/۴۱۵۹	۹/۴۱۵۹	۱
۹/۲۱۱۳	۹/۲۱۱۳	۱/۵
۹/۰۱۹۵	۹/۰۱۹۵	۲



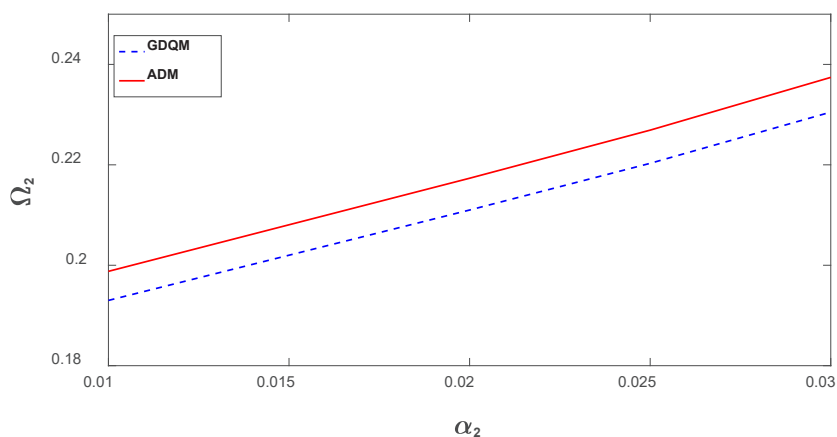
**Fig. 3. The fundamental dimensionless natural frequencies of clamped-clamped FG beams varying with the nonlocal parameter ( $\alpha_1 = 0.01$  and  $k=1$ )**

شکل ۳: فرکانس بی‌بعد اول تیرمدرج تابعی با در نظر گرفتن  $\alpha_1 = 0.01$  و شاخص توانی  $k=1$  برای شرط مرزی گیردار-گیردار



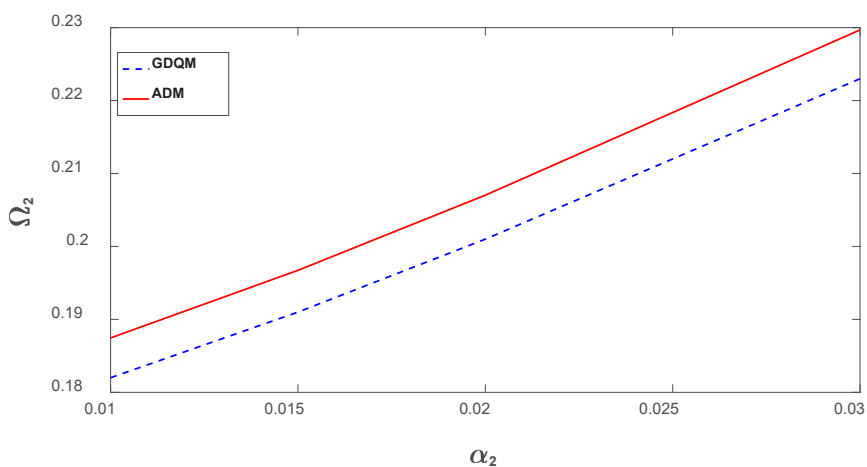
**Fig. 4. The fundamental dimensionless natural frequencies of clamped–clamped FG beams varying with the nonlocal parameter ( $\alpha_1 = 0.03$  and  $k = 1$ )**

شکل ۴: فرکانس بی‌بعد اول تیرمدرج تابعی با در نظر گرفتن  $\alpha_1 = 0.03$  و شاخص توانی  $k = 1$  برای شرط مرزی گیردار-گیردار



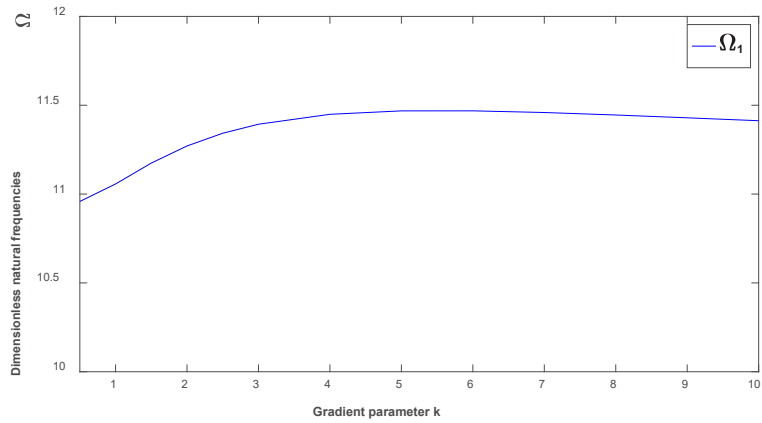
**Fig. 5. The second dimensionless natural frequencies of clamped–clamped FG beams varying with the non local parameter ( $\alpha_1 = 0.01$  and  $k = 1$ )**

شکل ۵: فرکانس بی‌بعد دوم گیرمدرج تابعی با در نظر گرفتن  $\alpha_1 = 0.01$  و شاخص توانی  $k = 1$  برای شرط مرزی گیردار-گیردار



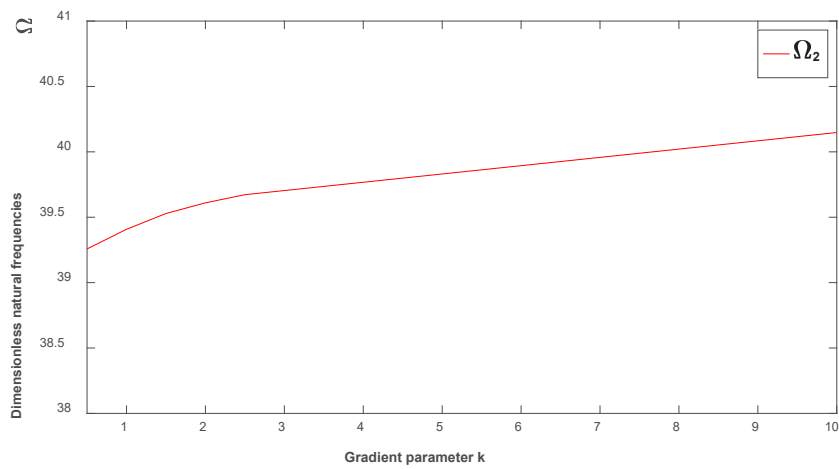
**Fig. 6. The second dimensionless natural frequencies of clamped–clamped FG beams varying with the nonlocal parameter ( $\alpha_1 = 0.03$  and  $k = 1$ )**

شکل ۶: فرکانس بی‌بعد دوم گیرمدرج تابعی با در نظر گرفتن  $\alpha_1 = 0.03$  و شاخص توانی  $k = 1$  برای شرط مرزی گیردار-گیردار



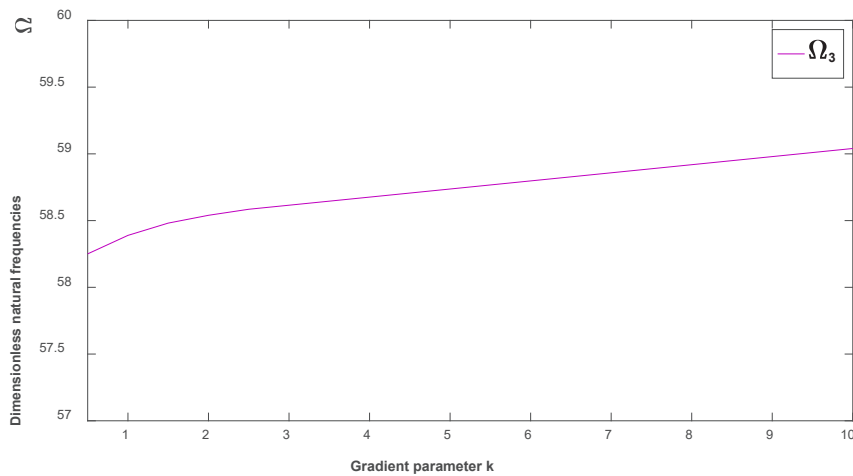
(a) first dimensionless natural frequencies

(الف) فرکانس بی بعد اول



(b) second dimensionless natural frequencies

(ب) فرکانس بی بعد دوم



(c) third dimensionless natural frequencies

(ج) فرکانس بی بعد سوم

Fig. 7. The first three natural frequencies versus power-law index  $k$  for a simply supported nano beam ( $\alpha_1 = 0.5$  and  $\alpha_2 = 1$ )

شکل ۷: تاثیر پارامتر شاخص توانی بر روی فرکانس طبیعی بی بعد اول تا سوم نانوتیر به ازای  $\alpha_1 = 0.5$  و  $\alpha_2 = 1$  برای شرط مرزی لولا (S-S)

شاخص توانی برروی فرکانس‌های طبیعی تاثیرگذار است، می‌توان با انتخاب یک مقدار مناسب از پارامتر شاخص توانی رفتار ارتعاشی را کنترل کرد.

در شکل ۸ تاثیر پارامترهای اثراندازه برروی فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول و دوم یک نانوتیر مدرج تابعی برای شرط مرزی لولا رسم شده است.

شکل ۸ تاثیر پارامترهای اثر اندازه برروی فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول و دوم یک نانوتیر مدرج تابعی برای شرط مرزی لولا را نشان می‌دهد. همان‌گونه که در شکل ۸ مشاهده می‌شود، با افزایش پارامتر غیرمحملی بی‌بعد  $\alpha_1$  فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد کاهش یافته، همچنین با افزایش پارامتر طولی بی‌بعد  $\alpha_2$  مقادیر فرکانس‌ها افزایش می‌یابد که این رفتار ناشی از تغییرات سفتی نانوتیر به علت اعمال اثر اندازه در نانوتیر می‌باشد. همچنین در شکل ۸ مشاهده می‌شود که، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد، با توجه به مقدارهای مختلف پارامتر غیرمحملی  $\alpha_1$  و پارامتر مقیاس طولی ماده  $\alpha_2$  می‌تواند بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از مدل کلاسیک باشد. تئوری‌های کلاسیک برای مدل‌سازی نانوتیرها مناسب نمی‌باشد و باید اثرات غیرمحملی در تحلیل استاتیکی و دینامیکی این ساختارها در نظر گرفته شود. تاثیر پارامتر مقیاس کوچک نانوتیرها باعث می‌شود که رفتار نانوتیر به نانوتیر نرم‌تر نزدیک شود.

در ارتعاشات عرضی نانوتیر هم همین رفتار مشاهده می‌شود با این تفاوت که تغییرات در نمودارها به صورت غیرخطی می‌باشند.

نتایج فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد برای سایر شرایط مرزی در جدول ۵ الی ۸ آورده شده است.

همان‌گونه که در جدول ۵ الی ۸ مشاهده می‌شود به دلیل رفتار صلبیت نانوتیر متناسب با شرایط مرزی گوناگون، برای تیر با شرایط تکیه‌گاهی گیردار-گیردار-گیردار دامنه ارتعاشی از تیر با شرایط مرزی گیردار-آزاد و گیردار-لولا بیشتر است. فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد دوم نانوتیر مدرج تابعی نیز با افزایش پارامتر غیرمحملی  $\alpha_1$  کاهش یافته همچنین با افزایش پارامتر طولی  $\alpha_2$  مقادیر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد افزایش می‌یابد.

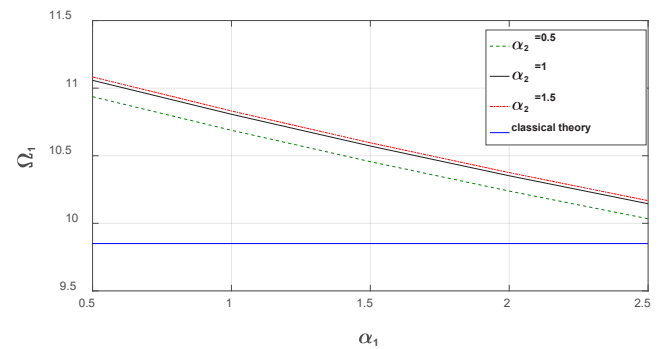
با صفر قراردادن پارامترهای غیرموضعی نمودار پاسخ فرکانسی به نمودار حاصل از تئوری کلاسیک نزدیک می‌شود.

نتایج فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول و دوم به‌ازای جرم‌های

روش توسعه تقریبی یک روش حد بالا می‌باشد.

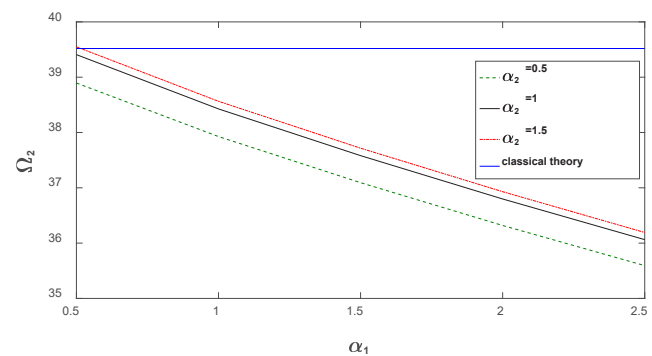
شکل ۷ تاثیر پارامتر شاخص توانی، برروی فرکانس‌های طبیعی اول تا سوم بی‌بعد نانوتیر برای شرایط مرزی لولا به‌ازای  $\alpha_1 = 0.5$  و  $\alpha_2 = 1$  را نشان می‌دهد.

در شکل ۷ تاثیر پارامتر شاخص توانی بر نمودار پاسخ فرکانسی نانوتیر رسم شده است. همان‌گونه که در شکل ۷ دیده می‌شود، با افزایش پارامتر شاخص توانی، فرکانس‌های طبیعی به مقادیر بزرگ‌تر منتقل می‌شود. این نشان از سفتی تیر با افزایش پارامتر شاخص توانی دارد به عبارت دیگر با تغییر جنس نانوتیر، مدول یانگ افزایش می‌یابد و چگالی جرمی مطابق با شکل ۲ کاهش می‌یابد، که این خود علاوه بر افزایش فرکانس طبیعی منجر می‌شود که اثرات غیرموضعی نیز در پاسخ فرکانسی تاثیرگذار باشد. با توجه به اینکه افزایش پارامتر



(a) first dimensionless natural frequencies

(الف) فرکانس بی‌بعد اول



(b) second dimensionless natural frequencies

(ب) فرکانس بی‌بعد دوم

**Fig. 8. The first two dimensionless natural frequencies varying with the size dependent parameters  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  for simply supported FG beams ( $k=1$ )**

**شکل ۸:** فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول و دوم تیر مدرج تابعی با در نظر گرفتن پارامترهای اثر اندازه  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  و شاخص توانی  $k=1$  برای شرط مرزی لولا (S-S)

**جدول ۸:** فرکانس های طبیعی بی بعد دوم برای شرایط مرزی مختلف به

ازای  $\alpha_1 = 2/5$  و شاخص توانی  $k = 1$

**Table 8. The second dimensionless natural frequencies for various boundary conditions ( $\alpha_1 = 2.5$  and power-law index  $k=1$ )**

شرایط مرزی	$\alpha_r = 0/5$	$\alpha_r = 1$	$\alpha_r = 1/5$
گیردار-گیردار	۵۵/۹۰۸۴	۵۶/۵۰۷۹	۵۶/۶۲۱۰
گیردار-لولا	۵۲/۸۳۹۰	۵۳/۴۴۶۷	۵۳/۵۶۱۶
گیردار-آزاد	۲۱/۹۷۶۷	۲۳/۰۴۸۵	۲۳/۲۶۱۴

**جدول ۵:** فرکانس های طبیعی بی بعد اول برای شرایط مرزی مختلف به

ازای  $\alpha_1 = 0/5$  و شاخص توانی  $k = 1$

**Table 5. The fundamental dimensionless natural frequencies for various boundary conditions ( $\alpha_1 = 0.5$  and power-law index  $k=1$ )**

شرایط مرزی	$\alpha_r = 0/5$	$\alpha_r = 1$	$\alpha_r = 1/5$
گیردار-گیردار	۲۵/۷۸۰۹	۲۶/۷۸۱۶	۲۶/۹۸۰۱
گیردار-لولا	۲۱/۱۲۸۹	۲۲/۰۰۲۷	۲۲/۱۷۶۷
گیردار-آزاد	۸/۴۸۵۶	۱۰/۷۰۰۱	۱۱/۵۶۲۳

**جدول ۹:** فرکانس های طبیعی بی بعد اول و دوم برای شرط مرزی و

بردار-جرم متمرکز به ازای  $\alpha_1 = 0/5$  و  $R = 0/01$  و شاخص توانی  $k = 1$

**Table 9. The first two dimensionless natural frequencies for clamped-attached mass boundary conditions ( $\alpha_1 = 0.5$ ,  $R = 0.01$  and power-law index  $k=1$ )**

فرکانس بی بعد	$\alpha_r = 0/5$	$\alpha_r = 1$	$\alpha_r = 1/5$
$\Omega_1$	۸/۱۶۲۶	۱۰/۲۲۹۶	۱۰/۷۷۸۱
$\Omega_2$	۲۶/۱۱۷۴	۲۶/۷۸۳۵	۲۶/۹۱۲۶

**جدول ۶:** فرکانس های طبیعی بی بعد اول برای شرایط مرزی مختلف به

ازای  $\alpha_1 = 2/5$  و شاخص توانی  $k = 1$

**Table 6. The fundamental dimensionless natural frequencies for various boundary conditions ( $\alpha_1 = 2.5$  and power-law index  $k=1$ )**

شرایط مرزی	$\alpha_r = 0/5$	$\alpha_r = 1$	$\alpha_r = 1/5$
گیردار-گیردار	۲۲/۳۲۸۷	۲۳/۳۲۸۵	۲۳/۵۲۷۹
گیردار-لولا	۱۷/۹۷۶۵	۱۸/۷۱۹۹	۱۸/۸۶۸۰
گیردار-آزاد	۲/۸۸۱۲	۵/۲۵۴	۵/۹۵۷۹

**جدول ۱۰:** فرکانس های طبیعی بی بعد اول و دوم برای شرط مرزی گیردار-

جرم متمرکز به ازای  $\alpha_1 = 2/5$  و  $R = 0/01$  و شاخص توانی  $k = 1$

**Table 10. The first two dimensionless natural frequencies for clamped-attached mass boundary conditions ( $\alpha_1 = 2.5$ ,  $R = 0.01$  and power-law index  $k=1$ )**

فرکانس بی بعد	$\alpha_r = 0/5$	$\alpha_r = 1$	$\alpha_r = 1/5$
$\Omega_1$	۲/۷۹۶۴	۵/۱۵۳۱	۵/۵۸۰۷
$\Omega_2$	۲۱/۸۸۷۳	۲۲/۴۴۵۶	۲۲/۵۵۳۷

**جدول ۷:** فرکانس های طبیعی بی بعد دوم برای شرایط مرزی مختلف به

ازای  $\alpha_1 = 0/5$  و شاخص توانی  $k = 1$

**Table 7. The second dimensionless natural frequencies for various boundary conditions ( $\alpha_1 = 0.5$  and power-law index  $k=1$ )**

شرایط مرزی	$\alpha_r = 0/5$	$\alpha_r = 1$	$\alpha_r = 1/5$
گیردار-گیردار	۶۰/۹۹۵۵	۶۱/۶۴۹۶	۶۱/۷۷۳۰
گیردار-لولا	۵۸/۰۷۰۴	۵۸/۷۳۸۲	۵۸/۸۶۴۴
گیردار-آزاد	۲۶/۸۰۷۳	۲۷/۸۷۹۱	۲۸/۰۹۲۰

تابعی برای شرط مرزی گیردار-جرم متمرکز به ازای پارامتر غیرمحملی

$\alpha_1 = 0/5$  و  $\alpha_1 = 2/5$  همچنین شاخص توانی  $k = 1$ ،  $R = 0/01$ ،

متمرکز مختلف در جدول ۹ الی ۱۴ آورده شده است.

در جدول ۹ الی ۱۴ فرکانس های طبیعی بی بعد نانوتیر مدرج



**جدول ۱۴:** فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول و دوم برای شرط مرزی گیردار-

جرم متمرکز به‌ازای  $\alpha_r = 2/5$ ،  $R = 1$  و شاخص توانی  $k = 1$

**Table 14. The first two dimensionless natural frequencies for clamped-attached mass boundary conditions ( $\alpha_1 = 2.5$ ,  $R = 1$  and power-law index  $k=1$ )**

فرکانس بی‌بعد	$\alpha_r = 0/5$	$\alpha_r = 1$	$\alpha_r = 1/5$
$\Omega_1$	۲/۴۸۳۶	۴/۹۲۶۳	۵/۲۸۲۳
$\Omega_2$	۱۸/۸۱۵۵	۱۹/۵۴۷۶	۱۹/۶۹۲۸

**جدول ۱۵:** فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول برای شرایط مرزی و نسبت

طول به ضخامت‌های مختلف به‌ازای  $\alpha_1 = 2/5$ ،  $\alpha_2 = 1$  و شاخص توانی  $k = 1$

**Table 15. The fundamental dimensionless natural frequencies for various boundary conditions and  $\frac{L}{H}$  ( $\alpha_1 = 2.5$ ,  $\alpha_2 = 1$  and power-law index  $k=1$ )**

شرایط مرزی	$\frac{L}{H} = 10$	$\frac{L}{H} = 20$	$\frac{L}{H} = 50$
لولا- لولا	۱۰/۱۴۴۸	۱۰/۱۴۴۸	۱۰/۱۴۴۸
گیردار-گیردار	۲۳/۳۲۸۵	۲۳/۳۲۸۵	۲۳/۳۲۸۵
گیردار- لولا	۱۸/۷۱۹۹	۱۸/۷۱۹۹	۱۸/۷۱۹۹
گیردار- آزاد	۵/۲۵۴	۵/۲۵۴	۵/۲۵۴

جرم متمرکز نیز فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند.

در جدول ۱۵ فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول به‌ازای نسبت‌های طول به ضخامت مختلف برای چهار شرط مرزی گوناگون آورده شده است.

در جدول ۱۵ فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول به‌ازای نسبت طول به ضخامت‌های مختلف برای شرایط مرزی گوناگون آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نسبت مختلف طول به ضخامت‌های مختلف، تاثیری بر روی مقادیر فرکانس‌های طبیعی ندارند. افزایش نسبت طول به ضخامت تیر، بر روی کرنش‌ها و تنش‌های برشی تیر تاثیرگذار می‌باشد که در تئوری تیر اویلر برنولی این اثر نادیده گرفته می‌شود. با افزایش نسبت طول به ضخامت در تیر تیموشینکو نتایج به

**جدول ۱۱:** فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول و دوم برای شرط مرزی گیردار-جرم

متمرکز به‌ازای  $\alpha_r = 0/5$ ،  $R = 0/1$  و شاخص توانی  $k = 1$

**Table 11. The first two dimensionless natural frequencies for clamped-attached mass boundary conditions ( $\alpha_1 = 0.5$ ,  $R = 0.1$  and power-law index  $k=1$ )**

فرکانس بی‌بعد	$\alpha_r = 0/5$	$\alpha_r = 1$	$\alpha_r = 1/5$
$\Omega_1$	۷/۷۴۷۳	۱۰/۱۱۴۰	۱۰/۷۳۷۸
$\Omega_2$	۲۵/۲۵۸۷	۲۶/۰۳۰۸	۲۶/۱۸۱۸

**جدول ۱۲:** فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول و دوم برای شرط مرزی گیردار-

جرم متمرکز به‌ازای  $\alpha_1 = 2/5$ ،  $R = 0/1$  و شاخص توانی  $k = 1$

**Table 12. The first two dimensionless natural frequencies for clamped-attached mass boundary conditions ( $\alpha_1 = 2.5$ ,  $R = 0.1$  and power-law index  $k=1$ )**

فرکانس بی‌بعد	$\alpha_r = 0/5$	$\alpha_r = 1$	$\alpha_r = 1/5$
$\Omega_1$	۲/۷۱۱۹	۵/۰۷۲۸	۵/۴۸۲۸
$\Omega_2$	۲۱/۶۰۶۲	۲۲/۲۶۶۶	۲۲/۳۹۵۷

**جدول ۱۳:** فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول و دوم برای شرط مرزی

گیردار- جرم متمرکز به‌ازای  $\alpha_1 = 0/5$ ،  $R = 1$  و شاخص توانی  $k = 1$   
**Table 13. The first two dimensionless natural frequencies for clamped-attached mass boundary conditions ( $\alpha_1 = 0.5$ ,  $R = 1$  and power-law index  $k=1$ )**

فرکانس بی‌بعد	$\alpha_r = 0/5$	$\alpha_r = 1$	$\alpha_r = 1/5$
$\Omega_1$	۷/۱۷۷۴	۹/۹۰۱۸	۱۰/۲۷۴۹
$\Omega_2$	۲۱/۷۹۲۷	۲۲/۶۴۰۸	۲۲/۸۰۹۰

$R = 0/1$  و  $R = 1$  آورده شده است. در جدول ۹ الی ۱۴ نیز با افزایش پارامتر بی‌بعد طولی مقادیر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد افزایش می‌یابد، همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر غیرمحل بی‌بعد فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد کاهش یافته است. با افزایش مقدار

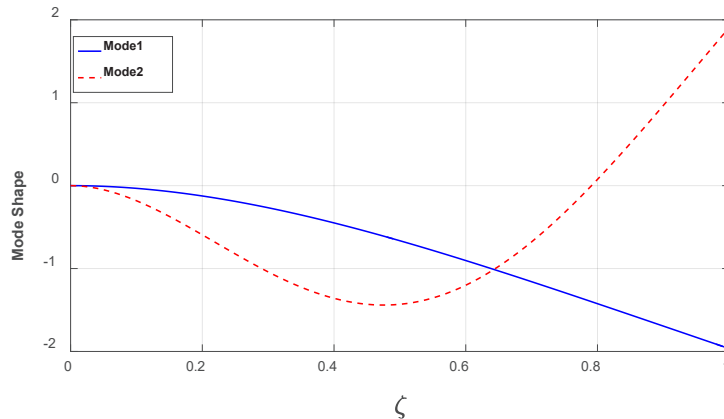


Fig. 9. The first two mode shapes of the clamped-attached mass

شکل ۹: شکل مد اول و دوم برای شرط مرزی گیردار-جرم متمرکز

غیرمحملی برای پنج شرط مرزی استخراج گردید در نهایت نتایج حاصل از نمودارها مورد مطالعه قرار گرفت و شکل مدهای شرایط مرزی مختلف استخراج شد. خلاصه نتایج به شرح زیر است:

۱- با افزایش پارامتر شاخص توانی ( $k$ ) فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد که این امر تاثیر پارامتر شاخص توانی بر روی فرکانس‌های طبیعی را نشان می‌دهد. با تغییر جنس نانوتیر، مدول یانگ افزایش و چگالی جرمی کاهش می‌یابد، همچنین باعث افزایش فرکانس طبیعی و اثرات غیرموضعی در پاسخ فرکانسی می‌شود.

۲- در تحلیل ارتعاشات آزاد طولی مشخص گردید که نسبت‌های مختلف طول به ضخامت تاثیری بر مقادیر فرکانس‌های طبیعی ندارند.

۳- فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد با افزایش پارامتر غیرمحملی ( $ea$ ) کاهش و با افزایش پارامتر مقیاس طول ( $l$ ) افزایش یافته است.

۴- فرکانس‌های طبیعی مدل گرادیان کرنش غیرمحملی، با توجه به مقادیر پارامترهای وابسته به اندازه می‌تواند بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از مدل کلاسیک باشد. با افزایش پارامتر مقیاس طولی ماده و همچنین کاهش پارامتر غیرمحملی باعث افزایش رفتار صلبیت نانوتیر مدرج تابعی می‌شود.

۵- استفاده از تئوری غیرموضعی گرادیان کرنشی در ابعاد نانو و میکرو ضروری به نظر می‌رسد. با کوچک‌تر شدن اندازه، نسبت فرکانس خطی حاصل از این تئوری‌ها به تئوری کلاسیک بیشتر می‌شود.

۶- به دلیل رفتار صلبیت تیر متناسب با شرایط مرزی گوناگون، برای تیر با شرایط تکیه‌گاهی گیردار-گیردار دامنه ارتعاشی از تیر با شرایط مرزی لولا-لولا، گیردار-آزاد و گیردار-لولا و گیردار-جرم متمرکز بیشتر است.

تئوری تیر اویلر برنولی نزدیک می‌شود.

در شکل ۹، شکل مد اول و دوم برای شرط مرزی گیردار-جرم متمرکز آورده شده است:

در شکل ۹ شکل مدهای اول و دوم برای شرایط مرزی گیردار-جرم متمرکز آورده شده است. یک سازه متناسب با مقدار جرم و سختی آن تحت بار جانبی مرتعش می‌شود. شکل ارتعاشی به مقدار بار جانبی وابسته نمی‌باشد. اگر مقدار بار جانبی زیاد شود دامنه ارتعاش بیشتر می‌گردد ولی شکل آن تغییری نمی‌کند. این ارتعاش به اشکال جداگانه‌ای تقسیم می‌شود که به هر کدام یک مد نوسانی می‌گویند. عموماً در سازه‌ها مد اول مد غالب می‌باشد.

## ۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله ارتعاشات آزاد طولی یک نانو تیر مدرج تابعی به همراه جرم متمرکز با استفاده از روش عددی جدید توسعه تقریبی برای شرایط مرزی مختلف با استفاده از تئوری غیرموضعی گرادیان کرنش مورد مطالعه قرار گرفت. در ادامه با استفاده از روش همیلتون معادلات حرکت و شرایط مرزی برای نانوتیر مدرج تابعی محاسبه گردیده است. سپس یک فرمول تحلیلی تقریبی از فرکانس طبیعی براساس روش عددی توسعه تقریبی استخراج شده است. نمونه‌ای از یک نانو تیر یکنواخت با مواد آلومینیوم و تیتانیوم شبیه‌سازی شده است.

سپس فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول تا سوم به‌ازای شاخص‌های توانی گوناگون برای شرط مرزی لولا لولا محاسبه گردید. در ادامه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول و دوم به‌ازای پارامترهای مختلف

متغیر فضایی بی بعد	$\zeta$
فرکانس طبیعی، Hz	$\lambda$
ضریب پواسون	$\nu$
چگالی، $\text{kg/m}^3$	$\rho$
قسمت متغیر چگالی جسم در واحد طول، $\text{kg/m}^3$	$\overline{\rho(x)A}$
تنش کلاسیک، Pa	$\sigma_{xx}$
میدان تنش الاستیک غیرمحلّی، Pa	$\sigma_{xx}^{(1)}$
زمان بی بعد	$\tau$
فرکانس طبیعی بی بعد، Hz	$\Omega$
فرکانس اولیه، Hz	$\omega_0$
اپراتور نابلا	$\nabla$

### مراجع

- [1] V.K. Varadan, L. Chen, J. Xie, Nanomedicine: design and applications of magnetic nanomaterials, nanosensors and nanosystems, John Wiley & Sons, 2008.
- [2] H. Fan, S. Qin, A piezoelectric sensor embedded in a non-piezoelectric matrix, International Journal of Engineering Science, 33(3) (1995) 379-388.
- [3] A. Rasooly, K.E. Herold, K.E. Herold, Biosensors and biodetection, Springer, 2009.
- [4] L. Yu, G. Bottai-Santoni, V. Giurgiutiu, Shear lag solution for tuning ultrasonic piezoelectric wafer active sensors with applications to Lamb wave array imaging, International Journal of Engineering Science, 48(10) (2010) 848-861.
- [5] N.V. Lavrik, M.J. Sepaniak, P.G. Datskos, Cantilever transducers as a platform for chemical and biological sensors, Review of Scientific Instruments, 75(7) (2004) 2229-2253.
- [6] A.C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, Journal of applied physics, 54(9) (1983) 4703-4710.
- [7] M. Zarepour, S.A.H. Hosseini, A.H. Akbarzadeh, Geometrically nonlinear analysis of Timoshenko piezoelectric nanobeams with flexoelectricity effect based on Eringen's differential model, Applied Mathematical Modelling, 69 (2019) 563-582.
- [8] O. Rahmani, S. Deyhim, S. Hosseini, A. Hossein, Size

در این مقاله از معادله تیر اویلر برنولی برای استخراج فرکانس‌های طبیعی استفاده شده است، استفاده از معادله تیر ریلی و تیموشینکو برای دست‌یابی به نتایج دقیق‌تر پیشنهاد می‌شود. همچنین به منظور بررسی حالت‌های دیگر، بررسی ارتعاشات عرضی و اجباری نانوتیر خمیده، نانوتیر با سطح مقطع غیریکنواخت و نانوتیر به همراه چندین جرم متمرکز به همراه فنر و دمپر با استفاده از روش عددی توسعه تقریبی پیشنهاد می‌شود.

### فهرست علائم

#### علائم انگلیسی

$A$	مساحت، $\text{m}^2$
$B$	عرض نانوتیر، m
$E$	مدول الاستیسیته، $\text{N/m}^2$
$\overline{E(x)I}$	قسمت متغیر سفتی خمشی، $\text{N/m}^2$
$ea$	پارامتر غیرمحلّی، m
$H$	ارتفاع نانوتیر، m
$I$	ممان اینرسی، $\text{m}^4$
$K$	انرژی جنبشی، N
$k$	شاخص توانی
$L$	طول نانوتیر، m
$l$	پارامتر مقیاس طول ماده، m
$M$	ممان کلاسیک، Nm
$M^{(1)}$	ممان غیر کلاسیک، Nm
$m_0$	جرم متمرکز، gr
$t$	زمان، S
$U$	انرژی پتانسیل، N
$w$	جابجایی، m
$w_0$	دامنه
$x$	متغیر فضایی

#### علائم یونانی

$\alpha$	تابع کرنل غیرمحلّی
$\alpha_1$	پارامتر غیرمحلّی بی بعد
$\alpha_2$	پارامتر مقیاس طول بی بعد
$\varepsilon$	پارامتر اغتشاش
$\varepsilon_{xx}$	کرنش طولی

- analysis of piezo-magnetically actuated heterogeneous nanobeams, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 93 (2017) 445-459.
- [19] X. Li, L. Li, Y. Hu, Z. Ding, W. Deng, Bending, buckling and vibration of axially functionally graded beams based on nonlocal strain gradient theory, *Composite Structures*, 165 (2017) 250-265.
- [20] Z. Lv, H. Liu, Uncertainty modeling for vibration and buckling behaviors of functionally graded nanobeams in thermal environment, *Composite Structures*, 184 (2018) 1165-1176.
- [21] H. Liu, H. Liu, J. Yang, Vibration of FG magneto-electro-viscoelastic porous nanobeams on visco-Pasternak foundation, *Composites Part B: Engineering*, 155 (2018) 244-256.
- [22] D. Cao, Y. Gao, M. Yao, W. Zhang, Free vibration of axially functionally graded beams using the asymptotic development method, *Engineering Structures*, 173 (2018) 442-448.
- [23] Z. Lv, Z. Qiu, J. Zhu, B. Zhu, W. Yang, Nonlinear free vibration analysis of defective FG nanobeams embedded in elastic medium, *Composite Structures*, 202 (2018) 675-685.
- [24] A. Aria, M. Friswell, A nonlocal finite element model for buckling and vibration of functionally graded nanobeams, *Composites Part B: Engineering*, 166 (2019) 233-246.
- [25] M. Trabelssi, S. El-Borgi, R. Fernandes, L.-L. Ke, Nonlocal free and forced vibration of a graded Timoshenko nanobeam resting on a nonlinear elastic foundation, *Composites Part B: Engineering*, 157 (2019) 331-349.
- [26] A.I. Aria, T. Rabczuk, M.I. Friswell, A finite element model for the thermo-elastic analysis of functionally graded porous nanobeams, *European Journal of Mechanics-A/ Solids*, (2019).
- [27] H.B. Khaniki, On vibrations of FG nanobeams, *International Journal of Engineering Science*, 135 (2019) 23-36.
- [28] H. Liu, Z. Lv, H. Wu, Nonlinear free vibration of geometrically imperfect functionally graded sandwich nanobeams based on nonlocal strain gradient theory, dependent bending analysis of micro/nano sandwich structures based on a nonlocal high order theory, *STEEL AND COMPOSITE STRUCTURES*, 27(3) (2018) 371-388.
- [9] O. Rahmani, M. Shokrnia, H. Golmohammadi, S. Hosseini, Dynamic response of a single-walled carbon nanotube under a moving harmonic load by considering modified nonlocal elasticity theory, *The European Physical Journal Plus*, 133(2) (2018) 42.
- [10] M. Ghadiri, S. Hosseini, M. Karami, M. Namvar, In-Plane and out of Plane Free Vibration of U-Shaped AFM Probes Based on the Nonlocal Elasticity, *Journal of Solid Mechanics Vol*, 10(2) (2018) 285-299.
- [11] M. Zarepour, S.A. Hosseini, M. Ghadiri, Free vibration investigation of nano mass sensor using differential transformation method, *Appl. Phys. A*, 123(3) (2017) 181.
- [12] O. Rahmani, S. Norouzi, H. Golmohammadi, S. Hosseini, Dynamic response of a double, single-walled carbon nanotube under a moving nanoparticle based on modified nonlocal elasticity theory considering surface effects, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 24(15) (2017) 1274-1291.
- [13] R. Mindlin, H. Tiersten, Effects of couple-stresses in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11(1) (1962) 415-448.
- [14] D.C. Lam, F. Yang, A. Chong, J. Wang, P. Tong, Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51(8) (2003) 1477-1508.
- [15] R.A. Toupin, Theories of elasticity with couple-stress, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 17(2) (1964) 85-112.
- [16] F. Yang, A. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 39(10) (2002) 2731-2743.
- [17] J.W. Lee, J.Y. Lee, Free vibration analysis of functionally graded Bernoulli-Euler beams using an exact transfer matrix expression, *International Journal of Mechanical Sciences*, 122 (2017) 1-17.
- [18] F. Ebrahimi, M.R. Barati, Porosity-dependent vibration

- wave propagation, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 78 (2015) 298-313.
- [32] S.S. Rao, Mechanical Vibrations Laboratory Manual, Year, Edition Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [33] G. Lütjering, J.C. Williams, Titanium, Springer Science & Business Media, 2007.
- [34] J. Reddy, Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams, International Journal of Engineering Science, 45(2) (2007) 288-307.
- Composite Structures, 214 (2019) 47-61.
- [29] M. Ghadiri, A. Jafari, A Nonlocal First Order Shear Deformation Theory for Vibration Analysis of Size Dependent Functionally Graded Nano beam with Attached Tip Mass: an Exact Solution, Journal of Solid Mechanics Vol, 10(1) (2018) 23-37.
- [30] T. Aksencer, M. Aydogdu, Vibration of a rotating composite beam with an attached point mass, Composite Structures, 190 (2018) 1-9.
- [31] C. Lim, G. Zhang, J. Reddy, A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Eghbali, S.A. Hosseini, O. Rahmani, Free vibration of axially functionally graded nanobeam with an attached mass based on nonlocal strain gradient theory via new ADM numerical method. *AmirKabir J. Mech Eng.*, 53(special issue 2) (2021) 1159-1178.

DOI: [10.22060/mej.2020.17013.6495](https://doi.org/10.22060/mej.2020.17013.6495)



