



## Fatigue crack growth analysis via Wiener degradation model with random effects

M. A. Farsi\*, P. Gholami

Aerospace Research Institute (Ministry of Science, Research and Technology), Tehran, Iran

**ABSTRACT:** Aerospace structure reliability is analyzed to increase the availability and decrease the stochastic failures of the system. A degradation-based modeling method is an effective approach for reliability assessment. Degradation models are usually developed based on degradation data or understandings of physics behind the degradation processes of products or systems. Stochastic models such as the Wiener process are one of the powerful tools in this field, especially the analysis of damage expansion and fatigue crack growth. This study presents a survey of degradation modeling approaches with consideration of random effects frequently used in engineering programs. Firstly, Wiener processes are used to model the degradation process of the product, which considers measurement errors simultaneously with random effects. Moreover, the closed-form expressions of some reliability quantities such as the probability density function are derived. Then, the maximum likelihood estimation method based on the expectation-maximization algorithm is presented to estimate the unknown parameters in the degradation models. Finally, a practical case study of fatigue crack growth using proposed models is provided and compared with the basic Gamma process to demonstrate the superiority and effectiveness of the Wiener process. It is shown that the Wiener process model estimates fatigue crack growth path better than the Gamma model and by adding the measurement error parameter to the model, its accuracy is increased.

### Review History:

Received: Nov. 11, 2019  
Revised: Feb. 16, 2020  
Accepted: Mar. 10, 2020  
Available Online: Mar. 19, 2020

### Keywords:

Wiener processes  
Random effects  
Measurement errors  
Gamma process  
Fatigue

## 1- Introduction

Degradation is a process that occurs under the influence of internal and external factors such as environmental and operational conditions within a system or component. One of the modes of degradation is damage accumulation over time, which is usually an irreversible process, and when the accumulated damage exceeds a natural or predetermined threshold level, the ultimate failure can occur and can cause severe losses. Therefore, it is imperative to study and model the mechanisms of system degradation to predict and prevent potential failures in order to effectively prevent subsequent losses. In recent years, extensive research has been conducted in this area that can be classified into two broad categories: the data-driven and physics-of-failure-based models [1, 2].

In recent years, degradation process-based reliability analysis has been extended to reduce product development time, and the Wiener process has always been the interest of researchers as one of the methods of stochastic process modeling. Using the data collected under fatigue loading conditions, Mishra and Vanli [3] proposed a new method for predicting the remaining useful life of a structure from Lamb wave sensors using regression and Wiener process modeling. Omar and his colleagues [4] studied the fatigue and contact wear for the bearing of the motor pump by Gamma and Wiener processes. They presented a comparison between Wiener and Gamma processes and identified their advantages, drawbacks

well as their principle uses. Zhuang et al. [5] investigated wear of revolute joints of a lock mechanism in an aircraft using the Wiener process and showed the cumulative wear of each revolute joint over time.

The authors' investigation shows that the fatigue crack growth analysis using the Wiener process has not been studied simultaneously with random effects and measurement error. For this purpose, in this paper, at the first, the Wiener model with measurement error and random effects is presented and then the Expectation-Maximization (EM) algorithm will be used to estimate the parameters. The next step will be demonstrating the measurement error and random effects model using the fatigue crack growth data reported in Wu and Ni [6] and the results will be compared with the Gamma model.

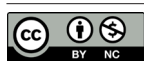
## 2- Methodology

The Wiener process is also called the Gaussian process or Brownian motion with drift. In general, a Wiener process can be expressed as [7]

$$X(t) = \mu\Lambda(t) + \sigma B(\Lambda(t)) \quad (1)$$

where  $X(t)$  represents system degradation,  $\mu$  is the drift parameter showing the rate of degradation,  $\sigma$  is the volatility

\*Corresponding author's email: farsi@ari.ac.ir



parameter,  $B(\cdot)$  is the standard Brownian motion, and  $\Lambda(t)$  is a monotone increasing function representing a general time scale.

A system often fails when the degradation process arrives at a certain critical degradation level ( $h$ ). The lifetime  $T$  of the system is then determined as the first instant at which the degradation process  $X(t) \geq 0$  exceeds the level  $h$ :

$$T = \inf\{t \geq t_0; X(t) \geq h\} \tag{2}$$

The Probability Density Function (PDF) of the lifetime  $T$  of (1) to  $h$  is given by:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= -\frac{dR_T(t)}{dt} = \frac{h}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\Lambda(t))^3}} \\ &\exp\left(-\frac{(h - \mu\Lambda(t))^2}{2\sigma^2\Lambda(t)}\right) \frac{d\Lambda(t)}{dt} \tag{3} \\ &= \frac{h}{\sqrt{\sigma^2(\Lambda(t))^3}} \phi\left(\frac{h - \mu\Lambda(t)}{\sigma\sqrt{\Lambda(t)}}\right) \frac{d\Lambda(t)}{dt} \end{aligned}$$

The Basic Wiener process model is able to reflect the inherent randomness of the degradation itself, but it is unable to capture measurement errors introduced because of imperfect inspections. So, the degradation process is given by:

$$Y(t) = X(t) + \varepsilon \tag{4}$$

where  $\varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$ .

In this case, the lifetime  $T_e$  is defined as:

$$T_e = \inf\{t \geq t_0; Y(t) \geq h\} = \inf\{t \geq t_0; X(t) \geq h_\varepsilon\} \tag{5}$$

where  $h_\varepsilon \sim N(h, \sigma_\varepsilon^2)$ . As regards  $\mu \sim N(\mu_\mu, \sigma_\mu^2)$  and  $h_\varepsilon \sim N(h, \sigma_\varepsilon^2)$ , PDF of the lifetime  $T_e$  is [8]:

$$\begin{aligned} f(t) &= \left[ \frac{h\sigma^2 + \mu_\mu\sigma_\varepsilon^2}{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma^2\Lambda(t))\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 + \sigma^2\Lambda(t) + \sigma_\mu^2\Lambda^2(t)}} \right. \\ &\left. - \frac{\sigma_\mu^2\sigma_\varepsilon^2\Lambda(t)(h - \mu_\mu\Lambda(t))}{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma^2\Lambda(t))(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma^2\Lambda(t) + \sigma_\mu^2\Lambda^2(t))^{3/2}} \right] \times \tag{6} \\ &\phi\left(\frac{h - \mu_\mu\Lambda(t)}{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma^2\Lambda(t))\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 + \sigma^2\Lambda(t) + \sigma_\mu^2\Lambda^2(t)}}\right) \frac{d\Lambda(t)}{dt} \end{aligned}$$

The observed degradation of a system may be very different because of unobservable endogenous factors and exogenous factors. Random effects models proved useful in dealing with these unobserved heterogeneities. One of the Wiener process models with random effects is [9]:

$$X(t) = \mu\Lambda(t) + \zeta\mu B(\Lambda(t)) \tag{7}$$

In this case If be assumed  $\kappa = 1/\mu \sim N(\mu_\kappa, \sigma_\kappa^2)$ , then the PDF of lifetime  $T$  is defined as:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= -\frac{dR_T(t)}{dt} \\ &= \frac{(h\sigma_\kappa^2 + \mu_\kappa\zeta^2)\Lambda(t)}{\sqrt{2\pi[h^2\sigma_\kappa^2 + \zeta^2\Lambda(t)]^3}} \tag{8} \end{aligned}$$

$$\exp\left(-\frac{(\mu h - \Lambda(t))^2}{2(\zeta^2\Lambda(t) + \sigma_\kappa^2 h^2)}\right) \frac{d\Lambda(t)}{dt}$$

One of the best stochastic process models, that is appropriate when the gradual damage is monotonically increasing or decreasing over time, such as fatigue, corrosion, and crack growth is the Gamma process. The PDF of this model for lifetime  $T$  is defined as[10]:

$$f_{\Delta\eta(t)}(y) = \frac{y^{\Delta\eta(t)-1}}{\beta^{\Delta\eta(t)}\Gamma(\Delta\eta(t))} \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right) \quad y > 0 \tag{9}$$

where  $\Delta\eta(t)$  and  $\beta$  are the shape (function) and scale parameters of the gamma distribution, respectively.

Assume that the degradation processes of  $n$  independently tested units are inspected at ordered inspection times  $t_1, \dots, t_m$  with the degradation observations  $\{\rho_i(t_j) = l_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$ , where  $\rho$  is deprecation models mentioned above. By obtaining likelihood-function in each degradation model, the EM algorithm is used to estimate the unknown parameters.

### 3- Results and Discussion

In this study, the performance of the basic Wiener model, the Wiener with measurement error model, Wiener with random effects model, and the basic Gamma model based on data of fatigue crack growth of a batch of 2024-T351 aluminum alloy specimens [6] are compared. In the experiment, 30 units are subject to a constant amplitude fatigue test and the crack growth paths of 28 units are depicted in Fig. 1.

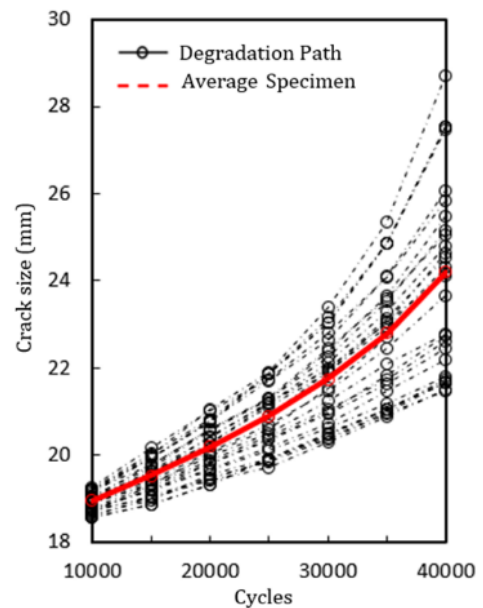
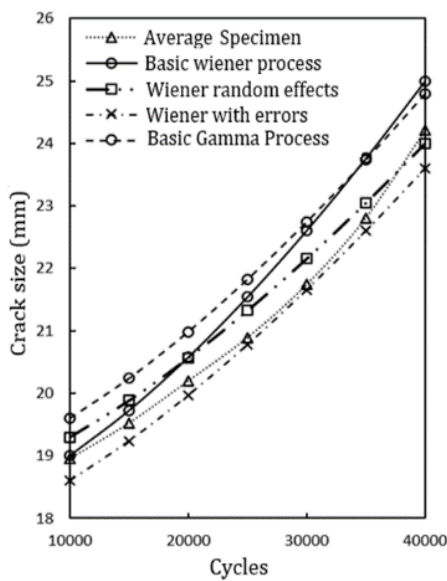


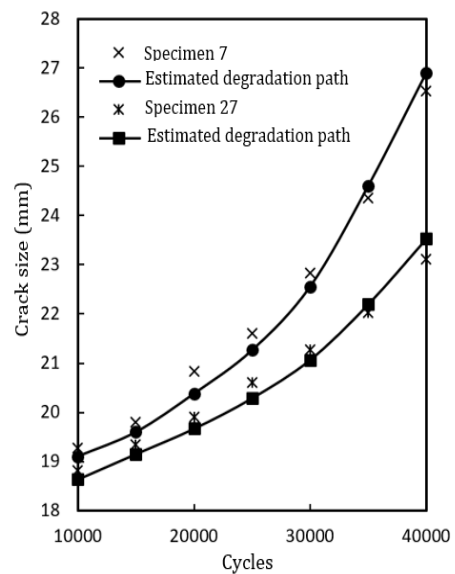
Fig. 1. Fatigue crack growth paths of 28 testing units

**Table 1. MLEs of 4 different Wiener process models for the crack growth data**

Model	MLE
Basic Wiener	$\mu = 0.0219, \sigma = 0.0578, \eta = 1.50$
Basic Gamma	$\beta = 38.45, \eta = 1.57$
Wiener with measurement error	$\mu_\mu = 38.79, \sigma_\mu = 11.33,$ $\sigma = 0.0484, \sigma_\epsilon = 2.11 \times 10^{-12},$ $\eta = 1.41$
Wiener with random effects	$\mu_\kappa = 35.11, \sigma_\kappa = 10.96,$ $\zeta = 1.27, \eta = 1.44$



**Fig. 2. Estimated mean paths based on fatigue crack growth**



**Fig. 3. Comparison between the estimated path and experimental data of units 7 and 27**

As regards that the crack growth follows a power law, it can be considered that  $\Lambda(t) = t^b$  which  $\eta = b$ . MLEs of the parameters in these models and the corresponding values of the Akaike Information Criterion (AIC) are listed in Table 1. The AIC is defined to be  $AIC = -2L(S) + 2P$ , where  $P, S, L$  is the number of parameters, the observation and the maximum of the likelihood function of the model, respectively. From Table 1, it can be seen that the Wiener process with measurement error fits the data best. The Wiener process model estimates fatigue crack growth path better than the Gamma model and by adding the measurement error parameter to the model, its accuracy is increased.

Estimated mean paths based on fatigue crack growth by the degradation models are given in Fig. 2.

To validate the estimated model, two samples 7 and 27 of 30 testing units are used to predict and estimate the degradation path by the Wiener process with random effects.

#### 4- Conclusion

In this paper, the reliability of an aluminum alloy specimens under fatigue load is investigated using degradation processes. Stochastic process models are extensive, however, in this paper Wiener process with measurement errors, random effects and the basic Gamma process are used. In each process, the closed-form expressions of the PDF of a lifetime are defined and the unknown parameters are estimated using the EM algorithm. Then, each of these models is applied to analyze the fatigue crack growth data where the units were tested under the same conditions and the results of each degradation process are compared. The results show that the Wiener with measurement error model fits the data best. Degradation process models are extensive, therefore, for further investigation, a similar study can be performed using models such as general path, inverse Gaussian process, and etc. It is also recommended to use machine learning

techniques such as Support Vector Machines (SVM) and neural networks to model the degradation of a system and evaluate its results.

### References

- [1] X.-S. Si, W. Wang, C.-H. Hu, D.-H. Zhou, Remaining useful life estimation—a review on the statistical data driven approaches, *European Journal of Operational Research*, 213(1) (2011) 1-14.
- [2] Z. Zhang, X. Si, C. Hu, X. Kong, Degradation modeling—based remaining useful life estimation: A review on approaches for systems with heterogeneity, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability*, 229(4) (2015) 343-355.
- [3] S. Mishra, O.A. Vanli, Remaining useful life estimation with lamb-wave sensors based on wiener process and principal components regression, *Journal of Nondestructive Evaluation*, 35(1) (2016) 11.
- [4] Z. Omar, B. hmida Faycel, M.M. Hedi, C. Abdelkader, Stochastic Modeling of Wear in Bearing in Motor Pump in Two–Tank System, in: 2018 15th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD), IEEE, 2018, pp. 611-618.
- [5] X. Zhuang, T. Yu, L. Shen, Z. Sun, B. Guo, Time-varying dependence research on wear of revolute joints and reliability evaluation of a lock mechanism, *Engineering Failure Analysis*, 96 (2019) 543-561.
- [6] W. Wu, C. Ni, A study of stochastic fatigue crack growth modeling through experimental data, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 18(2) (2003) 107-118.
- [7] Z.S. Ye, M. Xie, Stochastic modelling and analysis of degradation for highly reliable products, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 31(1) (2015) 16-32.
- [8] D. Pan, Y. Wei, H. Fang, W. Yang, A reliability estimation approach via Wiener degradation model with measurement errors, *Applied Mathematics and Computation*, 320 (2018) 131-141.
- [9] Z.-S. Ye, N. Chen, Y. Shen, A new class of Wiener process models for degradation analysis, *Reliability Engineering & System Safety*, 139 (2015) 58-67.
- [10] D.-G. Chen, Y. Lio, H.K.T. Ng, T.-R. Tsai, *Statistical modeling for degradation data*, Springer, 2017.

#### HOW TO CITE THIS ARTICLE

M.A. Farsi, P. Gholami, *Fatigue crack growth analysis via Wiener degradation model with random effects*, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 53(4) (2021) 539-542.

DOI: [10.22060/mej.2020.17437.6596](https://doi.org/10.22060/mej.2020.17437.6596)





## بررسی رشد ترک خستگی با فرایند وینر با در نظر گرفتن اثرات تصادفی

محمدعلی فارسی\*، پیمان غلامی

پژوهشگاه هوافضا، وزارت علوم تحقیقات و فناوری، تهران، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸/۰۹/۰۵

بازنگری: ۱۳۹۸/۱۱/۲۷

پذیرش: ۱۳۹۸/۱۲/۲۰

ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۱۲/۲۹

### کلمات کلیدی:

فرایند وینر

اثرات تصادفی

خطای اندازه‌گیری

خستگی

عمر مفید باقی‌مانده

**خلاصه:** ارزیابی قابلیت اطمینان سازه‌های هوافضایی با قابلیت تعمیرپذیری، برای افزایش در دسترس بودن سیستم و کاهش توقفات تصادفی در طول بهره‌برداری از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد. مدل‌سازی و تحلیل فرآیند تخریب، یک رویکرد موثر برای ارزیابی قابلیت اطمینان و پیش‌بینی عمر مفید باقی‌مانده است. مدل‌سازی فرآیند تخریب بر اساس روش‌های مبتنی بر داده (فرآیندهای تصادفی و روش‌های یادگیری ماشین) یا مکانیزم‌های خرابی انجام می‌شود. مدل‌های مبتنی بر فرآیندهای تصادفی نظیر فرآیند وینر یکی از ابزارهای توانمند در این حوزه به ویژه تحلیل گسترش آسیب و رشد ترک‌های خستگی است. در این تحقیق، ابتدا فرآیندهای وینر برای مدل‌سازی فرایند تخریب تشریح شده و خطاهای اندازه‌گیری با اثرات تصادفی در مدل مورد بررسی قرار می‌گیرد و علاوه بر این، عبارات فرم بسته برخی مقادیر قابلیت اطمینان مانند تابع قابلیت اطمینان و تابع چگالی احتمال هر یک از مدل‌ها ارائه شده است. سپس با استفاده از روش تخمین درست‌نمایی بیشینه و الگوریتم امید ریاضی - بیشینه کردن، پارامترهای ناشناخته در مدل‌های تخریب برآورد می‌شود. برای اثبات دقت و صحت روش ارائه شده، گسترش ترک ناشی از خستگی در یک قطعه آلومینیومی بررسی شده و نتایج با مقادیر تجربی و مدل پایه گاما مقایسه شده است. نتایج به دست آمده بیانگر دقت مطلوب مدل فرایند وینر نسبت به مدل گاما در تخمین رشد ترک خستگی است و با اضافه کردن پارامتر خطای اندازه‌گیری به این مدل، دقت آن افزایش می‌یابد.

### ۱- مقدمه

در این حوزه انجام شده که آن‌ها را می‌توان به دو دسته کلی روش مبتنی بر مکانیزم خرابی و روش مبتنی بر داده تقسیم نمود که روش مبتنی بر داده نیز به صورت روش‌ها و فرآیندهای تصادفی و یادگیری ماشین انجام می‌شود [۱، ۲]. داده‌های مربوط به گسترش آسیب که در چرخه کاری یک مجموعه ثبت می‌شوند اطلاعات ارزشمندی را در مورد رفتار و خرابی محصول برای ارزیابی قابلیت اطمینان و سایر تصمیمات مهندسی و مدیریتی ارائه می‌دهند. ویژگی‌های داده‌های تخریب و روش‌های مورد استفاده برای جمع‌آوری داده‌ها در انتخاب مدل‌های تخریب نقش مهمی دارند. به طور کلی، چنین اطلاعاتی از تست‌های آزمایشگاهی، کاربردهای میدانی و یا داده‌های نظارت بر شرایط واقعی در شرایط معمولی یا در شرایط تنش شتاب گرفته شده

تخریب و آسیب فرایندی است که تحت تاثیر عوامل داخلی و خارجی از جمله شرایط محیطی و عملیاتی در یک سیستم یا قطعه رخ می‌دهد. یکی از حالت‌های تخریب، انباشت خرابی با زمان است که معمولاً یک فرآیند غیرقابل برگشت است و هنگامی که آسیب انباشته شده بیش از یک سطح مشخص یا از پیش تعیین شده باشد، شکست نهایی رخ می‌دهد و ممکن است باعث خسارت شدید شود. بنابراین، ضروری است که مکانیزم‌های تخریب سیستم را برای پیش‌بینی و پیشگیری از شکست‌های بالقوه، بررسی و مدل‌سازی نمود تا بتوان از ضررهای بعدی به طور موثر جلوگیری کرد. مطالعات بسیاری

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: fars@ari.ac.ir



کردند. طبق نتایج به دست آمده در این مطالعه اگر کسی بخواهد یک تخریب پیوسته را مدل سازی کند استفاده از فرآیند وینر آسان تر است ولی مشکل اصلی برای مدل سازی تخریب توسط فرآیند وینر وجود مسیرهای تخریب غیریکنواخت است که در این صورت استفاده از فرایند گاما پیشنهاد شده است. ژوانگ و همکارانش [۸] به بررسی سایش اتصالات در مکانیسم قفل در هواپیما با استفاده از فرایند وینر با مدل پایه پرداختند و مقدار سایش تجمعی هر مفصل را با زمان نشان دادند.

بررسی نویسندگان نشان می دهد که فرآیند رشد ترک ناشی از خستگی با استفاده از فرایند وینر با در نظر گرفتن همزمان اثرات تصادفی و خطای اندازه گیری مطالعه نشده است. به همین منظور در این مقاله ابتدا مدل های وینر با در نظر گرفتن اثرات تصادفی و خطای اندازه گیری ارائه می شود و سپس برای به دست آوردن پارامترها از الگوریتم امید ریاضی - بیشینه کردن<sup>۱</sup> استفاده خواهد شد. در ادامه نیز گسترش رشد ترک ناشی از خستگی با استفاده از مدل های ارائه شده در یک قطعه آلومینیومی مدل سازی خواهد شد و نتایج به دست آمده از هر یک از مدل های مذکور با نتایج تجربی ارائه شده توسط وو و نی [۹] و مدل پایه گاما مقایسه خواهد شد. نتایج نشان می دهد که مدل فرایند وینر در پیش بینی رشد ترک خستگی براساس داده های موجود بهتر از مدل گاما است و با اضافه کردن پارامتر خطای اندازه گیری و اثرات تصادفی به این مدل، دقت آن افزایش می یابد.

## ۲- مدل های فرایند وینر

فرضیه تصمیم گیری مبتنی بر آسیب در حقیقت انتخاب یک مدل مناسب برای گسترش تخریب در محصول است که بر اساس فیزیک تخریب یا داده های تخریب است. یکی از رایج ترین روش ها مدل سازی مبتنی بر فرآیندهای تصادفی و احتمالاتی است. به عبارت دیگر دو روش کلی برای مدل سازی آسیب براساس داده های تجربی وجود دارد: مدل های فرایند تصادفی<sup>۲</sup> و مدل های مبتنی بر توزیع آماری است. فرآیندهای تصادفی نیز به دو دسته مسیر کلی<sup>۳</sup> و فرآیندهای خاص تقسیم می شوند [۱۰]. فرایند وینر از جمله روش های فرایند تصادفی است که کاربرد فراوانی در مدل سازی تخریب دارد و در این

حاصل می شود. این داده ها می تواند اندازه گیری مستقیم فرآیندهای تخریب (به عنوان مثال، رشد ترک، کاهش شدت نور دیوهای نوری) و یا اندازه گیری های دیگر ویژگی های قطعه که با روند تخریب محصول مرتبط است (مانند ارتعاش، تغییر ولتاژ خروجی، درجه حرارت) باشد. در سال های اخیر، تجزیه و تحلیل قابلیت اطمینان مبتنی بر فرآیند تخریب، برای دستیابی به شناخت بهتر از محصول و کاهش زمان توسعه محصول افزایش یافته است و فرآیند وینر به عنوان یکی از روش های مدل سازی فرآیندهای تصادفی همواره مورد توجه محققین بوده است. در این فرایند تصادفی، میزان افزایش یا طول گامها براساس توزیع نرمال تعیین می شود و میانگین این توزیع برابر با صفر و واریانس آن نیز در همه گامها ثابت است.

ژن شن و همکاران یک کلاس جدید از اثرات تصادفی برای مدل وینر پیشنهاد دادند [۳] و رشد ترک ناشی از خستگی و همچنین فرسایش هارد دیسک را با این مدل جدید بررسی و با سایر مدل اثرات تصادفی مقایسه کردند و نتایج قابل قبولی به دست آوردند. سی و همکاران [۴] از یک مدل فرآیند وینر با رانش تصادفی به منظور تجزیه و تحلیل داده های رانش ژيروسکوپ در یک مجموعه ناوبری اینرسی که در سیستم های تسلیحاتی استفاده می شود، و یک مجموعه داده رشد ترک خستگی از آلیاژ آلومینیوم T4-2017 استفاده کردند. پارک و پادگت [۵] یک مدل فرایند وینر را برای اندازه گیری داده های خستگی ساخته اند. پارامترهای مدل با روش درست نمایی بیشینه از داده های آزمون پرشتاب محاسبه شده است، و مدل کلی برای سه مجموعه از داده های استحکام استفاده شده است.

میشار و وندلی [۶] با استفاده از داده های جمع آوری شده در شرایط بارگذاری خستگی، یک روش جدید برای پیش بینی عمر مفید باقی مانده یک حسگر با استفاده از رگرسیون و مدل سازی فرایند وینر ارائه کردند. از روش رگرسیون برای استخراج ویژگی های حساس به آسیب حسگر و بیان رابطه بین آن ها و از فرایند وینر برای مدل سازی رشد و پیش بینی آسیب استفاده شده است. عَمَر و همکارانش [۷] خستگی و سایش یاتاقان های پمپ را با استفاده از مدل تصادفی گاما و وینر مطالعه کردند. آن ها با استفاده از داده های موجود، پارامترهای هر دو فرآیند را برآورد و شبیه سازی و با محاسبه توزیع زمان رسیدن به آستانه بحرانی تخریب، این دو فرایند را با یکدیگر مقایسه و مزایا، اشکالات و همچنین اصول استفاده از آن ها را مشخص

1 Expectation -Maximation (EM) algorithm

2 Stochastic process models

3 General path models

بخش اصول و نحوه مدل‌سازی آن تشریح می‌گردد.

## ۱-۲- مدل پایه فرآیند وینر

از دیدگاه فیزیکی، اصل این فرآیند حرکت براونی است که توسط محققین مختلف در حوزه‌های مختلف علمی استفاده شده است. در فرآیند گسترش آسیب برای بسیاری از محصولات، افزایش و رشد تخریب در یک فاصله زمانی بی‌نهایت کوچک می‌تواند به عنوان یک ترکیبی از تعداد زیادی از عوامل خارجی مشاهده شود و گسترش تخریب، حاصل اثر مشترک همه این عوامل است، که عموماً به علت قضیه حد مرکزی از توزیع نرمال یا شبیه آن پیروی می‌کند. فرآیند وینر با نگاه آماری و تصادفی مبتنی بر توزیع نرمال می‌تواند برای مدل‌سازی به کار رود. در این صورت رابطه زیر برای بیان گسترش و رشد یک آسیب یا پدیده استفاده می‌شود [۱۱]:

$$X(t) = \mu\Lambda(t) + \sigma B(\Lambda(t)) \quad (1)$$

در این رابطه  $X(t)$  نشان‌دهنده میزان تخریب سیستم در لحظه  $t$  و  $\mu$  سرعت و نرخ تخریب است،  $\sigma$  پارامتر نوسانات،  $B(\cdot)$  میزان حرکت استاندارد برونی<sup>۱</sup> و  $\Lambda(t)$  یک تابع افزایشی یکنواخت است که غیرخطی بودن مسیر آسیب را نشان می‌دهد. اساساً فرآیند وینر دارای افزایش مستقل است، به عبارتی  $\Delta X(t) = X(t + \Delta t) - X(t)$  مستقل از  $X(t)$  است و از توزیع نرمال به صورت رابطه زیر پیروی می‌کند [۱۲]:

$$\Delta X(t) \sim N(\mu\Lambda(t + \Delta t) - \mu\Lambda(t), \sigma^2\Lambda(t + \Delta t) - \sigma^2\Lambda(t)) \quad (2)$$

با توجه به خواص مفید ریاضی و تفسیرهای فیزیکی، فرآیند وینر به طور گسترده‌ای برای مدل‌سازی فرایندهای تخریب استفاده شده است [۱۳]. هنگامی که میانگین تخریب به طور خطی افزایش می‌یابد، فرآیند وینر با میانگین خطی استفاده می‌شود. همچنین برای برخی از فرایندهای تخریب غیرخطی، مسیر تخریب متوسط<sup>۲</sup> می‌تواند با استفاده از تبدیل مناسب، خطی شود. به عنوان مثال، تغییر شکل در مقیاس زمانی برای مدل‌سازی تخریب ترانزیستورها [۱۴] اعمال شد. اخیراً ساختارهای غیرخطی برای دینامیک فرایندهای تخریب غیرخطی پیشنهاد شده است [۱۵، ۱۶]. علاوه بر این،

وانگ و همکاران [۱۵] یک چارچوب مدل‌سازی تخریب عمومی برای سیستم‌های زوال‌پذیر هیبریدی ارائه دادند که دارای اجزای تخریب خطی و غیرخطی هست. مدل پایه، یک پایه بسیار مفید برای تجزیه و تحلیل تخریب را فراهم می‌کند و برای تطبیق و استفاده در مسائل مختلف، اغلب در این مدل اصلاحاتی انجام می‌شود و فرم‌های گوناگونی تولید می‌شود.

## ۲-۲- فرایند وینر با خطای اندازه‌گیری<sup>۳</sup>

مدل پایه فرآیند وینر قادر است رفتار تصادفی و ذاتی خود تخریب را نمایش دهد، اما قادر به ضبط و ثبت خطاهای اندازه‌گیری که به دلیل بازرسی‌های نامناسب یا خطای تجهیزات رخ می‌دهد نیست. به عنوان مثال، اندازه‌گیری فرآیند تخریب اغلب با ابزار معمولی و ساده توسط اپراتورها انجام می‌شود که همراه با خطاهای مختلف است حتی دستگاه‌های مدرن نیز دارای خطا و محدودیت‌های عملیاتی هستند. علاوه بر این، شرایط محیط‌های تصادفی نیز بر مقدار اندازه‌گیری شده تاثیر می‌گذارد. لذا بازرسی ناقص در عمل رخ می‌دهد، به ویژه هنگامی که اندازه‌گیری‌ها به صورت غیرمستقیم از طریق سنسورها انجام می‌شود. این نقص باعث می‌شود که اصطلاحاً خطا به مدل پایه اضافه شود. بعدها بی و همکاران [۱۶] نشان دادند که رویکرد ویتور استفاده کامل از داده‌ها را ارائه نمی‌دهد و به همین دلیل یک فرایند اصلاح شده‌ی وینر را پیشنهاد کردند.

## ۲-۲-۱- مدل‌سازی آسیب و ارزیابی قابلیت اطمینان با خطای

### اندازه‌گیری

بیشتر اجزا و سیستم‌ها در طول زمان هنگامی که میزان آسیب بیش از یک سطح قابل قبول به نام آستانه شکست است، خراب شده و از کار می‌افتند. اطلاعات مربوط به میزان آسیب در این سیستم‌ها (مانند سایش، خوردگی و طول ترک) معمولاً می‌تواند به کمک روش‌های غیرمخرب اندازه‌گیری شود که پس از آن، یک مدل تخریب یا آسیب مناسب، برای توصیف روند فرآیند به کمک تجزیه و تحلیل داده‌ها ارائه می‌شود. در میان مدل‌های رایج، فرآیند وینر با میانگین مثبت، به دلیل خواص ریاضی و تفسیرهای فیزیکی آن، گزینه مطلوبی است. به عنوان یک قاعده کلی، وضعیت تخریب و آسیب به دلیل عدم صحت اندازه‌گیری به طور دقیق اندازه‌گیری نمی‌شود. بنابراین،

1 Standard Brownian motion  
2 Mean degradation path

3 Wiener process with measurement errors

که  $\phi(\cdot)$  و  $\Phi(\cdot)$  تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد را به ترتیب نشان می‌دهند. با این وجود، نتایج فوق تاثیر متغیر تصادفی  $\mu$  بر توزیع عمر را در نظر نمی‌گیرند. برای فرایند تخریب با خطاهای اندازه‌گیری، آستانه شکست  $h$  اغلب توسط استاندارد صنعتی تعریف شده است، که با استفاده از داده‌های تخریب مشاهده شده بستگی به دانش و تجربه متخصص دارد. در این مورد، عمر  $T_e$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_e = \inf\{t \geq t_0; Y(t) \geq h\} = \inf\{t \geq t_0; X(t) \geq h_e\} \quad (7)$$

که  $h_e = h - \varepsilon$  از توزیع نرمال با میانگین  $h$  و انحراف معیار  $\sigma_\varepsilon$  پیروی می‌کند. واضح است که عمر  $T_e$  توسط  $Y(t)$  محاسبه می‌شود و بیانگر زمان رسیدن به آستانه  $h$  می‌رسد که متفاوت از عمر  $T$  است. اگر  $h_e$  و  $\mu$  مقدار ثابت باشند، می‌توان به راحتی، تابع چگالی احتمال عمر  $T_e$  و تابع قابلیت‌اطمینان متناظر  $T_e$  را با جایگزینی  $h$  با  $h_e$  در روابط فوق به دست آورد. ولی هر دو مقادیر  $h_e$  و  $\mu$  در این مدل ثابت نیستند و متغیرهای تصادفی هستند، که باید تاثیر آن‌ها بر توزیع عمر هم‌زمان مورد توجه قرار گیرد. با توجه به این که  $h_e$  و  $\mu$  از توزیع نرمال پیروی می‌کنند ( $h_e \sim N(h, \sigma_\varepsilon^2)$  و  $T_e$   $(\mu \sim N(\mu_\mu, \sigma_\mu^2))$ ، تابع چگالی احتمال و قابلیت‌اطمینان برای  $T_e$  به ترتیب توسط روابط زیر بیان شوند [۱۷]:

$$f(t) = \frac{\frac{h\sigma^2 + \mu_\mu\sigma_\varepsilon^2}{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma^2\Lambda(t))\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 + \sigma^2\Lambda(t) + \sigma_\mu^2\Lambda^2(t)}} - \frac{\sigma_\mu^2\sigma_\varepsilon^2\Lambda(t)(h - \mu_\mu\Lambda(t))}{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma^2\Lambda(t))(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma^2\Lambda(t) + \sigma_\mu^2\Lambda^2(t))^{3/2}}}{\left(\frac{h - \mu_\mu\Lambda(t)}{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma^2\Lambda(t))\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 + \sigma^2\Lambda(t) + \sigma_\mu^2\Lambda^2(t)}}\right) \frac{d\Lambda(t)}{dt}} \quad (8)$$

$$R_{T_e}(t) = \Phi\left(\frac{h - \mu_\mu\Lambda(t)}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 + \sigma^2\Lambda(t) + \sigma_\mu^2\Lambda^2(t)}}\right) - \frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma^4 - 4\sigma_\mu^2\sigma_\varepsilon^2}} \exp\left(\frac{2\mu_\mu h}{\sigma^2} + \frac{2\mu_\mu^2\sigma_\varepsilon^2}{\sigma^4} + \frac{2\sigma_\mu^2(h\sigma^2 + 2\mu_\mu\sigma_\varepsilon^2)}{\sigma^4(\sigma^4 - 4\sigma_\mu^2\sigma_\varepsilon^2)}\right) \cdot \Phi\left(-\frac{h(\sigma^2 + 2\sigma_\mu^2\Lambda(t)) + \mu_\mu(\sigma^2\Lambda(t) + 2\sigma_\varepsilon^2)}{\sqrt{(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma^2\Lambda(t) + \sigma_\mu^2\Lambda^2(t))(\sigma^4 - 4\sigma_\mu^2\sigma_\varepsilon^2)}}\right) \quad (9)$$

داده‌های تخریب مشاهده شده اغلب تحت تاثیر اندازه‌گیری‌های ناقص و همراه با خطا قرار می‌گیرند، یعنی مقدار  $X(t)$  همراه با مقداری خطا ( $\varepsilon$ ) است بنابراین می‌توان گفت مقدار اندازه‌گیری شده ( $Y(t)$ ) به صورت زیر است:

$$Y(t) = X(t) + \varepsilon \quad (3)$$

خطای اندازه‌گیری عموماً فرض می‌شود که از توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف استاندارد  $\sigma_\varepsilon$  پیروی می‌کند.

یادآوری می‌شود یک سیستم اغلب زمانی دچار شکست می‌شود که مقدار آسیب به یک آستانه شکست از پیش تعریف شده ( $h$ ) می‌رسد. زمان رسیدن خرابی و آسیب به این مقدار اگر با نگاه فرآیندهای تصادفی انجام شود این زمان اصطلاحاً زمان اولین ضربه<sup>۱</sup> نامیده شده و برای تعریف عمر سیستم استفاده می‌شود. فرض بر این است که مسیر تخریب یک سیستم در طول زمان افزایش می‌یابد بنابراین برای فرایند تخریب بدون خطاهای اندازه‌گیری، بر اساس مفهوم زمان اولین ضربه، عمر  $T$  می‌تواند به صورت زیر تعریف شود:

$$T = \inf\{t \geq t_0; X(t) \geq h\} \quad (4)$$

با توجه به ویژگی فرآیند وینر،  $\Lambda(t)$  زمانی که پارامتر میانگین  $\mu$  ثابت است از توزیع گاوسی معکوس پیروی می‌کند. بنابراین، تابع قابلیت‌اطمینان (احتمال اینکه مجموعه در زمان  $t$  سالم بوده و به عمر  $T$  نرسیده باشد) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$R_T(t) = P(T \geq t) = P(Y(t) \leq h) = \Phi\left(\frac{h - \mu\Lambda(t)}{\sigma\sqrt{\Lambda(t)}}\right) - \exp\left(\frac{2\mu h}{\sigma^2}\right) \Phi\left(-\frac{h + \mu\Lambda(t)}{\sigma\sqrt{\Lambda(t)}}\right) \quad (5)$$

در نتیجه تابع چگالی احتمال<sup>۲</sup> آن برابر است با:

$$f_T(t) = -\frac{dR_T(t)}{dt} = \frac{h}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\Lambda(t))^3}} \exp\left(-\frac{(h - \mu\Lambda(t))^2}{2\sigma^2\Lambda(t)}\right) \frac{d\Lambda(t)}{dt} = \left(\frac{h}{\sqrt{\sigma^2(\Lambda(t))^3}} \phi\left(\frac{h - \mu\Lambda(t)}{\sigma\sqrt{\Lambda(t)}}\right) \frac{d\Lambda(t)}{dt}\right) \quad (6)$$

1 First hitting time (FHT)  
2 Probability density function (pdf)



۲-۲-۲- استنتاج آماری

فرض کنید که فرایندهای تخریب برای  $n$  نمونه بررسی شده و در  $m$  تعداد بازرسی‌ها  $(t_1, \dots, t_m)$ ، مشاهدات تخریب به صورت  $\{Y_i(t_j) = y_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$  است و مقادیر و پارامترهای تخریب در میان نمونه‌های مختلف به علت استقلال فیزیکی واحدهای مورد آزمایش از نظر آماری مستقل است. بر اساس فرم خطای اندازه‌گیری برای فرآیند وینر، فرایند تخریب مشاهده‌شده برای واحد  $i$  می‌تواند به صورت  $Y_i(t_j) = \mu_i \Lambda(t_j) + \sigma B(\Lambda(t_j)) + \varepsilon_{ij}$  بیان شود، به طوری که پارامتر میانگین برای واحد  $i$  است که مستقل و یکسان با توزیع  $\mu$  است، و خطاهای اندازه‌گیری  $\varepsilon_{ij}$  نیز فرض می‌شود که مستقل و یکسان از توزیع  $\varepsilon$  است. از طرفی می‌توان برای واحد  $i$  تعاریف زیر را بیان کرد:

فرایند تخریب مشاهده‌شده برای واحد  $i$  می‌تواند به صورت  $Y_i(t_j) = \mu_i \Lambda(t_j) + \sigma B(\Lambda(t_j)) + \varepsilon_{ij}$  بیان شود، به طوری که پارامتر میانگین برای واحد  $i$  است که مستقل و یکسان با توزیع  $\mu$  است، و خطاهای اندازه‌گیری  $\varepsilon_{ij}$  نیز فرض می‌شود که مستقل و یکسان از توزیع  $\varepsilon$  است. از طرفی می‌توان برای واحد  $i$  تعاریف زیر را بیان کرد:

$$\begin{aligned} \Delta y_{i1} &= y_{i1} \\ \lambda_1 &= \Lambda(t_1) \\ \Delta y_{ij} &= y_{i,j} - y_{i,j-1}, \quad j = 2, 3, \dots, m \\ \lambda_j &= \Lambda(t_j) - \Lambda(t_{j-1}), \quad j = 2, 3, \dots, m \end{aligned} \quad (10)$$

برای راحتی، اولین تفاوت ثبت‌شده در مشاهدات تخریب برای واحد  $i$  توسط  $\Delta Y_i = \{\Delta y_{i,1}, \dots, \Delta y_{i,m}\}$  نشان داده شده است و اولین تفاوت مشاهدات تخریب برای تمام واحدهای  $n$  توسط  $\Delta Y = \{\Delta Y_1, \dots, \Delta Y_n\}$  به دست می‌آید. برای پارامتر ثابت  $\mu_i$  بر اساس خصوصیات فرآیندهای وینر،  $\Delta Y_i$  از توزیع نرمال چند متغیره  $(\Delta Y_i \sim N(\mu_i \lambda, \Sigma))$  با تابع چگالی احتمال مشترک<sup>۱</sup> زیر پیروی می‌کند [۱۷]:

$$f(\Delta Y_i | \mu_i) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{1}{2} (\Delta y_i - \mu_i \lambda)^T \Sigma^{-1} (\Delta y_i - \mu_i \lambda) \right) \quad (11)$$

به طوری که  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$ ،  $\Delta y_i = (\Delta y_{i1}, \dots, \Delta y_{im})^T$  و ماتریس کوواریانس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma^2 \lambda_i + \sigma_\varepsilon^2 & i = j = 1 \\ \sigma^2 \lambda_i + \sigma_\varepsilon^2 & i = j > 1 \\ -\sigma_\varepsilon^2 & |i - j| = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

برای سهولت استنتاج آماری، پارامترهای مجهول دوباره به صورت

$$\begin{aligned} l(\Theta | \Delta Y, \Omega) &= \sum_{i=1}^n [\ln f(\Delta Y_i | \mu_i) + \ln f(\mu_i)] = \\ &= C - \frac{n}{2} \ln |\Upsilon(\psi, \eta)| - \frac{mn}{2} \ln \sigma^2 - \frac{n}{2} \ln \sigma_\mu^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{(\Delta y_i - \mu_i \lambda)^T \Upsilon^{-1}(\psi, \eta) (\Delta y_i - \mu_i \lambda)}{\sigma^2} + \frac{(\mu_i - \mu_\mu)}{\sigma_\mu^2} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

برای برآورد پارامترهای ناشناخته در رابطه فوق از الگوریتم امید ریاضی- بیشینه‌کردن استفاده می‌شود. الگوریتم امید ریاضی- بیشینه‌کردن شامل دو مرحله است: مرحله امید ریاضی (گام  $E$ ) و مرحله حداکثرسازی (گام  $M$ ). در گام  $E$  امید ریاضی) ابتدا داده‌های مشاهده‌نشده به شرط داده‌های مشاهده‌شده محاسبه می‌شوند و سپس این امیدهای ریاضی را به جای داده‌های مشاهده‌نشده قرار می‌دهند و پارامترهای مورد نظر برآورد می‌شوند. در گام  $M$  (گام بیشینه‌کردن) بعد از جای‌گذاری اعداد اولیه به جای داده‌های مشاهده‌نشده به شرط داده‌های مشاهده‌شده، لگاریتم تابع درست‌نمایی حداکثر می‌گردد. این مکانیزم آن‌قدر تکرار می‌شود تا به همگرایی میان پارامترهای برآوردشده در تکرارها برسد. بنابراین برای محاسبه امید ریاضی تابع لگاریتمی درست‌نمایی<sup>۲</sup> فوق، باید ممان اول و دوم  $\mu_i$  محاسبه شود. می‌توان یافت که مقدار پسین  $\mu_i$  به شرط  $\Delta Y_i$  همچنان از توزیع نرمال پیروی می‌کند (  $\mu_i \sim N(\mu_\mu, \sigma_\mu^2)$  ). با توجه به قضیه بیزین، توزیع پسین<sup>۴</sup>  $\mu_i$  می‌تواند به صورت زیر به دست آید:

$$\begin{aligned} p(\mu_i | \Delta Y_i) &\propto p(\Delta Y_i | \mu_i) p(\mu_i) \\ &\propto \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} (\Delta y_i - \mu_i \lambda)^T \Upsilon^{-1} (\Delta y_i - \mu_i \lambda) \right] \exp \left[ -\frac{(\mu_i - \mu_\mu)^2}{2\sigma_\mu^2} \right] \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\lambda^T \Upsilon^{-1}(\psi, \eta) \lambda}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_\mu^2} \right) \mu_i^2 - \left( \frac{\Delta y_i^T \Upsilon^{-1}(\psi, \eta) \lambda}{\sigma^2} + \frac{\mu_\mu}{\sigma_\mu^2} \right) \mu_i \right] \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

2 Maximum Likelihood Estimation  
3 Log-likelihood function (LLF)  
4 Posterior distribution

1 Joint PDF

در نتیجه برآوردهای  $\mu_\mu^{(k+1)}$  و  $\sigma_\mu^{2(k+1)}$  توسط روابط فوق به دست می‌آید. به طور مشابه، برای عبارت دوم، با تنظیم  $\partial \rho(\Theta | \Delta Y, \Theta^{(k)}) / \partial \sigma^2 = 0$  می‌توان برآورد از  $\sigma^{2(k+1)}$  را به صورت زیر بدست آورد:

$$\sigma^2 = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\Delta y_i^T \Upsilon^{-1}(\psi, \eta) \Delta y_i - 2\mu_i \Delta y_i^T \Upsilon^{-1}(\psi, \eta) \lambda + u_i \lambda^T \Upsilon^{-1}(\psi, \eta) \lambda}{(\psi, \eta) \lambda + u_i \lambda^T \Upsilon^{-1}(\psi, \eta) \lambda} \right) \quad (19)$$

همان طور که از رابطه فوق قابل مشاهده است  $\sigma^{2(k+1)}$  بستگی به برآوردهای  $\psi$  و  $\eta$  دارد. در نتیجه، با جایگزینی  $\mu_\mu^{(k+1)}$ ،  $\sigma_\mu^{2(k+1)}$  و  $\sigma^{2(k+1)}$  در  $\rho(\Theta | \Delta Y, \Theta^{(k)})$ ، تابع درست‌نمایی  $l(\psi, \eta | \Theta^{(k)})$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$l(\psi, \eta | \Theta^{(k)}) = C - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\ln |Y(\psi, \eta)| + m \ln \left( \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\Delta y_i^T \Upsilon^{-1}(\psi, \eta) \Delta y_i - 2\mu_i \Delta y_i^T \Upsilon^{-1}(\psi, \eta) \lambda + u_i \lambda^T \Upsilon^{-1}(\psi, \eta) \lambda}{(\psi, \eta) \lambda + u_i \lambda^T \Upsilon^{-1}(\psi, \eta) \lambda} \right) \right)] \quad (20)$$

برآورد  $\psi^{(k+1)}$  و  $\eta^{(k+1)}$  را می‌توان با حداکثررساندن تابع درست‌نمایی بالا به دست آورد. سپس با جایگزینی  $\psi^{(k+1)}$  و  $\eta^{(k+1)}$  در رابطه  $\sigma^2$  می‌توان برآورد  $\sigma^2$  را در مرحله  $k+1$  به دست آورد. علاوه بر این، برآورد درست‌نمایی بیشینه از  $\sigma_\epsilon$  را می‌توان با استفاده از رابطه  $\psi = \sigma_\epsilon^2 / \sigma$  به دست آورد [۱۷].

### ۳-۲- فرایند وینر با اثرات تصادفی<sup>۱</sup>

میزان آسیب مشاهده شده برای نمونه‌ها ممکن است به دلیل عدم یکسان و ثابت بودن عوامل درونی و بیرونی موثر بر فرآیند بسیار متنوع باشد. مدل‌های اثرات تصادفی برای مطالعه این عوامل مورد استفاده قرار می‌گیرند. اولین اثر تصادفی مدل فرآیند وینر برای تخریب را پنگ و چنگ [۱۸] پیشنهاد داده‌اند. آن‌ها فرض کردند که نمونه‌های مختلف دارای پارامتر راندگی مختلف  $\mu$  هستند در حالی که همه نمونه‌ها پارامتر نوسان‌پذیری مشابه  $\sigma$  را دارند.

$$\propto \exp \left\{ - \frac{\left[ \frac{\mu_i - (\Delta y_i^T \Upsilon^{-1}(\psi, \eta) \lambda \sigma_\mu^2 + \mu_\mu \sigma^2)}{\sigma^2} \right]^2}{2\sigma^2 \sigma_\mu^2 / (\lambda^T \Upsilon^{-1}(\psi, \eta) \lambda \sigma_\mu^2 + \sigma^2)} \right\} \propto N(\mu_i, \sigma_i^2)$$

که

$$\mu_i = \frac{\Delta y_i^T \Upsilon^{-1}(\psi, \eta) \lambda \sigma_\mu^2 + \mu_\mu \sigma^2}{\lambda^T \Upsilon^{-1}(\psi, \eta) \lambda \sigma_\mu^2 + \sigma^2} \quad (15)$$

$$\sigma_i^2 = \frac{\sigma^2 \sigma_\mu^2}{\lambda^T \Upsilon^{-1}(\psi, \eta) \lambda \sigma_\mu^2 + \sigma^2}$$

و ممان دوم  $\mu_i$  به شرط  $\Delta Y_i > 0$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$u_i = E(\mu_i^2 | \Delta Y_i) = D(\mu_i | \Delta Y_i) + [E(\mu_i | \Delta Y_i)]^2 = \sigma_i^2 + \mu_i^2 \quad (16)$$

در ادامه، از الگوریتم امید ریاضی- بیشینه‌کردن برای یافتن برآورد درست‌نمایی بیشینه  $\Theta$  استفاده می‌شود. اگر  $\Theta = (\mu_\mu^{(k)}, \sigma_\mu^{2(k)}, \sigma^{2(k)}, \psi^{(k)}, \eta^{(k)})$  برآورد  $\Theta$  در مرحله  $k$ ام باشد، به طور خاص، در گام  $E$ ، امید ریاضی  $\rho(\Theta | \Delta Y, \Theta^{(k)})$  برابر است با  $l(\Theta | \Delta Y, \Omega)$  و به صورت زیر است:

$$\rho(\Theta | \Delta Y, \Theta^{(k)}) = E[l(\Theta | \Delta Y, \Omega)] = C - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{u_i - 2\mu_i \mu_\mu + \mu_\mu^2}{\sigma_\mu^2} + \ln \sigma_\mu^2 + 2 \ln \Phi \left( \frac{\mu_\mu}{\sigma_\mu} \right) \right] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\Delta y_i^T \Upsilon^{-1}(\psi, \eta) \Delta y_i - 2\mu_i \Delta y_i^T \Upsilon^{-1}(\psi, \eta) \lambda + u_i \lambda^T \Upsilon^{-1}(\psi, \eta) \lambda}{\sigma^2} + \ln |Y(\psi, \eta)| + m \ln \sigma^2 \right] \quad (17)$$

در رابطه فوق اولین عبارت فقط به متغیرهای  $\mu_\mu$  و  $\sigma_\mu$  بستگی دارد و عبارت دوم تنها به  $\sigma^2$ ،  $\psi$  و  $\eta$  است. به همین دلیل می‌توان پارامترهای به‌روزشده را در مرحله  $M$  برآورد نمود. با در نظر گرفتن مشتقات جزئی اول  $\rho(\Theta | \Delta Y, \Theta^{(k)})$  به ترتیب نسبت به  $\mu_\mu$  و  $\sigma_\mu$  و با صفر قراردادن هر مقدار مشتق شده، داریم:

$$\mu_\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i, \quad \sigma_\mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i - \mu_\mu^2 \quad (18)$$

ناشناخته باشد، جایی که  $\eta$  پارامتری در  $\Lambda(t)$  است و  $\Omega = \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$  که در این حالت ناشناخته است، در این صورت با توجه به داده‌های کامل از جمله  $\Delta X$  و  $\Omega$ ، تابع درست‌نمایی بیشینه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$l(\Theta | \Delta Y, \Omega) = C - \frac{m\mu}{2} \ln \zeta^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ \ln \sigma^2 + \frac{(\kappa_i - \mu_\kappa)^2}{\sigma^2} + \sum_{j=1}^m \ln \lambda_{ij} + \frac{1}{\zeta^2} \sum_{j=1}^m \frac{(\kappa_i \Delta x_{ij} - \lambda_{ij})^2}{\lambda_{ij}} \right] \quad (25)$$

برای برآورد پارامترهای ناشناخته در رابطه فوق از الگوریتم امید ریاضی- بیشینه‌کردن استفاده می‌شود. بنابراین در راستای محاسبه امید ریاضی تابع لگاریتمی درست‌نمایی فوق، باید ممان اول و دوم  $\kappa_i$  به شرط  $\Delta X_i$  محاسبه شود. با توجه به قضیه بیزین:

$$p(\kappa_i | \Delta X_i) \propto \zeta_i^m \exp \left[ -\frac{(\kappa_i - \tilde{\mu}_\kappa)^2}{2\tilde{\sigma}_\kappa^2} \right] \quad (26)$$

$$\tilde{\sigma}_\kappa^2 = \left( \frac{1}{\sigma_\kappa^2} + \sum_{j=1}^m \frac{(\Delta x_j)^2}{\zeta^2 \lambda_j} \right) \quad (27)$$

$$\tilde{\mu}_\kappa = \tilde{\sigma}_\kappa^2 \left( \frac{\mu_\kappa}{\sigma_\kappa^2} + \frac{1}{\zeta^2} \sum_{j=1}^m \Delta x_j \right)$$

بنابراین ممان اول و دوم  $\kappa_i$  به شرط  $\Delta X_i$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$u_i = E(\kappa_i | \Delta Y_i) = \frac{C(m+1; \tilde{\mu}_\kappa, \tilde{\sigma}_\kappa^2)}{C(m; \tilde{\mu}_\kappa, \tilde{\sigma}_\kappa^2)} \quad (28)$$

$$v_i = E(\kappa_i^2 | \Delta Y_i) = \frac{C(m+2; \tilde{\mu}_\kappa, \tilde{\sigma}_\kappa^2)}{C(m; \tilde{\mu}_\kappa, \tilde{\sigma}_\kappa^2)}$$

که پارامتر  $C$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(n; a, b) = \sum_{j=0}^n C_n^j a^{n-j} V_j(b) \quad (29)$$

$$V_j(b) = \begin{cases} 0 & j \text{ odd} \\ b^j (j-1) & j \text{ even} \end{cases}$$

در ادامه، از الگوریتم امید ریاضی- بیشینه‌کردن برای یافتن برآورد درست‌نمایی بیشینه  $\Theta$  استفاده می‌شود. اگر

۲-۳-۱- مدل‌سازی تخریب و ارزیابی قابلیت اطمینان با اثرات تصادفی مدل‌های زیادی برای مدل‌سازی تخریب با اثرات تصادفی پیشنهاد شده است که یکی از این مدل‌ها به صورت زیر می‌باشد [۳]:

$$X(t) = \mu \Lambda(t) + \zeta \mu B(\Lambda(t)) \quad (21)$$

در مقایسه با مدل پایه وینر، دیده می‌شود که  $\sigma = \zeta \mu$ . اگر فرض شود که  $\kappa = 1/\mu$  از توزیع نرمال پیروی می‌کند ( $\kappa \sim N(\mu_\kappa, \sigma_\kappa^2)$ )، تابع چگالی احتمال بدون قید و شرط  $T$  می‌تواند توسط رابطه زیر بیان شود:

$$f_T(t) = -\frac{dR_T(t)}{dt} = \frac{(h\sigma_\kappa^2 + \mu_\kappa \zeta^2) \Lambda(t)}{\sqrt{2\pi[h^2\sigma_\kappa^2 + \zeta^2 \Lambda(t)]^3}} \exp\left(-\frac{(\mu h - \Lambda(t))^2}{2(\zeta^2 \Lambda(t) + \sigma_\kappa^2 h^2)}\right) \frac{d\Lambda(t)}{dt} \quad (22)$$

### ۲-۳-۲- استنتاج آماری

فرض کنید که فرایندهای تخریب برای  $n$  نمونه بررسی شده و  $m$  تعداد بازرسی‌ها  $(t_1, \dots, t_m)$ ، و میزان آسیب برابر  $\{X_i(t_j) = x_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$  است. که بر اساس فرم فرآیند وینر با اثرات تصادفی، فرایند تخریب مشاهده‌شده برای واحد  $i$ ام می‌تواند به صورت  $X_i(t_j) = \mu_i \Lambda(t_j) + \mu_i \zeta B(\Lambda(t_j))$  بیان شود. از طرفی می‌توان برای نمونه  $i$ ام تعاریف زیر را بیان کرد:

$$\Delta x_{i,1} = x_{i,1}$$

$$\lambda_1 = \Lambda(t_1)$$

$$\Delta x_{ij} = x_{i,j} - x_{i,j-1}, \quad j = 2, 3, \dots, m$$

$$\lambda_j = \Lambda(t_j) - \Lambda(t_{j-1}), \quad j = 2, 3, \dots, m \quad (23)$$

برای سهولت، اولین تفاوت مشاهدات تخریب برای نمونه  $i$ ام توسط  $\Delta X_i = \{\Delta x_{i,1}, \dots, \Delta x_{i,m}\}$  نشان داده شده است و اولین تفاوت مشاهدات تخریب برای تمام نمونه‌های  $n$ ، توسط  $\Delta X = \{\Delta X_1, \dots, \Delta X_n\}$  به دست می‌آید. برای پارامتر ثابت  $\kappa_i$ ، تابع چگالی احتمال برابر است با:

$$f(\Delta X_i | \kappa_i) = C \kappa_i^m \exp \left( -\frac{1}{2\zeta^2} \sum_{j=1}^m \frac{(\kappa_i \Delta x_j - \lambda_j)^2}{\lambda_j} - \frac{(\kappa_i - \mu_\kappa)^2}{2\sigma_\kappa^2} \right) \quad (24)$$

اگر فرض شود که  $\Theta = (\mu_\kappa, \sigma_\kappa^2, \zeta, \eta)$  بردار تمام پارامترهای

### ۳- مدل پایه فرایند گاما

عبدالحمید [۱۹] ابتدا فرایند گاما را به عنوان یک مدل مفید برای مدل‌سازی فرایندهای تخریب و آسیب پیشنهاد کرد. استفاده از فرایند گاما، زمانی که آسیب تدریجی به طور همزمان افزایش یا کاهش می‌یابد، مانند خستگی، خوردگی و رشد ترک مناسب است [۲۰، ۲۱]. استفاده از فرایند گاما برای مدل‌سازی تخریب به عنوان یک تفسیر فیزیکی محبوب است و نمایش ریاضی آن ساده است. علاوه بر این، تنوع زمانی فرایند تخریب را نیز در نظر می‌گیرد.

#### ۳-۱- مدل‌سازی تخریب با فرایند پایا گاما

اگر  $L(t)$  نشان‌دهنده فرایند گسترش آسیب و تخریب باشد، که در آن  $t > 0$ ، و در لحظه صفر مقدار آن  $L(0) = 0$  است، در این صورت گفته می‌شود که فرایند تخریب از فرایند گاما پیروی می‌کند اگر دارای خواص مذکور باشد: (۱) دارای افزایش غیرمنفی مستقل است، به این معنا که  $\Delta L(t) = L(t + \Delta t) - L(t)$  مستقل از  $L(t)$  است، (۲) برای یک تابع افزایشی یکنواخت  $\eta(t)$ ،  $\Delta L(t)$  از توزیع گاما پیروی می‌کند، به عبارتی  $\Delta L(t) \sim Ga(\beta, \Delta \eta(t))$  که  $\Delta \eta(t) = \eta(t + \Delta t) - \eta(t)$  و  $\beta$  به ترتیب تابع شکل و مقیاس توزیع گاما هستند. در این صورت تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر بیان می‌شود [۲۲]:

$$f_{\Delta L(t)}(y) = \frac{y^{\Delta \eta(t)-1} \exp(-\frac{y}{\beta})}{\beta^{\Delta \eta(t)} \Gamma(\Delta \eta(t))} \quad y > 0 \quad (34)$$

و میانگین و واریانس توزیع گاما به ترتیب عبارتند از [۲۲]:

$$\begin{aligned} E(L(t)) &= \eta(t)\beta \\ Var(L(t)) &= \eta(t)\beta^2 \end{aligned} \quad (35)$$

طبق تعریف (رابطه (۴))، طول عمر  $T$  برابر است با:

$$T = \inf \{t | L(t) \geq \omega\} \quad (36)$$

از آنجا که  $L(t)$  موکداً با زمان  $t$  افزایش می‌یابد، تابع توزیع

تجمعی  $T$  را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(L(t) \geq \omega) = \frac{\Gamma(\eta(t), \omega/\beta)}{\Gamma(\eta(t))} \quad (37)$$

$\Theta = (\mu_k^{(k)}, \sigma_k^{2(k)}, \zeta^{2(k)}, \eta^{(k)})$  برآورد  $\Theta$  در مرحله  $k$ ام باشد، به طور خاص، در گام  $E$ ، امید ریاضی  $\wp(\Theta | \Delta Y, \Theta^{(k)})$  از  $l(\Theta | \Delta Y, \Omega)$  نسبت به  $\Omega$  محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \wp(\Theta | \Delta Y, \Theta^{(k)}) &= E[l(\Theta | \Delta X, \Omega)] = \\ &= C - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ \ln \sigma_k^2 + \frac{v_i - 2\mu_k u_i + \mu_k^2}{\sigma_k^2} \right] - \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ m \ln \zeta^2 + \sum_{j=1}^m \ln \lambda_{ij} + \frac{1}{\zeta^2} \sum_{j=1}^m \frac{v_i (\Delta x_{ij})^2 - 2\lambda_{ij} u_i \Delta x_{ij} + \lambda_{ij}^2}{\lambda_{ij}} \right] \end{aligned} \quad (30)$$

در رابطه فوق اولین عبارت فقط به  $\mu_k$  و  $\sigma_k$  بستگی دارد و عبارت دوم تنها با  $\zeta^2$  مرتبط است. به همین دلیل می‌توان برآوردهای پارامترهای به‌روزرشده را در مرحله  $M$  به دست آورد. با در نظر گرفتن مشتقات جزئی اول  $\wp(\Theta | \Delta Y, \Theta^{(k)})$  به ترتیب نسبت به  $\mu_k$  و  $\sigma_k$  و با صفر قراردادن هر مقدار مشتق شده، خواهیم داشت:

$$\mu_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i, \quad \sigma_k^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i - \mu_k^2 \quad (31)$$

در نتیجه برآوردهای  $\mu_{\mu}^{(k+1)}$  و  $\sigma_{\mu}^{2(k+1)}$  توسط روابط فوق به دست می‌آید. به طور مشابه، برای عبارت دوم، با تنظیم  $\partial \wp(\Theta | \Delta Y, \Theta^{(k)}) / \partial \zeta^2 = 0$  می‌توان برآورد  $\sigma^{2(k+1)}$  را به صورت زیر به دست آورد:

$$\zeta^2 = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{v_i (\Delta x_{ij})^2 - 2\lambda_{ij} u_i \Delta x_{ij} + \lambda_{ij}^2}{\lambda_{ij}} \quad (32)$$

$\zeta^{2(k+1)}$  بستگی به برآوردهای  $\eta$  دارد که در نتیجه، با جایگزینی  $\zeta^{2(k+1)}$  در عبارت دوم  $\wp(\Theta | \Delta Y, \Theta^{(k)})$ ، تابع درست‌نمایی  $l(\eta | \Theta^{(k)})$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$l(\eta | \Theta^{(k)}) = C - \frac{1}{2} \left[ \ln \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{v_i (\Delta x_{ij})^2 - 2\lambda_{ij} u_i \Delta x_{ij} + \lambda_{ij}^2}{\lambda_{ij}} \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \ln \lambda_{ij} \right] \quad (33)$$

برآورد  $\eta^{(k+1)}$  را می‌توان با حداکثر ساندن تابع درست‌نمایی بالا به دست آورد. سپس با جایگزینی  $\eta^{(k+1)}$  در رابطه  $\zeta^2$  می‌توان برآورد  $\zeta^2$  را در مرحله  $k+1$  به دست آورد.

جدول ۱. توزیع اندازه‌های ترک (میلی‌متر) [۹]  
**Table 1. Distribution of crack sizes (mm)**

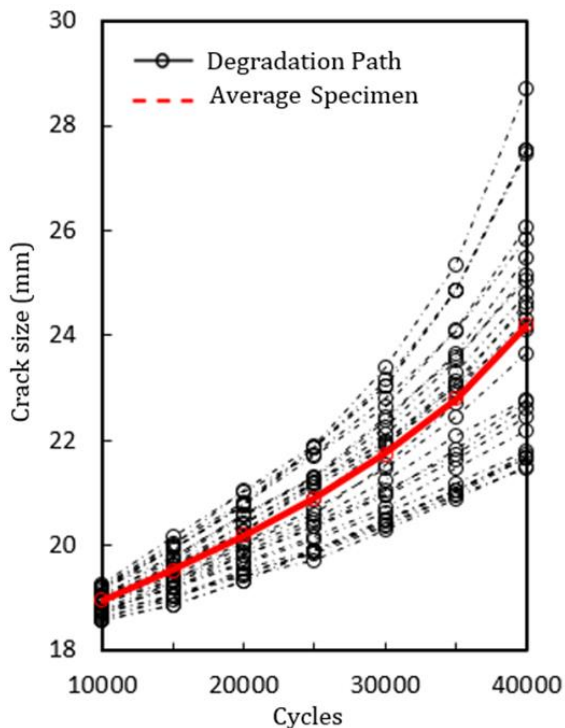
سیکل							نمونه
۴۰۰۰۰	۳۵۰۰۰	۳۰۰۰۰	۲۵۰۰۰	۲۰۰۰۰	۱۵۰۰۰	۱۰۰۰۰	
۲۱/۷۳	۲۱/۰۵	۲۰/۴۵	۱۹/۸۹	۱۹/۴۴	۱۹/۰۲	۱۸/۶۰	۱
۲۲/۷۳	۲۱/۸۴	۲۱/۰۰	۲۰/۳۷	۱۹/۸۱	۱۹/۲۰	۱۸/۷۶	۲
۲۵/۸۳	۲۴/۰۹	۲۲/۸۰	۲۱/۷۴	۲۰/۰۳	۲۰/۱۶	۱۹/۲۵	۳
۲۶/۰۵	۲۴/۱۰	۲۲/۶۶	۲۱/۷۱	۲۰/۷۸	۱۹/۹۴	۱۹/۱۴	۴
۲۵/۰۵	۲۳/۵۸	۲۲/۴۶	۲۱/۳۲	۲۰/۵۸	۱۹/۷۷	۱۹/۱۹	۵
۲۴/۵۳	۲۳/۱۴	۲۱/۹۶	۲۱/۲۱	۲۰/۴۱	۱۹/۶۵	۱۹/۰۱	۶
۲۶/۵۳	۲۴/۳۶	۲۲/۸۳	۲۱/۶۱	۲۰/۸۴	۱۹/۸۰	۱۹/۲۸	۷
۲۱/۶۷	۲۰/۹۹	۲۰/۴۰	۱۹/۹۱	۱۹/۵۴	۱۸/۹۸	۱۸/۶۳	۸
۲۷/۹۳	۲۵/۳۳	۲۳/۵۰	۲۲/۳۴	۲۱/۱۲	۲۰/۱۶	۱۹/۴۶	۹
۲۱/۵۱	۲۰/۸۸	۲۰/۳۰	۱۹/۷۱	۱۹/۴۱	۱۹/۰۳	۱۸/۷۳	۱۰
۲۲/۴۵	۲۱/۶۳	۲۰/۹۶	۲۰/۳۵	۱۹/۸۰	۱۹/۲۸	۱۸/۸۰	۱۱
۲۷/۵۳	۲۴/۸۶	۲۳/۰۳	۲۱/۸۵	۲۰/۷۵	۱۹/۹۶	۱۹/۱۸	۱۲
۲۴/۱۶	۲۲/۷۱	۲۱/۵۵	۲۰/۵۹	۲۰/۰۳	۱۹/۳۴	۱۸/۶۶	۱۳
۲۴/۵۸	۲۳/۰۰	۲۱/۹۹	۲۱/۲۴	۲۰/۳۷	۱۹/۹۱	۱۹/۳۲	۱۴
۲۱/۶۸	۲۱/۰۴	۲۰/۵۰	۱۹/۹۲	۱۹/۳۴	۱۸/۸۸	۱۸/۵۸	۱۵
۲۵/۱۶	۲۳/۵۱	۲۲/۲۷	۲۱/۲۹	۲۰/۵۷	۱۹/۷۱	۱۹/۰۵	۱۶
۲۴/۶۳	۲۳/۰۴	۲۲/۰۱	۲۱/۱۷	۲۰/۴۴	۱۹/۵۶	۱۹/۰۵	۱۷
۲۴/۱۱	۲۳/۰۶	۲۱/۸۹	۲۱/۱۲	۲۰/۲۸	۱۹/۶۳	۱۸/۹۵	۱۸
۲۲/۷۸	۲۲/۰۹	۲۱/۲۵	۲۰/۵۱	۱۹/۹۹	۱۹/۳۷	۱۸/۸۹	۱۹
۲۱/۴۶	۲۰/۹۶	۲۰/۳۶	۱۹/۸۶	۱۹/۴۹	۱۹/۰۷	۱۸/۷۱	۲۰
۲۴/۳۲	۲۲/۹۵	۲۱/۹۲	۲۰/۸۹	۲۰/۲۱	۱۹/۵۳	۱۹/۰۲	۲۱
۲۱/۸۰	۲۱/۱۷	۲۰/۶۲	۲۰/۱۰	۱۹/۶۴	۱۹/۲۰	۱۸/۷۷	۲۲
۲۳/۶۵	۲۲/۴۴	۲۱/۴۸	۲۰/۷۰	۲۰/۰۷	۱۹/۴۱	۱۸/۹۲	۲۳
۲۲/۱۹	۲۱/۴۶	۲۰/۷۱	۲۰/۱۷	۱۹/۶۷	۱۹/۲۳	۱۸/۷۵	۲۴
۲۴/۸۰	۲۳/۳۱	۲۲/۱۲	۲۱/۱۸	۲۰/۲۸	۱۹/۶۳	۱۸/۹۶	۲۵
۲۷/۴۶	۲۴/۸۷	۲۳/۱۵	۲۱/۸۷	۲۰/۸۲	۲۰/۰۴	۱۹/۲۳	۲۶
۲۳/۱۱	۲۲/۰۲	۲۱/۲۸	۲۰/۶۰	۱۹/۹۱	۱۹/۳۵	۱۸/۸۱	۲۷
۲۲/۶۰	۲۱/۴۷	۲۰/۰۶	۲۰/۴۴	۱۹/۸۷	۱۹/۳۲	۱۸/۹۱	۲۸
۲۵/۴۷	۲۳/۶۴	۲۲/۳۸	۲۱/۲۷	۲۰/۵۸	۱۹/۷۷	۱۹/۰۴	۲۹
۲۸/۶۹	۲۵/۳۴	۲۳/۳۹	۲۱/۹۰	۲۱/۰۴	۲۰/۰۰	۱۹/۱۹	۳۰

۳-۲- استنتاج آماری

فرض کنید که فرایندهای تخریب برای  $n$  نمونه بررسی شده و در  $m$  تعداد بازرسی‌ها  $(t_1, \dots, t_m)$ ، میزان آسیب نمونه  $i$  ام

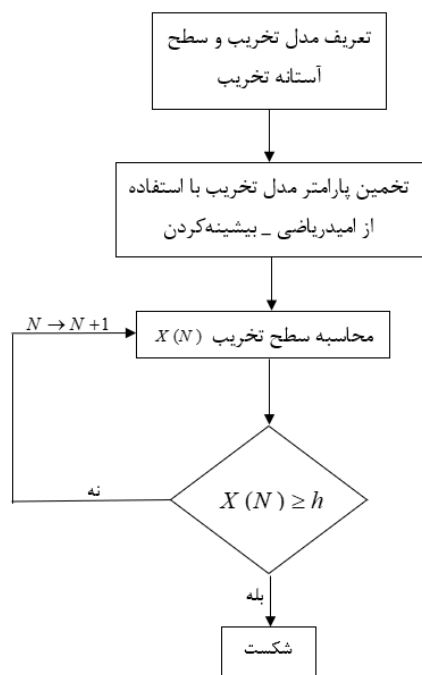
$$\Gamma(a, z) = \int_z^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad (38)$$

که



شکل ۱. مسیرهای رشد ترک خستگی از ۲۸ نمونه آزمایشی

Fig. 1. Fatigue crack growth paths of 28 testing units



شکل ۲. الگوریتم ارزیابی شکست با استفاده از فرایندهای تخریب

Fig. 2. Flowchart of failure evaluation with degradation process

همچنین مدل پایه گاما با یکدیگر مقایسه خواهند شد و پارامترهای استفاده شده در هر یک از این مدل‌ها در جدول ۲ آورده شده است.

در زمان  $t_j$  را نشان می‌دهد، که  $1 \leq j \leq m$  و  $1 \leq i \leq n$ . اگر  $\theta$  یک مدل بردار پارامتر مجهول باشد، آنگاه  $Y_{ij} = L_i(t_j) - L_i(t_{j-1})$  و  $\Delta\eta(t_j) = \eta(t_j) - \eta(t_{j-1})$  سپس، تابع درست‌نمایی برای فرایند گاما، به صورت زیر بیان شود:

$$l(\theta) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{y_{ij}^{\Delta\eta(t_j)-1}}{\Gamma(\Delta\eta(t_j)) \beta^{\Delta\eta(t_j)}} \exp\left(-\frac{y_{ij}}{\beta}\right) \quad (39)$$

#### ۴- تعیین $\Lambda(t)$

برای استفاده از مدل‌های فوق برای مدل‌سازی و پیش‌بینی رشد آسیب و تخریب باید پارامترهای موجود در مدل‌های فوق از طریق تجزیه و تحلیل داده‌های حاصل از آزمون‌ها و نتایج تجربی محاسبه شود. در ابتدا باید، بر اساس دانش قبلی یا فیزیک خرابی یک فرم پارامتریک برای  $\Lambda(t)$  تعیین شود. برای مثال در بررسی گسترش ترک ناشی از خستگی، تجربه نشان می‌دهد که رشد ترک تابعی از زمان استفاده  $t$  است. ولی اگر هیچ اطلاعاتی از قبل در مورد وجود نداشته باشد، باید از حد میانگین نمونه‌های تست برای به‌دست‌آوردن تخمین میانگین مسیر خرابی استفاده نمود.

#### ۵- آنالیز عددی

وو نی [۹] آزمایشی برای بررسی رشد ترک خستگی برای قطعاتی از جنس آلومینیوم T351-2024 انجام دادند. در این آزمایش، ۳۰ نمونه با طول ترک اولیه تحت آزمون خستگی قرار می‌گیرند. افزایش طول ترک هر نمونه پس از ۱۰۰۰۰ سیکل اول اندازه‌گیری و سپس، پس از هر ۵۰۰۰ سیکل تا ۴۰۰۰۰ سیکل اندازه‌گیری شد که داده‌های این آزمایش‌ها در جدول ۱ ارائه شده است. در مقاله حاضر از داده‌های تجربی آن‌ها استفاده شده و ۲۸ نمونه برای برآورد پارامترهای مدل و از دو نمونه (نمونه‌های ۷ و ۲۷) که به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند (فرض شده است که فقط ۲۸ نمونه وجود دارد و دو نمونه دیگر صرفاً برای صحت پیش‌بینی مدل استفاده شده است) برای بررسی صحت و درستی مدل پیشنهادی استفاده می‌شود. مقادیر و اندازه ترک در نمونه‌های مختلف در شکل ۱ نشان داده شده است.

الگوریتم ارزیابی شکست استفاده شده برای شبیه‌سازی فرایند تخریب در شکل ۲ نشان داده شده است. در این مطالعه عملکرد مدل پایه وینر، مدل وینر با خطای اندازه‌گیری، مدل پایه با اثرات تصادفی و

جدول ۲. پارامترهای مدل‌های تخریب

Table 2. Parameters of degradation models

انحراف معیار	میانگین	نوع توزیع	پارامتر
-	-	ثابت	آستانه شکست مدل پایه ( $h$ )
-	-	ثابت	میانگین مدل پایه ( $\mu$ )
-	-	ثابت	نوسان‌پذیری مدل پایه ( $\sigma$ )
-	-	ثابت	مقیاس ( $\beta$ )
$\sigma_\varepsilon$	صفر	نرمال	خطای اندازه‌گیری ( $\varepsilon$ )
$\sigma_\varepsilon$	$h$	نرمال	آستانه شکست مدل با خطای اندازه‌گیری ( $h_e$ )
$\sigma_\varepsilon$	$\mu_\mu$	نرمال	میانگین مدل با خطای اندازه‌گیری ( $\mu$ )
-	-	ثابت	ثابت اثرات تصادفی ( $\zeta$ )
$\sigma_\kappa$	$\mu_\kappa$	نرمال	معکوس میانگین ( $\kappa$ )
-	-	ثابت	پارامتر ثابت زمانی ( $\eta$ )

جدول ۳. تخمین درست‌نمایی بیشینه از ۴ مدل پیشنهادی برای داده‌های رشد ترک

Table 3. MLEs of 4 different Wiener process models for the crack growth data

معیار اطلاعات آکایک	تخمین درست‌نمایی بیشینه	مدل
۱۸۴/۱۱	$\mu = 0.0219, \sigma = 0.0578, \eta = 1/5$	پایه وینر
۲۳۰/۲۷	$\beta = 38/45, \eta = 1/57$	پایه گاما
-۱۵/۶۳	$\mu_\mu = 38/79, \sigma_\mu = 11/33, \sigma = 0.0484, \sigma_\varepsilon = 2/11 \times 10^{-12}, \eta = 1/41$	وینر با خطای اندازه‌گیری
-۳/۹۹	$\mu_\kappa = 35/11, \sigma_\kappa = 10/96, \zeta = 1/27, \eta = 1/44$	وینر با اثرات تصادفی

مورد مطالعه براساس داده‌های موجود است. همان‌طور که در جدول ۳ نشان داده‌شده، در کل مدل وینر فرآیند رشد ترک خستگی را بهتر از مدل گاما مدل‌سازی می‌کند. در بین مدل‌های وینر، مدل با خطای اندازه‌گیری، با داده‌های موجود بهتر سازگار است. در مدل وینر با خطای اندازه‌گیری اثرات تصادفی هم در نظر گرفته شده است که این مدل نسبت به مدل وینر با اثرات تصادفی نتایج بهتری را ارائه می‌کند. میانگین مسیر و مقادیر رشد ترک برای نمونه‌های تجربی با مسیرهای تخمین‌زده‌شده توسط مدل‌های مذکور در شکل ۳ ارائه شده است.

برای بررسی صحت فرضیه قانون توان رابطه نمایی تابع  $\Lambda(t)$ ، می‌بایست مقیاس زمانی آزمایش به  $t^b$  تبدیل شود. همان‌طور که در شکل ۴ نشان داده شده میزان تخریب مشاهده‌شده در مقیاس زمانی تبدیل‌شده همراه با مسیرهای تخمین‌زده‌شده برای آسیب ترسیم شده است. همچنین مسیر متوسط نمونه و مسیر متوسط برآوردشده براساس مدل فرآیند وینر، در مقیاس زمانی تبدیل‌شده ترسیم شده

با توجه به این‌که فرآیند رشد ترک مشابه روابط توانی است و فرم کلی نمایی است، می‌توان تابع  $\Lambda(t)$  را به صورت  $t^b$  در نظر گرفت که  $\eta = b$ . در نتیجه با قراردادن آن در توابع چگالی احتمال و استفاده از روش تخمین بیشینه درست‌نمایی که در قسمت قبل ذکر شد، پارامترهای محاسبه شده به صورت جدول ۳ است:

برای انتخاب مناسب‌ترین مدل از بین مدل‌های فوق، در این مطالعه از معیار اطلاعات آکایک که به شرح زیر است، استفاده می‌شود:

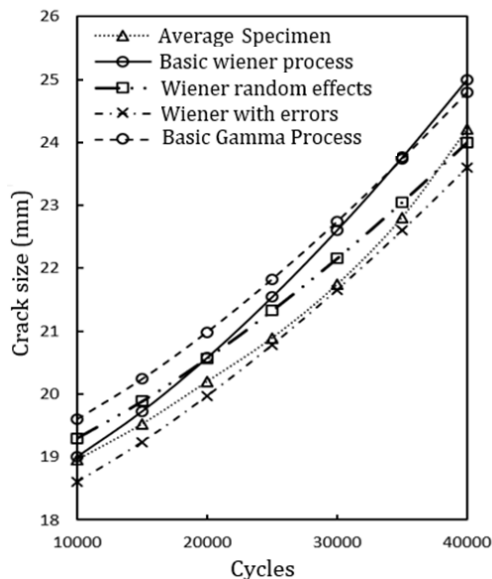
$$AIC = -2L(S) + 2P \quad (40)$$

که  $L(S)$  مقدار لگاریتم تابع درست‌نمایی،  $P$  تعداد پارامترها و  $S$  تعداد مشاهدات می‌باشد. معیار فوق بیانگر سازگاری داده‌ها با مدل است و مدلی بهتر است که کمترین مقدار  $AIC$  را داشته باشد. بدین منظور برای داده‌های شکست این معیار برای مدل‌های متفاوت برآورد و مقایسه می‌شوند. جدول ۳ بیانگر معیارهای آکایک برای مدل‌های

تخریب با داده‌های تجربی در جدول ۴ مقایسه شده و میزان رشد ترک پیش‌بینی شده نیز در در شکل ۵ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، مسیر تخمین زده شده نسبت به داده‌های تجربی دارای اختلاف اندکی است و ماکزیمم خطا ۲/۲ درصد است. در این حالت سیکل بارگذاری و میزان ترک در یک نمونه به عنوان ورودی داده شده و مقادیر اندازه ترک در زمان‌های آتی محاسبه شده است. برای آزمون نیکویی برازش<sup>۱</sup> تابع توزیع تجمعی<sup>۲</sup> تجربی زمان شکست از روش کاپلان \_ مایر<sup>۳</sup> استفاده می‌شود. اگر گسترش ترک ناشی از خستگی از فرآیند وینر پیروی کند، همان‌طور که قبلاً گفته شده است، زمان شکست (زمان اولین ضربه برای تعریف عمر سیستم  $h$ ) از توزیع گاوسی معکوس پیروی می‌کند که در این مطالعه از مقدار آستانه  $h = 20/5$  استفاده شده است. مدل وینر با اثرات تصادفی و مقادیر مربوط به احتمال شکست محاسبه شده با روش کاپلان \_ مایر (مبتنی بر داده‌های آزمایشات) در شکل ۶ نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود در ۵ هزار سیکل آخر که به شکست نمونه نزدیک می‌شود مدل وینر پایه با داده‌های تجربی اختلاف بیشتری دارد، در حالی که در شکل ۷ اختلاف بین مدل وینر با خطای اندازه‌گیری و داده‌های حاصل از کاپلان \_ مایر کم است که نشان می‌دهد این مدل با داده‌های خستگی نمونه مذکور سازگاری بهتری دارد.

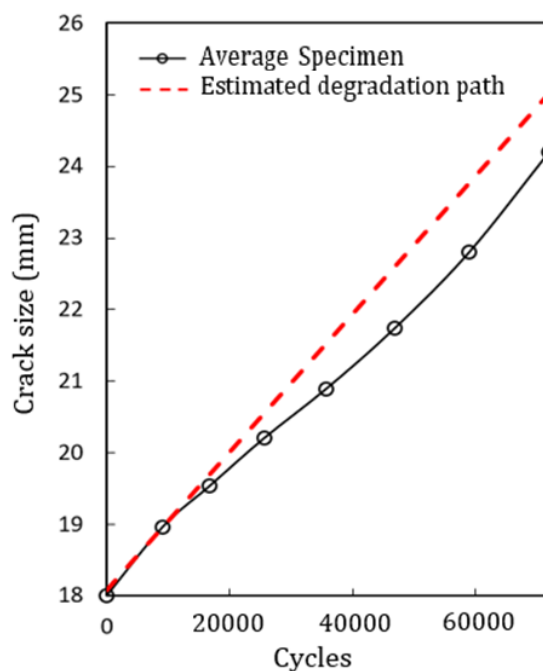
### ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، قابلیت‌اطمینان یک نمونه آلومینیومی تحت بار خستگی با استفاده از فرایندهای تخریب بررسی شده است. فرایندهای تخریب دارای مدل‌های زیادی است که در این مقاله از وینر با خطاهای اندازه‌گیری و اثرات تصادفی و فرایند گاما پایه استفاده شده است. در هر یک از فرایندها عبارات فرم بسته تابع چگالی احتمال عمر و تابع قابلیت‌اطمینان نیز به طور دقیق آورده شده است و پارامترهای مجهول فرآیند نیز در استنتاج آماری، با استفاده از روش‌های مختلفی از جمله الگوریتم امید ریاضی- بیشینه‌کردن برآورد شده‌اند. سپس هر یک از مدل‌های مذکور را برای تجزیه و تحلیل داده‌های رشد ترک خستگی که در آن نمونه‌ها تحت شرایط مشابه آزمایش شده‌اند،



شکل ۳. میانگین مسیرهای پیش‌بینی شده رشد ترک خستگی

Fig. 3. Estimated mean paths based on fatigue crack growth



شکل ۴. مسیر تخمین زده شده در مقیاس زمانی تبدیل شده

Fig. 4. Estimated paths under the transformed time scale

است. شکل ۴ نشان می‌دهد که مقادیر مشاهدات تحت مقیاس زمانی تبدیل شده تقریباً خطی هستند، لذا فرض در نظر گرفته شده مبتنی بر قانون توان تقریباً مناسب است.

همان‌طور که قبلاً بیان شد برای صحت‌گذاری مدل حاصله از دو نمونه ۷ و ۲۷ برای پیش‌بینی و تقریب مسیر تخریب توسط فرایند وینر با اثرات تصادفی استفاده می‌شود. نتایج حاصل از این مدل

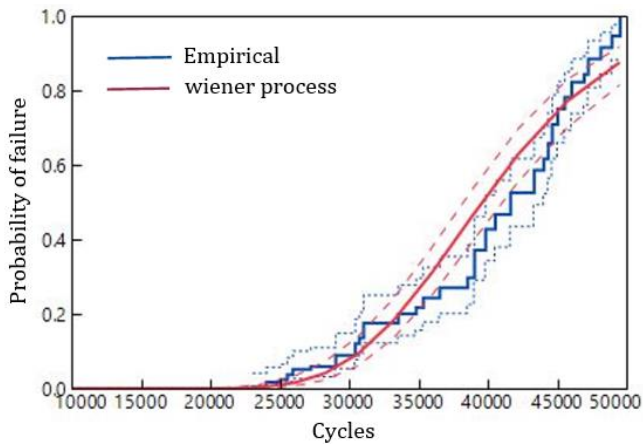
1 Goodness of fit  
2 Cumulative distribution function (cdf)  
3 Kaplan-Meier



جدول ۴. تقریب مسیر تخریب برای دو نمونه آزمایشی ۷ و ۲۷

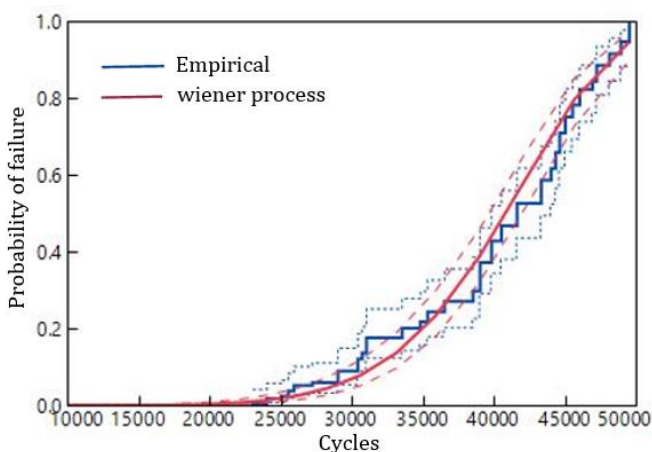
Table 4. Estimation of fatigue crack growth path of 2 testing units 7 and 27

سیکل							نمونه
۴۰۰۰۰	۳۵۰۰۰	۳۰۰۰۰	۲۵۰۰۰	۲۰۰۰۰	۱۵۰۰۰	۱۰۰۰۰	
۲۶/۵۳	۲۴/۳۶	۲۲/۸۳	۲۱/۶۱	۲۰/۸۴	۱۹/۸۰	۱۹/۲۸	تجربی
۲۶/۹۰	۲۴/۶۰	۲۲/۵۵	۲۱/۲۶	۲۰/۳۸	۱۹/۶۰	۱۹/۱۰	فرایند وینر
۱/۳۹	۰/۹۸	۱/۲۲	۱/۶۱	۲/۲۰	۱/۰۱	۰/۹۳	اختلاف (%)
۲۳/۱۱	۲۲/۰۲	۲۱/۲۸	۲۰/۶۰	۱۹/۹۱	۱۹/۳۵	۱۸/۸۱	تجربی
۲۳/۵۲	۲۲/۱۹	۲۱/۰۶	۲۰/۲۹	۱۹/۶۷	۱۹/۱۵	۱۸/۶۴	فرایند وینر
۱/۷۷	۰/۷۷	۱/۰۳	۱/۵۰	۱/۲۰	۱/۰۳	۰/۹۰	اختلاف (%)



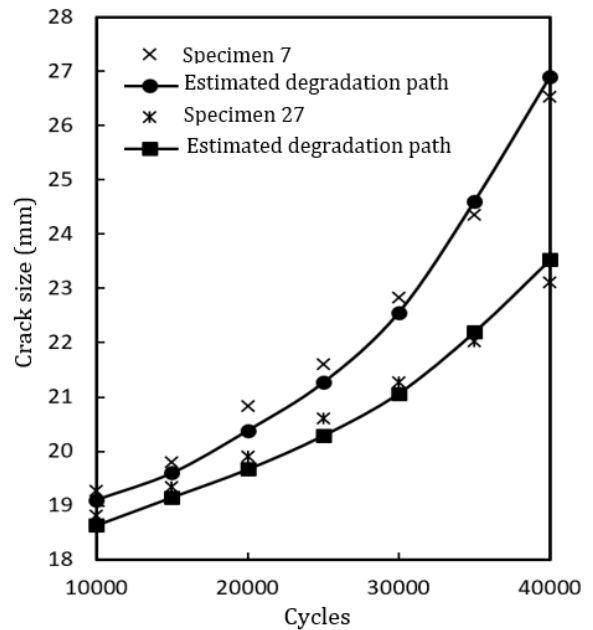
شکل ۶. مقایسه بین توزیع زمان شکست تخمین زده شده با استفاده از مدل وینر پایه و توزیع تجربی با اطمینان ۹۵٪

Fig. 6. Comparison between the estimated failure time distributions using the Wiener basic model and the empirical distribution with the 95% confidence band



شکل ۷. مقایسه بین توزیع زمان شکست تخمین زده شده با استفاده از مدل وینر با خطای اندازه گیری و توزیع تجربی با اطمینان ۹۵٪

Fig. 7. Comparison between the estimated failure time distributions using the Wiener model with measurement errors and the empirical distribution with the 95% confidence band



شکل ۵. مقایسه مسیر تخمین زده شده با داده های تجربی نمونه های ۷ و ۲۷

Fig. 5. Comparison between the estimated path and experimental data of units 7 and 27

بکار برده و نتایج حاصل از هر یک از فرایندهای تخریب با یکدیگر مقایسه شده است. نتایج نشان می دهد که از میان فرایند وینر و گاما، مدل وینر، فرآیند رشد ترک خستگی را بهتر از مدل گاما مدل سازی می کند و در بین مدل های مختلف وینر، مدل با خطای اندازه گیری، با داده های موجود بهتر سازگار است. در مدل وینر با خطای اندازه گیری اثرات تصادفی هم در نظر گرفته شده است، بنابراین این مدل نسبت به مدل وینر با اثرات تصادفی نتایج بهتری را هم دارا است. فرایندهای تخریب دارای مدل های دیگری غیر از آن چه که در این مطالعه بررسی شد، نیز هست. همچنین خود این مدل ها هم دارای دسته بندی های

متفاوت و زیادی هستند. بنابراین برای بررسی بیشتر می‌توان مطالعه مشابه را با استفاده از روش‌هایی همچون مسیر عمومی، معکوس گاوسی و ... انجام داد و با نتایج این مطالعه بررسی کرد. همچنین استفاده از تکنیک‌های یادگیری ماشین نظیر ماشین بردار پشتیبان و شبکه عصبی برای مدل‌سازی و بررسی نتایج آن توصیه می‌شود.

### فهرست علائم

#### علائم انگلیسی

$B$	حرکت برونی استاندارد
$E$	امید ریاضی
$f$	تابع چگالی احتمال
$h$	استانه شکست
$T$	عمر

#### علائم یونانی

$\beta$	مقیاس
$\mu$	میانگین
$\sigma$	نوسان‌پذیری
$\Lambda$	تابع افزایشی یکنواخت
$\varepsilon$	خطای اندازه‌گیری
$\kappa$	معکوس میانگین
$\eta$	پارامتر ثابت زمانی
$\zeta$	ثابت اثرات تصادفی
$\phi$	تابع چگالی احتمال نرمال استاندارد
$\Phi$	تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد

#### منابع

- [1] X.-S. Si, W. Wang, C.-H. Hu, D.-H. Zhou, Remaining useful life estimation—a review on the statistical data driven approaches, *European Journal of Operational Research*, 213(1) (2011) 1-14.
- [2] Z. Zhang, X. Si, C. Hu, X. Kong, Degradation modeling-based remaining useful life estimation: A review on approaches for systems with heterogeneity, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability*, 229(4) (2015) 343-355.
- [3] Z.-S. Ye, N. Chen, Y. Shen, A new class of Wiener process models for degradation analysis, *Reliability Engineering &*

- System Safety, 139 (2015) 58-67.
- [4] X.-S. Si, W. Wang, C.-H. Hu, D.-H. Zhou, M.G. Pecht, Remaining useful life estimation based on a nonlinear diffusion degradation process, *IEEE Transactions on Reliability*, 61(1) (2012) 50-67.
  - [5] C. Park, W.J. Padgett, New cumulative damage models for failure using stochastic processes as initial damage, *IEEE Transactions on Reliability*, 54(3) (2005) 530-540.
  - [6] S. Mishra, O.A. Vanli, Remaining useful life estimation with lamb-wave sensors based on wiener process and principal components regression, *Journal of Nondestructive Evaluation*, 35(1) (2016) 11.
  - [7] Z. Omar, B. hmida Faycel, M.M. Hedi, C. Abdelkader, Stochastic Modeling of Wear in Bearing in Motor Pump in Two-Tank System, in: 2018 15th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD), IEEE, 2018, pp. 611-618.
  - [8] X. Zhuang, T. Yu, L. Shen, Z. Sun, B. Guo, Time-varying dependence research on wear of revolute joints and reliability evaluation of a lock mechanism, *Engineering Failure Analysis*, 96 (2019) 543-561.
  - [9] W. Wu, C. Ni, A study of stochastic fatigue crack growth modeling through experimental data, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 18(2) (2003) 107-118.
  - [10] A. Xu, S. Zhou, Y. Tang, A Unified Model for System Reliability Evaluation Under Dynamic Operating Conditions, *IEEE Transactions on Reliability*, (2019).
  - [11] Z.S. Ye, M. Xie, Stochastic modelling and analysis of degradation for highly reliable products, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 31(1) (2015) 16-32.
  - [12] W. Kahle, S. Mercier, C. Paroissin, *Degradation processes in reliability*, John Wiley & Sons, 2016.
  - [13] X. Wang, Wiener processes with random effects for degradation data, *Journal of Multivariate Analysis*, 101(2) (2010) 340-351.
  - [14] G. Whitmore, Estimating degradation by a Wiener diffusion process subject to measurement error, *Lifetime Data Analysis*, 1(3) (1995) 307-319.
  - [15] X. Wang, N. Balakrishnan, B. Guo, Residual life

- Reliability, 58(3) (2009) 444-455.
- [19] M. Abdel-Hameed, A gamma wear process, IEEE transactions on Reliability, 24(2) (1975) 152-153.
- [20] A. Grall, C. Bérenguer, L. Dieulle, A condition-based maintenance policy for stochastically deteriorating systems, Reliability Engineering & System Safety, 76(2) (2002) 167-180.
- [21] J. Lawless, M. Crowder, Covariates and random effects in a gamma process model with application to degradation and failure, Lifetime Data Analysis, 10(3) (2004) 213-227.
- [22] D.-G. Chen, Y. Lio, H.K.T. Ng, T.-R. Tsai, Statistical modeling for degradation data, Springer, 2017.
- estimation based on a generalized Wiener degradation process, Reliability Engineering & System Safety, 124 (2014) 13-23.
- [16] Z.-S. Ye, Y. Wang, K.-L. Tsui, M. Pecht, Degradation data analysis using Wiener processes with measurement errors, IEEE Transactions on Reliability, 62(4) (2013) 772-780.
- [17] D. Pan, Y. Wei, H. Fang, W. Yang, A reliability estimation approach via Wiener degradation model with measurement errors, Applied Mathematics and Computation, 320 (2018) 131-141.
- [18] C.-Y. Peng, S.-T. Tseng, Mis-specification analysis of linear degradation models, IEEE Transactions on

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M.A. Farsi, P. Gholami, Fatigue crack growth analysis via Wiener degradation model with random effects, AmirKabir J. Mech Eng., 53(4) (2021) 2271-2286.

DOI: [10.22060/mej.2020.17437.6596](https://doi.org/10.22060/mej.2020.17437.6596)



