



Investigation of the effect of longitudinal grading of material on vibrations of axially moving systems

A. Forooghi, M. Safarpour, A. Alibeigloo*

Department of mechanical engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

ABSTRACT: For the first time, vibrations of the axially graded Rayleigh moving beams are studied. It is supposed that the material characteristics of the system change linearly or exponentially in a longitudinal direction continuously. By using the Galerkin method and eigenvalue problem, the natural frequencies and divergence of the system are computed numerically. Also, the analytical relations are extracted for the critical velocity of the system. Essential contours of velocity and stability maps are investigated for different distributions of material. As indicated, exponential and linear changes lead to more stable operation in the variable state of density and elastic modulus, respectively. Also, the results showed that increasing the elastic modulus gradient parameter or decreasing the density gradient parameter results in an increase in the natural frequency of the system and a development in stability. Hence, alteration in the density and elastic modulus gradient parameters has a different role in the dynamic behavior of the system. The results of this study can be useful for designing and optimizing high-speed non-homogeneous axial movable structures.

Review History:

Received: Oct. 30, 2019

Revised: Feb. 04, 2020

Accepted: Mar. 10, 2020

Available Online: Mar. 20, 2020

Keywords:

Axial Graded Materials

Gradient Parameter

Moving Beam

Critical Velocity

Instability

1. INTRODUCTION

Axial moving beams are widely used in various engineering industries. Therefore, numerous researchers have addressed the dynamic modeling and vibrational characteristics of these structures and have discussed the dynamic behavior of these structures from multiple aspects [1, 2]. In all of the available articles, the materials used in the structures were homogeneous. In recent years, engineers have improved the mechanical behavior of moving dynamics systems by enhancing material properties. To avoid possible structural limitations, the researchers introduced functionally graded materials, made from one surface to another by continuous and soft changes of two or more constituents [3-5].

According to the authors' knowledge, in all studies on axially graded beams, it has been assumed that the configuration of the system materials changes along with the thickness while studying the dynamic behavior of the graded beams despite the importance of grading the material properties in the axial direction. In this regard, the dynamical analysis and stability improvement of two-axis Rayleigh moving beams have been studied comprehensively, numerically, and analytically by applying axial graded materials. The effect of several vital parameters, such as axial grading, rotational inertia, and beam velocity on the dynamical properties of the axial propulsion systems are explained. The features of the materials change in longitudinal direction based on two linear and exponential profiles. The dynamical equation of the system is derived based on Hamilton's law and compared

with the equations in the literature. In the following, the reduced-order equation is obtained by the Galerkin method, and the eigenvalue problem is applied. Then, instability zones are identified for the axial moving axial beam [6, 7].

2. METHODOLOGY

It is assumed that the beam or boundary conditions of simple supports at a constant axial velocity V move in the longitudinal direction and are under P axial pressure. The length, cross-sectional area, and moment of inertia of the beam are indicated by L , A , and I , respectively. The kinetic energies and potential of the system are expressed in Eqs. (1-2) [8-13]:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_{(x)} A \left(V^2 + (\dot{w} + Vw')^2 \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) I (\dot{w}' + Vw'')^2 dx \quad (1)$$

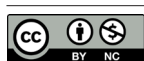
$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left(P(w')^2 + E_{(x)} I (w'')^2 \right) dx \quad (2)$$

where $w(x, t)$ is the transverse beam. According to Hamilton's principle, it can be written:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (3)$$

*Corresponding author's email: abeigloo@modares.ac.ir

By placing Eqs. (1-2) into Eq. (3), we will have:



$$\begin{aligned}
 & \rho_{(x)} A (\ddot{w} + 2V\dot{w}' + V^2 w'') + \rho'_{(x)} A (V\dot{w} + V^2 w') \\
 & - \rho_{(x)} I (\ddot{w}'' + V\dot{w}''') - \rho'_{(x)} I (\dot{w}' + V\dot{w}'') \\
 & - \rho_{(x)} IV (\dot{w}''' + Vw''''') - 2\rho'_{(x)} IV (\dot{w}'' - Vw''') \\
 & - \rho''_{(x)} IV (\dot{w}' - Vw'') - Pw'' + E_{(x)} Iw'''' \\
 & + 2E'_{(x)} Iw''' + E''_{(x)} Iw'' = 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

The discretization of the system equation, the transverse beam displacement is given by Eq. (5):

$$\eta_{(\xi, \tau)} = \sum_{j=1}^n \varphi_j(\xi) q_j(\tau) \tag{5}$$

where q_j is the generalized dimensional coordinate, n is the number of essential functions, φ_j is the acceptable mode for the transverse displacement of the system.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(\tau) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(\tau) + \mathbf{K}\mathbf{q}(\tau) = 0 \tag{6}$$

where q is the generalized coordinate vector, \mathbf{M} is the matrix of mass, \mathbf{C} is the damping matrix, and \mathbf{K} is the stiffness matrix of the system.

3. RESULTS AND DISCUSSION

To better understand the dynamical behavior of the system, the time response of the first generalized coordinate system at different speeds is shown in Fig. 1. Initial system conditions, the static displacement of the unit is assumed to be zero for the first mode. As the speed increases, the transverse stiffness of the system decreases due to centrifugal effects. The real base frequency becomes zero, resulting in a buckling order. In this case, the dynamic response of the system without oscillation grows more durable over time, and the system becomes statically unstable. By increasing the velocity at $v = 4$, the imaginary part becomes zero, and the beam achieves its stability. As the speed increases at $v = 5$, the actual portion of the frequency increases, while the imaginary part of the system's natural frequency becomes negative, thereby amplifying the system's amplitude exponentially with time. Unlike the divergence instability, where there is no oscillation. Therefore, the magnitude of the system increases significantly with time. As a result, flutter instability is more dangerous than divergence instability for axial moving beams. In practice, for flutter speeds, any transverse motion results in dynamic ups and downs in the system [14, 15].

4. CONCLUSIONS

The structural dynamics and possible vibrational instabilities of the axially-graded moving beams have been studied numerically and analytically. The distribution of material properties of the system in a longitudinal direction is considered linear and exponential. By applying the Galerkin discretization method and the problem of eigenvalues, natural frequencies, dynamic response and flutter, and diurnal instability ranges of the system based on the combined effects of beam velocity, dimensional bending stiffness, density gradient, and modulus parameters. Mathematical closed-form expressions are obtained for the critical speed of the system. Stability maps and 2D contour diagrams of critical velocity are plotted in terms of axial grading and

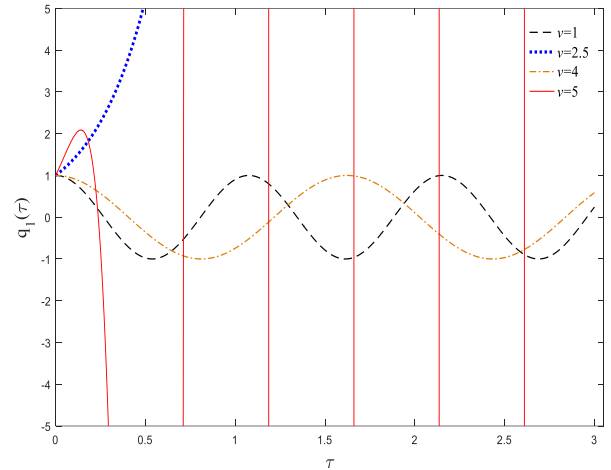


Fig. 1. Dimensionless displacement response of moving axially functionally graded beam for $k_f=0.5$, $\beta=0$, $\alpha_e=2$

dimensionless bending rigidity parameters for the Rayleigh and Euler-Bernoulli beams.

REFERENCES

- [1] S.H. Mirtalebi, M.T. Ahmadian, A. Ebrahimi-Mamaghani, On the dynamics of micro-tubes conveying fluid on various foundations, *SN Applied Sciences*, 1(6) (2019) 547.
- [2] S.H. Mirtalebi, A. Ebrahimi-Mamaghani, M.T. Ahmadian, Vibration Control and Manufacturing of Intelligibly Designed Axially Functionally Graded Cantilevered Macro/Micro-tubes, *IFAC-PapersOnLine*, 52(10) (2019) 382-387.
- [3] A.E. Mamaghani, S. Khadem, S. Bab, Vibration control of a pipe conveying fluid under external periodic excitation using a nonlinear energy sink, *Nonlinear Dynamics*, 86(3) (2016) 1761-1795.
- [4] A.E. Mamaghani, S.E. Khadem, S. Bab, S.M. Pourkiaee, Irreversible passive energy transfer of an immersed beam subjected to a sinusoidal flow via local nonlinear attachment, *International Journal of Mechanical Sciences*, 138 (2018) 427-447.
- [5] A.E. Mamaghani, H. Zohoor, K. Firoozbakhsh, R. Hosseini, Dynamics of a Running Below-Knee Prosthesis Compared to Those of a Normal Subject, *Journal of Solid Mechanics Vol*, 5(2) (2013) 152-160.
- [6] S. Esfahani, S. Esmaeilzadeh Khadem, A. Ebrahimi Mamaghani, Size-dependent nonlinear vibration of an electrostatic nanobeam actuator considering surface effects and inter-molecular interactions, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 15(3) (2019) 489-505.
- [7] S. Esfahani, S.E. Khadem, A.E. Mamaghani, Nonlinear vibration analysis of an electrostatic functionally graded nano-resonator with surface effects based on nonlocal strain gradient theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, 151 (2019) 508-522.
- [8] A. Ebrahimi Mamaghani, S. Esameilzadeh Khadem,

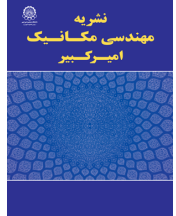
- Vibration analysis of a beam under external periodic excitation using a nonlinear energy sink, *Modares Mechanical Engineering*, 16(9) (2016) 186-194.(in persian)
- [9] A. Ebrahimi-Mamaghani, S.H. Mirtalebi, M.-T. Ahmadian, Magneto-mechanical stability of axially functionally graded supported nanotubes, *Materials Research Express*, (2019).
- [10] A. Ebrahimi-Mamaghani, R. Sotudeh-Gharebagh, R. Zarghami, N. Mostoufi, Dynamics of two-phase flow in vertical pipes, *Journal of Fluids and Structures*, 87 (2019) 150-173.
- [11] A. Ebrahimi-Mamaghani, R. Sotudeh-Gharebagh, R. Zarghami, N. Mostoufi, Thermo-mechanical stability of axially graded Rayleigh pipes, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, (2020) 1-30.
- [12] R. Hosseini, M. Hamed, A. Ebrahimi Mamaghani, H.C. Kim, J. Kim, J. Dayou, Parameter identification of partially covered piezoelectric cantilever power scavenger based on the coupled distributed parameter solution, *International Journal of Smart and Nano Materials*, 8(2-3) (2017) 110-124.
- [13] H. Sarparast, S. Esmailzade Khadem, A. Ebrahimi Mamaghani, Investigation of the cancellation, resonance and maximum amplitude of free vibration phenomena in laminated curved Timoshenko beams under moving loads, *Modares Mechanical Engineering*, 18(9) (2019) 69-80.
- [14] M. Safarpour, A. Rahimi, A. Alibeigloo, H. Bisheh, A. Forooghi, Parametric study of three-dimensional bending and frequency of FG-GPLRC porous circular and annular plates on different boundary conditions, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, (2019) 1-31.
- [15] H. Sarparast, A. Ebrahimi-Mamaghani, Vibrations of laminated deep curved beams under moving loads, *Composite Structures*, (2019) 111262.(in persian)

HOW TO CITE THIS ARTICLE

A. Forooghi, M. Safarpour, A. Alibeigloo, Investigation of the effect of longitudinal grading of material on vibrations of axially moving systems. *Amirkabir J. Mech Eng., 53(special issue 2) (2021) 281-284.*

DOI: [10.22060/mej.2020.17295.6567](https://doi.org/10.22060/mej.2020.17295.6567)





مطالعه تأثیر گرادیان طولی مواد بر ارتعاشات سیستم‌های متحرک محوری

علی فروغی، مهران صفرپور، اکبر علی بیگلر*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸/۰۸/۰۸
بازنگری: ۱۳۹۸/۱۱/۱۵
پذیرش: ۱۳۹۸/۱۲/۲۰
ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۱/۰۱

کلمات کلیدی:

مواد مدرج محوری
پارامتر گرادیان
تیر متحرک
سرعت بحرانی
ناپایداری

خلاصه: برای اولین بار، ارتعاشات و پایداری تیرهای رایلی متحرک مدرج محوری با هدف بهبود کارایی سیستم‌های متحرک عبوری مطالعه شده است. همچنین، یک مطالعه مقایسه‌ای مفصل برای روشن کردن اثر پارامترهای مختلف مانند درجه‌بندی محوری مواد و اینرسی دورانی بر مرزهای پایداری تیرهای رایلی و اویلر-برنولی انجام شده است. فرض شده است که مشخصات مادی سیستم به‌طور پیوسته در راستای طولی به‌صورت خطی یا نمایی تغییر می‌کنند. روش گسسته‌سازی گالرکین و همچنین مسئله مقدار ویژه به‌کاربرده شده‌اند تا فرکانس‌های طبیعی، پیکربندی دینامیکی، آستانه‌های ناپایداری فلاتر و دایورژانس سیستم محاسبه شوند. همچنین روابط تحلیلی برای سرعت بحرانی سیستم به‌دست آمده‌اند. نقشه‌های پایداری و کانتورهای سرعت بحرانی برحسب توزیع‌های مختلف مورد آزمون قرار گرفته‌اند. ضمناً نشان داده شد که در حالت چگالی و مدول الاستیک متغیر، به ترتیب تغییرات نمایی و خطی منجر به سیستم پایدارتر می‌شوند. همچنین نتایج نشان دادند که کاهش پارامتر گرادیان چگالی و یا افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک، فرکانس طبیعی سیستم را افزایش می‌دهد و محدوده‌های پایداری را گسترش می‌دهد، بنابراین تغییرات پارامترهای گرادیان چگالی و مدول الاستیک، نقش‌های متضاد در رفتار دینامیکی سیستم دارند. نتایج پژوهش حاضر برای طراحی و بهینه‌سازی سازه‌های متحرک محوری غیرهمگن سرعت بالا می‌تواند مفید باشد.

۱- مقدمه

نقاط انشعاب سیستم را استخراج کردند. چن و یانگ [۳]، پایداری پارامتریک تیرهای ویسکوالاستیک متحرک محوری با سرعت محوری نوسانی و تکیه‌گاه‌های هیبریدی را مطالعه کردند. در مقاله‌ی ذکر شده، فرکانس‌های طبیعی، توابع مودال و سرعت بحرانی به ازای پارامترهای سیستمی مختلف تعیین شده‌اند. از و پاکدمیرلی [۴] مکانیزم دینامیکی تیرهای متحرک محوری با سرعت وابسته به زمان را مطالعه کردند. آن‌ها نشان دادند که تغییرات دامنه سرعت منجر به گسترش نواحی پایداری می‌شوند. رفتار ارتعاشاتی و شرایط پایداری تیرهای ویسکوالاستیک شتابی محوری توسط چن و همکاران [۵] بررسی شد. آن‌ها کشف کردند که در رزونانس زیرهارمونیک اول، کاهش تنش و افزایش سرعت متوسط محوری اثرات یکسانی بر آستانه ناپایداری

تیرهای متحرک محوری به‌صورت گسترده در صنایع مهندسی مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند. از این رو محققین بی‌شماری به مدل‌سازی دینامیکی و مشخصه‌سازی ارتعاشاتی این سازه‌ها پرداخته‌اند و رفتار دینامیکی این سازه‌ها را از جنبه‌های گوناگون بحث کرده‌اند. در این راستا، بر اساس تئوری تیر اویلر-برنولی، ویکرت [۱] ارتعاشات غیرخطی تیرهای عبوری تحت فشار را تحلیل کرد و اثرات کشش اولیه و سفتی خمشی را بر ارتعاشات آزاد توضیح داد. قایش و امابیلی [۲]، دینامیک غیرخطی اجباری تیرهای متحرک محوری را به صورت عددی مطالعه کردند و پاسخ حالت ماندگار و

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: abeigloo@modares.ac.ir



است. پیووان و سامپایو [۱۱]، ارتعاشات تیرهای لغزان منبسط شونده یا جمع شونده را که از مواد مدرج محوری تشکیل شده‌اند بررسی کردند. آن‌ها فرض کردند که مشخصات مواد سیستم طبق قانون توانی درجه‌بندی شده‌اند. همچنین آن‌ها اثرات مواد تشکیل‌دهنده و شتاب سیستم بر پاسخ دینامیکی را تحقیق کردند. سویی و همکاران [۱۲]، ارتعاشات عرضی تیرهای تیموشنکو متحرک محوری ساخته شده از مواد مدرج محوری را در نظر گرفتند. آن‌ها فرکانس‌های طبیعی و سرعت بحرانی سیستم را بر حسب توان مدرج محوری و نسبت طول به ضخامت محاسبه کردند. کیانی [۱۳]، ارتعاشات طولی و عرضی نانو تیرهای مدرج محوری را بر اساس تئوری غیرمحمولی رایلی مطالعه کرد. او اثر پارامتر اندازه و شاخص قانون توانی را بر ناپایداری‌های سیستم بررسی کرد. اخیراً، یان و همکاران [۱۴]، ارتعاشات غیرخطی تیرهای مدرج محوری متحرک محوری با در نظرگیری اثرات غیرخطی هندسی و نیروی محوری را مطالعه کردند. آن‌ها با به‌کاربردن روش چندمقیاسی مستقیم، شرایط رخداد رزونانس زیرهارمونیک را در سیستم به دست آوردند.

بر اساس اطلاعات نویسندگان، در تمام مطالعات انجام‌شده بر روی تیرهای مدرج متحرک محوری، فرض شده است که پیکربندی مواد سیستم در راستای ضخامت تغییر می‌کنند، درحالی‌که علیرغم اهمیت درجه‌بندی خواص مواد در راستای محوری، مطالعه رفتار دینامیکی تیرهای مدرج محوری متحرک تابع‌حال در ادبیات فنی گزارش نشده است. با توجه به این مطلب، تحلیل دینامیکی و بهبود پایداری تیرهای متحرک محوری دوسر مفصل رایلی با به‌کارگیری مواد مدرج محوری به‌طور جامع، عددی و تحلیلی مورد مطالعه قرار گرفته است. اثر پارامترهای متعدد کلیدی، مانند درجه‌بندی محوری، اینرسی دورانی و سرعت تیر بر مشخصات دینامیکی سیستم‌های متحرک محوری به‌علاوه تعبیر فیزیکی‌شان توضیح داده شده است. خواص مواد در راستای طولی بر اساس دو پروفیل خطی و نمایی تغییر می‌کنند. معادله دینامیکی سیستم بر اساس قانون همیلتون استخراج شده است و با معادلات موجود در ادبیات مقایسه شده است. در ادامه معادله کاهش مرتبه‌یافته با روش گالرکین به دست آمده است و مسئله مقدار ویژه اعمال شده است. سپس برای تیر مدرج محوری متحرک محوری مناطق ناپایداری شناسایی شده‌اند. برای اطمینان از درستی روش حل، مطالعه مقایسه‌ای با نتایج موجود در ادبیات

سیستم دارند. در این زمینه مطالعات محدودی نیز بر اساس تئوری تیر رایلی و تیموشنکو انجام شده است. به‌عنوان مثال، ژو و چانگ [۶] ارتعاشات و پایداری تیرهای رایلی چرخان متحرک محوری را مطالعه کردند. آن‌ها ویژگی‌های ژيروسکوپی سیستم را بررسی کردند و فهمیدند که با افزایش اینرسی دورانی تیر، پایداری سیستم کاهش می‌یابد. دهرویه-سمنانی و همکاران [۷] مشخصات ارتعاشی میکروتیرهای متحرک محوری را بر اساس تئوری تیر تیموشنکو بررسی کردند. از نتایج آن‌ها می‌توان به فرکانس‌های وابسته به اندازه و سرعت‌های بحرانی سیستم به ازای شرایط مرزی دوسر مفصل و دوسرگیردار رسید. جلوگیری از ناپایداری، رزونانس و ارتعاشات ناخواسته، از ملزومات اساسی در طراحی‌های مهندسی سیستم‌های متحرک محوری است. تاکنون مهندسیین برای کاهش ارتعاشات اضافی سیستم‌های متحرک محوری، روش‌های کنترل ارتعاشاتی فعال و غیرفعال مختلفی پیشنهاد داده‌اند. به‌عنوان مثال لی و همکاران [۸] کنترل فعال ارتعاشات غیرخطی نوارهای متحرک محوری را با به‌کارگیری فیدبک سرعت مرزی در نظر گرفتند. آن‌ها نشان دادند که با به‌کارگیری فیدبک خطی منفی سرعت در بالادست یا پایین دست نوار، می‌توان ارتعاشات سیستم را به خوبی کاهش داد. ژانگ و همکاران [۹] کاهش تطابقی و غیرفعال ارتعاشات یک تیر متحرک محوری متصل به جاذب‌های غیرخطی را بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که با تنظیم پارامتر جرم، کارایی جاذب غیرخطی را می‌توان به‌خوبی افزایش داد. در تمام مقالات مرور شده بالا، مواد به‌کاربرده شده در سازه از جنس مواد همگن بوده است. در سال‌های اخیر، مهندسیین با بهبود خواص مواد، رفتار مکانیکی سیستم‌های دینامیکی متحرک را بهبود بخشیده‌اند. با هدف جلوگیری از محدودیت‌های سازه‌ای ممکن، محققین مواد مدرج تابعی را معرفی کردند که یک نوع جدید از مواد مرکب هستند و با تغییرات پیوسته و نرم دو یا چند ماده تشکیل‌دهنده، از سطحی به سطحی دیگر ساخته شده‌اند. مواد مدرج نسبت به مواد همگن و لایه‌ای مرسوم، با ارائه مزایای عالی و برجسته‌ای همچون مقاومت خوردگی بهتر، تمرکز تنش کمتر و سختی شکست کمتر، در صنایع پیچیده مهندسی کاربردهای گسترده‌ای دارند [۱۰]. گرچه مواد مدرج محوری در طراحی و ساخت سامانه‌های متحرک محوری پیشرفته آینده، پتانسیل به‌کارگیری بالایی فراهم می‌کنند، اما با این وجود تحقیقات محدودی در این زمینه انجام شده

که α_p و α_E به ترتیب پارامتر گرادیان چگالی و مدول الاستیک می‌باشند که به ترتیب بیانگر نسبت چگالی و مدول الاستیک انتهای تیر ($x=L$) به ابتدای تیر ($x=0$) می‌باشند.

$$\alpha_\rho = \frac{\rho_L}{\rho_0} \quad (5)$$

$$\alpha_E = \frac{E_L}{E_0} \quad (6)$$

انرژی‌های جنبشی و پتانسیل سیستم طبق معادلات (۷-۸) بیان می‌شوند [۱۵-۱۸]:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) A (V^2 + (\dot{w} + Vw')^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) I (\dot{w}'' + Vw''')^2 dx \quad (7)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (P (w')^2 + E(x) I (w'')^2) dx \quad (8)$$

که در آن $w(x, t)$ جابجایی عرضی تیر است. طبق اصل همیلتون می‌توان نوشت:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (9)$$

با جایگذاری روابط (۷-۸) در رابطه (۹) خواهیم داشت:

$$\rho(x) A (\dot{w} + 2Vw' + V^2w'') + \rho'(x) A (V\dot{w} + V^2w') - \rho(x) I (\dot{w}'' + Vw''') - \rho'(x) I (\dot{w}'' + Vw''') - \rho(x) I V (\dot{w}'' + Vw''') - 2\rho'(x) I V (\dot{w}'' + Vw''') - Pw'' + E(x) I w'''' + 2E'(x) I w'''' + E''(x) I w'''' = 0 \quad (10)$$

با هدف استخراج معادلات بی‌بعد، پارامترهای بی‌بعد زیر معرفی می‌شوند:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{w}{L}, \quad \tau = \frac{t}{T} \quad (11)$$

که در آن:

$$T = \sqrt{\frac{\rho_0 A L^2}{P}} \quad (12)$$

با جایگذاری پارامترهای بی‌بعد معادله (۱۱) در معادله (۱۰) به دست خواهد آمد:

$$g(\xi) (\dot{\eta} + 2v\eta' + v^2\eta'') + \lambda(\xi) (v\dot{\eta} + v^2\eta') - g(\xi) \beta (\eta'' + v\eta''') - \lambda(\xi) \beta (\eta'' + v\eta''') - g(\xi) \gamma \beta (\eta'' + v\eta''') - \mu(\xi) \gamma \beta (\eta'' + v\eta''') - 2\lambda(\xi) \gamma \beta (\eta'' + v\eta''') - \eta'' + k_f^2 (f(\xi) \eta'''' + 2\gamma(\xi) \eta'''' + \chi(\xi) \eta'''' = 0 \quad (13)$$

که در آن پارامترهای بی‌بعد به دست آمده در رابطه (۱۴) معرفی می‌شوند:

$$v = V \sqrt{\frac{\rho_0 A}{P}}, \quad \beta = \frac{I}{AL^2}, \quad k_f = \sqrt{\frac{E_0 I}{PL^2}}, \quad f(\xi) = f(x), \quad \lambda(\xi) = g'(x)L, \quad \gamma(\xi) = f'(x)L, \quad \mu(\xi) = g''(x)L^2, \quad \chi(\xi) = f''(x)L^2 \quad (14)$$

که در آن پارامترهای β و k_f به ترتیب ضریب اینرسی دورانی و سفتی خمشی بی‌بعد نام دارند. این نکته باید بیان شود که معادلات سیستم به ازای $\beta=0$ ، به معادلات تیر اویلر برنولی مدرج محوری متحرک کاهش پیدا می‌کند.

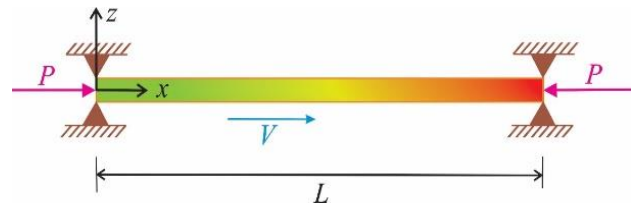


Fig. 1. Schematic of moving axially functionally graded beam

شکل ۱: شماتیک تیر مدرج محوری متحرک

انجام شده است. پاسخ زمانی، سرعت بحرانی و فرکانس‌های طبیعی سیستم به صورت عددی اکتساب شده‌اند. عبارت صریح تحلیلی برای سرعت بحرانی سیستم ارائه شده است. در نهایت، اثر عوامل اساسی بر پاسخ دینامیکی و محدوده‌های پایداری سیستم توضیح داده شده است. نتایج پژوهش حاضر را می‌توان در طراحی سازه‌های مهندسی که در راستای طولی از دو یا چند ماده تشکیل شده‌اند و یا مشخصات هندسی آن‌ها (سطح مقطع، ممان اینرسی و ...) در راستای محوری سیستم تغییر می‌کنند، به کاربرد.

۲- مدل‌سازی ریاضی

در شکل ۱، شماتیک یک تیر متحرک محوری متشکل از مواد مدرج محوری نمایش داده شده است. فرض می‌شود که تیر یا شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های ساده با سرعت محوری ثابت V در راستای طولی حرکت می‌کند و تحت بار پیش فشاری محوری P است. طول، مساحت سطح مقطع و ممان اینرسی تیر به ترتیب با L ، A و I نشان داده می‌شود. چگالی ($\rho(x)$) و مدول الاستیک تیر ($E(x)$) طبق فرمول‌های (۱-۲) در راستای طول تیر به صورت خطی یا نمایی درجه‌بندی شده‌اند:

$$\rho(x) = \rho_0 g(x) \quad (1)$$

$$E(x) = E_0 f(x) \quad (2)$$

که

$$g_{(x)} = 1 + \frac{x}{L} (\alpha_\rho - 1) \quad (3-الف)$$

$$g_{(x)} = e^{\frac{x \ln(\alpha_\rho)}{L}} \quad (3-ب)$$

$$f_{(x)} = 1 + \frac{x}{L} (\alpha_E - 1) \quad (4-الف)$$

$$f_{(x)} = e^{\frac{x \ln(\alpha_E)}{L}} \quad (4-ب)$$

۳- روش گسسته‌سازی

برای گسسته‌سازی معادله سیستم، جابجایی عرضی تیر طبق معادله (۱۵) در نظر گرفته می‌شود:

$$\eta_{(\xi, \tau)} = \sum_{j=1}^n \varphi_r(\xi) q_r(\tau) \quad (15)$$

که در آن q_r مختصات بی‌بعد تعمیم‌یافته، n تعداد توابع پایه، φ_r شکل مود قابل قبول برای جابجایی عرضی سیستم است. با ضرب φ_s در معادله (۱۳)، انتگرال گیری بر بازه $[0, 1]$ و بهره‌گیری از خاصیت تعامد مودها، به دست خواهد آمد:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = 0 \quad (16)$$

که در آن q بردار مختصات تعمیم‌یافته، M ماتریس جرم، C ماتریس دمپینگ و K ماتریس سختی سیستم هستند و طبق روابط (۱۷-۲۰) بیان می‌شوند:

$$q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \quad (17)$$

$$M_{sr} = \int_0^1 (g(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r(\xi) - \beta(g(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r''(\xi) + \lambda(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r''(\xi))) d\xi \quad (18)$$

$$C_{sr} = \nu \int_0^1 (2g(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r'(\xi) + \lambda(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r(\xi)) d\xi - \nu \beta \int_0^1 (2g(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r'''(\xi) + 3\lambda(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r''(\xi) + \mu(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r'(\xi)) d\xi \quad (19)$$

$$K_{sr} = \nu^2 \int_0^1 (g(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r''(\xi) + \lambda(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r'(\xi) - \beta(g(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r''''(\xi) + 2\lambda(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r'''(\xi) + \mu(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r''(\xi))) d\xi + k_r^2 \int_0^1 (f(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r''''(\xi) + 2\gamma(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r'''(\xi) + \chi(\xi)\phi_s(\xi)\phi_r''(\xi)) d\xi \quad (20)$$

۴- تحلیل پایداری

معادلات مرتبه دوم به دست آمده (۱۶) را می‌توان به معادلات مرتبه اول زیر کاهش داد:

$$B\dot{Z}(\tau) + EZ(\tau) = 0 \quad (21)$$

که در آن:

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix}, Z(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(\tau) \\ \dot{\mathbf{q}}(\tau) \end{bmatrix} \quad (22)$$

با فرض $Z(\tau) = Ae^{i\omega\tau}$ می‌توان نوشت:

$$YA - i\omega I = 0 \quad (23)$$

که I ماتریس همانی و $Y = -B^{-1}E$ است. همچنین ω فرکانس مختلط طبیعی سیستم است که می‌توان برحسب پارامترهای کلیدی مانند ضریب ممان اینرسی، سفتی خمشی بی‌بعد، گرادیان چگالی و مدول الاستیک به دست می‌آورد. پایداری سیستم متحرک، به شدت تحت تأثیر علامت قسمت‌های حقیقی و موهومی فرکانس است. قسمت‌های حقیقی و موهومی فرکانس سیستم، به ترتیب به

فرکانس ارتعاشات و ضریب دمپینگ سیستم مربوط است. هنگامی که قسمت حقیقی حداقل یکی از شاخه‌های فرکانس طبیعی سیستم برابر صفر شود، درحالی‌که قسمت موهومی آن منفی و قسمت حقیقی آن صفر است، ناپایداری دایورژنس از طریق یک انشعاب چنگالی در سیستم رخ می‌دهد. سرعت مربوط به رخداد دایورژنس به صورت سرعت بحرانی دایورژنس شناخته می‌شود. همچنین زمانی که قسمت موهومی حداقل یکی از شاخه‌های فرکانس منفی شود، درحالی‌که قسمت حقیقی آن مثبت و قسمت موهومی آن منفی است، سیستم از طریق انشعاب هاپف، ناپایداری فلاتر را تجربه می‌کند [۱۹-۲۵].

۵- بحث و نتایج

در این بخش، ابتدا آزمون همگرایی برای روش ارائه شده انجام می‌شود. همچنین نتایج برای سیستم همگن استخراج شده و با اطلاعات موجود در ادبیات فنی مقایسه می‌شوند. سپس اثر سرعت تیر، پارامترهای گرادیان جرم و مدول الاستیک، به صورت جداگانه و هم‌زمان، بر فرکانس‌های طبیعی، پاسخ دینامیکی و مرزهای پایداری تیرهای مدرج محوری متحرک رایلی و اوپلر برنولی بازتاب می‌شوند. لازم به ذکر است که پاسخ دینامیکی سیستم را نیز می‌توان با به‌کارگیری روش رانگ کوتای مرتبه چهارم به صورت عددی انتگرال گیری محاسبه کرد.

۵-۱- صحه‌سازی مدل

برای ارزیابی روش حل ارائه شده، قسمت حقیقی فرکانس پایه‌ای تیر متحرک محوری اوپلر برنولی مرسوم همگن تحت بار فشاری برحسب سرعت بی‌بعد در نسبت‌های سختی متمایز (k_f) در شکل (۲)

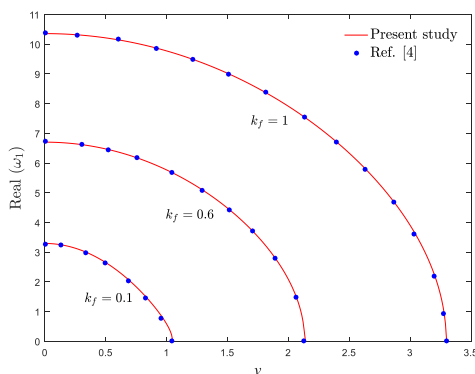
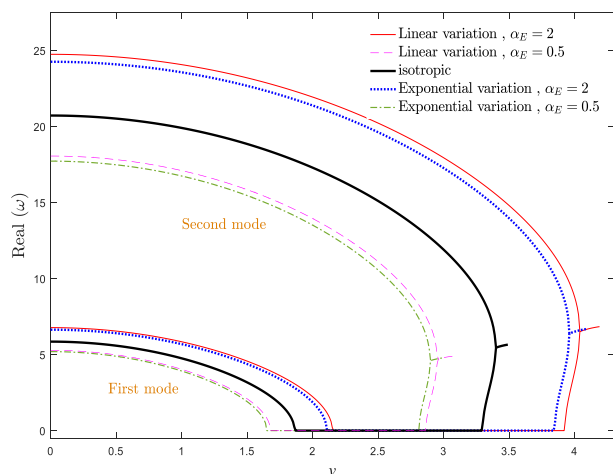
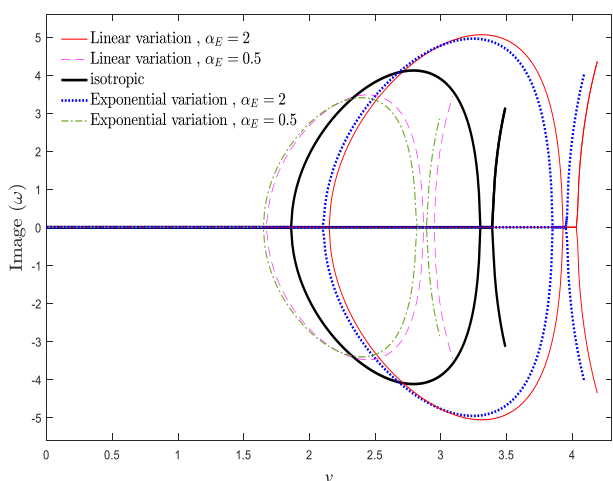


Fig. 2. Dimensionless fundamental frequency of homogenous Euler-Bernoulli moving beam on the basis of dimensionless velocity

شکل ۲: فرکانس پایه‌ای بی‌بعد تیر متحرک اوپلر-برنولی همگن برحسب سرعت بی‌بعد



(الف)



(ب)

Fig. 4. (a) Real part (b) Imaginary part of first two frequencies of moving axially functionally graded beam based on $k_f=0$, $\beta=0.001$, $\alpha_p=1$

شکل ۴: (الف) قسمت حقیقی (ب) قسمت موهومی دو فرکانس اول تیر مدرج محوری متحرک برحسب سرعت $\beta=0$, $\alpha_p=1$, $k_f=0.5$

می‌دهد و دچار کمانش می‌شود. ناپایداری القاشده دایورژنس در سیستم‌های متحرک محوری، مشابه کمانش در تیرهای تحت فشار کلاسیک است، به طوری که افزایش سرعت محوری همان تعبیر نیروی فشاری ستون است (۳۰). با افزایش بیشتر سرعت، فرکانس پایه‌ای سیستم کاملاً موهومی می‌شود، درحالی که فرکانس طبیعی دوم به طور یکنواخت کاهش می‌یابد. با افزایش بیشتر سرعت، به دلیل اثرات ژيروسکوپی، سیستم پایداری خود را مجدداً به دست می‌آورد. این طور می‌توان بیان کرد که نقطه شروع و پایان ناپایداری دایورژنس، به ترتیب با ناپدید شدن قسمت‌های حقیقی و موهومی فرکانس پایه مرتبط است. در نهایت قسمت‌های حقیقی فرکانس‌های

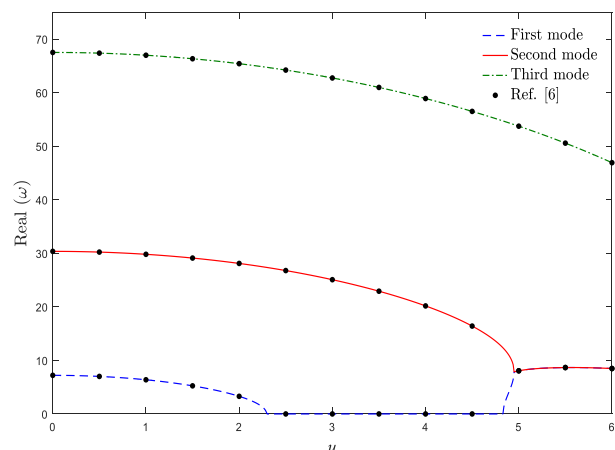


Fig. 3. First three frequencies of homogenous moving Rayleigh beam based on velocity $k_f=0.8$, $\beta=0.001$

شکل ۳: سه فرکانس اول تیر رایلی متحرک همگن برحسب سرعت $\beta=0.001$, $k_f=0.8$

رسم شده است. همان طور که مشاهده می‌شود نتایج به دست آمده از پژوهش حاضر، تطابق خوبی با نتایج ارائه شده توسط از و پاکدمیرلی [۴] دارند. براساس شکل ۲، با افزایش k_f ، فرکانس پایه‌ای سیستم همگن افزایش می‌یابد.

در شکل ۳، قسمت حقیقی سه فرکانس اول تیر متحرک رایلی همگن تحت بار کششی نمایش داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، نتایج به دست آمده از پژوهش حاضر با نتایج ارائه شده توسط ژو و چانگ [۶] مطابقت خوبی دارد. لازم به ذکر است که برای به کارگیری روش گالرکین و رسم شکل ۲، در معادله (۱۶) نه مود در نظر گرفته شده است. در نتیجه با توجه به دقت نتایج، برای محاسبات بیشتر، استفاده از ۹ مود خمشی منطقی است.

۲-۵- اثر پارامتر گرادیان مدول الاستیک

در شکل ۴ (الف و ب)، به ترتیب منحنی‌های قسمت حقیقی و موهومی دو فرکانس طبیعی اول سیستم برحسب سرعت تیر متحرک به ازای تغییرات خطی و نمایی مدول الاستیک هنگامی که $k_f=0/9$ است، رسم شده‌اند. همان طور که مشخص است، هنگامی که سرعت تیر صفر است، فرکانس‌های طبیعی سیستم کاملاً حقیقی هستند. با افزایش سرعت سیستم، قسمت حقیقی فرکانس‌های طبیعی سیستم به آرامی کاهش می‌یابد، درحالی که قسمت موهومی‌شان برابر صفر باقی می‌ماند. در سرعت بحرانی (v_c) ، قسمت حقیقی فرکانس پایه‌ای سیستم صفر می‌شود. در این نقطه سیستم پایداری خود را از دست

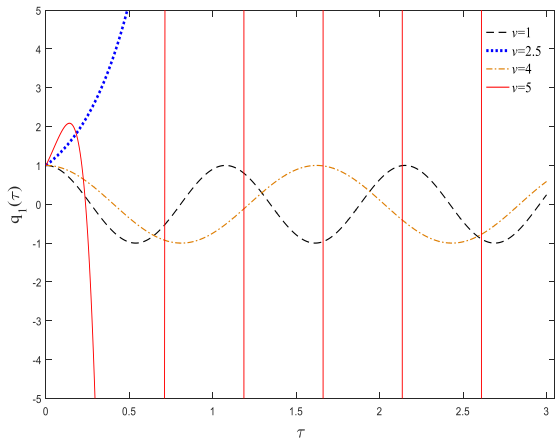


Fig. 5. Dimensionless displacement response of moving axially functionally graded beam for $k_f=0.5$, $\beta=0$, $\alpha_p=1$, $\alpha_E=2$

شکل ۵: پاسخ جابجایی بی بعد تیر اف جی متحرک به ازای $\beta=0$, $\alpha_E=2$, $\alpha_p=1$, $k_f=0.5$

عمومی اول سیستم در سرعت‌های مختلف و به ازای $\alpha_E=2$, $\beta=0$, $\alpha_p=0.5$ و $k_f=0.5$ در شکل ۵ نمایش داده شده است. شرایط اولیه سیستم، جابجایی استاتیکی واحد برای مود اول با سرعت اولیه صفر در نظر گرفته می‌شود. مطابق شکل ۵-الف، به ازای $v=1$ ، از آنجاکه قسمت حقیقی بزرگتر از صفر و قسمت موهومی برابر صفر است، در نتیجه سیستم به صورت دینامیکی پایدار است و نوسانات هارمونیک پایدار تولید می‌کند. با افزایش سرعت، سختی عرضی سیستم به دلیل اثرات گریز از مرکز کاهش می‌یابد. در $v=2/5$ ، قسمت حقیقی فرکانس پایه صفر می‌شود، در نتیجه سیستم متحمل کماتش می‌شود. در این حالت پاسخ دینامیکی سیستم بدون نوسان با زمان به شدت بزرگ می‌شود و سیستم دچار ناپایداری استاتیکی می‌شود. با افزایش بیشتر سرعت در $v=4$ قسمت موهومی فرکانس صفر می‌شود و تیر پایداری خود را به دست می‌آورد. همچنان که سرعت افزایش می‌یابد در $v=5$ ، قسمت حقیقی فرکانس افزایش می‌یابد، در حالی که قسمت موهومی فرکانس طبیعی سیستم منفی می‌شود، در نتیجه دامنه ارتعاشات سیستم به صورت نمایی با زمان تقویت می‌شود در چنین سطح سرعتی تیر مدرج محوری، ناپایداری فلاتر که همراه با نوسان است را تجربه می‌کند، برخلاف ناپایداری دایورژنس که در آن هیچ وجود نوسانی ندارد. بنابراین دامنه سیستم به طور قابل توجهی با زمان افزایش می‌یابد. در نتیجه، ناپایداری فلاتر نسبت به ناپایداری دایورژنس برای تیرهای متحرک محوری خطرناک‌تر است. در عمل، برای در سرعت‌های فلاتر، هرگونه حرکت عرضی منجر به خیزهای

اول و دوم از طریق یک انشعاب کوپل مود فلاتر نوع پایدوسیسی، با هم یکی می‌شوند. در حالی که قسمت‌های موهومی‌شان، به دوشاخه با مقادیر مثبت و منفی تقسیم می‌شوند و سیستم ناپایداری فلاتر را تجربه می‌کند. در حقیقت، علاوه بر سرعت‌های کمتر از سرعت بحرانی، یک محدوده باریک سرعت در محدوده کاری سیستم (بین نقطه پایان ناحیه دایورژانس و شروع ناحیه فلاتر) وجود دارد که سیستم در آن محدوده نیز پایدار است. لازم به ذکر است که بعد از عبور از سرعت بحرانی فلاتر، سیستم دیگر پایدار نخواهد شد. نتیجه می‌شود که تیر متحرک، روند تکامل پایداری "پایدار دایورژنس مود اول پایدار پیوستگی مود فلاتر" را تجربه می‌کند. نتیجه اولیه‌ای که از شکل ۴-الف می‌توان فهمید این است که با افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک، قسمت حقیقی فرکانس‌های سیستم افزایش می‌یابند، مخصوصاً فرکانس مودهای بالاتر. همچنین، با افزایش α_E سرعت مربوط به آغاز ناپایداری‌های تیر مدرج محوری متحرک افزایش می‌یابد و رفتار دایورژنس و فلاتر سیستم در سرعت‌های بالاتر مشاهده می‌شود. به بیان دیگر، رخداد پدیده دایورژنس که یک پدیده نامطلوب در سازه‌های متحرک محوری است را می‌توان با افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک به تعویق انداخت. این روند می‌تواند با این حقیقت توجیه شود که چون پارامتر گرادیان مدول الاستیک در ماتریس سختی نقش دارد، لذا هر افزایشی در پارامتر گرادیان مدول الاستیک به یک سیستم سخت‌تر منجر می‌شود و باعث گسترش مناطق پایداری می‌شود. به بیان دیگر مقادیر بزرگ‌تر α_E افزایش سختی در سیستم را القا می‌کند. یک نکته مهم دیگر در شکل‌های ۳ (الف-ب) این است که پهنای باند سرعت‌های مربوط ناپایداری سیستم، با افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک منبسط می‌شود. همچنین همان‌طور که مشاهده می‌شود، سیستم به ازای تغییرات خطی مدول الاستیک، پایداری بیشتری نسبت به حالت تغییرات نمایی دارد. بر اساس شکل ۳-ب، نسبت میرایی سیستم به ازای $\alpha_E > 1$ بیشتر است. همچنین در مقایسه با تغییرات نمایی مدول الاستیک، تغییرات خطی منجر به میرایی بیشتر در سیستم می‌شود. در نتیجه با تنظیم دقیق پارامتر گرادیان مدول الاستیک، می‌توان رفتار دینامیکی و آستانه ناپایداری در سیستم را تعیین نمود [۲۶-۲۹].

برای فهم بهتر رفتار دینامیکی سیستم، پاسخ زمانی مختصه

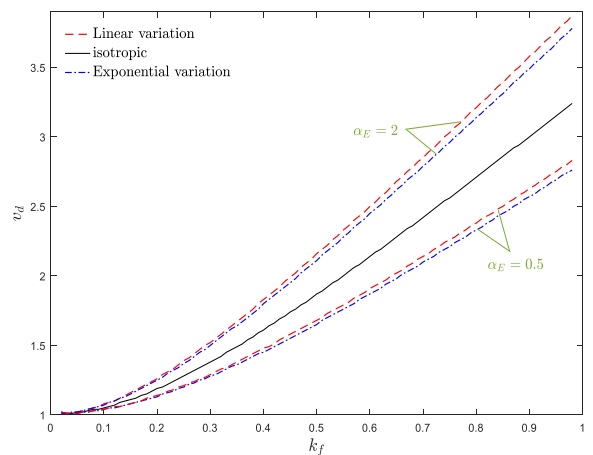
همان‌طور که مشخص است، با افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک، مرزهای پایداری سیستم گسترش می‌یابند. بر اساس شکل ۶-الف، در مقایسه با حالت تغییرات نمایی، تغییرات خطی مدول الاستیک مرزهای پایداری را بیشتر گسترش می‌دهد. ضمناً در k_f های کوچک و بزرگ، اثر پارامتر گرادیان مدول الاستیک مشهودتر است و مرزهای پایداری از هم دور می‌شوند. مرزهای پایداری نشان داده شده در شکل‌های ۴ و ۶ با هم در تطابق هستند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در مقایسه با تیر معمولی همگن متحرک محوری ($\alpha_E=1$)، هنگامی که $\alpha_E > 1$ است، سیستم پایدارتر است و با افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک، پایداری سیستم بیشتر می‌شود. همچنین، برای k_f های بزرگ‌تر، تغییرات گرادیان چگالی، اثر محسوس‌تری در آستانه‌های ناپایداری دارد. بر اساس شکل ۶ (الف-ب)، کاملاً مشخص است که با افزایش k_f ، سرعت بحرانی سیستم افزایش می‌یابد که می‌توان این ویژگی را به اثرات پایدارکننده سفتی خمشی بی‌بعد نسبت داد. همچنین به‌غیر از $\alpha_E=1$ ، سیستم به ازای تغییرات خطی مدول الاستیک نسبت به حالت نمایی پایدارتر است. به بیان دیگر، با نزدیک شدن پارامتر گرادیان به مقدار یک (حالت همگن) مرزهای پایداری تغییرات خطی و نمایی به یکدیگر نزدیک می‌شوند و با افزایش و یا کاهش پارامتر گرادیان، این مرزها از هم فاصله می‌گیرند.

۳-۵- اثر پارامتر گرادیان چگالی

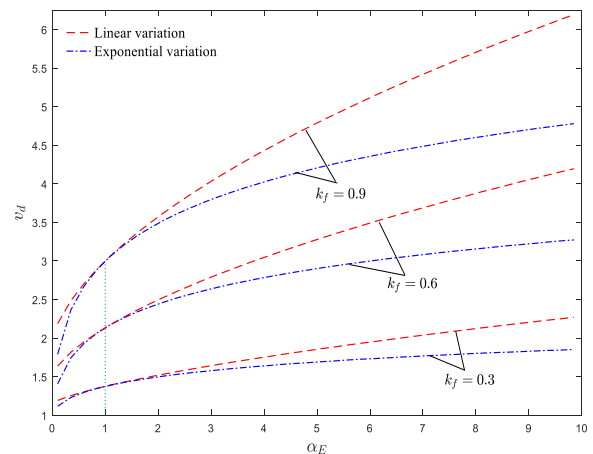
به‌منظور بررسی اثر پارامتر گرادیان چگالی، روند تکامل قسمت‌های حقیقی و موهومی فرکانس‌های اول و دوم سیستم برحسب سرعت سیستم و به ازای پارامترهای گرادیان چگالی مختلف به ترتیب در شکل ۷ (الف-ب) رسم شده‌اند. قابل مشاهده است که تغییرات گرادیان چگالی بر فرکانس‌های طبیعی مودهای بالاتر اثر بیشتری دارد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تغییرات فرکانس‌های طبیعی سیستم در حالت‌های چگالی و مدول الاستیک متغیر، برعکس یکدیگر هستند. به این صورت که فرکانس‌های طبیعی و سرعت‌های بحرانی دایورژانس و فلاتر سیستم با افزایش پارامتر گرادیان چگالی یک روند کاهشی دارند. در ضمن، برعکس حالت مدول الاستیک متغیر، در حالت چگالی متغیر، محدوده پایداری تغییرات نمایی نسبت به تغییرات خطی بزرگ‌تر است. محدوده ناپایداری سیستم، با افزایش پارامتر گرادیان چگالی منقبض می‌شود. پارامتر گرادیان چگالی، در

دینامیکی و تنش‌های بزرگ در سیستم می‌شود. براساس شکل ۴ (الف-ب)، محدوده‌های هر دو ناپایداری دایورژانس و فلاتر در سیستم را می‌توان با تنظیم مناسب پارامتر گرادیان مدول الاستیک تعیین نمود.

برای فهم بهتر پیکربندی دینامیکی سیستم، نقشه پایداری سیستم در صفحات V_d-k_f و $V_d-\alpha_E$ در شکل ۶ (الف-ب) رسم شده‌اند. در نقشه‌های پایداری، منحنی‌های نشان‌دهنده مناطق پایدار و ناپایدار را جدا می‌کند که سیستم در بالای آن‌ها در شرایط ناپایداری دایورژانس قرار دارد. همان‌طور که در شکل ۶-الف مشاهده می‌شود، هرچه k_f بیشتر، سیستم پایدارتر است. در نتیجه می‌توان گفت افزایش پارامتر k_f اثر پایدارکننده بر سیستم‌های متحرک محوری دارد. همچنین



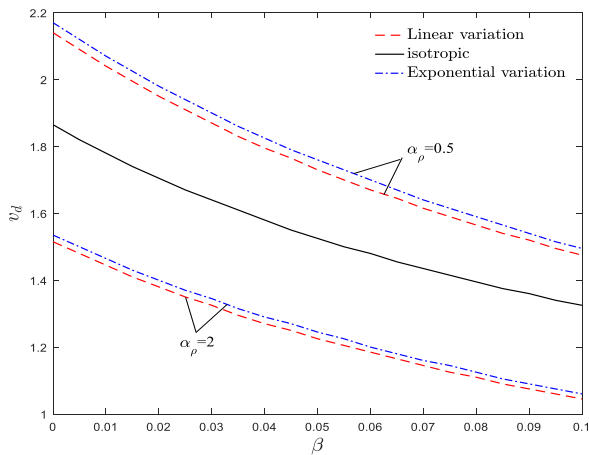
(الف)



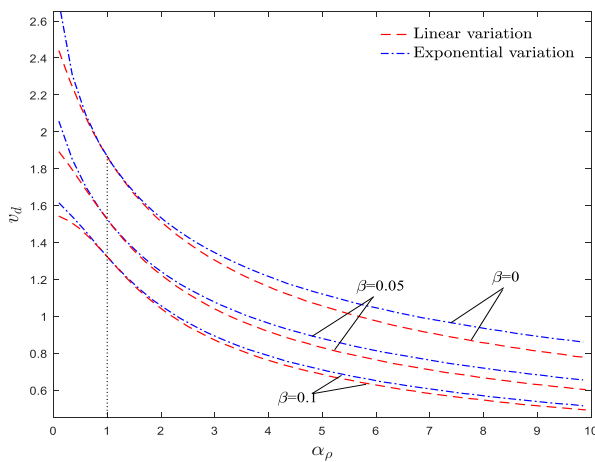
(ب)

Fig. 6. Dimensionless critical velocity of the system based on (a) dimensionless stiffness ratio (b) gradient parameter of elastic modulus $\beta=0$, $\alpha_p=1$

شکل ۶: سرعت بحرانی بی‌بعد سیستم برحسب (الف) نسبت سختی بی‌بعد (ب) پارامتر گرادیان مدول الاستیک $\beta=0$ ، $\alpha_p=1$



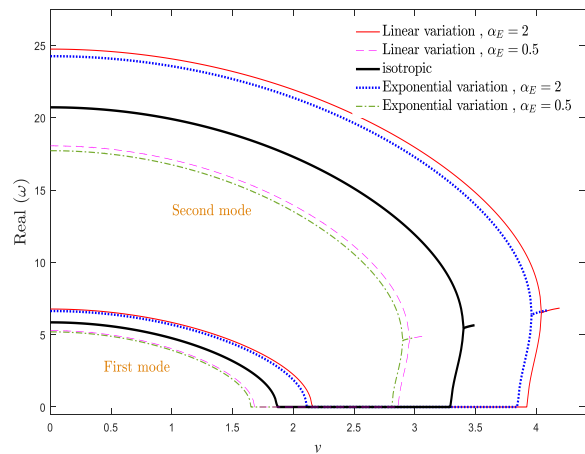
(الف)



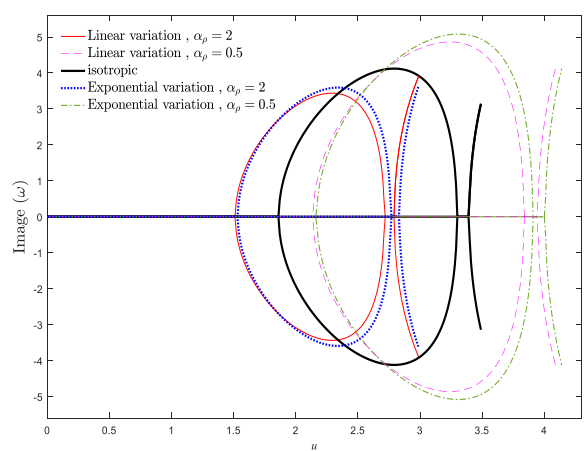
(ب)

Fig. 8. Critical velocity of moving axially functionally graded beam on the basis of (a) whirlling inertia coefficient (b) density gradient parameter $k_f=0.5, \alpha_E=1$

شکل ۸: سرعت بحرانی تیر مدرج محوری متحرک برحسب (الف) ضریب اینرسی دورانی (ب) پارامتر گرادیان چگالی $k_f=0.5, \alpha_E=1$



(الف)



(ب)

Fig. 7. (a) Real part (b) imaginary part of first two frequencies of moving axially functionally graded beam based on velocity $k_f=0.5, \beta=0, \alpha_E=1$

شکل ۷: (الف) قسمت حقیقی (ب) قسمت موهومی دو فرکانس اول تیر مدرج محوری متحرک برحسب سرعت $\beta=0, \alpha_E=1, k_f=0.5$

که مقادیر کمی فرکانس‌های طبیعی و سرعت‌های پایداری سیستم وابستگی شدیدی به تغییرات محوری مواد دارد، اما پایداری کیفی با درجه‌بندی محوری مواد تغییر نمی‌کند.

نقشه پایداری در صفحات $v_d-\alpha_\rho$ و $v_d-\beta$ به ترتیب در شکل‌های ۸ (الف-ب) رسم شده‌اند. بر اساس شکل ۸-الف، تیر مدرج محوری متحرک هنگامی که $\alpha_\rho < 1$ است، در مقایسه با حالت همگن پایدارتر است. ذکر این نکته حائز اهمیت است که در پارامترهای گرادیان نزدیک به یک (حالت همگن) مرزهای پایداری مربوط به تغییرات خطی و نمایی به یکدیگر نزدیک می‌شوند. ضمناً سرعت بحرانی سیستم، در حالت تغییرات نمایی چگالی نسبت به تغییرات خطی چگالی مقدار بیشتری دارد، مخصوصاً در مقادیر کوچک و بزرگ پارامتر گرادیان

ماتریس‌های جرم، دمپینگ و سختی نقش دارد که به ترتیب اثرات افزودگی جرم، ژيروسکوپی و افزایش سختی دارند. بر اساس شکل ۷، می‌توان نتیجه گرفت که اثرات افزودگی جرم در سیستم غالب است. یک نکته مهم در نقشه پایداری تیرهای مدرج متحرک محوری این است که در مقایسه با حالت مدول الاستیک متغیر، هنگامی که چگالی در طول سیستم تغییر می‌کند، سیستم محدوده گسترده‌تری از فرکانس‌ها را تجربه می‌کند. به همین دلیل، از دیدگاه طراحی، حالت چگالی متغیر می‌تواند در جلوگیری از پدیده رزونانس مؤثرتر باشد. با کاوش بیشتر در شکل‌های ۵ و ۷ مشهود است که درجه‌بندی محوری مواد سرعت بحرانی سیستم را تغییر می‌دهد اما ترتیب و نوع سری انشعابات سیستم را تغییر نمی‌دهد. در نتیجه می‌توان گفت

چگالی در راستای طولی تیر متحرک تأکید شده است. همچنین مشخصه‌های پایداری سیستم موردنظر به ازای تغییرات کوپل چگالی و مدول الاستیک در راستای طولی (با در نظرگیری افزودگی جرمی و افزودگی سختی هم‌زمان) مطالعه می‌شود. همچنین برای سرعت بحرانی به ازای تغییرات مشخصات مواد، عبارات‌های تحلیلی ارائه می‌شود و مقایسه بین روش‌های حل مختلف انجام می‌شود. هنگامی که سیستم دچار کماتش می‌شود، فرکانس پایه‌ای سیستم صفر می‌شود و یا به عبارت دیگر سختی سیستم به ازای مود اصلی صفر می‌شود. در نتیجه سرعت بحرانی سیستم مربوط به مود اول طبیعی است و برای استخراج آن، معادله (۱۶) را با در نظر گرفتن یک مود ($s = \Gamma = 1$)، به معادله زیر کاهش می‌یابد [۳۰-۳۶]:

$$\mathbf{M}_{11}\ddot{\mathbf{q}}_1(\tau) + \mathbf{C}_{11}\dot{\mathbf{q}}_1(\tau) + \mathbf{K}_{11}\mathbf{q}_1(\tau) = 0 \quad (24)$$

که اندیس ۱ برای مود اول است. با در نظر گرفتن تغییرات خطی مشخصات مادی سیستم می‌توان نوشت:

$$\mathbf{K}_{11} = \pi^2 \left(\beta(\alpha_p + 1)v_d^2 - (\alpha_E + 1)k_f^2 \right) + v_d^2(\alpha_p + 1) - 2 \quad (25)$$

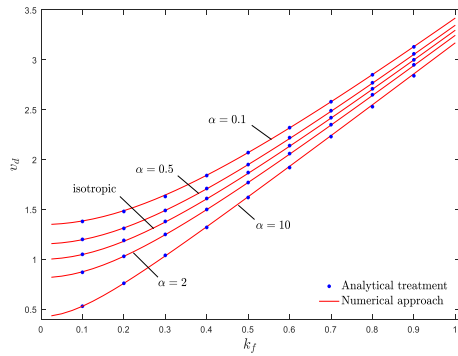
رابطه (۲۵) تأیید می‌کند که سرعت بحرانی تیر مدرج محوری متحرک محوری، به تغییرات پارامتر گرادیان چگالی و مدول الاستیک به علاوه سفتی خمشی بی‌بعد سیستم وابسته است. با هدف بررسی دقیق‌تر پایداری سیستم، نمودارهای کانتور دوبعدی سرعت بحرانی در صفحات $\alpha_E - \alpha_p$ و $k_f - \beta$ به ترتیب در شکل‌های ۹ (الف-ب) رسم شده‌اند. بر اساس شکل ۹-الف، سرعت بحرانی سیستم با افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک و کاهش پارامتر گرادیان چگالی افزایش می‌یابد و برعکس. در نتیجه می‌توان گفت که اثر پارامترهای گرادیان مدول الاستیک و چگالی بر مرزهای پایداری سیستم معکوس یکدیگر هستند. همان‌طور که در شکل‌های ۹-ب مشاهده می‌شود، سرعت بحرانی سیستم با کاهش ضریب اینرسی دورانی و افزایش پارامتر سفتی خمشی بی‌بعد افزایش می‌یابد و برعکس. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که ضریب اینرسی دورانی و پارامتر سفتی خمشی بی‌بعد نیز اثرات معکوس بر پایداری سیستم دارند. به عبارت دیگر، برعکس پارامتر گرادیان چگالی و ضریب اینرسی دورانی، افزایش پارامترهای گرادیان مدول الاستیک و سفتی خمشی بی‌بعد مقاومت سیستم به دایورژنس را بالا می‌برند. در نتیجه، انتخاب هم‌زمان پارامترهای گرادیان الاستیک و سفتی خمشی بی‌بعد بزرگ‌تر و پارامتر گرادیان

چگالی. به بیان دیگر، با انتخاب گرادیان چگالی کوچک‌تر و بزرگ‌تر، اختلاف بین مرزهای پایداری حالت خطی و نمایی چگالی تقویت می‌شود. بر اساس شکل ۸ (الف-ب)، از آنجایی که افزایش در ضریب اینرسی دورانی، مرزهای پایداری را به سمت سرعت‌های کوچک‌تر جابجا می‌کند، لذا تئوری تیر متحرک اوپلر برنولی، پایداری کمتری نسبت به تئوری تیر متحرک رایلی پیش‌بینی می‌کند. همچنین، برای هر β ثابت، با افزایش پارامتر گرادیان چگالی، محدوده‌های پایداری سیستم کوچک می‌شوند. در مجموع می‌توان گفت که در مقایسه با نقشه‌های پایداری سیستم در صفحات $v_d - \alpha_E$ و $v_d - k_f$ که در بخش قبل تحلیل شد، نقشه‌های پایداری در صفحات $v_d - \beta$ و $v_d - \alpha_p$ کلاً با افزایش β و α_p ، کاهش می‌دهند که به این موضوع اشاره می‌کند که افزایش ضریب اینرسی دورانی و پارامتر گرادیان چگالی می‌تواند سیستم را ناپایدار کند که منجر می‌شود به کاهش سرعت بحرانی سیستم. لازم به ذکر است که مرزهای پایداری نشان‌دهنده در شکل‌های ۷ و ۸ باهم در تطابق هستند. بر اساس شکل‌های ۷ و ۸، سرعت بحرانی سیستم وابستگی قابل توجهی به پارامتر گرادیان چگالی دارد و به ازای β های بزرگ یا پارامترهای گرادیان چگالی کوچک و بزرگ، این وابستگی مشهودتر است.

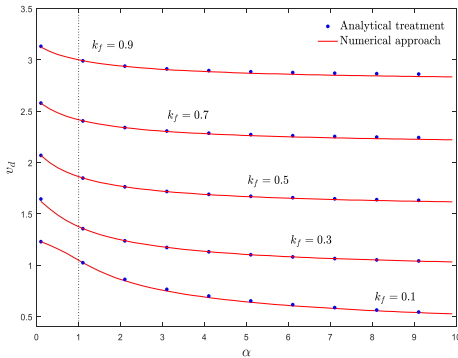
۴-۵- اثرات هم‌زمان تغییرات پارامتر گرادیان چگالی و مدول الاستیک

بر اساس بخش قبل، تغییرات چگالی و مدول الاستیک در راستای طولی اثر چشمگیری بر دینامیک تیرهای متحرک محوری دارند. همچنین نشان داده شد که با تنظیم پارامترهای α_E و α_p به‌طور جداگانه، می‌توان ارتعاشات اضافی سیستم را کاهش داد. بر اساس شکل‌های ۴ الی ۸، تغییرات چگالی و مدول الاستیک در راستای طولی سیستم، به‌طور جداگانه اثرات معکوس بر پایداری سیستم دارند. در نتیجه، این پارامترها می‌توانند درجات آزادی اضافی برای تنظیم مشخصات دینامیکی سیستم‌های متحرک محوری فراهم کنند. به بیان دیگر، با تنظیم هم‌زمان α_E و α_p می‌توان کارایی تیر متحرک محوری را به‌طور فراوانی بهبود بخشید. تعیین نقش تغییرات هم‌زمان مشخصات مواد تیر مدرج محوری متحرک در پایداری سیستم نیز اهمیت بالایی دارد.

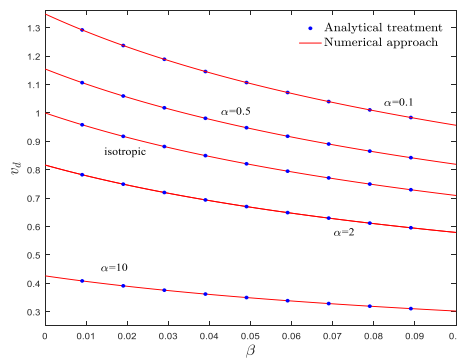
در این بخش، بر اثرات تغییرات هم‌زمان مدول الاستیک و



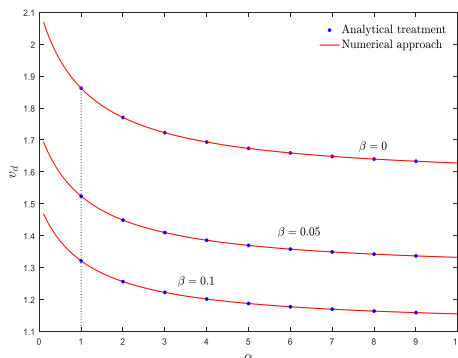
(الف)



(ب)



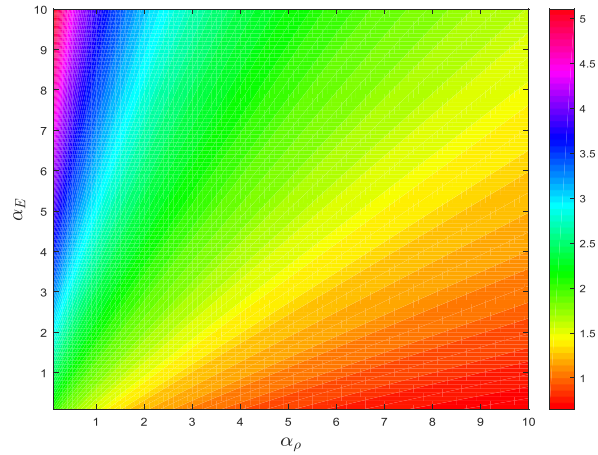
(ج)



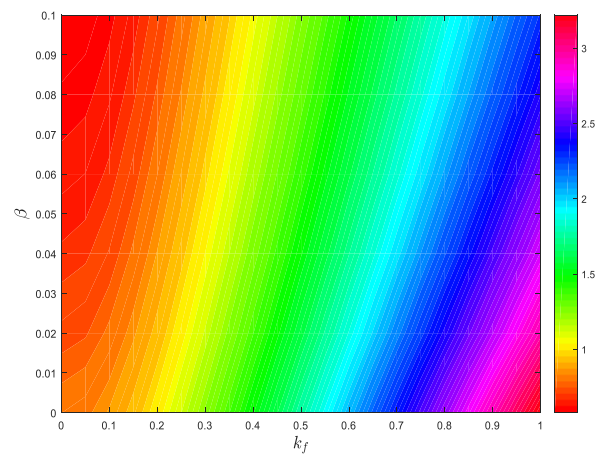
(د)

شکل ۱۰- سرعت بحرانی سیستم بر حسب (الف) سفتی خمشی (ب) پارامتر گرادیان (ج) ضریب اینرسی دورانی (د) پارامتر گرادیان

Fig.10: Critical velocity of the system according to (a) bending stiffness (b) gradient parameter (c) whirlling inertia coefficient (d) gradient parameter



(الف)



(ب)

شکل ۹- اثر (الف) پارامتر گرادیان چگالی و مدول الاستیک (ب) سفتی خمشی و ضریب اینرسی دورانی بر سرعت بحرانی سیستم

Fig.9: Influence of (a) density gradient parameter and elastic modulus (b) bending stiffness and whirlling inertia coefficient on the critical velocity of the system

و ممان اینرسی کوچکتر منجر به یک سیستم پایدارتر و در نتیجه بهبود عملکرد سیستم‌های متحرک محوری می‌شود [۳۷، ۳۸].

در شکل ۱۰ (الف-د)، آستانه‌های ناپایداری سیستم هنگامی که پارامترهای گرادیان چگالی و مدول الاستیک با هم برابر هستند شده است. این نمودارها نشان می‌دهند سرعت‌های بحرانی که از روش تحلیلی به دست آمده‌اند با نتایج روش عددی تطابق خوبی دارند. همان‌طور که در شکل ۱۰-الف دیده می‌شود، افزایش پارامتر گرادیان ماده (α)، منجر به یک کاهش ملایم در سرعت بحرانی سیستم می‌شود. در نتیجه در مقایسه با نقشه‌های پایداری در بخش‌های قبل (شکل‌های ۶ و ۸)، می‌توان گفت که گرادیان چگالی (افزودگی جرم) نقش غالبی

پایدارکننده و ناپایدارکننده بر تیر متحرک محوری دارند.
 ۲- در حالت چگالی و مدول الاستیک متغیر، به ترتیب تغییرات نمایی و خطی منجر به پایداری بیشتر سیستم می‌شوند.
 ۳- با یکسان در نظر گرفتن پارامترهای گرادیان چگالی و مدول الاستیک، اثر گرادیان چگالی بر پیکربندی ارتعاشاتی سیستم غالب است.
 ۴- هرچه سفتی خمشی بی‌بعد بزرگ‌تر، سیستم پایدارتر است، درحالی‌که هرچه ضریب اینرسی دورانی کوچک‌تر باشد، سیستم ناپایدارتر است. اثر تغییرات محوری مواد بر مرزهای پایداری سیستم، در سفتی‌های خمشی بی‌بعد و ضرایب اینرسی دورانی بی‌بعد کوچک و بزرگ، ملموس‌تر است.

مراجع

- [1] J. Wickert, Non-linear vibration of a traveling tensioned beam, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 517-503 (1992) (3)27.
- [2] M.H. Ghayesh, M. Amabili, Post-buckling bifurcations and stability of high-speed axially moving beams, *International Journal of Mechanical Sciences*, (2013) 68 91-76.
- [3] L.-Q. Chen, X.-D. Yang, Vibration and stability of an axially moving viscoelastic beam with hybrid supports, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, (2006) (6)25 1008-996.
- [4] H. Öz, M. Pakdemirli, Vibrations of an axially moving beam with time-dependent velocity, *Journal of Sound and Vibration*, 257-239 (1999) (2)227.
- [5] L.-Q. Chen, X.-D. Yang, C.-J. Cheng, Dynamic stability of an axially accelerating viscoelastic beam, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 666-659 (2004) (4)23.
- [6] K. Zhu, J. Chung, Vibration and stability analysis of a simply-supported Rayleigh beam with spinning and axial motions, *Applied Mathematical Modelling*, (2019) 66 382-362.
- [7] A.M. Dehrouyeh-Semnani, M. Dehrouyeh, H. Zafari-Koloukhi, M. Ghamami, Size-dependent frequency and stability characteristics of axially moving microbeams based on modified couple stress theory, *International*

در پایداری سیستم ایفا می‌کند و گرادیان مدول الاستیک تأثیر کمتری بر رفتار دینامیکی سیستم نسبت به گرادیان چگالی دارد. البته لازم به ذکر است که در مقایسه با بخش قبلی، همچنان که چگالی و مدول الاستیک به‌طور هم‌زمان در راستای طولی تغییر می‌کنند، هنگامی که اثر سفتی خمشی بی‌بعد برجسته می‌شود، مرزهای پایداری به هم نزدیک‌تر هستند و حساسیت کمتری به تغییرات مشخصات مادی در راستای طولی دارند. بر اساس شکل ۱۰-ب، با افزایش پارامتر گرادیان، نواحی پایدار سیستم کوچک شده‌اند و نمودار روند کاهشی دارد. ضمناً در سفتی‌های خمشی بی‌بعد بزرگ، تغییر پارامتر گرادیان، اثر جزئی بر آستانه ناپایداری تیر متحرک دارد که این نکته در طراحی می‌تواند مفید باشد. در شکل ۱۰ (ج-د)، محدوده‌های پایداری با افزایش پارامتر گرادیان و ضریب اینرسی دورانی، کوچک می‌شوند. در مقایسه با حالت همگن، هنگامی که $\alpha < 1$ است، تیر متحرک محوری پایدار است. همچنین وقتی پارامتر گرادیان به اندازه کافی زیاد باشد، سرعت‌های بحرانی سیستم تغییرات کمی خواهند داشت.

۶- نتیجه‌گیری

دینامیک سازه‌ای و ناپایداری‌های ممکن ارتعاشاتی تیرهای مدرج محوری متحرک با جزییات، به صورت عددی و تحلیلی مطالعه شده است. توزیع مشخصات مادی سیستم در راستای طولی، به صورت خطی و نمایی در نظر گرفته شده است. با به‌کارگیری روش گسسته‌سازی گالرکین و مسئله مقدار ویژه، فرکانس‌های طبیعی، پاسخ دینامیکی و محدوده‌های ناپایداری فلاتر و دایورژنس سیستم برحسب اثرات ترکیبی سرعت تیر، سفتی خمشی بی‌بعد، پارامترهای گرادیان چگالی و مدول الاستیک محاسبه شدند. عبارت‌های فرم بسته ریاضی برای سرعت بحرانی سیستم به‌دست‌آمده‌اند. نقشه‌های پایداری و نمودارهای کانتور دوبعدی سرعت بحرانی برحسب پارامترهای درجه‌بندی محوری و سفتی خمشی بی‌بعد برای تیرهای رایلی و اوپلر-برنولی رسم شده‌اند. نتایج مهم به صورت زیر خلاصه می‌شوند:

۱- در مقایسه با تیرهای متحرک محوری همگن، هنگامی که چگالی و مدول الاستیک در راستای طولی، به ترتیب کاهش ($\alpha_p < 1$) و افزایش ($\alpha_E > 1$) می‌یابند، سیستم پایدارتر خواهد بود. به‌بیان‌دیگر، افزایش پارامترهای گرادیان مدول الاستیک و چگالی به ترتیب اثر

- Zarghami, N. Mostoufi, Dynamics of two-phase flow in vertical pipes, *Journal of Fluids and Structures*, (2019) 87 173-150.
- [19] A. Ebrahimi-Mamaghani, R. Sotudeh-Gharebagh, R. Zarghami, N. Mostoufi, Thermo-mechanical stability of axially graded Rayleigh pipes, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, (30-1 (2020).
- [20] S. Esfahani, S. Esmaeilzade Khadem, A. Ebrahimi Mamaghani, Size-dependent nonlinear vibration of an electrostatic nanobeam actuator considering surface effects and inter-molecular interactions, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, (3)15 505-489 (2019).
- [21] S. Esfahani, S.E. Khadem, A.E. Mamaghani, Nonlinear vibration analysis of an electrostatic functionally graded nano-resonator with surface effects based on nonlocal strain gradient theory, *International Journal of Mechanical Sciences*, 522-508 (2019) 151.
- [22] R. Hosseini, M. Hamed, A. Ebrahimi Mamaghani, H.C. Kim, J. Kim, J. Dayou, Parameter identification of partially covered piezoelectric cantilever power scavenger based on the coupled distributed parameter solution, *International Journal of Smart and Nano Materials*, -110 (2017) (3-2)8 124.
- [23] A.E. Mamaghani, S. Khadem, S. Bab, Vibration control of a pipe conveying fluid under external periodic excitation using a nonlinear energy sink, *Nonlinear Dynamics*, (3)86 1795-1761 (2016).
- [24] A.E. Mamaghani, S.E. Khadem, S. Bab, S.M. Pourkiaee, Irreversible passive energy transfer of an immersed beam subjected to a sinusoidal flow via local nonlinear attachment, *International Journal of Mechanical Sciences*, 447-427 (2018) 138.
- [25] A.E. Mamaghani, H. Zohoor, K. Firoozbakhsh, R. Hosseini, Dynamics of a Running Below-Knee Prosthesis Compared to Those of a Normal Subject, *Journal of Solid Mechanics Vol*, 160-152 (2013) (2)5.
- [26] S.H. Mirtalebi, M.T. Ahmadian, A. Ebrahimi-Mamaghani, On the dynamics of micro-tubes conveying fluid on various foundations, *SN Applied Sciences*, (6)1 *Journal of Engineering Science*, 112-98 (2015) 97.
- [8] T.-c. Li, Z.-c. Hou, J.-f. Li, Stabilization analysis of a generalized nonlinear axially moving string by boundary velocity feedback, *Automatica*, 503-498 (2008) (2)44.
- [9] Y.-W. Zhang, Z. Zhang, L.-Q. Chen, T.-Z. Yang, B. Fang, J. Zang, Impulse-induced vibration suppression of an axially moving beam with parallel nonlinear energy sinks, *Nonlinear dynamics*, 71-61 (2015) (2-1)82.
- [10] G. Udupa, S.S. Rao, K. Gangadharan, Functionally graded composite materials: an overview, *Procedia Materials Science*, 1299-1291 (2014) 5.
- [11] M.T. Piovan, R. Sampaio, Vibrations of axially moving flexible beams made of functionally graded materials, *Thin-Walled Structures*, 121-112 (2008) (2)46.
- [12] S. Sui, L. Chen, C. Li, X. Liu, Transverse vibration of axially moving functionally graded materials based on Timoshenko beam theory, *Mathematical Problems in Engineering*, 2015 (2015).
- [13] K. Kiani, Longitudinal and transverse instabilities of moving nanoscale beam-like structures made of functionally graded materials, *Composite Structures*, 107 619-610 (2014).
- [14] T. Yan, T. Yang, L. Chen, Direct Multiscale Analysis of Stability of an Axially Moving Functionally Graded Beam with Time-Dependent Velocity, *Acta Mechanica Sinica*, 14-1.
- [15] M. Rezaee, S. Lotfan, Non-linear nonlocal vibration and stability analysis of axially moving nanoscale beams with time-dependent velocity, *International Journal of Mechanical Sciences*, 46-36 (2015) 96.
- [16] A. Ebrahimi Mamaghani, S. Esameilzadeh Khadem, Vibration analysis of a beam under external periodic excitation using a nonlinear energy sink, *Modares Mechanical Engineering*, 194-186 (2016) (9)16 (In Persian).
- [17] A. Ebrahimi-Mamaghani, S.H. Mirtalebi, M.-T. Ahmadian, Magneto-mechanical stability of axially functionally graded supported nanotubes, *Materials Research Express*, (2019).
- [18] A. Ebrahimi-Mamaghani, R. Sotudeh-Gharebagh, R.

- Journal of Solid and Fluid Mechanics, 177-165 (2018) (4)8 (In Persian).
- [33] A. Ebrahimi Mamaghani, R. Hosseini, M. Shahgholi, H. Sarparast, Free lateral vibration analysis of inhomogeneous beams under various boundary conditions, Journal of Solid and Fluid Mechanics, 135-123 (2018) (3)8 (In Persian).
- [34] R.H. A. Ebrahimi Mamaghani, Energy Harvesting from Nonlinear Vibrating System Using Two Impacting Cantilever Beam, Scientific Journal Management System, 88-75 (2019) (1)15 (In Persian).
- [35] H. mirtalebi, A. Ebrahimi Mamaghani, On the Dynamics of Micro-Tubes Conveying Fluid on Various Foundations, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, (1)52 10-1 (2018) (In Persian).
- [36] A. Ebrahimi Mamaghani, H. Sarparast, Lateral vibration control of a beam subjected to the harmonic external load using a nonlinear energy sink, Journal of Modeling in Engineering, 390-375 (2018) (55)16 (In Persian).
- [37] A. Ebrahimi Mamaghani, R. Hosseini, Mathematical Modelling and Resonance Analysis in Impact Oscillators, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, (1)51 168-157 (2019) (In Persian).
- [38] R. Hosseini, M.M. EBRAHIMI, A. ASA, An Investigation Into the Effects of Friction and Anisotropy Coefficients and Work Hardening Exponent on Deep Drawing With FEM, (2012). 547 (2019).
- [27] S.H. Mirtalebi, A. Ebrahimi-Mamaghani, M.T. Ahmadian, Vibration Control and Manufacturing of Intelligibly Designed Axially Functionally Graded Cantilevered Macro/Micro-tubes, IFAC-PapersOnLine, 387-382 (2019) (10)52.
- [28] M. Safarpour, A. Rahimi, A. Alibeigloo, H. Bisheh, A. Forooghi, Parametric study of three-dimensional bending and frequency of FG-GPLRC porous circular and annular plates on different boundary conditions, Mechanics Based Design of Structures and Machines, (31-1) (2019).
- [29] H. Sarparast, A. Ebrahimi-Mamaghani, Vibrations of laminated deep curved beams under moving loads, Composite Structures, (11)262 (2019).
- [30] H. Sarparast, S. Esmailzade Khadem, A. Ebrahimi Mamaghani, Investigation of the cancellation, resonance and maximum amplitude of free vibration phenomena in laminated curved Timoshenko beams under moving loads, Modares Mechanical Engineering, -69 (2019) (9)18 80 (In Persian).
- [31] R. Hosseini, A. Ebrahimi mamaghani, M. Nouri, An Experimental Investigation into Width Reduction Effect on the Efficiency of Piezopolymer Vibration Energy Harvester, Journal of Solid and Fluid Mechanics, (3)7 51-41 (2017) (In Persian).
- [32] A. Ebrahimi Mamaghani, H. sarparast, Target energy transfer from a doubly clamped beam subjected to the harmonic external load using nonlinear energy sink,

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. Forooghi, M. Safarpour, A. Alibeigloo, Investigation of the effect of longitudinal grading of material on vibrations of axially moving systems. Amirkabir J. Mech Eng., 53(special issue 2) (2021) 1197-1210.

DOI: [10.22060/mej.2020.17295.6567](https://doi.org/10.22060/mej.2020.17295.6567)



