



## مطالعه پارامتریک ارتعاشات وابسته به اندازه تیرهای مدرج محوری رایلی تحت یک بار متحرک بر روی بستر پاسترناک

علی فروغی، مهران صفرپور، اکبر علی بیگلو\*

دانشکده مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸/۰۸/۲۲

بازنگری: ۱۳۹۸/۱۲/۲۸

پذیرش: ۱۳۹۹/۰۲/۱۴

ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۲/۱۷

### کلمات کلیدی:

بار متحرک

مواد مدرج محوری

پدیده لغو

بیشینه دامنه ارتعاشات

سرعت بحرانی بار

**خلاصه:** ارتعاشات میکروتیرهای مدرج تابعی محوری رایلی و اوپلر برنولی تحت یک بار متحرک بر روی بستر پاسترناک به صورت عددی و تحلیلی مطالعه شده است. همچنین، برای اولین بار، یک مدل سازی دقیق ریاضی برای تحلیل اثر پارامترهای مختلف مانند گرادیان طولی مواد، فاکتور اینرسی دورانی، سختی بستر پاسترناک و پارامتر گرادیان کرنش بر سرعت بحرانی، ضریب دینامیکی و مکانیزم های لغو و ماکسیمم دامنه ارتعاشات سیستم به دست آمده است. فرکانس های طبیعی تیر مدرج تابعی محوری رایلی به دست آمده و با نتایج موجود در ادبیات فنی مقایسه می شوند. عبارات های ریاضی فرم بسته ساده برای ضریب بزرگنمایی دینامیکی، لغو و بیشینه دامنه ارتعاشات آزاد سیستم استخراج شدند. نشان داده می شود که به ازای مقادیر کمتر و بیشتر از پارامتر گرادیان بحرانی، تغییرات مشخصات مادی سیستم اثرات معکوس بر دامنه ارتعاش اجباری و آزاد سیستم دارند. علاوه بر این، نتیجه گیری می شود که در مقایسه با تیرهای اوپلر-برنولی همگن، در میکروتیرهای مدرج محوری رایلی محاط شده در بستر برشی پاسترناک، با انتخاب مقادیر مناسبی از پارامتر گرادیان، ضریب اینرسی دورانی، سختی بستر و پارامتر گرادیان کرنش، می توان پدیده های لغو و بیشینه ارتعاشات آزاد سیستم را به خوبی کنترل کرد. همچنین نتایج پژوهش حاضر می تواند به عنوان معیاری برای طراحی بهینه سازه های ناهمگن تحت تحریک بارهای متحرک به کار برده شوند.

### ۱- مقدمه

پدیده های تشدید و حداکثر دامنه ارتعاشات آزاد اثرات نامطلوبی بر عملکرد و ایمنی سیستم ها دارند، لذا باید تاحدممکن از برابردن سرعت بار متحرک، با سرعت های تشدید و حداکثر دامنه ارتعاشات آزاد سیستم جلوگیری کرد. از سوی دیگر عبور بارهای متحرک با سرعت لغو به دلیل حداقل شدن دامنه ارتعاشات آزاد سیستم، منجر به عملکرد بهینه سیستم می شوند. بنابراین سرعت بارهای متحرک نقش مهمی در مکانیسم های فعل و انفعال خودرو ایفا می کند. به طور مثال، یو و همکاران [۵] یک حل تحلیلی برای اثر لایه های غیر ایزوتروپیک روی بستر چندلایه الاستیک تحت بار محوری را ارائه کردند. آن ها نشان دادند که خواص غیر ایزوتروپیک یک اثر قابل توجه بر رفتارهای مکانیکی یک بستر الاستیک چندلایه دارد. کائو و همکاران [۶] یک روش المان متحرک برای آنالیز دینامیکی ورق کامپوزیتی که بر روی

با پیشرفت سامانه های نقل و انتقال سرعت بالا، مسئله ارتعاشات القاشده توسط بارهای متحرک در دهه های اخیر توجه بسیار زیادی به خود جلب کرده است. به همین دلیل محققان، بدون نیاز به نصب حسگر روی سازه، اندازه گیری دقیق مشخصه های دینامیکی سامانه های تحت بار متحرک را با کمک مدل سازی های ریاضی مهیا کرده اند [۱، ۲]. همان طور که در ادبیات فنی نشان داده شده است. بارهای متحرک، خیزها و تنش های بزرگ تری نسبت به بارهای استاتیکی در سازه ایجاد می کنند. همچنین این سیستم ها به ازای سرعت های مختلف بار متحرک، مستعد رخداد پدیده های مختلف مانند لغو، تشدید و بیشینه دامنه ارتعاشات خواهند بود [۳، ۴]. از آنجایی که

\* نویسنده دار مکاتبات: abeigloo@modares.ac.ir

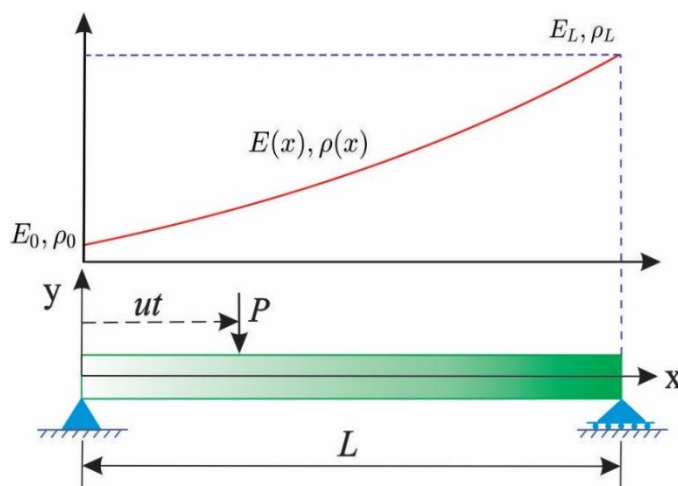


گرادیان مادی و نسبت منظر را بر پاسخ زمانی سازه بررسی کردند. خلیلی و همکاران [۲۶]، با به‌کارگیری روش ترکیبی ریتز-مربعات تفاضلی ارتعاشات اجباری تیرهای مدرج حامل بارهای متحرک را مطالعه کردند. آن‌ها فهمیدند که سرعت بحرانی تیر را می‌توان با انتخاب گرادیان مناسب مواد کنترل کرد. ابراهیمی و حسینی [۲۷] به بررسی پاسخ ارتعاشات غیرخطی نانوکامپوزیت‌های متخلخل مدرج تابعی تحت بار متحرک پرداختند. نتایج آن‌ها نشان داد که یک رابطه دوره‌ای بین پاسخ دامنه و سرعت بار متحرک وجود دارد.

لازم به ذکر است که اکثر مطالعات صورت‌گرفته در این زمینه، بر روی مطالعه سازه‌هایی تمرکز کرده‌اند که موادشان در راستای ضخامت درجه‌بندی شده‌اند. این سازه‌ها که در ادبیات فنی به‌طور گسترده گزارش شده‌اند، ممکن است برای کاربردهای مهندسی پیشرفته و پیچیده، کارآمد و جامع نباشند. درعین‌حال، تحلیل ارتعاشات سازه‌های مدرج تحت تحریک بار متحرک که در راستای طول موادشان تغییر می‌کند به‌ندرت موردبررسی قرار گرفته‌اند و اطلاعات کمی در این زمینه موجود است. علیمرادزاده و همکاران [۲۸] تحلیل ارتعاشات غیرخطی یک تیر مدرج محوری بر روی بستر الاستیک غیرخطی تحت تحریک بار هارمونیک خارجی را انجام دادند. جنس مواد سازه بر اساس قانون توانی در راستای طول تیر تغییر می‌کند. آن‌ها از روش متغیرگیری برای استخراج عبارت‌های تحلیلی تقریبی فرکانس غیرخطی و پاسخ دینامیکی غیرخطی بهره بردند. همچنین آن‌ها کشف کردند که بیشینه پاسخ دینامیکی با افزایش شاخص توانی افزایش می‌یابد. وانگ و وو [۲۹] اثر محیط حرارتی بر پاسخ دینامیکی تیرهای مدرج محوری را قبل و بعد از عبور بار هارمونیک متحرک مورد آزمایش قرار دادند. آن‌ها فرض کردند که مشخصات مادی سیستم موردنظر بر طبق قانون توانی تغییر می‌کند. همچنین آن‌ها اثرات مقدار گرادیان مواد را بر دما و سرعت بحرانی سیستم بررسی کردند و دریافتند که با افزایش دما، مکان و دامنه جابجایی بیشینه سازه به‌شدت تغییر می‌یابد. شیمشک و همکاران [۳۰] پاسخ اجباری دینامیکی تیرهای مدرج محوری دوسرمفصل تحت یک بار هارمونیک متحرک را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها فرض کردند که تیر مدرج محوری متشکل از استیل و آلومینیوم است و چگالی و مدول الاستیک سیستم در راستای طولی تیر بر اساس قانون توانی به‌تدریج تغییر می‌کنند. آن‌ها نشان دادند که گرادیان ماده در

بستر پاسترناک قرار دارد و همچنین تحت بار متحرک است، ارائه کردند. آن‌ها اثرات بستر پاسترناک، مکانیزم اتلاف انرژی، سرعت بار و خواص مواد را بر روی پاسخ دینامیکی سیستم موردبررسی قرار دادند. نتایج آن‌ها نشان داد که اگر اندازه بار متحرک ثابت باشد، فقط یک سرعت بحرانی پدید می‌آید. ارتعاشات یک ورق پیش‌تنش بر روی نیم‌صفحه چندلایه ایزوتروپیک عرضی به‌واسطه بار متحرک توسط یانگ آی و همکاران [۷] موردبررسی قرار گرفته است. اثرات سرعت بار و صلیبیت بار بر روی ورق توسط مثال‌های عددی که آن‌ها ارائه دادند، تحقیق شد. پاسخ دینامیکی یک ورق الاستیک خطی و ایزوتروپیک لاغر بر روی بستر خاکی نیم‌فضا که تحت بار متحرک قرار دارد توسط جن و همکاران [۸] مطالعه شده است. نتایج آن‌ها نشان داد که اثر سرعت بار بر روی پاسخ ورق و خاک بسیار کوچک است. علاوه بر این، در میان تحقیقات منتشرشده در این زمینه، چندین بررسی بر روی تحلیل ارتعاشات تیر با استفاده از تئوری تیر رایلی انجام شده است [۹-۱۳].

در اکثر تحلیل‌های صورت‌پذیرفته در این زمینه، سازه‌های یکنواخت و ایزوتروپیک در نظر گرفته شده‌اند. در دو دهه اخیر، با پیشرفت تکنولوژی و گسترش علم مواد، محققین با تغییر مشخصات مواد، رفتار دینامیکی سازه‌های تحت بار متحرک را بهبود دادند [۱۴-۱۷]. مواد مدرج تابعی به دلیل داشتن ویژگی‌های مناسب و مزایای متعدد نسبت به مواد ایزوتروپیک و کامپوزیت لایه‌ای، پتانسیل بالایی برای کاربردهای گسترده در صنایع خودرو، مهندسی پزشکی و الکترونیک دارند. مواد مدرج مواد غیرهمگن شامل دو یا چند نوع ماده با گسترش پیوسته و نرم در یک راستای دلخواه هستند که با داشتن ویژگی‌های مناسب مکانیکی و حرارتی مانند تمرکز تنش کمتر، مقاومت خوردگی بهتر و استحکام شکنندگی بالاتر و تنش حرارتی کمتر به‌طور گسترده به کار گرفته می‌شوند [۱۸-۲۴]. البته سازه‌های مدرج تابعی را نیز می‌توان به سیستم‌هایی اطلاق نمود که با تغییر مشخصات هندسی در یک راستای مشخص تغییر می‌کنند. به همین دلیل به‌کارگیری مواد مدرج تابعی در سازه‌های تحت بار متحرک می‌تواند اهمیت بالایی در طراحی تأسیسات آینده داشته باشد. ملک‌زاده و منجم زاده [۲۵] مطالعات مقایسه‌ای بین پاسخ خطی و غیرخطی صفحات مدرج با شرایط مرزی مختلف تحت تحریک بار متحرک را انجام دادند. آن‌ها اثرات پارامترهای مختلف مانند شاخص



شکل ۱. شماتیک تیر مدرج تابعی محوری تحت اثر بار متحرک

Fig. 1. Schematic of axially functionally graded beam under moving load effect

پدیده‌های گوناگونی مانند سرعت بحرانی، لغو و بیشینه دامنه ارتعاشات آزاد سیستم گزارش می‌شود. در ادامه، مدل تئوری و معادله دینامیکی تیر مدرج محوری نمایی تحت تحریک یک بار متحرک خارجی ارائه شده است. سپس روش حل به‌طور خلاصه ارائه و فرکانس‌های طبیعی سیستم استخراج می‌شوند. برای تعیین صحت روش حل، نتایج برای سیستم ایزوتروپیک تأیید شده‌اند. اثرات پارامترهای کلیدی مختلف مانند مقدار گرادیان مواد سازه و سرعت بار متحرک خارجی را بر ضریب بزرگنمایی دینامیکی، پاسخ‌های اجباری-آزاد سیستم، مکانیسم‌های لغو و بیشینه دامنه ارتعاشات آزاد سنجیده می‌شود. علاوه بر آن، نتایج به‌دست‌آمده برای تیرهای اویلر برنولی و رایلی با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

## ۲- مدل‌سازی ریاضی

یک نیرو متمرکز متحرک با دامنه ثابت  $P$  و سرعت ثابت  $u$  و یک تیر افقی مدرج محوری با طول  $L$  و سطح مقطع  $A$  و ممان اینرسی  $I$  در شکل ۱ مشاهده می‌شود. همچنین، فرض شده است که سیستم توسط یک بستر برشی پاسترناک با سختی برشی  $k_p$  محاط شده است. از آنجاکه سیستم ارائه‌شده، یک مدل ساده از پل‌های تحت تحریک ناشی از عبور وسایل نقلیه است، لذا فرض شده است سطح مقطع سیستم در راستای طولی ثابت است و بار متحرک نیز با سرعت ثابت حرکت می‌کند. مشخصات مادی تیر یعنی مدول الاستیک  $E(x)$

سیستم، نقش مهمی بر پاسخ ارتعاشاتی سیستم ایفا می‌کنند. در قرن گذشته، با ظهور قطعات مکانیکی و الکترونیکی بسیار کوچک، ارتباطات، محاسبات ساخت و سیستم‌های انتقال به‌طور اساسی تحت تأثیر قرار گرفته است. به همین دلیل مطالعه مسئله سیستم‌های بار متحرک در ابعاد کوچک توجهات زیادی به خود جلب کرده‌اند. اسن [۳۱] دینامیک میکروتیرهای تیموشنکو وابسته به اندازه تحت بارهای متحرک را مطالعه کردند. اثرات سرعت‌های مختلف بار، جرم بار و پارامتر اندازه مواد بر روی رفتار دینامیکی سازه توسط او تحقیق شده است. شیمشک [۳۲] تحلیل دینامیکی یک میکروتیر حامل میکروذرات متحرک تعبیه‌شده را مبتنی بر تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده تحقیق کردند. نتایج او نشان داد که پارامترهای خیز استاتیکی و فرکانس‌های ارتعاش آزاد نقش مهمی در پاسخ دینامیکی سیستم دارند. پاسخ دینامیکی یک نانو تیر ترموالاستیک که تحت یک بار متحرک است توسط ابوالرغال و زنگور [۳۳] مورد بررسی قرار گرفته است. آن‌ها نشان دادند که سرعت بار متحرک و پارامتر استحکام بر روی دما تأثیری ندارد.

بر طبق اطلاعات نویسندگان، در این مقاله برای اولین بار، یک مطالعه جامع بر روی تحلیل ارتعاشاتی میکروتیرهای مدرج تابعی محوری نمایی رایلی و اویلر برنولی تحت بار متحرک بر روی بستر برشی پاسترناک براساس تئوری مرتبه بالای گرادیان کرنش (برای در نظرگیری اثرات اندازه) صورت می‌پذیرد. همچنین شرایط وقوع

و چگالی  $\rho(x)$  به ترتیب طبق معادلات ۱ و ۲، در راستای طولی تیر بر طبق قانون نمایی تغییر می‌کنند:

$$V = -\int_0^L M \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \quad (۶)$$

$$E(x) = E_0 f(x) = E_0 e^{2\alpha x/L} \quad (۱)$$

با فرض مدل تیر رایلی (در نظر گرفتن اثرات اینرسی دورانی)، انرژی جنبشی تیر مدرج محوری به صورت مقابل نوشته می‌شود:

$$\rho(x) = \rho_0 f(x) = \rho_0 e^{2\alpha x/L} \quad (۲)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) I \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right)^2 dx \quad (۷)$$

در معادلات (۱) و (۲)،  $\alpha$  پارامتر بی بعد گرادیان،  $E$  و  $\rho$  نیز به ترتیب مدول الاستیک و چگالی تیر در ابتدای تیر ( $x=0$ ) هستند.

کار نیروهای خارجی شامل کار بار متحرک و بستر برشی پاسترناک نیز طبق معادله زیر بیان می‌شود:

همان‌طور که در ادبیات فنی نشان داده شده است، رفتار مکانیکی سازه‌ها در ابعاد میکرو و نانو با ابعاد ماکرو فرق می‌کند و دیگر تئوری کلاسیک برای پیش‌بینی و مدل‌سازی رفتار مکانیکی سازه‌های با ابعاد کوچک صادق نیست. به همین دلیل، تئوری‌های مرتبه بالایی مانند تئوری گرادیان کرنش معرفی برای تسخیر اثرات اندازه در ابعاد میکرو معرفی شدند. براساس تئوری گرادیان کرنش، معادله ساختاری وابسته به اندازه تنش برای میکروتیر به شکل مقابل نوشته می‌شود [۳۴-۳۶]:

$$W_p = \int_0^L (P\delta(x-ut)w(x,t) - k_b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) dx \quad (۸)$$

$$\sigma_x = E(x)\varepsilon_{xx} - l^2 \nabla \cdot (E(x)\nabla \varepsilon_{xx}) \quad (۳)$$

که در آن،  $\delta$  به تابع دلتای دیراک اشاره می‌کند. با کمک از تعاریف ارائه شده برای انرژی‌های جنبشی و پتانسیل و کار خارجی و همچنین استفاده از اصل همپلتون تعمیم یافته، معادلات دیفرانسیل حرکت سیستم طبق رابطه زیر نوشته می‌شود:

که در آن  $l$  پارامتر گرادیان کرنش است و  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$ . با در نظرگیری رابطه خطی کرنش-جابجایی برای سیستم مورد نظر، کرنش طولی سیستم این چنین نوشته می‌شود:

$$(E(x)Iw'')'' - l^2 (E(x)Iw'''' - k_b w'' + \rho(x)A_p \dot{w}' - \rho(x)I\dot{w}' - \rho'(x)I\dot{w}') = P\delta(x-ut) \quad (۹)$$

$$\varepsilon_{xx} = -y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۴)$$

باهدف استخراج معادله بی بعد، پارامترهای بی بعد در ادامه معرفی می‌شوند:

که  $w$  جابجایی عرضی سیستم در راستای  $y$  است. معادله ممان خمشی سیستم نیز به صورت مقابل در نظر گرفته می‌شود:

$$M = \int_A y \sigma_x dA_p \quad (۵)$$

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{w}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \left( \frac{E_0 I}{\rho_0 A} \right)^{0.5} \quad (۱۰)$$

در نتیجه، انرژی کرنشی سیستم به شکل مقابل می‌توان بازنویسی

$j$ -ام تیر دوسر مفصل است که  $\varphi$  به صورت زیر تخمین زده می شود:

$$\varphi_j(\xi) = \sqrt{2} \sin(j\pi\xi) \quad (14)$$

در ابتدا برای استخراج فرکانسهای طبیعی سیستم، نیروی خارجی نادیده گرفته می شود. سپس با جایگذاری معادلات (۱۳) و (۱۴) در معادله (۱۱) و استفاده از خاصیت تعامد مودها، فرم معادلات دیفرانسیل معمولی معادله (۸) به دست می آید و به صورت زیر به فرم ماتریسی بیان خواهد شد:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(\tau) + \mathbf{K}\mathbf{q}(\tau) = 0 \quad (15)$$

که در آن ماتریس  $\mathbf{M}$  ماتریس جرم سیستم،  $\mathbf{K}$  ماتریس سختی سیستم و  $\mathbf{q}$  بردار جابجایی توابع زمانی سیستم خواهند بود که در روابط (۱۶) الی (۱۸)، با جزییات نوشته شده اند:

$$\mathbf{q} = [q_1(\tau), q_2(\tau), \dots, q_n(\tau)]^T \quad (16)$$

$$\mathbf{M}_{jk} = \int_0^1 \begin{pmatrix} f(\xi)\phi_j(\xi)\phi_k(\xi) \\ -\gamma \left( f(\xi)\phi_j(\xi)\phi_k''(\xi) + f'(\xi)\phi_j(\xi)\phi_k'(\xi) \right) \end{pmatrix} d\xi \quad (17)$$

$$\mathbf{K}_{jk} = \int_0^1 \begin{pmatrix} f(\xi)\phi_j(\xi)\phi_k''''(\xi) + 2f'(\xi)\phi_j(\xi)\phi_k'''(\xi) \\ (f(\xi)\phi_k''''(\xi) + f''(\xi)\phi_j(\xi)\phi_k''(\xi)) \\ -\mu^2 \left( f(\xi)\phi_j(\xi)\phi_k''''(\xi) + 3f'(\xi)\phi_j(\xi)\phi_k'''(\xi) + 3f''(\xi)\phi_j(\xi)\phi_k''(\xi) \right) \\ (f(\xi)\phi_j(\xi)\phi_k''''(\xi) + f'''(\xi)\phi_j(\xi)\phi_k'''(\xi)) \end{pmatrix} d\xi \quad (18)$$

که  $\xi$ ،  $\eta$  و  $\tau$  پارامترهای بی بعد طول، جابه جایی عرضی و زمان می باشند. با جاگذاری معادله ۱۰ در ۹ به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$(f(\xi)\eta'''' - \mu^2(f(\xi)\eta'''' - k_b\eta'' + f(\xi)\dot{\eta}) - \gamma f(\xi)\dot{\eta}'' - \gamma f'(\xi)\dot{\eta}') = F\delta(\xi - v\tau) \quad (11)$$

که پارامترهای بی بعد پدید آمده در معادله ۱۱ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$F = \frac{PL^2}{E_0I} \quad v = \frac{uT}{L} \quad \gamma = \frac{1}{AL^2} \quad \mu = \frac{l}{L} \quad K_b = \frac{k_bL^2}{E_0I} \quad (12)$$

لازم به ذکر است که  $\gamma$  و  $\mu$  در معادله ۱۲، به ترتیب فاکتور اینرسی دورانی و پارامتر گرادیان کرنشی هستند. زمانی که  $\gamma$  برابر صفر در نظر گرفته شود، معادله حرکت دینامیکی (۱۱) به معادله حرکت میکروتیر اوپلر برنولی مدرج تابعی محوری تقلیل می یابد. همچنین، زمانی که  $\mu$  برابر صفر در نظر گرفته شود، معادله حرکت دینامیکی (۱۱) به معادله حرکت تیر رایلی مدرج تابعی محوری تقلیل می یابد.

### ۳- روش گالرکین

به منظور استخراج معادله کاهش مرتبه یافته سیستم و جداسازی فضای مکان و زمان، روش گالرکین به کار برده می شود. در این روش، خیز بی بعد تیر، با معادله (۱۳) تخمین زده می شود:

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(\xi) q_j(\tau) \quad (13)$$

که در آن  $n$  تعداد مودهای ارتعاشی خمشی،  $q_j$  مختصات تعمیم یافته بی بعد و  $\varphi$  شکل مودهای بی بعد برای مود ارتعاشاتی

#### ۲-۴ ارتعاشات آزاد

هنگامی که موقعیت بار برابر  $\xi=1$  می‌شود، بار تیر را ترک می‌کند. نقطه وسط تیر طبق معادله (۲۱) ارتعاشات آزاد را تجربه می‌کند:

$$q_n^{free}(\tau) = q_n^{free}(0) \cos(\omega_n \tau) + \frac{\dot{q}_n^{free}(0)}{\omega_n} \sin(\omega_n \tau) \quad (22)$$

شرایط اولیه ارتعاشات آزاد با جابجایی و سرعت در لحظه ترک بار به دست می‌آید. با جایگذاری در معادله (۲۰) به دست خواهد آمد:

$$q_n^{free}(0) = q_n^{force} \left( \frac{1}{v} \right) = - \frac{F_0 n \pi v}{\omega_n (\omega_n^2 - (n \pi v)^2)} \sin \left( \frac{\omega_n}{v} \right) \quad (23)$$

$$\dot{q}_n^{free}(0) = \dot{q}_n^{force} \left( \frac{1}{v} \right) = \frac{F_0 n \pi v}{(\omega_n^2 - (n \pi v)^2)} \left( \cos(n \pi) - \cos \left( \frac{\omega_n}{v} \right) \right) \quad (24)$$

با اعمال تبدیل مثلثاتی، پاسخ ارتعاشاتی آزاد تیر مدرج تابعی محوری ناشی از بار معادله (۲۲) به صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$q_n^{free}(\tau) = X_n \sin(\omega_n \tau - \phi_n) \quad (25)$$

که در آن  $X_n$  دامنه و  $\phi_n$  زاویه فاز پاسخ ارتعاشات آزاد برای  $n$ -امین مود سیستم هستند و در معادلات (۲۶) و (۲۷) بیان شده‌اند:

$$\frac{X_n}{F_0} = \frac{n \pi v \sqrt{2}}{\omega_n (\omega_n^2 - (n \pi v)^2)} \sqrt{1 - \cos(n \pi) \cos \left( \frac{\omega_n}{v} \right)} \quad (26)$$

فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد سیستم ( $\omega$ ) با بازنویسی معادله (۱۵) در فرم مرتبه اول و حل عددی مسئله مقدار ویژه به دست می‌آیند.

#### ۴- حل تحلیلی

ارتعاشات سیستم تحت تحریک بار را می‌توان به دو مرحله تقسیم کرد: الف) ارتعاشات اجباری: هنگامی که بار بر روی تیر حرکت می‌کند. ب) ارتعاشات آزاد: هنگامی که بار تیر را ترک کرده است.

#### ۴-۱ ارتعاشات اجباری

با ضرب معادله (۱۱) در  $\sin(n \pi \xi)$  و انتگرال‌گیری بر روی بازه  $[0, 1]$ ، فرم معادله دینامیکی کاهش مرتبه یافته سیستم (برای مود  $n$ -ام) طبق معادله زیر به دست می‌آید:

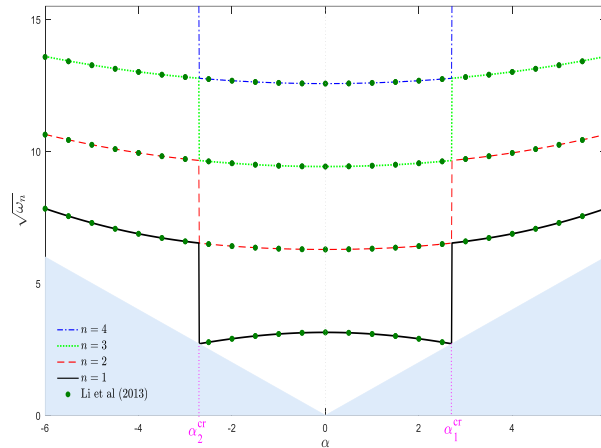
$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = F_0 \sin(n \pi v \tau) \quad (19)$$

که در آن  $\omega_n^2 = \mathbf{K}_{mn} / \mathbf{M}_{mn}$ ،  $F_0 = F / \mathbf{M}_{mn}$  پاسخ دینامیکی سازه برای زمان‌های قبل ترک بار به صورت ترکیبی از پاسخ‌های همگن و خصوصی به دست خواهد آمد:

$$q_n^{force}(\tau) = A \sin(\omega_n \tau) + B \cos(\omega_n \tau) + \frac{F_0}{(\omega_n^2 - (n \pi v)^2)} \sin(n \pi v \tau) \quad (20)$$

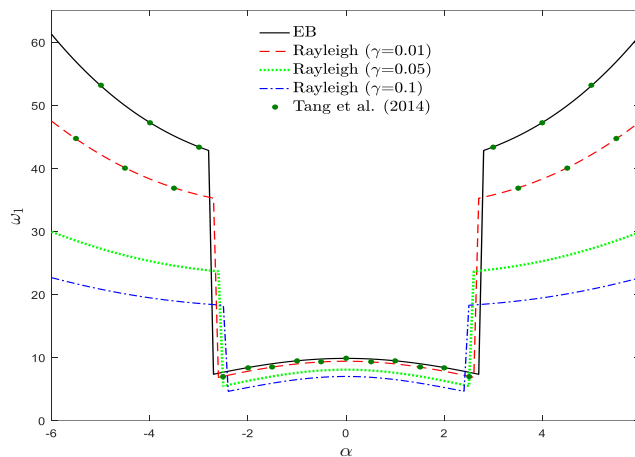
که ضرایب ثابت  $A$  و  $B$  در معادله (۲۰) از شرایط اولیه صفر  $(q_n^{force}(0) = \dot{q}_n^{force}(0) = 0)$  به دست می‌آیند. با جایگذاری معادله (۲۰) در شرایط اولیه صفر، شکل نهایی پاسخ اجباری تیر طبق معادله (۲۱) به دست می‌آید:

$$q_n^{force}(\tau) = \frac{1}{\omega_n^2} \left( \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - (n \pi v)^2} \sin(n \pi v \tau) - \frac{n \pi v \omega_n}{\omega_n^2 - (n \pi v)^2} \sin(\omega_n \tau) \right) \quad (21)$$



شکل ۲. دعبی بای دارگ رتم ارب بس حرب ( $\omega_n^{0/5}$ ) یرو حردم یل ونرب -رلی واریت لواس ناکرف راهچ ۲. لکش

Fig. 2. The first four frequency of Euler-Bernoulli axially graded beam ( $\omega_n^{0/5}$ ) according to dimensionless gradient parameter ( $\alpha$ ),  $\mu=0$ ,  $K_b=0$



شکل ۳. فرکانس پایه‌ای تیر رابلی مدرج محوری برحسب پارامتر گرادبان بی بعد،  $\mu=0$ ,  $K_b=0$

Fig. 3. Fundamental frequency of axially graded Rayleigh beam versus dimensionless gradient parameter,  $\mu=0$ ,  $K_b=0$

$$X_n = 0 \Rightarrow v_{can} = \frac{\omega_n}{\cos^{-1}\left(\frac{1}{\cos(n\pi)}\right)} \quad (28) \quad \phi_n = \tan^{-1} \left( \frac{-\sin\left(\frac{\omega_n}{v}\right)}{\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{\omega_n}{v}\right)} \right) \quad (29)$$

$$W\left(\frac{1}{2}, \tau\right) = 0 \rightarrow \cos(\varphi_{can}) = 0 \rightarrow \varphi_{can} = \frac{2(i-1)\pi}{2} \quad (29)$$

در هنگام پدیده لغو در سیستم، دامنه ارتعاشات آزاد صفر خواهد شد. سرعت و فاز پدیده لغو متناظر به صورت زیر بیان می‌شود:

$$R_1 = \frac{X_n}{W_{st}} = \frac{k_n \sqrt{2}}{(1-k_n^2)} \sqrt{1 - \cos(n\pi) \cos\left(\frac{n\pi}{k_n}\right)} \quad (34)$$

که در آن  $k_n = n\pi v / \omega_n$  نسبت سرعت و  $W_{st}$  نیز خیز استاتیکی نقطه وسط تیر است. ضریب بزرگنمایی دینامیکی به عنوان نسبت بین جابجایی دینامیکی و استاتیکی تعریف می‌شود.

### ۵- نتایج و بحث

در این بخش، نتایج عددی برای ارتعاشات اجباری-آزاد تیرهای مدرج محوری محاسبه می‌شوند. با مقایسه فرکانس‌های طبیعی تیرهای مدرج محوری و دامنه ارتعاشات اجباری-آزاد تیرهای ایزوتروپیک تحت یک بار متحرک منفرد با نتایج موجود در ادبیات فنی صحت حل حاضر ارزیابی می‌شود. اثر گرادیان مواد و سرعت بار متحرک بر پاسخ دینامیکی سنجیده می‌شوند. شایان ذکر است که برای اعتبارسنجی رویکرد تحلیلی، معادلات تعادل حرکت سیستم با اعمال روش رانگ-کوتا مرتبه چهار به صورت عددی انتگرال گیری می‌شود.

### ۵-۱- صحه‌سازی مدل

در شکل (۲) چهار فرکانس طبیعی اول سیستم که خواص مواد آن از یک تابع نمایی تبعیت می‌کند توسط روش گسسته‌سازی و تحلیل مقدار ویژه با در نظر گرفتن ۱۰ مود خمشی رسم شده‌اند و با نتایج ارائه شده توسط لی و همکاران [۳۷] مقایسه شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج به دست آمده در این پژوهش از دقت مناسبی برخوردار هستند. همان‌طور که از این شکل مشخص است، همه شاخه‌های فرکانس ناپیوسته هستند و در کمترین مقدار مشخص به نام پارامترهای گرادیان بحرانی (یعنی  $\alpha_1^{cr} = -2$ ،  $\alpha_2^{cr} \approx \pm 1$ )، یک پدیده پرش در منحنی‌های فرکانس طبیعی مشاهده می‌شود. علاوه بر آن، فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات سیستم به صورت یکنواخت تغییر نمی‌کنند. به‌طور مثال برای  $\alpha_1^{cr} > 0$ ، فرکانس پایه‌ای سیستم با افزایش پارامتر گرادیان ابتدا به آرامی کاهش می‌یابد تا در مقدار مینیمم بحرانی  $\alpha_1^{cr}$ ، فرکانس سیستم به شاخه بالایی

که  $i$  یک عدد صحیح مثبت است. در نتیجه زاویه فاز از مقدار  $2-\pi$  به  $2\pi$  تغییر علامت می‌دهد. همچنین، بر اساس شرایط اولیه نیز اگر هردوی جابجایی اولیه و سرعت اولیه ارتعاشات آزاد سیستم صفر باشد، دامنه ارتعاشات آزاد سیستم نیز صفر خواهد شد و در نتیجه باقیمانده ارتعاشات آزاد تیر صفر خواهد شد. با برابر صفر قراردادن روابط (۲۳) و (۲۴) می‌توان نوشت:

$$\sin\left(\frac{\omega_n}{v}\right) = 0 \Rightarrow v_{can} = \frac{\omega_n}{i\pi} \quad (30)$$

$$\cos(n\pi) = \cos\left(\frac{\omega_n}{v}\right) \rightarrow v_{can} = \frac{\omega_n}{2(i-1)\pi} \quad (31)$$

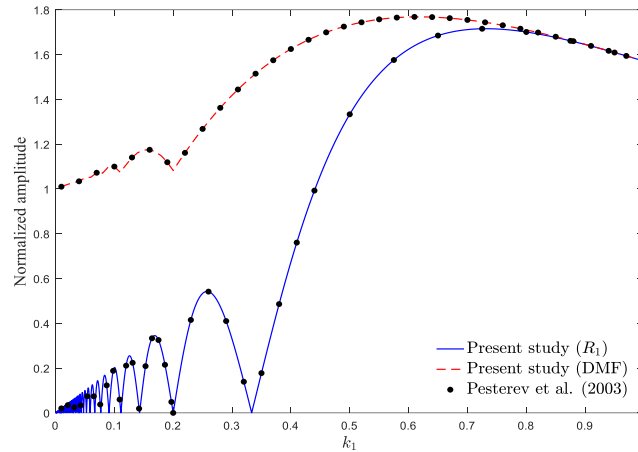
با توجه به معادلات (۳۰) و (۳۱) می‌توان گفت که شرایطی که به ازای آن معادله (۳۰) حاکم است، معادله (۳۱) را نیز ارضا می‌کنند، اما برعکس این مطلب صحیح نمی‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که شرایط کلی رخداد لغو بر اساس شرایط اولیه در معادله (۳۱) بیان شده است. هنگامی که بیشینه دامنه ارتعاشات آزاد رخ می‌دهد، مقادیر سرعت مربوطه از معادله (۳۲) به دست می‌آید:

$$\frac{\partial X_n}{\partial v} = 0 \Rightarrow \tan\left(\frac{\omega_n}{2v_{max}}\right) = \frac{2v_{max}(\omega_n^2 + (n\pi v_{max})^2)}{\omega_n(\omega_n^2 - (n\pi v_{max})^2)} \quad (32)$$

ضریب بزرگنمایی دینامیکی و دامنه نرمال شده ارتعاشات آزاد تیر برای مود  $n$ -ام به ترتیب طبق معادلات (۳۳) و (۳۴) تعریف می‌شوند

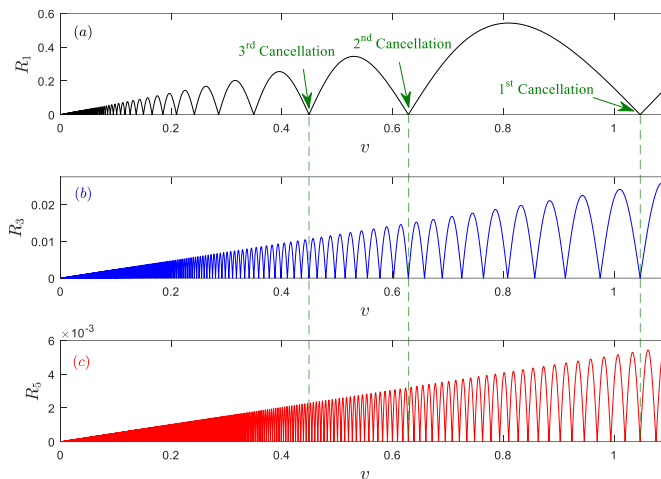
$$DMF = \frac{q_n^{force}(\tau)}{W_{st}} = \frac{q_n^{force}(\tau)}{F_0 / \omega_n^2} = \frac{1}{1-k_n^2} (\sin(k_n \omega_n \tau) - k_n \sin(\omega_n \tau)) \quad (33)$$





شکل ۴. ضریب بزرگنمایی دینامیکی و دامنه نرمالایز شده ارتعاشات آزاد تیر اویلر-برنولی ایزوتروپیک بر حسب نسبت سرعت،  $K_b=0, \mu=0$

Fig. 4. Dynamic magnification coefficient and the normalized amplitude of free vibration of Euler-Bernoulli isotropic Beam based on velocity ratio  $\mu=0, K_b=0$

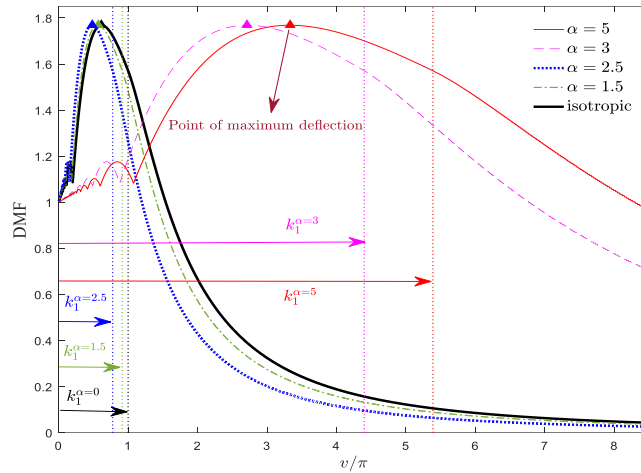


شکل ۵. دامنه نرمالایز ارتعاشات آزاد تیر اویلر-برنولی ایزوتروپیک بر حسب سرعت بار برای سه مود اول فرد  $(R_1, R_2, R_3), \mu=0, K_b=0$

Fig. 5. Normalized amplitude of the free vibration of isotropic Euler-Bernoulli beam on the basis of velocity of the load for the first three odd modes  $(R_1, R_2, R_3), \mu=0, K_b=0$

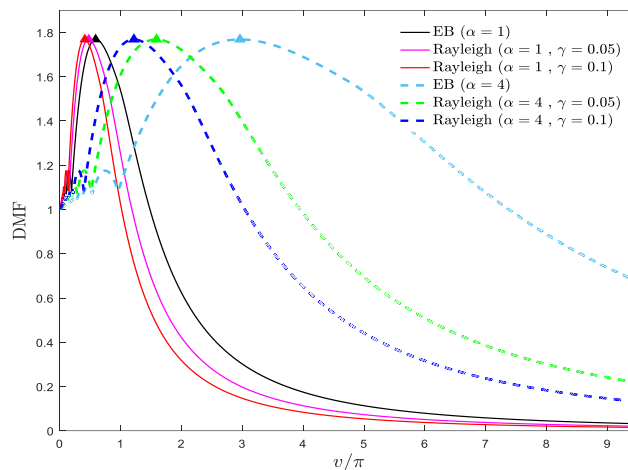
ناحیه فرکانس‌های طبیعی به فرکانس‌های کاذب تبدیل می‌شوند و از ارتعاش هارمونیک تحریک‌شده توسط امواج منتشر شونده جلوگیری می‌شود. در نتیجه در ادامه فقط به ناحیه عملیاتی که احتمال تحریک ارتعاشات هارمونیک وجود دارد (یعنی  $\omega < \omega_{cr}$ ), توجه می‌شود. نکته مهم در این نمودار این است که هنگامی که  $\alpha > \alpha_1^{cr}$  یا  $\alpha < \alpha_1^{cr}$  است، فرکانس سیستم بزرگ‌تر از زمانی است که  $\alpha_1^{cr} > \alpha > \alpha_1^{cr}$  است، فرکانس سیستم بزرگ‌تر از زمانی است که  $\alpha_1^{cr} > \alpha > \alpha_1^{cr}$  است. به بیان دیگر می‌توان گفت که تیر مدرج محوری به ازای  $\alpha > \alpha_1^{cr}$

پرش می‌کند و بعد از آن به طور یکنواخت افزایش می‌یابد. همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، فرکانس‌های بزرگ‌تر سیستم نیز این ویژگی را نمایش می‌دهند. به این صورت که در عبور از پارامترهای گرادیان بحرانی  $n$  امین فرکانس طبیعی به  $(1-n)$  امین فرکانس تبدیل می‌شود. لازم به ذکر است که در ناحیه هاشورخورده (یعنی  $\omega > \omega_{cr}$ ) شکل مودهای سیستم از توابع مثلثاتی، به توابع نمایی یا به طور معادل توابع هایپربولیک تبدیل می‌شوند. بنابراین، در این



شکل ۶. ضریب بزرگنمایی دینامیکی تیر اویلر-برنولی برحسب سرعت بی بعد به ازای پارامترهای گرادیان مختلف،  $\mu=0$ ،  $K_b=0$

Fig. 6. Dynamic magnification coefficient of Euler-Bernoulli Beam based on dimensionless velocity for various gradient parameters  $\mu=0$ ,  $K_b=0$

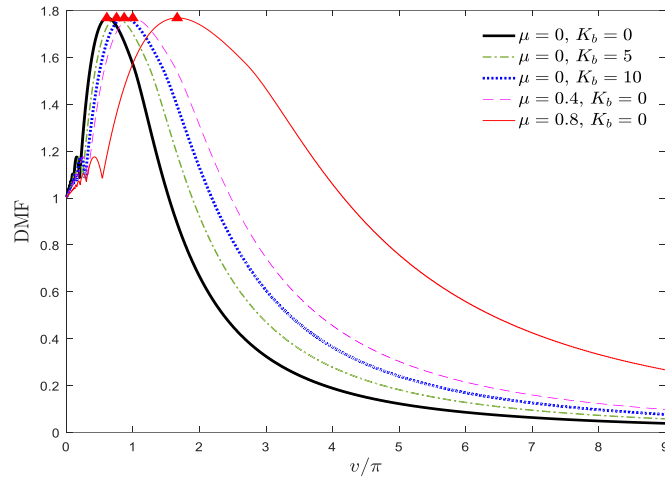


شکل ۷. ضریب بزرگنمایی دینامیکی سیستم برحسب سرعت بی بعد به ازای فاکتورهای اینرسی دورانی مختلف،  $\mu=0$ ،  $K_b=0$

Fig. 7. Dynamic magnification coefficient of system based on dimensionless velocity for various whirling inertia factors  $\mu=0$ ,  $K_b=0$

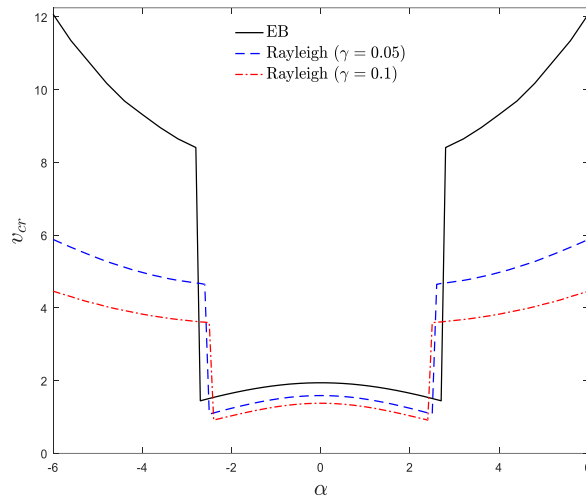
تانگ و همکاران [۳۸] مطابقت خوبی دارد. ضمناً برای تیرهای مدرج محوری رایلی، محدوده قابل قبول برای فرکانس‌های طبیعی سیستم  $\omega_n > \alpha^2 / \sqrt{1 + \alpha^2 \gamma^2}$  است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، روند تغییرات فرکانس پایه‌ای برای تیرهای مدرج محوری رایلی، مشابه تیرهای مدرج محوری اویلر-برنولی است. همان‌طور که مشخص است، فرکانس‌های پایه‌ای تیر مدرج محوری رایلی، با افزایش فاکتور اینرسی دورانی برای همه محدوده‌های پارامتر گرادیان کاهش می‌یابد. این

$\alpha_1^{cr}$ ، انعطاف‌پذیرتر است. در نتیجه می‌توان انتظار داشت که جابجایی استاتیکی تیرهای مدرج محوری در محدوده  $\alpha_1^{cr} > \alpha > \alpha_1^{cr}$  به ازای مقادیر دیگری از پارامتر گرادیان، بیشتر است. برای بررسی اثرات فاکتور اینرسی دورانی بر روی رفتار دینامیکی تیرهای مدرج محوری، فرکانس پایه‌ای تیر مدرج محوری رایلی برحسب پارامتر گرادیان ماده در شکل ۳ رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج عددی به دست آمده از روش گالرکین با حل دقیق ارائه شده توسط



شکل ۸. ضریب بزرگنمایی دینامیکی سیستم بر حسب سرعت بی بعد به ازای پارامترهای گردیان کرنش و سختی بستر مختلف،  $\alpha=0$ ،  $\gamma=0$

Fig. 8. Dynamic magnification coefficient of system based on dimensionless velocity for various strain gradient parameters and foundation stiffness  $\alpha=0$ ,  $\gamma=0$



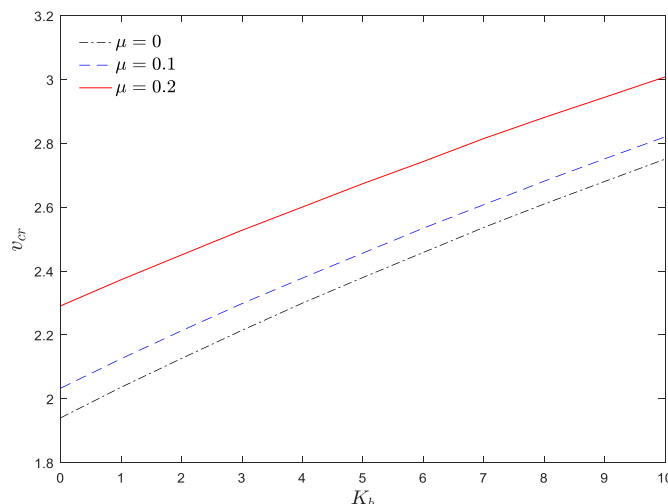
شکل ۹. سرعت بحرانی بار بی بعد بر حسب پارامتر بی بعد گردیان

Fig. 9. Critical velocity of non-dimensional load according to dimensionless gradient parameter

خواهند داشت. ذکر این نکته نیز حائز اهمیت است که به ازای  $\alpha=0$ ، معادله تیر مدرج به معادله تیر همگن تنزل می یابد و فرکانس های بی بعد سیستم برابر  $\omega_n = n^2 \bar{\delta}^2$  می شوند.

از آنجاکه سامانه های نقل و انتقال سرعت بالا، در بازه زمانی کوتاهی بر روی سازه حضور دارند، بنابراین این سامانه ها به طور ذاتی گذرا هستند. در نتیجه، می توان این چنین گفت که تنها مود اصلی سیستم به طور قابل توجهی تحریک می شود. همچنین، از آنجاکه فرکانس های سیستم به اندازه کافی از یکدیگر جدا هستند، در نتیجه جابجایی های

روند کاهشی برای  $\alpha_1^{cr} < \alpha$  و  $\alpha_1^{cr} > \alpha$  محسوس تر است. در نتیجه می توان بیان کرد که افزایش فاکتور اینرسی دورانی منجر به یک سیستم نرم تر می شود. با افزایش فاکتور اینرسی دورانی، مقدار پارامتر گردیان بحرانی سیستم نیز به آرامی کاهش می یابد. بر اساس شکل ۲ و ۳، به دلیل تقارن شرایط تکیه گاهی سیستم، منحنی های سیستم نسبت به خط  $\alpha=0$  تقارن دارد. در ادامه پژوهش حاضر نتایج به ازای  $\alpha < 0$  بیان می شود و می توان انتظار داشت که رفتار دینامیکی سازه به ازای پارامترهای گردیانی که اندازه یکسان دارند، رفتاری مشابه



شکل ۱۰. سرعت بحرانی بار بی‌بعد بر حسب پارامتر بی‌بعد گرادیان

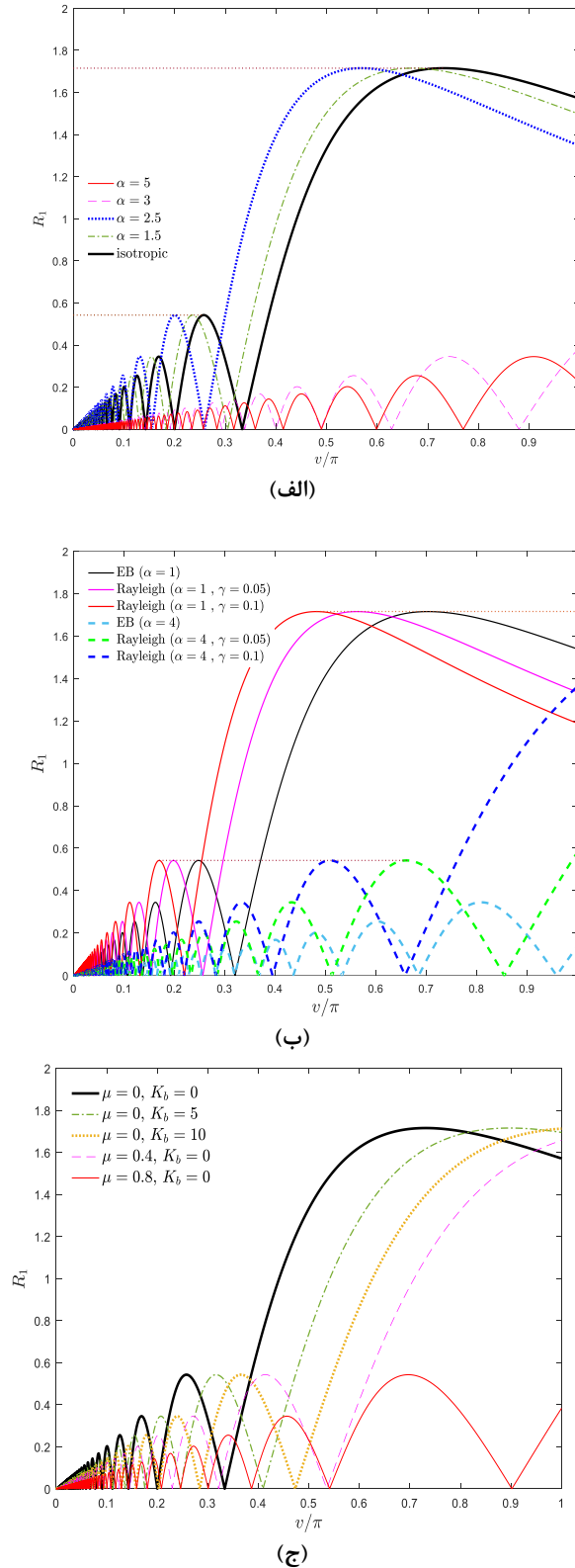
Fig. 10. Critical velocity of non-dimensional load according to dimensionless gradient parameter

شکل ۵ (الف-ج)، می‌توان نتیجه گرفت که اثرات مودهای بالاتر بر ارتعاشات آزاد سیستم قابل چشم‌پوشی است. به بیان دیگر، این شکل تأیید می‌کند که جابجایی یک تیر تحت یک بار متحرک کاملاً با در نظرگیری یک مود قابل‌شناسایی است. علاوه بر این همان‌طور که مشخص است، در سرعت‌هایی که دامنه سیستم به ازای مود اول صفر می‌شود، سیستم به ازای مودهای بالاتر نیز جابجایی صفر را تجربه می‌کند. به بیان دیگر، به ازای مود اول، هنگامی که سرعت سیستم بر روی سرعت لغو منطبق شود، جابجایی سیستم به ازای مودهای بالاتر نیز لغو می‌شود و دامنه سیستم نیز در مجموع صفر خواهد شد.

#### ۵-۲- ارتعاشات اجباری

علت اصلی برای مطالعه اثر گرادیان ( $\alpha \neq 1$ ) مواد بر رفتار ارتعاشاتی سیستم روشن است. با جستجوی مقادیر مناسب پارامتر گرادیان، با هدف از بین بردن ارتعاشات ناخواسته در سیستم، بهبود عملکرد تیر (پل) تحت تحریک نیروی متحرک (خودرو) امکان‌پذیر خواهد شد. در شکل ۶، ضریب بزرگنمایی دینامیکی تیر مدرج محوری بر حسب سرعت بی‌بعد بار به ازای پارامترهای گرادیان مختلف نمایش داده شده است. همچنین در این شکل، نسبت‌های سرعت واحد به ازای مود اول (یعنی  $k_1=1$ ) نیز برای پارامترهای گرادیان مختلف نشان داده شده است. با افزایش سرعت بار، ابتدا ضریب بزرگنمایی دینامیکی سیستم به صورت غیریکنواخت افزایش می‌یابد تا در سرعت بحرانی بار  $V_{cr}$  به

مربوط به مودهای بالاتر در برابر جابجایی مود اول قابل صرف‌نظر هستند. به عبارتی دیگر، مشارکت مودهای بالاتر بر روی پاسخ دینامیکی سیستم ضعیف است. همچنین کومار و همکاران [۳۹] تأیید کرده‌اند که جابجایی تیر تحت بار متحرک، تنها متأثر از مودهای فرد است و مودهای زوج سهمی در جابجایی تیر نخواهند داشت. به سبب دلایل ذکر شده در بالا و همچنین بر اساس فقط مود اول خمشی ارتعاشاتی به‌عنوان مود غالب در این مقاله در نظر گرفته خواهد شد. در شکل ۴، دامنه‌های ارتعاش اجباری و آزاد یک تیر ایزوتروپیک ( $\alpha=0$ ) مربوط به مود اصلی خمشی ( $n=1$ ) بر حسب نسبت سرعت نشان داده شده است. بر اساس شکل ۴، می‌توان مشاهده کرد که نتایج مطالعه حاضر مطابقت قابل‌قبولی با نتایج گزارش شده توسط پسترو و همکاران [۴۰] دارند. بر اساس این شکل، به ازای  $k_1=0$ ، ضریب بزرگنمایی دینامیکی و دامنه نرمال‌شده ارتعاشات آزاد سیستم به ترتیب مقدار یک و صفر دارند. ذکر این نکته حائز اهمیت است که در محدوده نسبت سرعت در نظر گرفته شده ضریب بزرگنمایی دینامیکی سیستم از دامنه نرمال‌شده ارتعاشات آزاد بزرگ‌تر است. برای اطمینان از صحت تقریب یک مود برای حل معادلات سیستم، اثرات مودهای بالاتر بر دینامیک سیستم بررسی می‌شود. به همین جهت در شکل ۵، دامنه نرمال‌شده مود اول فرد یک تیر اویلر-برنولی بر حسب سرعت بدون بعد بار متحرک نمایش داده شده است. از آنجایی که مودهای زوج نقشی در پاسخ دینامیکی سیستم ندارند، لذا با مقایسه



شکل ۱۱. دامنه نرمالایز شده ارتعاشات آزاد سیستم بر حسب سرعت بی بعد به ازای مقادیر مختلف (الف) پارامترهای گرادیان مختلف (ب) فاکتورهای اینرسی دوران (ج) سختی‌های بستر و پارامترهای گرادیان کرنش

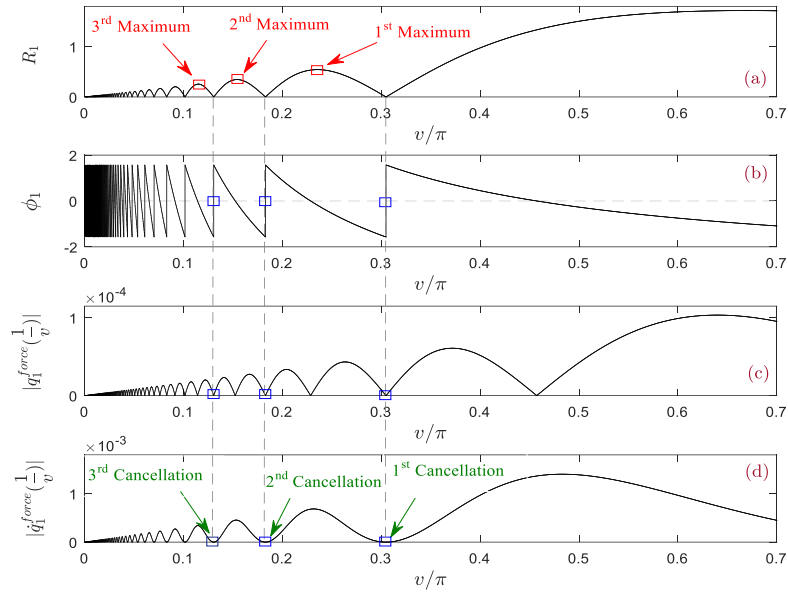
Fig. 11. Normalized amplitude of the free vibration of system based on dimensionless velocity for different values of (a) various gradient parameters (b) whirling inertia factors (c) strain gradient parameters and the foundation stiffness

مقدار ماکزیمم خود می‌رسد. سپس بعد از آن به آرامی کاهش می‌یابد و به مقدار صفر نزدیک می‌شود. به ازای تمامی پارامترهای گرادیان، روند تغییرات ضریب بزرگنمایی دینامیکی یک طبیعت موج‌دار برای سرعت‌های پایین دارد و بیشینه ضریب بزرگنمایی دینامیکی سیستم، مقداری یکسان دارد (یعنی  $DMF_{max} \approx 1$ ) و به ازای  $k_1^{max} \cdot 0.62$  رخ می‌دهد. مشاهده می‌شود، زمانی که سرعت از یک مقدار مشخص بیشتر می‌شود، ضریب بزرگنمایی دینامیکی در  $\alpha > \alpha_1^{cr}$  از ضریب بزرگنمایی دینامیکی در  $\alpha > \alpha_1^{cr}$  بیشتر خواهد شد. بر اساس بحث پسترو و همکاران [۴۰] برای تمامی پارامترهای گرادیان در  $k_1 < 1$ ، در بازه زمانی حضور بار بر روی تیر هیچ بیشینه‌ای در ضریب بزرگنمایی دینامیکی سیستم وجود ندارد و بیشینه پاسخ ارتعاشات اجباری هنگامی رخ می‌دهد که نیرو در انتهای تیر قرار دارد. از آنجاکه که برای  $\alpha < \alpha_1^{cr}$  روند نزولی پارامتر گرادیان، فرکانس پایه‌ای را کاهش می‌دهد و سیستم قابل‌انعطاف‌تر می‌شود. ذکر این نکته نیز حائز اهمیت است که در سرعت‌های کم، دامنه جابجایی دینامیکی سیستم به مقادیر استاتیکی آن نزدیک است که این نکته می‌تواند در طراحی مفید باشد. ضریب بزرگنمایی دینامیکی تیر ریلی مدرج محوری بر حسب سرعت در شکل ۷ رسم شده است. روند تغییرات ضریب بزرگنمایی دینامیکی برای تیرهای مدرج محوری ریلی، از نظر کیفی مشابه تیرهای مدرج محوری اوپلر-برنولی است. اندازه منحنی‌های ضریب دینامیکی با تغییر ضریب اینرسی دورانی تغییری نمی‌کند، بلکه، منحنی ضریب بزرگنمایی دینامیکی تیرهای مدرج محوری ریلی، به ازای همه پارامترهای گرادیان، در سمت چپ منحنی ضریب بزرگنمایی دینامیکی تیرهای مدرج محوری اوپلر-برنولی قرار می‌گیرند. با افزایش فاکتور اینرسی دورانی، منحنی‌های ضریب بزرگنمایی دینامیکی تیر مدرج محوری ریلی به سمت سرعت‌های کمتر جابجا می‌شوند. در شکل ۸، اثر ضریب سختی بستر برشی پاسترناک و پارامتر گرادیان کرنش بر ضریب بزرگنمایی سیستم نشان داده شده است. از آنجاکه افزایش این پارامترها، هردو منجر به سخت‌تر شدن سیستم می‌شوند، در نتیجه با افزایش این پارامترها، منحنی‌های ضریب دینامیکی و همچنین سرعت‌های بحرانی سیستم به سمت سرعت‌های بیشتر جابجا می‌شوند و برعکس اثر افزایش فاکتور اینرسی دورانی، سیستم در سرعت‌های بیشتر متحمل دامنه‌های ارتعاشات اجباری بزرگ‌تر می‌شوند. همان‌طور که

مشخص است اثر پارامتر گرادیان کرنش نسبت به ضریب سختی بستر برشی پاسترناک بر ارتعاشات اجباری سیستم محسوس‌تر است. شکل ۹ رابطه بین سرعت بحرانی تیر مدرج محوری و پارامتر نمایی گرادیان برای فاکتورهای اینرسی دورانی مختلف را نشان می‌دهد. مشهود است برای  $\alpha_1^{cr} > \alpha$  بیشینه ضریب بزرگنمایی دینامیکی تیر مدرج محوری به ازای  $v < \pi$  رخ می‌دهد، درحالی‌که هنگامی که  $\alpha_1^{cr} < \alpha$ ، جابجایی بیشینه بی‌بعد سیستم به ازای  $v > \pi$  رخ می‌دهد. از آنجاکه سرعت بحرانی سیستم یک پدیده نامطلوب در کاربردهای مهندسی است و با فرکانس نوسانی پایه‌ای سیستم رابطه مستقیم دارد، با افزایش اختلاف بین مشخصات مادی در انتهای تیر (یعنی افزایش  $\alpha$ )، سرعت بحرانی برای  $\alpha_1^{cr} > \alpha$  کاهش می‌یابد درحالی‌که در  $\alpha_1^{cr} < \alpha$  این روند معکوس خواهد بود. همان‌طور که در شکل ۳ نشان داده شد، فرکانس پایه‌ای تیرهای مدرج محوری ریلی کمتر از فرکانس‌های پایه‌ای تیرهای مدرج محوری اوپلر-برنولی است. در نتیجه سرعت بحرانی تیرهای مدرج محوری ریلی از سرعت بحرانی تیرهای مدرج محوری اوپلر-برنولی کمتر است. به همین دلیل قابل توضیح است که با افزایش ضریب اینرسی دورانی، سرعت رانی سیستم کاهش می‌یابد، مخصوصاً برای  $\alpha_1^{cr} < \alpha$ . در شکل ۱۰، اثر پارامترهای گرادیان کرنش و سختی بستر برشی پاسترناک بر روی سرعت بحرانی سیستم نمایش داده شده است. همان‌طور که قابل‌انتظار بود، با افزایش پارامترهای گرادیان کرنش و سختی بستر، فرکانس سیستم افزایش می‌یابد و در نتیجه، سرعت بحرانی سیستم نیز افزایش می‌یابد. بر اساس این شکل، نسبت به اثر سختی بستر، اثر افزایش سختی پارامتر گرادیان بر سرعت بحرانی سیستم مشهودتر است.

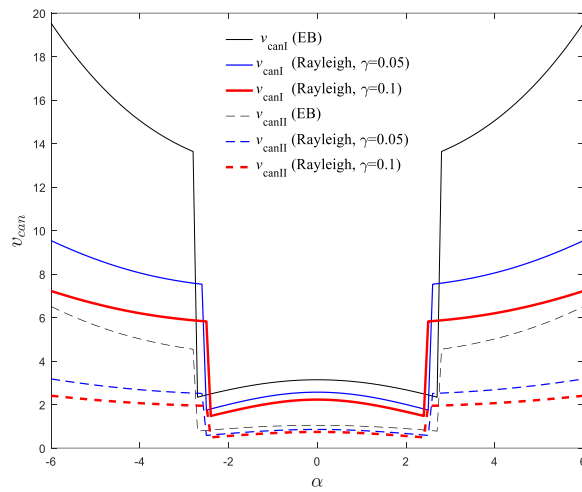
### ۵-۳- ارتعاشات آزاد

برای بررسی دامنه لغو و بیشینه شرایط ارتعاش آزاد، دامنه نرمال شده ارتعاشات آزاد سیستم به ازای پارامترهای گرادیان مختلف، فاکتورهای اینرسی دوران مختلف، پارامترهای گرادیان کرنش و سختی بستر مختلف در مقابل سرعت بی‌بعد به ترتیب در شکل ۱۱-الف، ۱۱-ب و ۱۱-ج نشان داده شده است. بر اساس این شکل‌ها، می‌توان نتیجه گرفت که پاسخ‌های آزاد تیرهای مدرج محوری یک روند تقریباً یکسان را با تیرهای متناظر ایزوتروپیک دنبال می‌کنند. بعلاوه،



شکل ۱۲. دامنه نرمالایز شده ارتعاشات آزاد، زاویه فاز، جابجایی بی بعد و سرعت بی بعد سیستم در هنگام ترک بار بر حسب سرعت ( $\alpha=1.5$ )

Fig. 12. Normalized amplitude of the free vibration, the angle of phase, dimensionless movement and velocity of the system for the time that the load is separated based on velocity ( $\alpha=1.5$ )

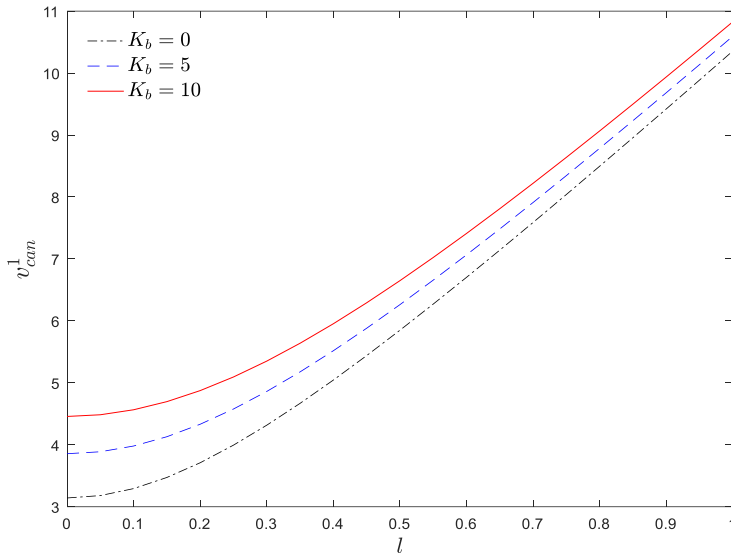


شکل ۱۳. تغییرات چهار سرعت بی بعد اول لغو بر حسب پارامتر بی بعد گرادیان

Fig. 13. Changes of first four dimensionless velocity of cancellation versus dimensionless gradient parameters

شده است، در بعضی سرعت‌ها بیشینه نسبی (یعنی سرعت بیشینه ارتعاش آزاد) هستند و در بعضی سرعت‌ها صفر (سرعت لغو) هستند. علاوه بر این، در مقایسه با منحنی‌های ضریب بزرگنمایی دینامیکی (یعنی شکل ۶ الی ۸ اوج دامنه در منحنی‌های ارتعاشات آزاد قابل توجه‌تر می‌باشند. تأثیر پارامتر گرادیان و ضریب اینرسی دورانی بر

می‌توان مشاهده کرد که مقادیر دامنه ارتعاش آزاد به ازای سرعت‌های کم کوچک است و با افزایش سرعت بار، به صورت یکنواخت افزایش نمی‌یابند. درحالی‌که چندین بیشینه نسبی و یک بیشینه کلی در سرعت بار مشخص وجود دارد. علاوه بر آن، بر اساس شکل ۱۱ (الف-ج)، دامنه ارتعاشات آزاد سیستم که بر اثر بار متحرک منفرد ایجاد



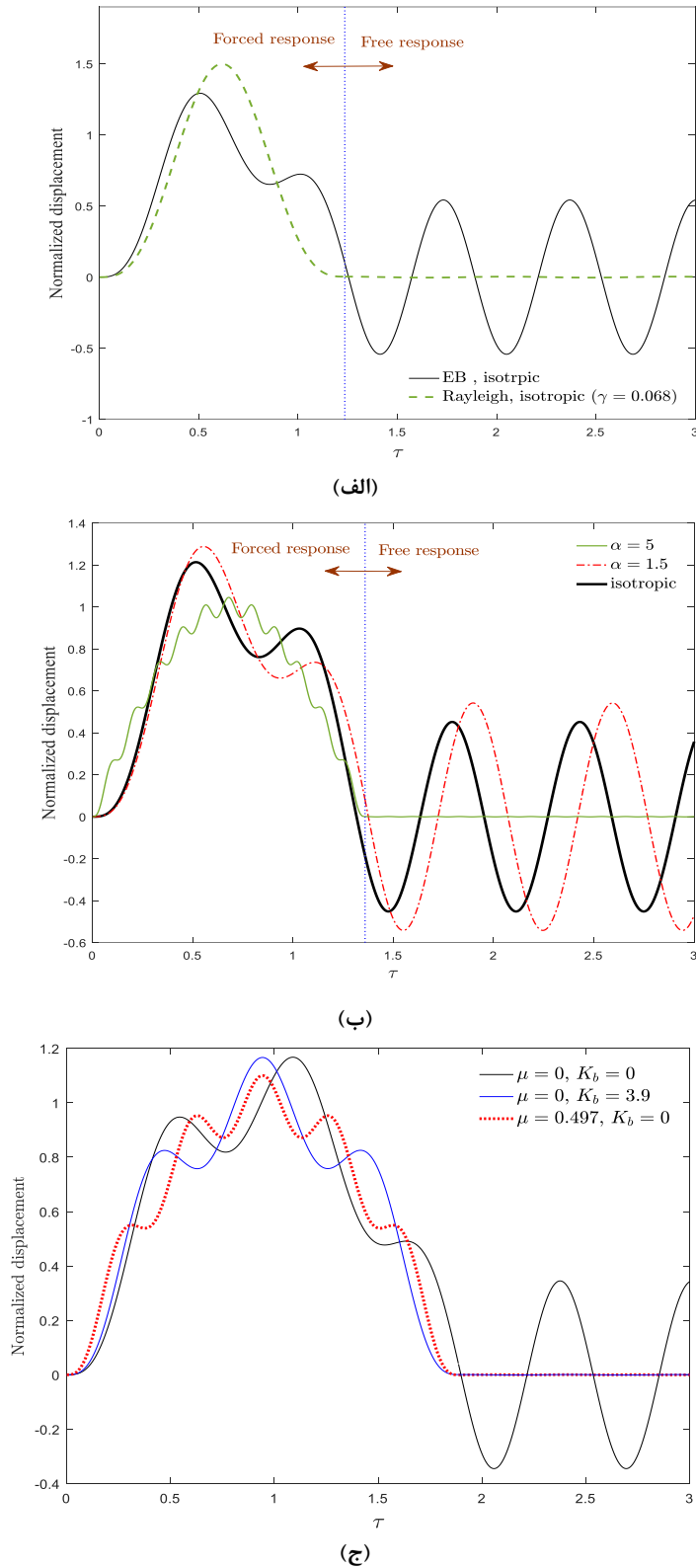
شکل ۱۴. تغییرات اولین سرعت بی‌بعد لغو برحسب پارامتر گرادیان کرنش به ازای سختی‌های بستر پاسترناک مختلف

**Fig. 14. Changes of the first dimensionless velocity of cancellation based on strain gradient parameters for various stiffness of Pasternak foundation**

بار جابه‌جا می‌کند. ویژگی دیگری این شکل‌ها این است که در  $\alpha > \alpha_1^{cr}$  با افزایش ضریب اینرسی دورانی یا پارامتر گرادیان، سرعت پدیده لغو و بیشینه ارتعاش آزاد در سرعت‌های کم بار بسیار به یکدیگر نزدیک هستند. این نکته در مرحله طراحی بسیار مفید و کاربردی است. علاوه بر آن، این شکل به صورت شماتیک شرایط لغو و بیشینه هم‌زمان را در شرایط عملیاتی مختلف که امکان حذف ارتعاشات ناخواسته را فراهم می‌کند نشان می‌دهد. از آنجا که افزایش فاکتور اینرسی دورانی در سیستم منجر به اثر افزودگی جرم می‌شود، لذا تیرهای رایلی نسبت به تیرهای اویلر برنولی فرکانس کمتری دارند. در نتیجه سرعت بحرانی سیستم در حالت تیر رایلی نیز کمتر است. به بیان دیگر هرچه سیستم سخت‌تر باشد سرعت بحرانی بالاتری نیز دارد. بنابراین تیرهای اویلر برنولی سرعت بحرانی بیشتری نسبت به تیرهای رایلی دارد. لذا می‌توان نتیجه گرفت که تیرهای اویلر برنولی مقاومت بیشتری نسبت به تیرهای رایلی در برابر اثرات بار متحرک خارجی دارد. از شکل‌های ۵ الی ۱۱ می‌توان نتیجه گرفت که پارامتر گرادیان یک مشارکت قابل توجهی را در پاسخ‌های ارتعاشی آزاد و اجباری یک تیر مدرج محوری تحت بار متحرک، ایجاد می‌کند. ضمناً براساس شکل ۱۱-ج، می‌توان گفت که به دلیل رفتار سخت‌شوندگی

دامنه ارتعاش آزاد تقریباً با تأثیر ضریب بزرگنمایی دینامیکی یکسان است. به همین دلیل، برای تمامی پارامترهای گرادیان و ضریب اینرسی دورانی، بیشینه کلی و بیشینه نسبی منحنی‌های ارتعاش آزاد مقدار یکسانی دارند. بر اساس شکل ۱۱-الف افزایش پارامتر گرادیان در  $\alpha > \alpha_1^{cr}$  منجر به جابه‌جایی دامنه ارتعاش آزاد به سمت سرعت‌های کمتر بار می‌شود، در حالی که این روند در  $\alpha < \alpha_1^{cr}$  معکوس می‌شود. این به دلیل این واقعیت است که با افزایش پارامتر گرادیان در  $\alpha > \alpha_1^{cr}$ ، سختی سیستم کاهش می‌یابد، در حالی که افزایش پارامتر گرادیان منجر به سیستم سخت‌تر در  $\alpha < \alpha_1^{cr}$  می‌شود. همچنین مشخص است که، لغو و بیشینه ارتعاش آزاد وابستگی شدیدی به پارامتر گرادیان دارند. برای  $\alpha > \alpha_1^{cr}$ ، لغو و بیشینه پاسخ ارتعاش آزاد یک تیر مدرج محوری با افزایش پارامتر گرادیان کاهش می‌یابد در حالی که این روند برای  $\alpha > \alpha_1^{cr}$  معکوس است. بر اساس شکل ۳، از آنجایی که افزایش ضریب اینرسی دورانی عموماً اثر افزودگی جرم بر روی سیستم دارد، فرکانس پایه‌ای تیر مدرج محوری با افزایش ضریب اینرسی دورانی کاهش می‌یابد. برای هردو پارامتر گرادیان که کمتر و بیشتر از مقدار بحرانی هستند، یک افزایش در  $\gamma$ ، دامنه نرمال شده ارتعاش آزاد تیر مدرج محوری رایلی را به سمت سرعت‌های کمتر





شکل ۱۵. پاسخ‌های بی‌بعد اجباری-آزاد تیرهای تابعی مدرج محوری به ازای پارامترهای گرادیان بی‌بعد مختلف (ν) of (الف)  $0.2576\pi$  (ب)  $0.234\pi$  (ج)  $0.168\pi$

**Fig. 15. Dimensionless responses of forced and free of axially functionally graded beams for different dimensionless gradient parameters (ν) of (a)  $0.2576\pi$  (b)  $0.234\pi$  (c)  $0.168\pi$**

تأثیری بر نسبت سرعت لغو و بیشینه پاسخ آزاد نمی‌گذارد. اولین سرعت لغو سیستم برحسب پارامتر گرادیان کرنش به ازای ضرایب سختی بستر پاسترناک مختلف در شکل ۱۴ رسم شده است. طبق انتظار، با افزایش پارامتر گرادیان کرنش و سختی بستر پاسترناک و در نتیجه افزایش رفتار سخت‌شوندگی در سیستم، سرعت لغو سیستم نیز افزایش می‌یابد.

به منظور نشان دادن امکان کاربردی و مهندسی نتایج ارائه شده در این مقاله و همچنین باهدف بررسی دقیق‌تر ضریب اینرسی دورانی و توزیع محوری مواد بر رفتار دینامیکی سازه، در شکل ۱۵ (الف-ج)، به ترتیب تاریخچه زمانی تیر به سه سرعت مختلف بار متحرک رسم شده است. اگر بتوان با انتخاب پارامتر دقیق مورد نیاز ارتعاشات آزاد سیستم را حذف کرد (به بیان دیگر، با برگزیدن پارامتری که موجب شود، در صفحه  $R_1$ - $v$  منحنی دامنه نرمالایز ارتعاشات آزاد سیستم با محور افقی برخورد کند)، می‌توان ارتعاشات سیستم را به خوبی کنترل نمود و ارتعاشات اضافی سیستم را از بین برد. واضح است زمانی که  $t=0$ ، بار سمت چپ تیر (یعنی  $\xi=0$ ) قرار دارد. مشخص است که سیستم هنگامی که تیر تحت بارگذاری قرار ندارد، به صورت آزادانه ارتعاش می‌کند. بر اساس شکل ۱۲-ب، سیستم در شرایط بیشینه ارتعاشات آزاد قرار دارد. به عبارتی دیگر، بار متحرک منجر به بیشینه دامنه ارتعاش آزاد در تیرهای ایزوتروپیک می‌شود. با انتخاب یک مقدار مناسب از ضریب اینرسی دورانی برای مثال  $0.68/0.7$ ، اثر لغو ظاهر می‌شود و ارتعاش آزاد سیستم لغو می‌شود. نکته جالب در دیاگرام پاسخ موقعیت لغو این است که پاسخ اجباری سیستم متقارن است. بنابراین بر اساس شکل ۱۲-الف، تیر ایزوتروپیک اوپلر برنولی با دامنه  $0.452$  ارتعاش آزاد می‌کند. با انتخاب پارامتر گرادیان مناسب (یعنی  $5\alpha$ )، سیستم متحمل پدیده مطلوب لغو خواهد شد و پاسخ ارتعاشاتی سیستم مینیمم می‌شود، در حالی که با انتخاب پارامتر گرادیان نامناسب (یعنی  $1\alpha/5$ )، سیستم پدیده بیشینه دامنه ارتعاشات را تجربه می‌کند و دامنه ارتعاشات سیستم به مقدار  $0.054$  افزایش می‌یابد. نتیجه می‌شود که از طریق تعیین دقیق مشخصات مواد و هندسه تیر، پاسخ دینامیکی تیر را می‌توان کنترل کرد و از ارتعاشات اضافی ساختارهای تحت بار متحرک بدون هیچ تغییری در مشخصات بار خارجی جلوگیری کرد. از آنجاکه فرکانس تیر ایزوتروپیک و تیر مدرج محوری در حالت  $1\alpha/5$ ، مقدار نزدیک به

سیستم در اثر افزایش پارامترهای گرادیان کرنش و سختی بستر برشی پاسترناک، سرعت‌های لغو و ماکسیمم دامنه ارتعاشات آزاد سیستم افزایش می‌یابد و منحنی به سمت سرعت‌های بیشتر جابجا می‌شود. واضح است که اثر پارامتر گرادیان کرنش بر ارتعاشات آزاد سیستم محسوس‌تر است. برای فهم بهتر رفتار ارتعاش آزاد سیستم، وابستگی دامنه نرمال شده ارتعاش آزاد، زاویه فاز، جابجایی و سرعت تیر مدرج اوپلر برنولی در لحظه ترک بار برحسب سرعت بی‌بعد بار به ازای  $1\alpha/5$  در شکل ۱۲ رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش سرعت، سرعت لغو به صورت متناوب با سرعت‌های متناظر با بیشینه پاسخ آزاد تغییر می‌کنند. به عبارت دیگر، بین دو سرعت لغو که مجاور با یکدیگر هستند، یک پاسخ بیشینه آزاد می‌تواند مشاهده شود. همان‌طور که در این شکل نشان داده شده است، زمانی که مقدار هم سرعت و هم جابه‌جایی سیستم در لحظه ترک بار صفر است، سرعت‌های متناظر به عنوان سرعت لغو نامیده می‌شوند. بعلاوه، در شرایط لغو، علامت زاویه فاز سیستم تغییر می‌کند و پاسخ‌های خصوصی و همگن همدیگر را خنثی می‌کنند. در این موقعیت، شرایط اولیه پاسخ آزاد صفر می‌شود و پدیده لغو تضمین می‌شود. لازم به ذکر است که سرعت‌هایی که در آن‌ها جابجایی و سرعت نقطه وسط تیر در لحظه ترک بار به ترتیب صفر و غیر صفر باشند، سرعت لغو محسوب نمی‌شوند.

دو سرعت اول لغو تیرهای مدرج محوری اوپلر-برنولی و رایلی برحسب پارامتر گرادیان مختلف در شکل ۱۳ رسم شده است. مشاهده می‌شود که الگوی تغییرات دو سرعت اول لغو مربوط به پارامتر گرادیان تقریباً یکسان هستند. علاوه بر آن، سرعت‌های لغو مستقیماً با فرکانس نوسانی پایه‌ای تیر مدرج محوری در ارتباط هستند. مشاهده می‌شود که پارامتر گرادیان مقدار سرعت‌های لغو بخصوص سرعت لغو اول را تغییر می‌دهد. به عبارتی دیگر، زمانی که  $\alpha_1^{cr} < \alpha$ ، اثر پارامتر گرادیان بر سرعت‌های لغو حیاتی‌تر می‌شود و این اثر برای سرعت‌های لغو کمتر، برجسته‌تر می‌شود. در نتیجه، در مقایسه با تیرهای مدرج محوری اوپلر-برنولی، سرعت‌های لغو تیرهای مدرج محوری رایلی مقدار کمتری دارند. علاوه بر این، از شکل‌های ۱۱ و ۱۲ می‌توان نتیجه گرفت که در سرعت‌های پایین، احتمال اتفاق افتادن لغو و بیشینه ارتعاش آزاد بیشتر است. بر اساس محاسبات صورت‌گرفته می‌توان نتیجه گرفت که هر تغییری در پارامتر گرادیان

مادی و ضریب اینرسی دورانی دارد. با انتخاب پارامتر گرادیان مناسب، می‌توان شرایط وقوع پدیده لغو و بیشینه ارتعاش آزاد سیستم را به‌خوبی تعیین نمود. منحنی‌های دامنه نرمال شده ارتعاش آزاد و ضریب بزرگنمایی دینامیکی تیرهای مدرج محوری تحت بار متحرک نیز امتحان شدند و نتیجه شد که تغییرات خواص مواد یک نقش متضاد در دامنه اجباری- آزاد سیستم بین پارامتر گرادینی که از مقدار بحرانی کمتر و بیشتر است، ایفا می‌کند. بعلاوه، مشخص شد که با تنظیم دقیق پارامتر گرادیان و ضریب اینرسی دورانی می‌توان از ارتعاشات ناخواسته در سیستم جلوگیری کرد و کارایی سیستم تحت بار متحرک را بهبود بخشید. از این‌رو، ضریب اینرسی دورانی و پارامتر گرادیان را می‌توان به‌عنوان یک پارامتر کنترلی در سازه‌های تحت تحریک بارهای متحرک انتخاب نمود. از سوی دیگر از آنجاکه با افزایش پارامترهای گرادیان کرنش و سختی بستر برشی پاسترناک، رفتار سخت‌شوندگی در سیستم تقویت می‌شود، ضریب بزرگنمایی دینامیکی، سرعت‌های بحرانی و لغو و ماکسیمم دامنه ارتعاشات افزایش می‌یابند و با تنظیم آن‌ها ارتعاشات ناخواسته سیستم حذف شدند.

### مراجع

- [1] A.E. Mamaghani, S. Khadem, S. Bab, Vibration control of a pipe conveying fluid under external periodic excitation using a nonlinear energy sink, *Nonlinear Dynamics*, (3)86 1795-1761 (2016).
- [2] R. Hosseini, M. Hamed, A. Ebrahimi Mamaghani, H.C. Kim, J. Kim, J. Dayou, Parameter identification of partially covered piezoelectric cantilever power scavenger based on the coupled distributed parameter solution, *International Journal of Smart and Nano Materials*, -110 (2017) (3-2)8 124.
- [3] H. Sarparast, A. Ebrahimi-Mamaghani, Vibrations of laminated deep curved beams under moving loads, *Composite Structures*, (11)262 (2019).
- [4] S. Esfahani, S.E. Khadem, A.E. Mamaghani, Nonlinear vibration analysis of an electrostatic functionally graded nano-resonator with surface effects based on nonlocal strain gradient theory, *International Journal of Mechanical*

یکدیگری دارند، در نتیجه می‌توان انتظار داشت رفتار ارتعاشاتی آزاد و اجباری این دو سیستم تقریباً مشابه یکدیگر باشند؛ ما تیر مدرج محوری در حالت  $\delta\alpha = 0$  به دلیل آنکه فرکانس بیشتری دارد و در این حالت گرادیان سیستم از گرادیان بحرانی بیشتر است و در نتیجه در تغییرات فرکانسی سیستم پرش رخ داده است، لذا در این شرایط دینامیک سیستم تغییر اساسی کرده است و پاسخ ارتعاشات اجباری و آزاد کاملاً متفاوت خواهد شد. همچنین در شکل ۱۵-ج، با انتخاب دو پارامتر مختلف یعنی سختی بستر پاسترناک و همچنین پارامتر گرادیان کرنش، ارتعاشات آزاد سیستم حذف شده است که این نتایج تا به حال در ادبیات فنی گزارش نشده است.

### ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، بهبود عملکرد یک میکروتیر مدرج محوری تحت بار متحرک به‌صورت عددی و تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین یک مطالعه مقایسه‌ای بین تیرهای مدرج محوری رایلی و اویلر برنولی به‌منظور مشخص کردن تأثیر ضریب اینرسی دورانی و گرادیان طولی مشخصات مادی بر روی رفتارهای ارتعاشی آزاد و اجباری سیستم انجام شده است. مشخصات مادی سازه در راستای طولی طبق قانون نمایی به‌صورت پیوسته تغییر می‌کنند. تیر تحت یک بار نقطه‌ای عرضی متحرک با مقدار ثابت و سرعت یکنواخت قرار گرفته است. برای مدل‌سازی اثرات اندازه، از تئوری گرادیان کرنش استفاده شده است. با استفاده از روش جداسازی گالرکین و تحلیل مقدار ویژه، فرکانس‌های طبیعی سیستم استخراج می‌شوند و با نتایج موجود در ادبیات فنی مقایسه شدند. علاوه بر این، استراتژی حل و فرمول‌بندی با مقایسه نتایج به‌دست‌آمده برای تیرهای ایزوتروپیک تحت بار متحرک با مطالعات پیشین تأیید شدند و مطابقت خوبی به دست آمد. اثر گرادیان طولی در مشخصات مادی و تغییرات ضریب اینرسی دورانی بر روی ضریب بزرگنمایی دینامیکی، سرعت بحرانی، پدیده لغو و پاسخ بیشینه آزاد مورد ارزیابی قرار گرفت. فهمیده شده است که در مقایسه با تیرهای ایزوتروپیک تحت بار متحرک، تیرهای مدرج تابعی محوری نمایی تحت بار متحرک رفتار پیچیده‌تر و غیرقابل‌انتظارتری نمایش می‌دهند. نتایج نشان دادند که دامنه ارتعاش اجباری- آزاد سیستم وابستگی شدیدی به تغییرات مشخصات

- Persian).
- [13] A.E. Mamaghani, H. Zohoor, K. Firoozbakhsh, R. Hosseini, Dynamics of a Running Below-Knee Prosthesis Compared to Those of a Normal Subject, *Journal of Solid Mechanics Vol*, 160-152 (2013) (2)5.
- [14] A. Ebrahimi-Mamaghani, S.H. Mirtalebi, M.-T. Ahmadian, Magneto-mechanical stability of axially functionally graded supported nanotubes, *Materials Research Express*, 1250 (2020) (12)6c1255.
- [15] S.H. Mirtalebi, M.T. Ahmadian, A. Ebrahimi-Mamaghani, On the dynamics of micro-tubes conveying fluid on various foundations, *SN Applied Sciences*, (6)1 547 (2019).
- [16] S.H. Mirtalebi, A. Ebrahimi-Mamaghani, M.T. Ahmadian, Vibration Control and Manufacturing of Intelligibly Designed Axially Functionally Graded Cantilevered Macro/Micro-tubes, *IFAC-PapersOnLine*, 387-382 (2019) (10)52.
- [17] A. Ebrahimi-Mamaghani, R. Sotudeh-Gharebagh, R. Zarghami, N. Mostoufi, Thermo-mechanical stability of axially graded Rayleigh pipes, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, (30-1 (2020, [doi:15397/10.1080/734.2020.1717967](https://doi.org/10.1080/734.2020.1717967)).
- [18] H. Sarparast, S. Esmailzade Khadem, Vibration analysis of a laminated deep curved beams subjected to a moving load by considering the rotary inertia and shear force, *Modares Mechanical Engineering*, 151-141 (2017) (7)17 (In Persian).
- [19] H. Sarparast, S. Esmailzade Khadem, A. Ebrahimi Mamaghani, Investigation of the cancellation, resonance and maximum amplitude of free vibration phenomena in laminated curved Timoshenko beams under moving loads, *Modares Mechanical Engineering*, -69 (2019) (9)18 80, (In Persian).
- [20] A. Ebrahimi Mamaghani, H. Sarparast, Lateral vibration control of a beam subjected to the harmonic external load using a nonlinear energy sink, *Journal of Modeling in Engineering*, 390-375 (2018) (55)16, (In Persian).
- [21] A. Ebrahimi Mamaghani, R. Hosseini, M. Shahgholi, H. Sciences, 522-508 (2019) 151.
- [5] L. You, K. Yan, T. Shi, J. Man, N. Liu, Analytical solution for the effect of anisotropic layers/interlayers on an elastic multi-layered medium subjected to moving load, *International Journal of Solids and Structures*, (2019) 172 20-10.
- [6] T.N.T. Cao, V.H. Luong, H.N. Vo, X.V. Nguyen, V.N. Bui, M.T. Tran, K.K. Ang, A moving element method for the dynamic analysis of composite plate resting on a Pasternak foundation subjected to a moving load, *International Journal of Computational Methods*, (08)16 1850124 (2019).
- [7] Z.Y. Ai, C.J. Xu, G.P. Ren, Vibration of a pre-stressed plate on a transversely isotropic multilayered half-plane due to a moving load, *Applied Mathematical Modelling*, 59 738-728 (2018).
- [8] Y. Chen, N.D. Beskou, J. Qian, Dynamic response of an elastic plate on a cross-anisotropic poroelastic half-plane to a load moving on its surface, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 302-292 (2018) 107.
- [9] A.E. Mamaghani, S.E. Khadem, S. Bab, S.M. Pourkiaee, Irreversible passive energy transfer of an immersed beam subjected to a sinusoidal flow via local nonlinear attachment, *International Journal of Mechanical Sciences*, 447-427 (2018) 138.
- [10] S. Esfahani, S. Esmailzade Khadem, A. Ebrahimi Mamaghani, Size-dependent nonlinear vibration of an electrostatic nanobeam actuator considering surface effects and inter-molecular interactions, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, (3)15 505-489 (2019).
- [11] A. Ebrahimi-Mamaghani, R. Sotudeh-Gharebagh, R. Zarghami, N. Mostoufi, Dynamics of two-phase flow in vertical pipes, *Journal of Fluids and Structures*, (2019) 87 173-150.
- [12] A. Ebrahimi Mamaghani, S. Esameilzadeh Khadem, Vibration analysis of a beam under external periodic excitation using a nonlinear energy sink, *Modares Mechanical Engineering*, 194-186 (2016) (9)16, (In

- 2364-2358 (2012).
- [31] I. Esen, Dynamics of size-dependant Timoshenko micro beams subjected to moving loads, *International Journal of Mechanical Sciences*, 105501 (2020) 175.
- [32] M. Şimşek, Dynamic analysis of an embedded microbeam carrying a moving microparticle based on the modified couple stress theory, *International Journal of Engineering Science*, 1732-1721 (2010) (12)48.
- [33] A.E. Abouelregal, A.M. Zenkour, Dynamic response of a nanobeam induced by ramp-type heating and subjected to a moving load, *Microsystem Technologies*, (2017) (12)23 5920-5911.
- [34] M. Safarpour, A. Rahimi, A. Alibeigloo, H. Bisheh, A. Forooghi, Parametric study of three-dimensional bending and frequency of FG-GPLRC porous circular and annular plates on different boundary conditions, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, (31-1 (2019, doi:10.1 15397734.15392019.11701491/080.
- [35] K. Jermittiparsert, A. Ghabussi, A. Forooghi, A. Shavalipour, M. Habibi, D. won Jung, M. Safa, Critical voltage, thermal buckling and frequency characteristics of a thermally affected GPL reinforced composite microdisk covered with piezoelectric actuator, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, (23-1 (2020, doi:10.1 15397734.15392020.11748052/080.
- [36] Z. Abdelmalek, M. Karbon, A. Eyvazian, A. Foroughi, H. Safarpour, I. Tlili, On the dynamics of a curved microtubule-associated proteins by considering viscoelastic properties of the living biological cells, *Journal of Biomolecular Structure and Dynamics*, (just-accepted) (26-1 (2020, doi:07391102.2020.1747549/10.1080.
- [37] X.-F. Li, Y.-A. Kang, J.-X. Wu, Exact frequency equations of free vibration of exponentially functionally graded beams, *Applied Acoustics*, 420-413 (2013) (3)74.
- [38] A.-Y. Tang, J.-X. Wu, X.-F. Li, K. Lee, Exact frequency equations of free vibration of exponentially non-uniform functionally graded Timoshenko beams, *International Journal of Mechanical Sciences*, 11-1 (2014) 89.
- [39] C.S. Kumar, C. Sujatha, K. Shankar, Vibration of simply Sarparast, Free lateral vibration analysis of inhomogeneous beams under various boundary conditions, *Journal of Solid and Fluid Mechanics*, 135-123 (2018) (3)8, (In Persian).
- [22] A. Ebrahimi Mamaghani, R. Hosseini, *Mathematical Modelling and Resonance Analysis in Impact Oscillators*, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, (1)51 168-157 (2019), (In Persian).
- [23] A. Ebrahimi Mamaghani, h. sarparast, Target energy transfer from a doubly clamped beam subjected to the harmonic external load using nonlinear energy sink, *Journal of Solid and Fluid Mechanics*, -165 (2018) (4)8 177, (In Persian).
- [24] R. Hosseini, M. Ebrahimi Mamaghani, A. Asa, An Investigation Into The Effects Of Friction And Anisotropy Coefficients And Work Hardening Exponent On Deep Drawing With FEM, *Journal Of Advanced Materials And Processing*, 2012) (2)1).
- [25] P. Malekzadeh, S. Monajjemzadeh, Nonlinear response of functionally graded plates under moving load, *Thin-Walled Structures*, 129-120 (2015) 96.
- [26] S. Khalili, A. Jafari, S. Eftekhari, A mixed Ritz-DQ method for forced vibration of functionally graded beams carrying moving loads, *Composite Structures*, (10)92 2511-2497 (2010).
- [27] F. Ebrahimi, S.H.S. Hosseini, Resonance analysis on nonlinear vibration of piezoelectric/FG porous nanocomposite subjected to moving load, *The European Physical Journal Plus*, 215 (2020) (2)135.
- [28] M. Alimoradzadeh, M. Salehi, S.M. Esfarjani, Nonlinear Dynamic Response of an Axially Functionally Graded (AFG) Beam Resting on Nonlinear Elastic Foundation Subjected to Moving Load, *Nonlinear Engineering*, (1)8 260-250 (2019).
- [29] Y. Wang, D. Wu, Thermal effect on the dynamic response of axially functionally graded beam subjected to a moving harmonic load, *Acta Astronautica*, 181-171 (2016) 127.
- [30] M. Şimşek, T. Kocatürk, Ş. Akbaş, Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action of a moving harmonic load, *Composite Structures*, (8)94

[40] A. Pesterev, B. Yang, L. Bergman, C. Tan, Revisiting the moving force problem, Journal of sound and vibration, 91-75 (2003) (1)261.

supported beams under a single moving load: A detailed study of cancellation phenomenon, International Journal of Mechanical Sciences, 47-40 (2015) 99.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. Forooghi, M. Safarpour, A. Alibeigloo, Parametric investigation of the size-dependent axially graded Rayleigh beams subjected to a moving load on Pasternak substrate, *AmirKabir J. Mech Eng.*, 53(4) (2021) 2171-2192.

DOI: [10.22060/mej.2020.17371.6584](https://doi.org/10.22060/mej.2020.17371.6584)

