

کنترل جریان‌های ترافیکی هوشمند ناهمگن با ساختار دوسویه و در حضور داده‌های ازدست‌رفته، تاخیر ارتباطی زمان-متغیر و تاخیر عملگری

حسین چهاردولی*

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آیت ... بروجردی، بروجرد، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸/۰۷/۱۰
بازنگری: ۱۳۹۹/۰۱/۰۵
پذیرش: ۱۳۹۹/۰۲/۱۴
ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۲/۱۸

کلمات کلیدی:

جریان ترافیکی ناهمگن
پایداری داخلی
پایداری رشته‌ای
داده‌های ازدست‌رفته
تأخیر زمانی

خلاصه: در این مقاله به تحلیل پایداری داخلی، رشته‌ای و کنترل جریان‌های ترافیکی هوشمند با ساختار ارتباطی دوسویه در حضور تاخیر زمانی ارتباطی، تاخیر عملگری و داده‌های ازدست‌رفته پرداخته می‌شود. در جریان‌های ترافیکی، پدیده داده‌های ازدست‌رفته به واسطه حجم زیاد اطلاعات در حال تبادل بسیار محتمل می‌باشد. از سویی دیگر، پدیده تاخیر زمانی ارتباطی نیز از مشخصه‌های سیستم‌های ارتباطی به شمار می‌آید. همچنین، به دلیل اینرسی بالا تاخیر عملگری یک ویژگی ذاتی موتور خودرو می‌باشد. در این تحقیق، یک مدل دینامیکی مرتبه سه برای توصیف حرکت طولی خودروهای هوشمند در جریان ترافیکی در نظر گرفته می‌شود. استراتژی فاصله ثابت برای تنظیم فاصله بین خودرویی استفاده می‌شود. با لحاظ همزمان داده‌های ازدست‌رفته، تاخیر زمانی ارتباطی و تاخیر عملگری و بر اساس ساختار دوسویه، کنترل‌کننده‌ای خطی برای هر خودرو در نظر گرفته شده و دینامیک حلقه بسته سیستم استخراج می‌گردد. با استفاده از قضیه لیاپانوف-کراسوفسکی به تحلیل پایداری سیستم حلقه بسته پرداخته می‌شود و شرایط کافی برای تضمین پایداری داخلی جریان ترافیکی معرفی می‌گردد. در ادامه، با تحلیل معادله حلقه بسته هر خودرو در حوزه فرکانس، قیود لازم روی ضرایب کنترلی که تضمین‌کننده پایداری رشته‌ای هستند بدست می‌آید. در پایان، روش‌های ارائه شده در این مقاله، به کمک شبیه‌سازی‌های متعدد مورد اعتبارسنجی قرار خواهند گرفت.

۱- مقدمه

گونه‌ایست که خودروها با حداقل فاصله و با سرعتی یکسان حرکت کنند [۴].

سطوح کنترلی در یک خودرو هوشمند به دو قسمت: ۱. کنترل سطح بالا و ۲. کنترل سطح پایین تقسیم‌بندی می‌شود. کنترل سطح بالا با توجه به موقعیت خودرو در گروه، شتاب خودرو راهنما و استراتژی فاصله‌بندی شتاب مطلوب خودرو در هر لحظه را محاسبه می‌کند. سپس کنترل سطح پایین با تولید فرامین کنترلی برای دریچه گاز و سیستم ترمز، شتاب اعلامی توسط کنترل سطح بالا را تولید می‌نماید. سیستم داخلی خودرو و کنترل سطح پایین مجموعاً نقش یک گره دینامیکی را برای کنترل سطح بالا ایفا می‌کنند [۵]. در حالت کلی سه استراتژی برای تنظیم فاصله بین خودرویی وجود

در سال‌های اخیر مسئله ازدحام ترافیکی به عنوان یک مسئله چالش‌برانگیز زیست‌محیطی، اجتماعی و اقتصادی شناخته شده است. ازدحام ترافیکی اثرات نامطلوب متعددی همچون افزایش آلودگی، افزایش زمان سفر و افزایش مصرف سوخت و نیز کاهش ایمنی و ظرفیت جاده‌ها را به همراه داشته است [۱]. ایده سیستم‌های حمل و نقل هوشمند روشی موثر برای به حداقل رساندن اثرات نامطلوب ازدحام ترافیکی می‌باشد [۲]. حرکت گروهی خودروها ابزاری مفید برای پیاده‌سازی ایده سیستم‌های حمل و نقل هوشمند می‌باشد [۳]. ایده اصلی در حرکت گروهی خودروها سازمان‌دهی حرکت به

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: h.chehardoli@abru.ac.ir



بسته و عملکرد آن به طرز قابل توجهی تحت تاثیر قرار خواهد گرفت. این امر ممکن است پایداری داخلی، پایداری رشته‌ای و نیز ایمنی کل جریان ترافیکی را با مخاطره روبرو نماید. از سویی دیگر، تاخیر زمانی ارتباطی از مشخصات سیستم‌های چندعاملی به‌شمار می‌رود. این امر در شبکه‌های خودرویی به واسطه ابعاد و مسافت بزرگتر نمود بیشتری پیدا خواهد کرد. تاخیر زمانی ارتباطی نیز در عملکرد کنترل‌کننده سطح بالا و متعاقباً در پایداری داخلی و رشته‌ای جریان ترافیکی اثرات نامطلوبی را به همراه خواهد داشت. از سویی دیگر، تاخیر عملگری از مشخصه‌های اجتناب‌ناپذیر عملگرهای مکانیکی است. موتور خودرو با توجه به اینرسی قابل توجهی که دارد، نمی‌تواند بطور آنی گشتاور مطلوب را تولید نماید. این امر باعث می‌شود که فرامین کنترل‌کننده سطح بالا با تاخیر توسط کنترل‌کننده سطح پایین اجرا گردند. که این امر نیز می‌تواند بر مشخصه‌های جریان ترافیکی اثرات نامطلوبی داشته باشد. حتی اگر خودرو راهنما تحت مانورهای سنگین قرار گیرد، هر یک از سه پدیده فوق می‌توانند باعث ناپایداری داخلی و رشته‌ای جریان ترافیکی گردند.

در تحقیقات پیشین، تحلیل جامعی از اثرات داده‌های از دست‌رفته بر پایداری داخلی و رشته‌ای جریان ترافیکی ارائه نشده است. در معدود کارهای انجام‌شده، فقط به مطالعه اثر داده‌های از دست‌رفته بر پایداری داخلی پرداخته شده است [۱۶، ۲۲]. در این تحقیقات، ساختار شبکه خودرویی بصورت رهبر-پیرو در نظر گرفته شده است که با توجه به ابعاد بزرگ، قابلیت‌پیاپیاده‌سازی بر جریان‌های ترافیکی بزرگ‌مقیاس را ندارند. در [۱۶] فقط داده‌های از دست‌رفته مربوط به ارتباط خودرو راهنما با خودروهای پیرو مورد بررسی قرار گرفته است و از داده‌های از دست‌رفته مربوط به ارتباط درون‌گروهی صرف‌نظر شده است. بعبارت دیگر، در این تحقیقات، پایداری رشته‌ای مورد بررسی قرار نگرفته‌اند. از سویی دیگر، پدیده تاخیر زمانی ارتباطی و نیز تاخیر عملگری از مشخصات جریان‌های ترافیکی به‌شمار می‌آیند. لذا لزوم ارائه تحلیلی جامع برای پایداری داخلی و پایداری رشته‌ای جریان‌های ترافیکی بالحاظ همزمان اثرات داده‌های از دست‌رفته در کل شبکه (نه صرفاً خودرو راهنما)، تاخیر زمانی زمان-متغیر و نیز تاخیر عملگری احساس می‌گردد.

در این تحقیق، مدلی مرتبه سه برای توصیف دینامیک طولی هر خودرو مورد استفاده قرار می‌گیرد. ساختار شبکه ارتباطی، دوسویه

دارد: ۱. استراتژی فاصله ثابت: فاصله بین خودروها همواره ثابت است [۶]، ۲. استراتژی زمان پیشرفت ثابت: در این استراتژی زمان رسیدن هر خودرو به موقعیت فعلی خودرو جلویی همواره ثابت است. در این استراتژی فاصله بین خودرویی برحسب سرعت خودرو راهنما متغیر است [۷] و ۳. استراتژی ترکیبی: این استراتژی ترکیبی از دو استراتژی پیشین است به نحوی که در سرعت‌های بالا فاصله بین خودرویی ثابت و در سرعت‌های پایین متغیر می‌باشد [۵].

ساختار ارتباطی یک شبکه خودرو می‌تواند متمرکز و یا نامتمرکز باشد. اگر تمامی خودروها به اطلاعات خودرو راهنما دسترسی داشته باشند، ساختار متمرکز و در غیر اینصورت نامتمرکز نامیده می‌شود [۸]. یک گروه خودرو پایداری داخلی نامیده می‌شود اگر خطای تعقیب هر خودرو نسبت به خودرو راهنما بطور مجانبی به صفر میل کند [۹]. همچنین، یک گروه خودرو پایداری رشته‌ای است اگر دامنه خطای تعقیب زمانی که خودرو راهنما تحت اغتشاش قرار گیرد در طول گروه روندی کاهشی داشته باشد [۴]. پایداری داخلی کاملاً وابسته به ساختار شبکه ارتباطی و نیز استراتژی فاصله‌بندی بین خودرویی می‌باشد.

تحقیقات پیشین انجام‌شده در زمینه کنترل حرکت گروهی خودروها قابل تقسیم‌بندی بصورت ذیل می‌باشند. ۱. ساختار ارتباطی: یکسویه نامتمرکز^۱ [۹]، یکسویه متمرکز^۲ [۱۰]، دوسویه نامتمرکز [۴]، دوسویه متمرکز [۱۱]، تعقیب نامتمرکز چند خودرو جلو [۱۲]، تعقیب متمرکز چند خودرو جلو [۱۳] و ساختار غیر یکنواخت [۵]. ۲. کنترل‌کننده‌های خطی شامل: آنالیز مقیاس‌پذیری [۱۲]، ایمنی [۱۴]، تاخیر زمانی [۱۵]، داده‌های از دست‌رفته [۱۶] و کنترل مقاوم [۱۷]، ۳. کنترل‌کننده‌های غیرخطی شامل: کنترل تطبیقی [۴] و کنترل مقاوم [۱۰]، ۴. گروه‌های همگن [۱۸] و ناهمگن [۱۹] خودرویی، ۵. تحلیل پایداری رشته‌ای [۲۰] و ۶. عملکرد بهینه [۲۱].

در پیاده‌سازی عملی سیستم‌های حمل و نقل هوشمند، به دلیل حجم بالای تبادل اطلاعات بین خودروها و نیز زیرساخت‌های بزرگراه پدیده داده‌های از دست‌رفته امری بسیار محتمل می‌باشد. در شبکه‌های خودرویی، به دلیل داده‌های از دست‌رفته که در برخی از زمان‌های نمونه‌برداری رخ می‌دهد، اطلاعات بطور ناقص در اختیار کنترل‌کننده سطح بالا قرار می‌گیرد. بنابراین، پایداری سیستم حلقه

1 Decentralized uni-directional
2 Centralized uni-directional

راهنما اطلاعاتی از سایر اعضا دریافت نمی‌کند اما هر خودرو پیرو حداقل از یک خودرو دیگر اطلاعات دریافت می‌کند. ماتریس قطری $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ با عناصر قطری $b_i = a_{i0}$ ماتریس مجاورت خودرو راهنما نامیده می‌شود. اگر خودرو i از خودرو راهنما اطلاعات دریافت کند و در غیر اینصورت $a_{i0} = 0$. خودرو راهنما در دسترس کلی خوانده می‌شود اگر از هر راس به آن مسیری وجود داشته باشد. همچنین، ماتریس \mathbf{H} بصورت $\mathbf{H} = \mathbf{L} + \mathbf{B}$ تعریف می‌گردد.

لم ۱ [۲۳]. ماتریس مثبت معین \mathbf{P} و پارامترهای ϑ و ρ را که $\rho > \vartheta$ در نظر بگیرید. نامساوی زیر برای هر تابع $f(\cdot)$ برقرار است:

$$(\vartheta - \rho) \int_{\vartheta}^{\rho} f^T(s) \mathbf{P} f(s) ds \leq - \left(\int_{\vartheta}^{\rho} f(s) ds \right) \mathbf{P} \left(\int_{\vartheta}^{\rho} f(s) ds \right)$$

لم ۲ [۲۳]. نامساوی زیر برای هر ماتریس مثبت معین \mathbf{P} و هر تابع مشتق‌پذیر $f(\cdot)$ برقرار است:

$$- \int_a^b \dot{f}^T(s) \mathbf{P} \dot{f}(s) ds \leq - \frac{1}{b-a} \bar{f}^T(a, b) \mathbf{P} \bar{f}(a, b),$$

که در آن: (نماد * به معنای متقارن بودن ماتریس نسبت به قطر اصلی می‌باشد)

$$\bar{f}(a, b) = \begin{pmatrix} f(a) \\ f(b) \\ \frac{1}{b-a} \int_a^b f^T(s) ds \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & -\mathbf{P} & \mathbf{0} \\ * & \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ * & * & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \frac{\pi^2}{4} \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{P} & -2\mathbf{P} \\ * & \mathbf{P} & -2\mathbf{P} \\ * & * & 4\mathbf{P} \end{pmatrix}$$

تعریف ۱. فرض کنید $e_i(t)$ بیانگر خطای تعقیب بین خودرو i ام و خودرو راهنما باشد. یک گروه خودرو پایدار رشته‌ای است اگر دامنه خطای تعقیب در طول گروه در لحظاتی که به خودرو راهنما اغتشاش وارد می‌شود روندی کاهشی داشته باشد. به عبارت دیگر:

$$\|e_N(t)\| \leq \|e_{N-1}(t)\| \leq \dots \leq \|e_2(t)\| \leq \|e_1(t)\|$$

در نظر گرفته می‌شود که به راحتی قابلیت‌اعمال بر جریان‌های ترافیکی بزرگ‌مقیاس را دارا می‌باشد. در این ساختار، هر خودرو با خودرو جلو و عقب خود در تبادل اطلاعات می‌باشد. بر این اساس، کنترل‌کننده‌ای خطی برای هر خودرو در نظر گرفته می‌شود و با لحاظ همزمان اثرات داده‌های ازدست‌رفته، تاخیر زمانی ارتباطی و نیز تاخیر عملگری، معادله حلقه بسته سیستم استخراج می‌گردد. با استفاده از قضیه لیاپانوف-کراسوفسکی، شرایط کافی به منظور تضمین پایداری داخلی گروه‌های خودرویی معرفی خواهند شد. سپس با تحلیل گسترش خطا در حوزه فرکانس، شرایط لازم روی ضرایب کنترلی که متضمن پایداری رشته‌ای جریان ترافیکی هستند استخراج خواهند شد.

به‌طور خلاصه، نوآوری‌های این مقاله به شرح ذیل می‌باشند:

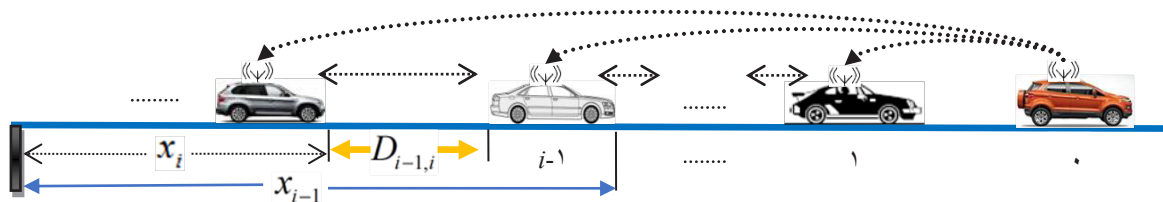
۱. بررسی اثر داده‌های ازدست‌رفته بر پایداری داخلی شبکه‌های خودرویی با ساختار دوسویه، ۲. بررسی اثر داده‌های ازدست‌رفته بر پایداری رشته‌ای شبکه‌های خودرویی با ساختار دوسویه و ۳. تحلیل پایداری داخلی و رشته‌ای شبکه‌های خودرویی با لحاظ همزمان اثرات داده‌های ازدست‌رفته، تاخیر زمانی ارتباطی و نیز تاخیر عملگری.

ادامه مقاله به شرح زیر ساماندهی شده است. در قسمت ۲ مقدمات ریاضی بحث ارائه شده است. در قسمت ۳ پایداری داخلی جریان ترافیکی در حضور داده‌های ازدست‌رفته، تاخیر زمانی ارتباطی و نیز تاخیر عملگری مورد بحث قرار خواهد گرفت. در قسمت ۴ به تحلیل پایداری رشته‌ای جریان ترافیکی در حضور عوامل فوق پرداخته می‌شود. در قسمت ۵ نتایج شبیه‌سازی به منظور اعتبارسنجی روش‌های مزبور ارائه خواهند شد. در نهایت، مقاله در قسمت ۶ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری خواهد شد.

۲- مقدمات ریاضی

۲-۱- تئوری گراف‌ها

فرض کنید $\mathcal{G} = (V, \mathcal{E}, \mathbf{A})$ بیانگر گرافی جهت‌دار مرتبه N است که V مجموعه راس‌ها، $\mathcal{E} \subseteq V \times V$ مجموعه یال‌ها و $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{N \times N}$ ماتریس مجاورت می‌باشد. هر یال (j, i) بیانگر تبادل اطلاعات از راس j به راس i می‌باشد. ماتریس لاپلاسیان $\mathbf{L} = [l_{ij}]$ گراف \mathcal{G} بصورت $l_{ij} = \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}$ و $l_{ij} = -a_{ij}, i \neq j$ در یک شبکه خودرویی، خودرو



شکل ۱. یک گروه خودرو با ساختار شبکه‌ای متمرکز

Fig. 1. A heterogeneous platoon of vehicle with centralized network

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_i + \mathbf{A}_2 u_i, \quad \mathbf{x}_i = [x_i, v_i, a_i]^T, \quad (5)$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/\tau \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = [0, 0, 1/\tau]^T$$

همچنین، دینامیک خودرو راهنما بصورت زیر می‌باشد:

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_0 = [x_0, v_0, a_0]^T, \quad (6)$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

بر اساس استراتژی فاصله ثابت، خطای تعقیب بین خودروی i و خودرو راهنما بصورت $\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_0(t) - \mathbf{d}_{ij}(t)$ ، تعریف می‌گردد که $\mathbf{d}_{ij}(t) = [\sum_{r=j}^i L_{r-1} + (i-j)D_{\min}] [1, 0, 0]^T$ ، همچنین، L طول خودرو و D_{\min} کمینه فاصله بین خودرویی است.

در شبکه‌های خودرویی به دلیل حجم بالای ارسال داده، امکان از دست دادن داده‌ها در لحظات نمونه‌برداری بسیار محتمل است. قانون کنترلی برای هر خودرو بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$u_i(t) = \mathbf{K} \sum_{j=0, j \neq i}^N a_{ij} \mathbf{e}_j(t_k); \quad (7)$$

$$t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

که در آن \mathbf{K} بردار ضرایب کنترلی و t_k لحظه نمونه‌برداری با زمان نمونه‌برداری $\eta = t_{k+1} - t_k$ می‌باشد. از سویی دیگر، تاخیر زمانی از ویژگی‌های سیستم‌های ارتباطی می‌باشد. با لحاظ تاخیر زمانی ارتباطی، قانون کنترلی فوق به شکل زیر قابل بیان خواهد بود:

$$u_i(t) = \mathbf{K} \sum_{j=0, j \neq i}^N a_{ij} \mathbf{e}_j(t_k - r(t)) \quad (8)$$

۲-۲- مدل طولی خودرو

یک گروه خودرو که شامل یک خودرو راهنما و N خودرو پیرو است را مطابق شکل ۱ در نظر بگیرید.

مدل زیر، دینامیک طولی هر خودرو را توصیف می‌کند [۲۴]

$$\dot{a}_i = f_i(v_i, a_i) + g_i(v_i)r_i \quad (1)$$

که در آن x_i, v_i و a_i به ترتیب موقعیت، سرعت و شتاب و r_i ورودی موتور می‌باشد. همچنین توابع f_i و g_i بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f_i = -\frac{1}{\tau_i} \left(a_i + \frac{\rho H_i c_i}{2 M_i} v_i^2 + \frac{R_i}{M_i} \right) - \frac{\rho H_i c_i v_i a_i}{M_i}, \quad g_i = \frac{1}{\tau_i M_i} \quad (2)$$

که در آن $\rho, H_i, c_i, R_i, \tau_i$ و M_i به ترتیب چگالی هوا، مقاومت غلتشی، ضریب درگ هوا، مساحت عمود بر جریان خودرو، ثابت موتور و جرم خودرو می‌باشند. با انتخاب کنترل‌کننده سطح پایین بصورت زیر

$$r_i = u_i M_i + 0.5 \rho H_i c_i v_i^2 + R_i + \tau_i \rho H_i c_i v_i a_i \quad (3)$$

که در آن u_i کنترل‌کننده سطح بالا می‌باشد، مدل دینامیک سطح بالای هر خودرو به شکل زیر در خواهد آمد [۵، ۶، ۱۵، ۱۹، ۲۵]:

$$\tau_i \dot{a}_i + a_i = u_i \quad (4)$$

۳- تحلیل پایداری داخلی

طبق رابطه دینامیک طولی هر خودرو بصورت زیر قابل بیان

است:

$$\dot{\mathbf{e}}_i(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{e}_i(t) + \sum_{j=1}^m \sum_{r=1, r \neq i}^N a_{jr} \mu_j(t) \mathbf{A}_2 \mathbf{K} \mathbf{e}_i(t - \beta_j(t)) \quad (13)$$

با تعریف بردار خطا بصورت $\mathbf{e}(t) = [\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \dots, \mathbf{e}_N(t)]^T$ ، دینامیک حلقه بسته گروه خودرو در حضور داده‌های ازدست‌رفته، تاخیر زمانی زمان-متغیر و نیز تاخیر عملگری به شکل زیر درخواهد آمد:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}_1) \mathbf{e}(t) + \sum_{j=1}^m \mu_j(t) (\mathbf{H} \otimes \mathbf{A}_2 \mathbf{K}) \mathbf{e}(t - \beta_j(t)) \quad (14)$$

که در آن، \mathbf{I} ماتریس همانی می‌باشد. با توجه به اینکه ماتریس \mathbf{H} مثبت معین با مقادیر ویژه مجزا و حقیقی است قطری پذیر بوده و ماتریس \mathbf{T} وجود دارد که $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{T} = \mathbf{\Lambda}$ که $\mathbf{\Lambda}$ ماتریسی قطری است که درایه‌های آن مقادیر ویژه ماتریس \mathbf{H} می‌باشد. با لحاظ تغییر متغیر $\boldsymbol{\xi}(t) = (\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}) \mathbf{e}(t)$ معادله بصورت زیر قابل بیان خواهد بود.

$$\begin{aligned} (\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}) \dot{\boldsymbol{\xi}} &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}_1) (\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}) \boldsymbol{\xi} + \\ &\sum_{j=1}^m \mu_j(t) (\mathbf{H} \otimes \mathbf{A}_2 \mathbf{K}) (\mathbf{T} \otimes \mathbf{I}) \boldsymbol{\xi}(t - \beta_j(t)) \end{aligned} \quad (15)$$

که در آن \otimes حاصلضرب کرانیکر می‌باشد. با استفاده از خاصیت $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}$ و انجام محاسبات ریاضی، رابطه فوق به شکل زیر درخواهد آمد:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}_1) \boldsymbol{\xi} + \sum_{i=1}^m \mu_j(t) (\mathbf{\Lambda} \otimes \mathbf{A}_2 \mathbf{K}) \boldsymbol{\xi}(t - \beta_j(t)) \quad (16)$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_r = \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\xi}_r + \lambda_r \sum_{j=1}^m \mu_j(t) \mathbf{A}_2 \mathbf{K} \boldsymbol{\xi}_r(t - \beta_j(t)) \quad (17)$$

که در آن λ_i مقدار ویژه ماتریس \mathbf{H} می‌باشد. فرض کنید احتمال ازدست‌رفتن داده در لحظه t_k برابر $\bar{\omega}$ باشد و حداکثر r داده متوالی از دست بروند، در اینصورت متغیر تصادفی $\mu_j(t)$ روابط زیر را ارضا می‌نماید:

$$\begin{aligned} \Pr[\mu_j(t) = 1] &= (1 - \bar{\omega}) \bar{\omega}^{j-1} = \delta_j, \quad j = 1, 2, \dots, r \\ \Pr[\mu_{r+1}(t) = 1] &= \bar{\omega}^r = \delta_{r+1} \end{aligned} \quad (18)$$

که در آن $\sum_{j=1}^{r+1} \delta_j = 1$

که در آن $r(t)$ تاخیر زمانی ارتباطی می‌باشد. به واسطه اینرسی بالا، گشتاور مطلوب با تاخیر زمانی توسط موتور خودرو تولید می‌گردد. به این تاخیر، تاخیر عملگری (Δ) گفته می‌شود. با لحاظ تاخیر عملگری، قانون کنترلی فوق به شکل زیر قابل بیان خواهد بود:

$$u_i(t - \Delta) = \mathbf{K} \sum_{j=0, j \neq i}^N a_{ij} \mathbf{e}_i(t_k - r(t) - \Delta) \quad (9)$$

با تعریف $\mathbf{W}_i(t_k) = \sum_{j=0, j \neq i}^N a_{ij} \mathbf{e}_i(t_k)$ ، خواهیم داشت:

$$u_i(t - \Delta) = \mathbf{K} \mathbf{W}_i(t_k - r(t) - \Delta) = \mathbf{K} \mathbf{W}_i(t - \alpha(t)), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1} \quad (10)$$

که در آن $0 \leq \alpha(t) = t - t_k + r(t) + \Delta \leq \eta + \bar{r} + \Delta$. همچنین \bar{r} کران بالای تاخیر زمانی ارتباطی می‌باشد. بنابراین قانون کنترلی گسسته به قانون کنترلی پیوسته زمانی با تاخیر زمانی متغیر با زمان $\alpha(t)$ تبدیل می‌گردد. در شبکه خودرویی فرض کنید داده در زمان t_{k+1} مفقود و در زمان‌های t_k و t_{k+2} دریافت می‌گردد. بنابراین، قانون کنترلی بصورت زیر قابل بیان خواهد بود:

$$u_i(t - \Delta) = \begin{cases} \mathbf{K} \mathbf{W}_i(t - \beta_1(t)), & t_k \leq t < t_{k+1} \\ \mathbf{K} \mathbf{W}_i(t - \beta_2(t)), & t_{k+1} \leq t < t_{k+2} \end{cases} \quad (11)$$

در حالت کلی برای m داده ازدست متوالی رفته خواهیم داشت:

$$u_i(t - \Delta) = \begin{cases} \mathbf{K} \mathbf{W}_i(t - \beta_1(t)), & t_k \leq t < t_{k+1} \\ \mathbf{K} \mathbf{W}_i(t - \beta_2(t)), & t_{k+1} \leq t < t_{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{K} \mathbf{W}_i(t - \beta_{m+1}(t)), & t_{k+m} \leq t < t_{k+m+1} \end{cases} \quad (12)$$

که در آن $\beta_j(t) = \alpha(t) + (j-1)\eta$. همچنین، متغیر جدید $\mu_j(t)$ به این شکل تعریف می‌گردد که اگر $(j-1)$ داده متوالی از دست برود ($\beta_j(t)$ در معادلات ظاهر گردد) $\mu_j(t) = 1$ و در غیر اینصورت $\mu_j(t) = 0$. به عنوان مثال اگر یک داده ازدست برود $\mu_2(t) = 1$.

با استفاده از روابط، و نیز توجه به تعریف $\mu_j(t)$ ، معادله دینامیک حلقه بسته گروه خودرو به شکل زیر درخواهد آمد:

$$\Theta_{l,2} = \begin{pmatrix} \delta_l \lambda_r \mathbf{GA}_2 \mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \delta_l \varepsilon \lambda_r \mathbf{GA}_2 \mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, l = 2, \dots, m; \quad (21)$$

$$\Theta_{l,4} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{X}_{l,1} & \mathbf{X}_{l,2} & \mathbf{X}_{l,3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, l = 2, \dots, m$$

$$\Lambda_1 = \delta_1 \left(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{R}_1 - \left(1 + \frac{\pi^2}{4} \right) \mathbf{Z}_1 \right), \quad \Lambda_2 = \mathbf{P} - \mathbf{G} + \varepsilon \mathbf{A}_1^T \mathbf{G},$$

$$\Lambda_3 = \sum_{i=1}^m \delta_i \eta^2 \mathbf{S}_i - 2\varepsilon \mathbf{G}, \quad \mathbf{X}_{i,1} = \delta_i (\mathbf{R}_i - \mathbf{W}_i) \quad (22)$$

$$\mathbf{X}_{i,2} = \delta_i \left(\mathbf{W}_i + \left(1 - \frac{\pi^2}{4} \right) \mathbf{Z}_i \right), \quad \mathbf{X}_{i,3} = \delta_i \frac{\pi^2}{2} \mathbf{Z}_i,$$

$$\mathbf{X}_{i,4} = \delta_i (-2\mathbf{R}_i + \mathbf{W}_i + \mathbf{W}_i^T)$$

$$\mathbf{X}_{l,5} = \delta_{l+1} \left(\mathbf{Q}_{l+1} - \mathbf{R}_{l+1} - \left(1 + \frac{\pi^2}{4} \right) \mathbf{Z}_{l+1} \right) -$$

$$\delta_l \left(\mathbf{Q}_l + \mathbf{R}_l + \left(1 + \frac{\pi^2}{4} \right) \mathbf{Z}_l \right), l = 1, \dots, m-1 \quad (23)$$

$$\mathbf{X}_{m,5} = -\delta_m \left(\mathbf{Q}_m + \mathbf{R}_m + \left(1 + \frac{\pi^2}{4} \right) \mathbf{Z}_m \right), \quad (24)$$

$$\mathbf{X}_{i,6} = -\delta_i \pi^2 \mathbf{Z}_i, \quad \mathbf{S}_i = \mathbf{R}_i + \mathbf{Z}_i$$

همچنین، بردارها و ماتریس‌های زیر تعریف می‌شوند ($\eta_0 = 0$).

$$\boldsymbol{\gamma}_i^T(t) = [\xi_r^T(t - \eta_{i-1}), \xi_r^T(t - \beta_i(t)), \xi_r^T(t - \eta_i)],$$

$$\Xi_i^T(t) = \left[\xi_r^T(t - \eta_{i-1}), \xi_r^T(t - \eta_i), \frac{1}{\eta} \int_{t-\eta_i}^{t-\eta_{i-1}} \xi_r(s) ds \right] \quad (25)$$

$$\boldsymbol{\Psi}^T(t) = [\xi_r^T(t), \dot{\xi}_r^T(t), \bar{\xi}_1^T(t), \bar{\xi}_2^T(t), \dots, \bar{\xi}_m^T(t)],$$

$$\bar{\xi}_i^T(t) = \left[\xi_r^T(t - \beta_i(t)), \xi_r^T(t - \eta_i), \frac{1}{\eta} \int_{t-\eta_i}^{t-\eta_{i-1}} \xi_r(s) ds \right] \quad (26)$$

$$\mathbf{H}_i = \begin{pmatrix} -\mathbf{R}_i & \mathbf{R}_i - \mathbf{W}_i & \mathbf{W}_i \\ * & -2\mathbf{R}_i + \mathbf{W}_i + \mathbf{W}_i^T & \mathbf{R}_i - \mathbf{W}_i \\ * & * & -\mathbf{R}_i \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$\mathbf{g}_i = - \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_i & -\mathbf{Z}_i & \mathbf{0} \\ * & \mathbf{Z}_i & \mathbf{0} \\ * & * & \mathbf{0} \end{pmatrix} - \frac{\pi^2}{4} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_i & \mathbf{Z}_i & -2\mathbf{Z}_i \\ * & \mathbf{Z}_i & -2\mathbf{Z}_i \\ * & * & 4\mathbf{Z}_i \end{pmatrix}$$

تعریف ۲. سیگنال $x_i(t)$ پایدار مجانبی میانگین مربعات است اگر و فقط اگر به ازاء هر شرط اولیه، $\lim_{t \rightarrow \infty} E \left\{ \|x_i(t) - x_0(t)\|^2 \right\} = 0$ یا $\lim_{t \rightarrow \infty} E \left\{ \|e_i(t)\|^2 \right\} = 0$ که در آن $E\{\cdot\}$ تابع انتظار است. قضیه زیر شرایط کافی برای پایداری داخلی یک گروه خودرو در حضور داده‌های ازدست‌رفته، تاخیر زمانی ارتباطی و تاخیر عملگری را بیان می‌دارد.

قضیه ۱. یک گروه خودرو با ساختار ارتباطی دوسویه در حضور داده‌های ازدست‌رفته، تاخیر زمانی ارتباطی زمان-متغیر و تاخیر عملگری تحت قانون کنترلی پایدار داخلی است اگر مقادیر مثبت $\varepsilon, \nu_1, \nu_2$ ، ماتریس‌های مثبت معین $\mathbf{P}, \mathbf{Q}_i, \mathbf{R}_i$ ، ماتریس دلخواه \mathbf{W}_i و نیز ماتریس متقارن \mathbf{G} یافت شوند که نامساوی‌های ماتریسی زیر را برقرار نمایند.

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{1,1} & \Theta_{1,2} & \Theta_{2,2} & \Theta_{3,2} & \dots & \Theta_{m,2} \\ * & \Theta_{1,3} & \Theta_{2,4} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ * & * & \Theta_{2,3} & \Theta_{3,4} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & * & \ddots & \Theta_{m,4} \\ * & * & * & * & \dots & \Theta_{m,3} \end{pmatrix} \prec \mathbf{0} \quad (19)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_i & \mathbf{W}_i \\ * & \mathbf{R}_i \end{pmatrix} \succ \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (20)$$

که در آن:

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \mathbf{0} & \Lambda_2 & \mathbf{0} \\ * & -\frac{\mathbf{I}}{\nu_1 + \nu_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & \Lambda_3 & \mathbf{0} \\ * & * & * & -\frac{\mathbf{I}}{\varepsilon(\nu_1 + \nu_2)} \end{pmatrix},$$

$$\Theta_{1,2} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{1,1} + \delta_1 \lambda_r \mathbf{GA}_2 \mathbf{K} & \mathbf{X}_{1,2} & \mathbf{X}_{1,3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \delta_1 \varepsilon \lambda_r \mathbf{GA}_2 \mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\Theta_{i,3} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{i,4} & \mathbf{X}_{i,1} & \mathbf{0} \\ * & \mathbf{X}_{i,5} & \mathbf{X}_{i,3} \\ * & * & \mathbf{X}_{i,6} \end{pmatrix}$$

اثبات. تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید:

$$V = \xi_r^T \mathbf{P} \xi_r + \sum_{i=1}^m \delta_i \left(\int_{t-\eta_i}^{t-\eta_{i-1}} \xi_r^T(s) \mathbf{Q}_i \xi_r(s) ds + \eta \int_{t-\eta_i}^{t-\eta_{i-1}} \int_{t+\theta}^t \xi_r^T(s) (\mathbf{R}_i + \mathbf{Z}_i) \xi_r(s) ds d\theta \right) \quad (28)$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(t) = & 2\xi_r^T \mathbf{P} \dot{\xi}_r + \sum_{i=1}^m \delta_i \left(\xi_r^T(t-\eta_{i-1}) \mathbf{Q}_i \xi_r(t-\eta_{i-1}) - \right. \\ & \left. \xi_r^T(t-\eta_i) \mathbf{Q}_i \xi_r(t-\eta_i) + \eta^2 \xi_r^T (\mathbf{R}_i + \mathbf{Z}_i) \dot{\xi}_r - \right. \\ & \left. \eta \int_{t-\eta_i}^{t-\eta_{i-1}} \xi_r^T(s) (\mathbf{R}_i + \mathbf{Z}_i) \dot{\xi}_r(s) ds \right) \end{aligned} \quad (29)$$

کران بالای عبارت انتگرالی فوق را می‌توان به کمک لم‌های ۱ و ۲

بصورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} & -\sum_{i=1}^m \delta_i \eta \left(\int_{t-\eta_i}^{t-\eta_{i-1}} \xi_r^T(s) \mathbf{R}_i \xi_r(s) ds \right) = \\ & -\sum_{i=1}^m \delta_i \eta \left(\int_{t-\eta_i}^{t-\eta_{i-1}} \xi_r^T(s) \mathbf{R}_i \xi_r(s) ds + \int_{t-\eta_i}^{t-\eta_{i-1}} \xi_r^T(s) \mathbf{R}_i \xi_r(s) ds \right) \leq \\ & \leq -\sum_{i=1}^m \delta_i \left(\frac{\eta}{\eta_i(t)} \int_{t-\eta_i}^{t-\eta_{i-1}} \xi_r^T(s) ds \mathbf{R}_i \int_{t-\eta_{i-1}}^{t-\eta_i} \xi_r(s) ds - \right. \\ & \left. \frac{\eta}{\eta-\eta_i(t)} \int_{t-\eta_i}^{t-\eta_{i-1}} \xi_r^T(s) ds \mathbf{R}_i \int_{t-\eta_i}^{t-\eta_{i-1}} \xi_r(s) ds \right) \leq \sum_{i=1}^m \delta_i \gamma_i^T \mathbf{H}_i \gamma_i \end{aligned} \quad (30)$$

و با استدلال مشابه فوق می‌توان نوشت:

$$-\sum_{i=1}^m \delta_i \eta \left(\int_{t-\eta_i}^{t-\eta_{i-1}} \xi_r^T(s) \mathbf{Z}_i \xi_r(s) ds \right) \leq \sum_{i=1}^m \delta_i \Xi_i^T \mathbf{g}_i \Xi_i \quad (31)$$

با توجه به رابطه به ازاء هر ماتریس متقارن با ابعاد مناسب \mathbf{G} و

پارامتر مثبت ε رابطه زیر برقرار است:

$$\mathbf{E} \left\{ 2 \left[\xi_r^T + \varepsilon \dot{\xi}_r^T \right] \mathbf{G} \left[-\dot{\xi}_r + \mathbf{A}_1 \xi_r + \sum_{i=1}^m \delta_i \lambda_i \mathbf{A}_2 \mathbf{K} \xi_r(t-\beta_i(t)) \right] \right\} = 0 \quad (32)$$

حال با ترکیب روابط ، - و انجام ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\mathbf{E}[\mathcal{L}V(t)] \leq \mathbf{E}[\boldsymbol{\Psi}^T(t) \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\Psi}(t)] \quad (33)$$

حال، اگر نامساوی‌های ماتریسی و برقرار باشند، نامساوی برقرار

می‌گردد. بنابراین، اثبات کامل و پایداری داخلی گروه خودرو در

حضور داده‌های ازدست‌رفته، تاخیر زمانی ارتباطی و تاخیر عملگری

تضمین می‌گردد [۱۳].

۴- تحلیل پایداری رشته‌ای

در این قسمت به بررسی پایداری داخلی گروه‌های خودرویی با ساختار دوسویه و در حضور داده‌های ازدست‌رفته، تاخیر زمانی و تاخیر عملگری پرداخته می‌شود. به منظور ساده‌سازی در تحلیل و جلوگیری از پیچیدگی‌های مربوطه، تحلیل پایداری رشته‌ای برای وضعیت بحرانی صورت می‌گیرد. منظور از وضعیت بحرانی، زمانی است که تاخیر زمانی ارتباطی بیشترین مقدار خود را داشته و داده‌ها به بیشترین تعداد ممکن (m) ازدست می‌روند. بدیهی است که اگر سیستمی در وضعیت بحرانی خود پایدار باشد، در حالت کارکرد عادی نیز پایدار خواهد بود. با این فرض، معادله سیستم حلقه‌بسته برای هر خودرو به شکل زیر در خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \tau \ddot{e}_i + \dot{e}_i = & k_1 (e_{i-1}(t-\bar{\beta}) - e_i(t-\bar{\beta})) + \\ & k_2 (\dot{e}_{i-1}(t-\bar{\beta}) - \dot{e}_i(t-\bar{\beta})) - \\ & -k_1 (e_i(t-\bar{\beta}) - e_{i+1}(t-\bar{\beta})) + \\ & k_2 (\dot{e}_{i+1}(t-\bar{\beta}) - \dot{e}_i(t-\bar{\beta})) - k_2 \dot{e}_i(t-\bar{\beta}) \end{aligned} \quad (34)$$

قضیه ۲. یک گروه خودرو در حضور داده‌های ازدست‌رفته، تاخیر

زمانی زمان-متغیر و نیز تاخیر عملگری پایدار رشته‌ای است اگر

رابطه زیر بین ضرایب کنترلی برقرار باشد.

$$k_1 < \frac{5}{4} k_2^2 \quad (35)$$

با تبدیل لاپلاس گرفتن از ، رابطه زیر حاصل خواهد شد:

$$\begin{aligned} (\tau s^3 + s^2 + 2k_1 e^{-\bar{\beta}s} + 3k_2 s e^{-\bar{\beta}s}) E_i = \\ (k_1 + k_2 s) e^{-\bar{\beta}s} E_{i-1} + (k_1 + k_2 s) e^{-\bar{\beta}s} E_{i+1} \end{aligned} \quad (36)$$

رابطه فوق بصورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} E_i = G(E_{i-1} + E_{i+1}), \\ G = \frac{(k_1 + k_2 s) e^{-\bar{\beta}s}}{\tau s^3 + s^2 + (2k_1 + 3k_2 s) e^{-\bar{\beta}s}} \end{aligned} \quad (37)$$

با ساده‌سازی ، خواهیم داشت:

$$\frac{E_N}{E_{N-1}} = \frac{(k_1 + k_2 s) e^{-\bar{\beta} s}}{\tau s^3 + s^2 + (2k_1 + 3k_2 s) e^{-\bar{\beta} s}} \quad (43)$$

واضح است که تحت شرط خواهیم داشت: $\left| \frac{E_N(j\omega)}{E_{N-1}(j\omega)} \right| \leq 1$ و اثبات تمام است.

نکته: قضیه ۲ این نتیجه ارزشمند را ارائه می‌دهد که در ساختار دوسویه گروه‌های خودرویی، پایداری رشته‌ای فقط وابسته به شرط بوده و مستقل از مقادیر تاخیر زمانی، داده‌های ازدست‌رفته و تاخیر عملگری است. بعبارت دیگر، این سه عامل فقط پایداری داخلی را مخدوش کرده و اثری در پایداری رشته‌ای نخواهند داشت.

۵- نتایج شبیه‌سازی

در این قسمت، یک گروه متشکل از ده خودرو در نظر گرفته می‌شوند. در قسمت اول، گروه خودرو همگن و در قسمت دوم، گروه خودرو ناهمگن در نظر گرفته می‌شود. در هر دو قسمت، تاخیر زمانی ارتباطی بصورت $r(t) = 0.01(1 + |\sin t|)$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین، فاصله ایمن بین خودرویی، زمان نمونه‌برداری و حداکثر داده‌های از دست‌رفته متوالی به ترتیب برابر $\eta = 0.01s$ ، $D_{\min} = 5m$ و $m = 2$ انتخاب می‌شوند. شکل ۲ توزیع برنولی متغیرهای تصادفی $\mu_1(t)$ ، $\mu_2(t)$ و $\mu_3(t)$ را نشان می‌دهد. این توابع به ترتیب مربوط به ازدست‌رفتن هیچ داده، یک داده و دو داده متوالی می‌باشند (به منظور وضوح شکل‌ها، توابع فوق فقط در ۱۰ ثانیه رسم شده‌اند. برای هر یک از این توابع، الگوی رفتاری به همین شکل در کل بازه ۲۰۰ ثانیه تکرار می‌گردد). به منظور مطالعه پایداری داخلی و رشته‌ای هر دو گروه در حضور اغتشاش خارجی، فرض می‌شود که خودرو راهنما تحت دو مانور افزایش و کاهش شتاب بصورت پروفایل $a_0(t) = \begin{cases} -1, & 90 \leq t \leq 110 \\ 0.5, & 170 \leq t \leq 190 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ قرار می‌گیرد. همچنین، خطای تعقیب بین خودرویی بصورت $SE_i = x_{i-1} - x_i - L_{i-1} - D_{\min}$ تعریف می‌گردد.

۵-۱- گروه همگن خودرو

در گروه همگن، طول هر خودرو، ثابت زمانی موتور و تاخیر عملگری به ترتیب برابر $L = 4m$ ، $\tau = 0.1s$ و $\Delta = 0.05s$ در نظر گرفته می‌شوند. شکل ۳ منحنی خطای تعقیب گروه را نشان می‌دهد. مطابق این شکل، خطای تعقیب بین هر دو خودرو متوالی بصورت

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = \frac{G}{1 - G \frac{E_{i+1}}{E_i}} \quad (38)$$

همانطور که در تعریف (۱) بیان گردید، در یک گروه خودرو، پایداری رشته‌ای برقرار است اگر دامنه خطا در طول گروه روندی کاهشی داشته باشد یا بعبارت دیگر $\left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| < 1$. بنابراین، اگر شرایط $|G| \leq 0.5$ و $\left| \frac{E_N(j\omega)}{E_{N-1}(j\omega)} \right| \leq 1$ برقرار باشند، پایداری رشته‌ای گروه خودرو با ساختار دوسویه برقرار خواهد شد. می‌توان نوشت: $|G(j\omega)| = \sqrt{p/q}$ که در آن

$$\begin{aligned} p &= k_1^2 + k_2^2 \omega^2 \\ q &= \tau^2 \omega^6 + \omega^4 + 9k_2^2 \omega^2 + 4k_1^2 - \\ &4k_1 \omega^2 \cos \bar{\beta} \omega + 4k_1 \tau \omega^3 \sin \bar{\beta} \omega - \\ &6k_2 \omega^3 \sin \bar{\beta} \omega - 6k_2 \tau \omega^4 \cos \bar{\beta} \omega \end{aligned} \quad (39)$$

شرط $|G(j\omega)| < 0.5$ برقرار خواهد بود اگر:

$$\begin{aligned} q - 4p &= \tau^2 \omega^6 + \omega^4 + 5k_2^2 \omega^2 - \\ &4k_1 \omega^2 \cos \bar{\beta} \omega + 4k_1 \tau \omega^3 \sin \bar{\beta} \omega - \\ &6k_2 \omega^3 \sin \bar{\beta} \omega - 6k_2 \tau \omega^4 \cos \bar{\beta} \omega \geq 0 \end{aligned} \quad (40)$$

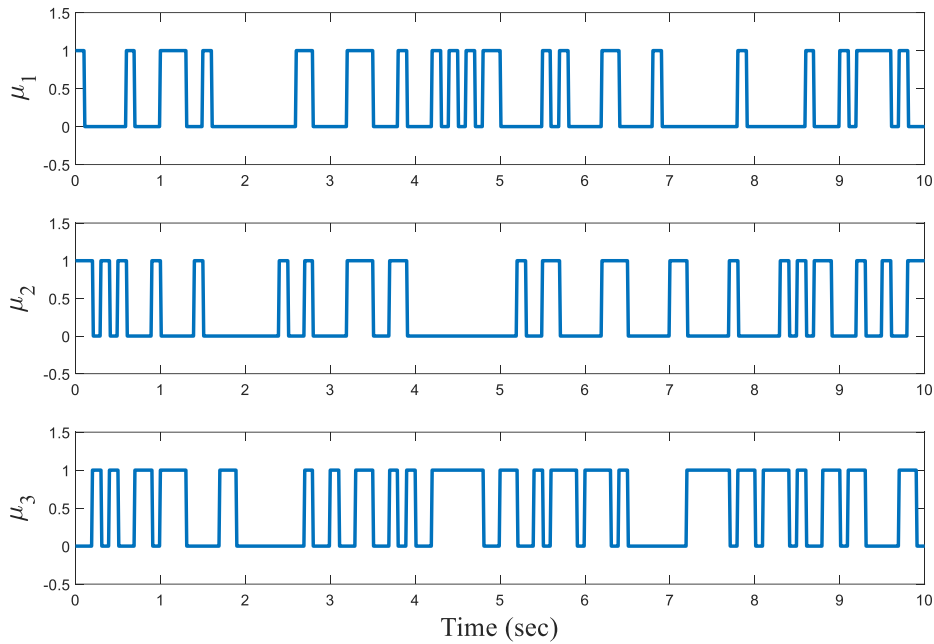
با توجه به اینکه $-\sin x \geq -x$ ، $-\cos x \geq -1$ $\forall x \geq 0$: خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} q - 4p &\geq \tau^2 \omega^4 + (1 - 4k_1 \bar{\beta} \tau - 6k_2 \bar{\beta} - 6k_2 \tau) \omega^2 + \\ &5k_2^2 - 4k_1 \geq 0 \end{aligned} \quad (41)$$

در مرجع [۲۶] اثبات شده است که خطای تعقیب بیشترین انرژی خود را در فرکانس‌های کوچک دارد. به عبارت دیگر، نواحی فرکانس پایین نقش تعیین‌کننده‌ای در تضمین پایداری رشته‌ای دارند. بنابراین اگر ضریب ω^0 مثبت باشد، پایداری رشته‌ای برقرار خواهد بود. ضریب ω^0 مثبت است اگر و فقط اگر:

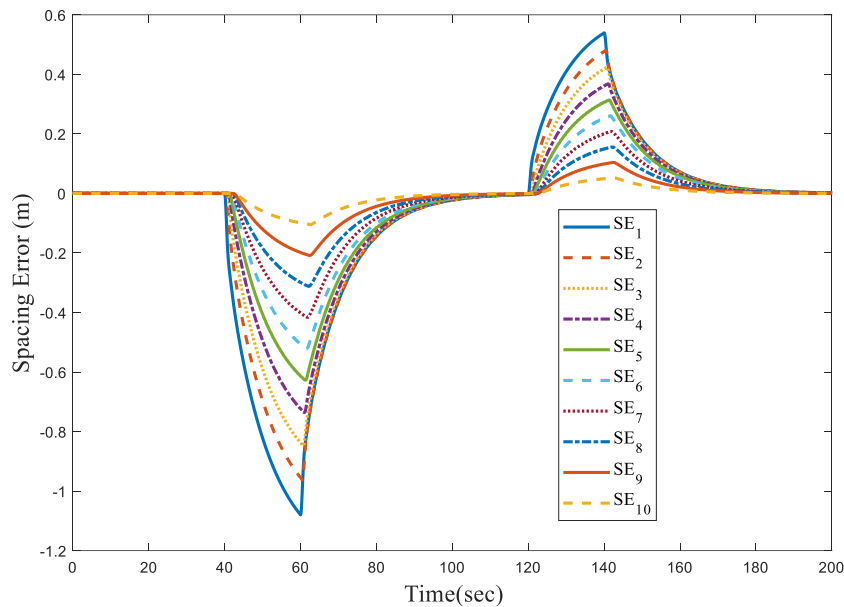
$$5k_2^2 - 4k_1 > 0 \Rightarrow k_1 < \frac{5}{4} k_2^2 \quad (42)$$

حال به بررسی شرط $\left| \frac{E_N(j\omega)}{E_{N-1}(j\omega)} \right| \leq 1$ پرداخته می‌شود. آخرین خودرو دارای ساختار یکسویه است. بنابراین، خواهیم داشت:



شکل ۲. توزیع برنولی متغیرهای تصادفی $\mu_1(t)$ ، $\mu_2(t)$ و $\mu_3(t)$

Fig. 2. Bernoulli distribution of random variables $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ and $\mu_3(t)$

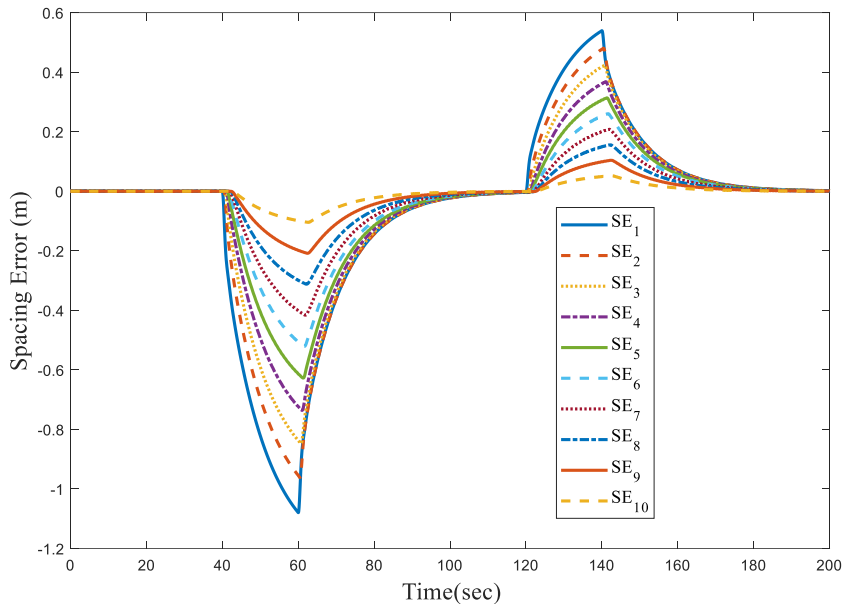


شکل ۳. خطای تعقیب گروه همگن خودرو

Fig. 3. Spacing error of homogeneous platoon

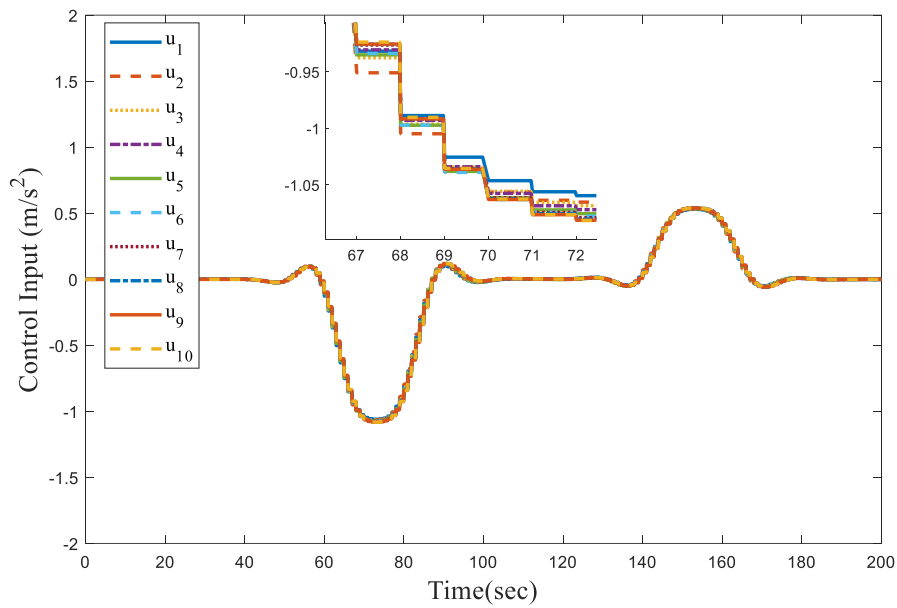
پایداری رشته‌ای را تضمین می‌نماید. شکل ۴ منحنی سرعت خودروها را نشان می‌دهد. مطابق این شکل، با توجه به پایداری داخلی گروه خودرو، کلیه خودروها سرعت خودرو راهنما را بصورت مجانبی تعقیب می‌کنند. شکل ۵ منحنی ورودی کنترلی سطح بالا را نشان می‌دهد. مطابق این شکل، سیگنال کنترلی سطح بالای تمامی خودروها کاملاً

مجانبی به صفر میل می‌کند که نشان‌دهنده پایداری داخلی گروه خودرو می‌باشد. همچنین، مطابق این شکل دامنه خطای تعقیب در طول گروه روندی کاهشی داشته که بیانگر پایداری رشته‌ای می‌باشد. همانطور که از این شکل پیداست، داده‌های ازدست‌رفته اثری بر پایداری رشته‌ای گروه نداشته و طبق قضیه ۲، کنترل‌کننده ارائه‌شده



شکل ۴. سرعت گروه همگن خودرو

Fig. 4. Velocity of homogeneous platoon

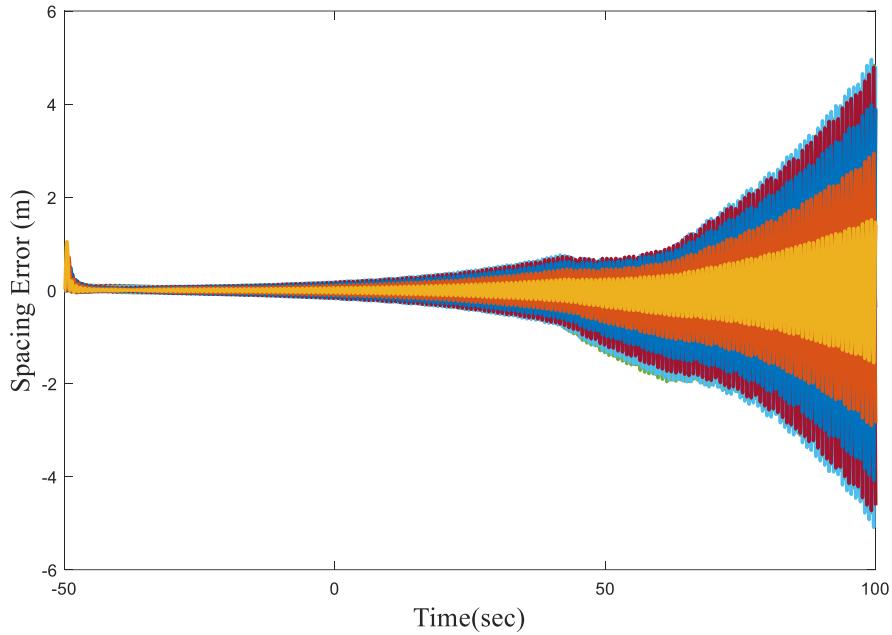


شکل ۵. منحنی کنترل کننده سطح بالای گروه همگن خودرو

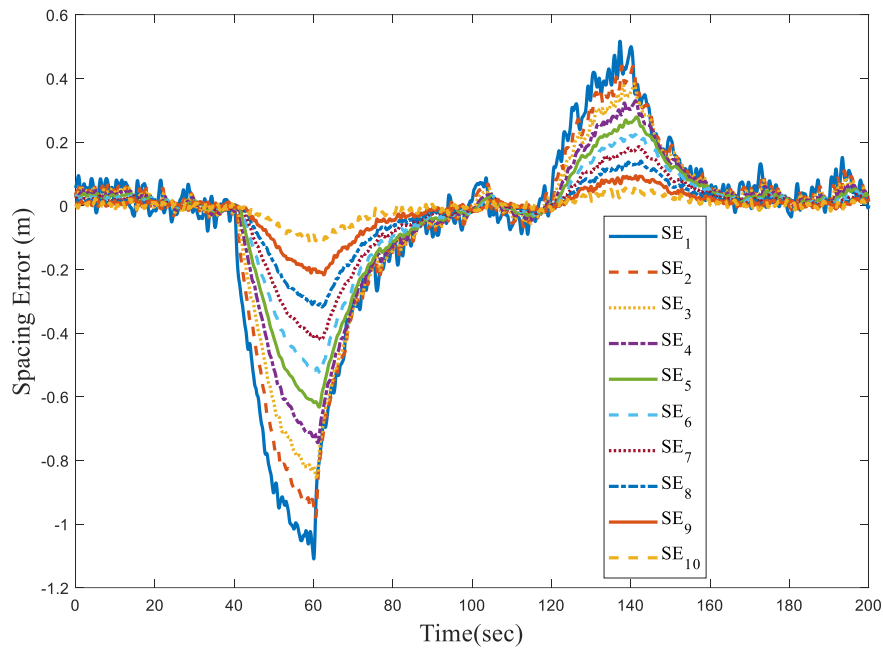
Fig. 5. Upper level controller of homogeneous platoon

افزایش شماره خودرو روندی کاهشی دارد که موید پایداری رشته‌ای گروه همگن خودرو است. شکل ۶ رفتار ناپایدار گروه خودرو را در اثر افزایش تعداد داده‌های ازدست‌رفته نشان می‌دهد. مطابق این شکل، اگر داده‌های ازدست‌رفته در شبکه خودرویی افزایش یابد، رفتار گروه ناپایدار خواهد بود. از آنجایی که نویز اندازه‌گیری از مشخصات سیستم‌های شبکه‌ای می‌باشد، در شکل (۷) اثر نویز اندازه‌گیری بر

هموار و دارای مقدار بیشینه حدود 1 m/s^2 می‌باشد که بیانگر آن است که روش ارائه شده از نظر عملی به راحتی قابل پیاده‌سازی می‌باشد. مطابق این شکل، توان کنترلی هر خودرو در لحظات اعمال اغتشاش افزایش می‌یابد. دلیل این امر آن است که کنترل کننده تلاش می‌کند با غلبه بر اغتشاش گروه را به وضعیت پایدار برگرداند. از سویی دیگر، دامنه ورودی کنترلی خودروها در لحظات اعمال اغتشاش با



شکل ۶. رفتار ناپایدار گروه همگن خودرو با افزایش حداکثر تعداد داده‌های از دست رفته
Fig. 6. Unstable behavior of homogeneous platoon by increasing number of data loss



شکل ۷. رفتار گروه همگن خودرو در حضور نویز اندازه‌گیری
Fig. 7. Spacing error of homogeneous platoon in presence of measuring noise

بوده و عملکرد مطلوبی از خود نمایش می‌دهد.

۵-۲- گروه ناهمگن خودرو

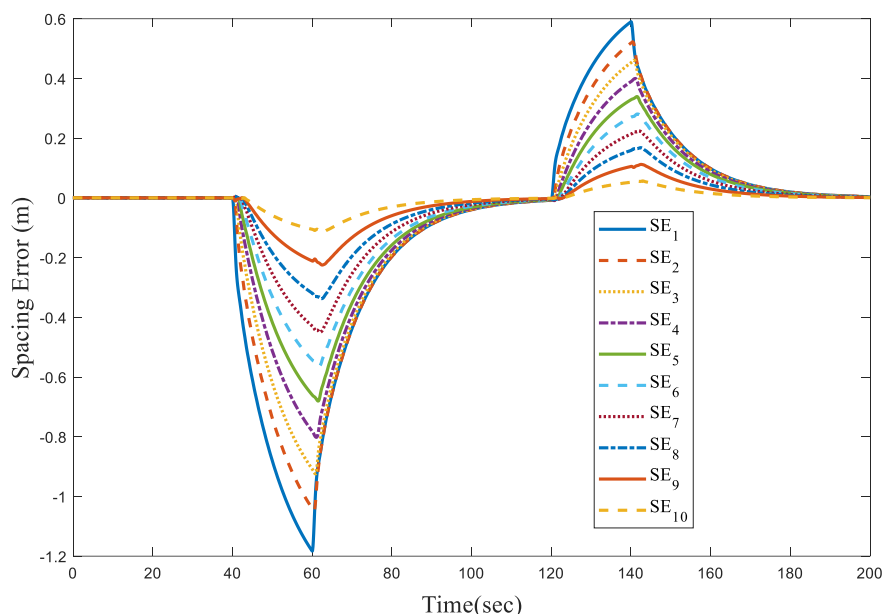
مشخصات گروه ناهمگن در جدول ۱ ارائه شده است.

شکل ۸ خطای تعقیب گروه ناهمگن را نشان می‌دهد. مطابق این

رفتار گروه خودرو مورد مطالعه قرار گرفته است. به این منظور، در هر لحظه یک عدد تصادفی در بازه $[-0.5, 0.5]$ به اطلاعات در حال تبادل بین خودرویی اضافه شده است. مطابق این شکل، در حضور نویز اندازه‌گیری گروه خودرو پایداری داخلی و رشته‌ای خود را حفظ می‌کند. بعبارت دیگر، کنترل‌کننده در مقابل نویز اندازه‌گیری مقاوم

جدول ۱. مشخصات گروه ناهمگن خودرو
Table 1. Characteristics of heterogeneous platoon

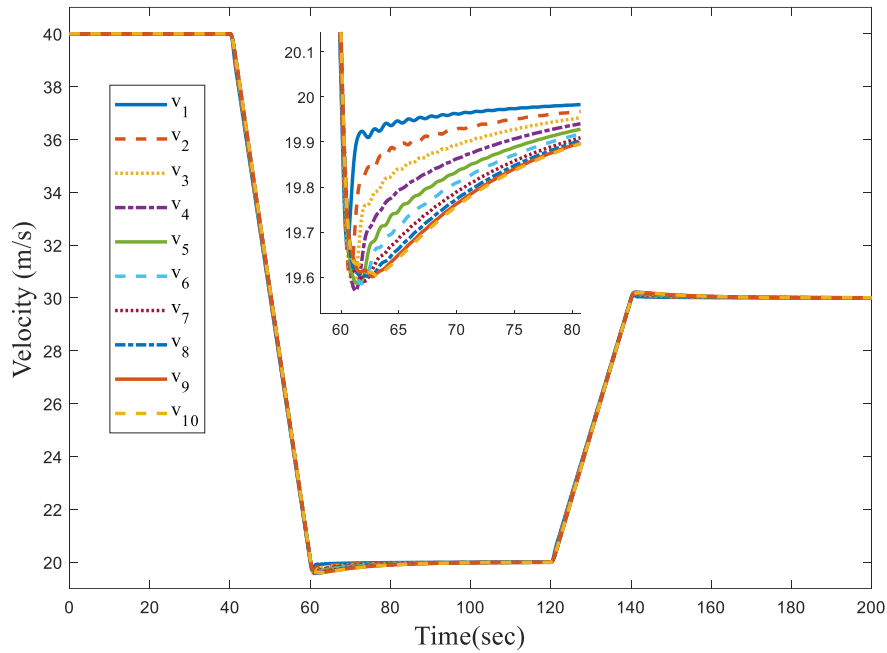
شماره خودرو	تاخیر موتور (s)	طول (m)	ثابت زمانی موتور (s)
۱	۰/۰۵	۴	۰/۱
۲	۰/۰۸	۴/۲	۰/۱۵
۳	۰/۱	۳/۹	۰/۱۸
۴	۰/۱۳	۴/۱	۰/۲
۵	۰/۱۱	۳/۸	۰/۱۵
۶	۰/۰۵	۴	۰/۰۸
۷	۰/۱۱	۴/۴	۰/۰۵
۸	۰/۰۹	۳/۸	۰/۱۱
۹	۰/۱	۴/۳	۰/۱
۱۰	۰/۰۸	۴/۵	۰/۱۴



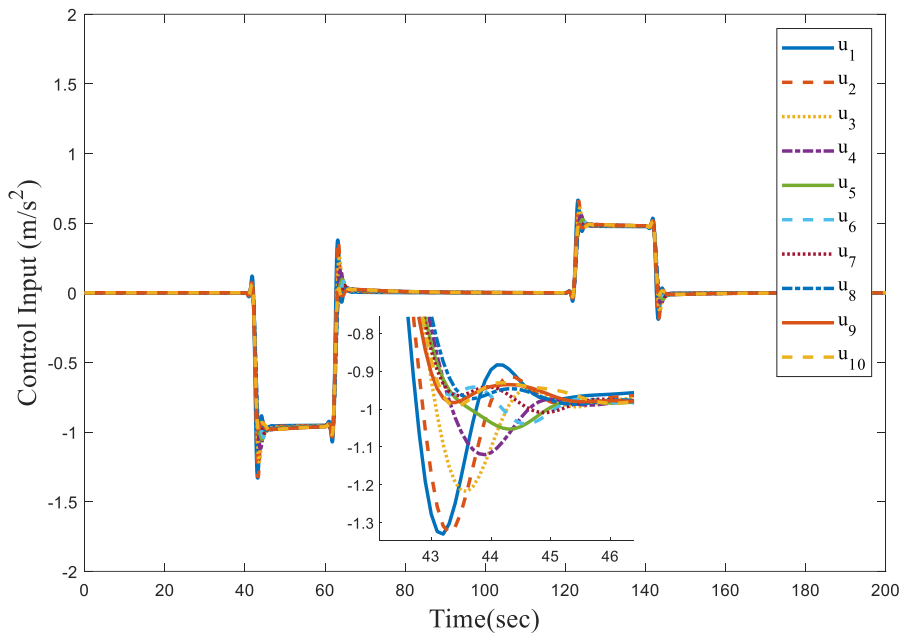
شکل ۸. منحنی خطای تعقیب برای گروه ناهمگن خودرو
Fig. 8. Spacing error of heterogeneous platoon

شکل، دامنه خطای تعقیب به صفر رسیده و در طول گروه روندی کاهشی دارد لذا گروه ناهمگن خودرو پایدار داخلی است. همچنین، گروه خودرو پایداری رشته‌ای خود را در حضور داده‌های ازدست‌رفته (طبق قضیه ۲) حفظ می‌کند. شکل ۹ منحنی سرعت خودروهای گروه را نشان می‌دهد. مطابق این شکل، با توجه به اینکه گروه ناهمگن خودرو پایدار داخلی است، تمامی خودروها بصورت مجانبی سرعت خودرو راهنما را تعقیب می‌کنند. شکل ۱۰ منحنی کنترلی

سطح بالا را نشان می‌دهد. مطابق این شکل، سیگنال کنترلی سطح بالای تمامی خودروها کاملاً هموار و دارای مقدار بیشینه حدود 1 m/s^2 می‌باشد که بیانگر آن است که روش ارائه‌شده از نظر عملی محدودیت پیاده‌سازی ندارد همچنین، ورودی کنترلی سطح بالای هر خودرو در لحظات اغتشاش افزایش می‌یابد دلیل این امر آن است که کنترل‌کننده تلاش می‌کند با غلبه بر اغتشاش گروه را به وضعیت پایدار برگرداند. از سویی دیگر، دامنه ورودی کنترلی در لحظات



شکل ۹. سرعت گروه ناهمگن خودرو
Fig. 9. Velocity of heterogeneous platoon

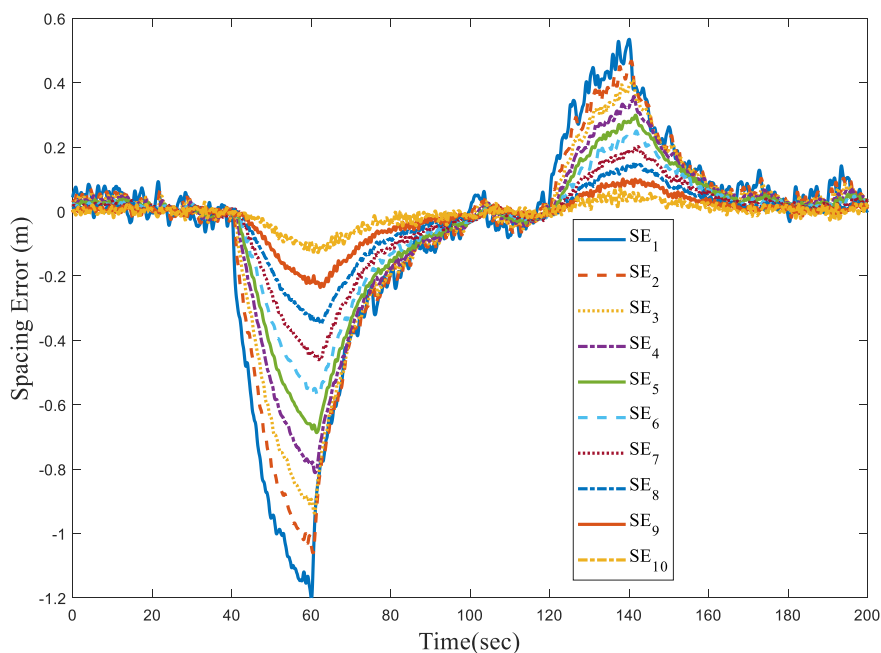


شکل ۱۰. ورودی کنترلی سطح بالا در گروه ناهمگن خودرو
Fig. 10. Upper level control of heterogeneous platoon

۶- نتیجه گیری

در این مقاله به تحلیل پایداری داخلی و رشته‌ای گروه‌های خودرویی در حضور داده‌های از دست‌رفته، تاخیر زمانی-زمان-متغیر و تاخیر عملگری پرداخته شد. در یک شبکه خودرویی به دلیل حجم بالای داده‌های ارسالی، پدیده‌هایی همچون داده‌های از دست‌رفته

اعمال اغتشاش با افزایش شماره خودرو روندی کاهشی دارد که موید پایداری رشته‌ای گروه ناهمگن خودرو است. شکل ۱۱ منحنی خطای تعقیب گروه ناهمگن خودرو را در حضور نویز اندازه‌گیری نشان می‌دهد. مطابق این شکل، کنترل سطح بالا در مقابل نویز اندازه‌گیری مقاوم بوده و پایداری داخلی و رشته‌ای را حفظ می‌کند.



شکل ۱۱. عملکرد گروه ناهمگن خودرو در حضور نویز اندازه‌گیری

Fig. 11. Spacing error of heterogeneous platoon in presence of measuring noise

از دست‌رفته نمی‌باشد.

مراجع

- [1] D. Helbing, B. Tilch, Generalized force model of traffic dynamics, *Physical review E*, 58(1) (1998) 133-139.
- [2] A.A. Ganin, A.C. Mersky, A.S. Jin, M. Kitsak, J.M. Keisler, I. Linkov, Resilience in Intelligent Transportation Systems (ITS), *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 100 (2019) 318-329.
- [3] G.J. Naus, R.P. Vugts, J. Ploeg, M.J. van de Molengraft, M. Steinbuch, String-stable CACC design and experimental validation: A frequency-domain approach, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 59(9) (2010) 4268-4279.
- [4] H. Chehardoli, A. Ghasemi, Adaptive centralized/decentralized control and identification of 1-D heterogeneous vehicular platoons based on constant time headway policy, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 19 (2018) 3376-3386.
- [5] H. Chehardoli, A. Ghasemi, Formation control of longitudinal vehicular platoons under generic network topology with heterogeneous time delays, *Journal of*

و تاخیر زمانی اجتناب‌ناپذیر هستند. همچنین، تاخیر عملگری از خصوصیات ذاتی موتور خودرو می‌باشد. بنابراین، در مدل‌سازی سیستم حلقه‌بسته تمامی عوامل فوق در نظر گرفته شد. با استفاده از قضیه لیاپانوف- کراسوفسکی شرایط کافی به منظور تضمین پایداری داخلی گروه خودرو ارائه گردید. در ادامه، به تحلیل پایداری رشته‌ای گروه‌های خودرویی در حضور سه پدیده فوق پرداخته شد. نشان داده شد که در ساختار دوسویه هیچ‌یک از عوامل فوق باعث ناپایداری رشته‌ای سیستم حلقه‌بسته نشده و پایداری رشته‌ای فقط وابسته به ضرایب کنترلی می‌باشد. به عبارت دیگر، سه عامل نامطلوب فوق، فقط پایداری داخلی را با مخاطره روبرو کرده و اثری بر پایداری رشته‌ای ندارند. در پایان، روش ارائه‌شده در این مقاله بر روی دوگروه همگن و ناهمگن خودرویی اعمال گردید. نتایج حاصله نشان‌دهنده پایداری داخلی و رشته‌ای هر دو گروه در حضور تاخیر زمانی، داده‌های از دست‌رفته و تاخیر عملگری می‌باشد. به عبارت دیگر، در حضور سه عامل نامطلوب فوق، کنترل‌کننده به خوبی خطای تعقیب را به صفر رسانده و پایداری داخلی و رشته‌ای جریان ترافیکی را تضمین می‌نماید. همچنین، نشان داده شد که تحت کنترل‌کننده ارائه‌شده در این مقاله، پایداری رشته‌ای فقط وابسته به ضرایب کنترلی بوده و تحت تاثیر تاخیر زمانی و داده‌های

- [15] A. Petrillo, A. Salvi, S. Santini, A.S. Valente, Adaptive multi-agents synchronization for collaborative driving of autonomous vehicles with multiple communication delays, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 86 (2018) 372-392.
- [16] J. Gong, Y. Zhao, Z. Lu, Sampled-data vehicular platoon control with communication delay, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 232(1) (2018) 39-49.
- [17] Y. Zheng, S.E. Li, K. Li, F. Borrelli, J.K. Hedrick, Distributed model predictive control for heterogeneous vehicle platoons under unidirectional topologies, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 25(3) (2017) 899-910.
- [18] H. Chehardoli, M.R. Homaeinezhad, Third-order leader-following consensus protocol of traffic flow formed by cooperative vehicular platoons by considering time delay: constant spacing strategy, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 232(3) (2017) 285-298.
- [19] F. Gao, S.E. Li, Y. Zheng, D. Kum, Robust control of heterogeneous vehicular platoon with uncertain dynamics and communication delay, *IET Intelligent Transport Systems*, 10(7) (2016) 503-513.
- [20] S. Feng, Y. Zhang, S.E. Li, Z. Cao, H.X. Liu, L. Li, String stability for vehicular platoon control: Definitions and analysis methods, *Annual Reviews in Control*, (2019).
- [21] I. Herman, M. Sebek, Optimal distributed control with application to asymmetric vehicle platoons, in: *IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*, IEEE, 2016, pp. 4340-4345.
- [22] R. Rakkiyappan, B. Kaviarasan, J. Cao, Leader-following consensus of multi-agent systems via sampled-data control with randomly missing data, *Neurocomputing*, 161 (2015) 132-147.
- [23] A. Seuret, F. Gouaisbaut, Jensen's and Wirtinger's inequalities for time-delay systems, *IFAC Proceedings Volumes*, 46(3) (2013) 343-348.
- [24] R. Rajamani, *Vehicle dynamics and control*, Springer Science & Business Media, 2011.
- vibration and control, 25(3) (2019) 655-665.
- [6] A. Ghasemi, R. Kazemi, S. Azadi, Stable decentralized control of a platoon of vehicles with heterogeneous information feedback, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 62(9) (2013) 4299-4308.
- [7] S. Santini, A. Salvi, A.S. Valente, A. Pescapé, M. Segata, R.L. Cigno, A consensus-based approach for platooning with intervehicular communications and its validation in realistic scenarios, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 66(3) (2017) 1985-1999.
- [8] Q. Xia, F. Gao, J. Duan, Y. He, Decoupled H_∞ control of automated vehicular platoons with complex interaction topologies, *IET Intelligent Transport Systems*, 11(2) (2017) 92-101.
- [9] A.A. Peters, R.H. Middleton, O. Mason, Leader tracking in homogeneous vehicle platoons with broadcast delays, *Automatica*, 50(1) (2014) 64-74.
- [10] X. Guo, J. Wang, F. Liao, R.S.H. Teo, Distributed adaptive integrated-sliding-mode controller synthesis for string stability of vehicle platoons, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 17(9) (2016) 2419-2429.
- [11] A. Ghasemi, R. Kazemi, S. Azadi, Stability analysis of bidirectional adaptive cruise control with asymmetric information flow, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 229(2) (2015) 216-226.
- [12] Y. Zheng, S.E. Li, J. Wang, D. Cao, K. Li, Stability and scalability of homogeneous vehicular platoon: Study on the influence of information flow topologies, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 17(1) (2016) 14-26.
- [13] H. Chehardoli, M.R. Homaeinezhad, Third-order safe consensus of heterogeneous vehicular platoons with MPF network topology: constant time headway strategy, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 232(10) (2017) 1402-1413.
- [14] M.B. Younes, A. Boukerche, Safety and efficiency control protocol for highways using intelligent vehicular networks, *Computer Networks*, 152 (2019) 1-11.

Technology, 27(1) (2019) 206 - 220.

[26] P. Seiler, A. Pant, K. Hedrick, Disturbance propagation in vehicle strings, IEEE Transactions on Automatic Control, 49(10) (2004) 1835-1842.

[25] S.E. Li, X. Qin, Y. Zheng, J. Wang, K. Li, H. Zhang, Distributed platoon control under topologies with complex eigenvalues: stability analysis and controller synthesis, IEEE Transactions on Control Systems

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

H. Chehardoli, Control of heterogeneous traffic flows in presence of pocket loss, time-varying communication delay and actuator lag, AmirKabir J. Mech Eng., 53(4) (2021) 2155-2170.

DOI: [10.22060/mej.2020.17134.6516](https://doi.org/10.22060/mej.2020.17134.6516)

