

تحلیل پایداری سیال غیرنیوتنی رقیق‌شونده در هندسه تیلور کوئت با فرض شکاف باریک و حرکت خطی استوانه داخلی

مهدی یکتاپور^۱، نریمان اشرفی^{۲*}

^۱ دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران

^۲ دانشکده مکانیک، دانشگاه پیام‌نور، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷/۰۸/۲۷

بازنگری: ۱۳۹۸/۰۲/۰۷

پذیرش: ۱۳۹۸/۰۳/۲۶

ارائه آنلاین: ۱۴۰۰/۰۲/۰۱

کلمات کلیدی:

سیال غیرنیوتنی

تیلور - کوئت

مدل کارو-برد

روش گالرکین

گردابه‌های تیلور

خلاصه: در این پژوهش، با ثابت در نظر گرفتن استوانه خارجی و حرکت توامان چرخشی و محوری استوانه داخلی در جریان تیلور - کوئت به تحلیل حرکت سیال غیرنیوتنی سودوپلاستیک با مدل ویسکوزیته کرو-برد جهت تخمین پارامترهای جریان مانند سرعت و توزیع فشار و پیش‌بینی رفتار دینامیکی سیال و پایداری جریان بین دو استوانه پرداخته شده است. از حل معادلات حاکم شامل معادلات پیوستگی و ممنتوم در سیستم استوانه‌ای برای بدست آوردن میدان سرعت و فشار استفاده شده است. جریان کل بصورت مجموع جریان پایه و انحرافی تعریف شده است. جریان پایه با حل معادلات حاکم با فرض شکاف باریک و اعمال شرایط مرزی مساله حاصل شده و جریان انحرافی با استفاده از روش تصویرسازی گالرکین بدست می‌آید. با حل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی در شرایط ناپایدار و تعیین وضعیت ریشه‌های معادله مشخصه سیستم، رفتار دینامیکی پایداری جریان در شرایط متفاوتی از مقادیر پارامتر کنترلی عدد تیلور، شاخص غیرنیوتنی سیال و رینولدز محوری پیش‌بینی شده و برای درک بهتر تاثیرات عوامل فوق بر بوجود آمدن پدیده آشوب در سیستم از روش نمای لیاپانف نیز جهت تحلیل بهتر بهره گرفته شده است. افزایش عدد رینولدز محوری به افزایش بی‌نظمی در سیال منجر شده و همچنین افزایش شاخص غیرنیوتنی سیال نیز به ناپایداری و بی‌نظمی جریان بین دو استوانه منجر می‌شود.

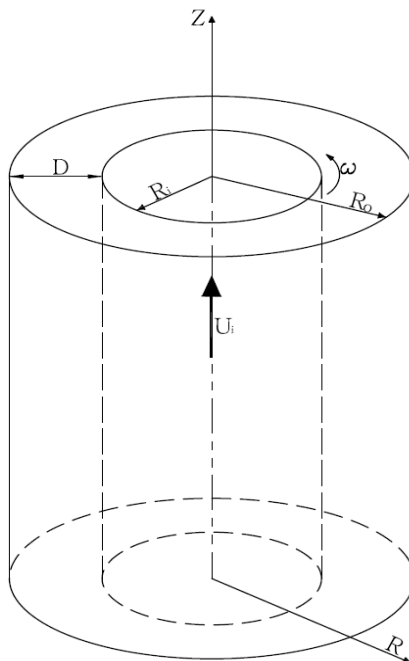
۱- مقدمه

روی دیواره‌ها، به ویسکوزیته سیال موجود در فضای دو استوانه، دست‌یابد. سپس تیلور [۲] تجزیه و تحلیل این جریان را برای سیالات نیوتنی آغاز کرد و نشان داد که اگر سرعت نسبی بین دو استوانه از حد خاصی فراتر رود شکل جریان تغییر خواهد کرد و در ابتدا به صورت گردابه‌های افقی درجا (مستقل از زمان) و متقارن نسبت به محور استوانه‌ها موسوم به گردابه‌های تیلور در خواهد آمد. مطابق تحقیقات، گردابه‌ها به تعداد زوج، تشکیل می‌شوند [۲]. به گونه‌ای که هر جفت گردابه مجاور، خلاف جهت یکدیگر دوران دارند. پیرامون مسأله جریان تیلور - کوئت، سیالات نیوتنی در شکاف محدود بین استوانه‌های دوار، مطالعاتی صورت گرفته اس در سال ۲۰۰۹، هافمن و همکارانش [۳] مجموعه‌ی جامعی از شرایط دینامیکی جریان سیالات نیوتنی را که بین دو استوانه هم‌محور قرار داشته در هر دو صورت تئوری و تجربی،

جریان چرخشی سیال موجود در فضای محدود بین استوانه‌های هم‌محور که نسبت به یکدیگر دارای حرکت دورانی هستند، یکی از جریان‌های الگو در هیدرو دینامیک می‌باشد. این جریان بدلیل تحقیقات فراوان تیلور و کوئت به نام جریان تیلور - کوئت معروف است. دامنه کاربردهای این جریان، از یاتاقان‌های ژورنال، ماشین‌آلات دوار، فرآیندهای پلیمری دستگاه‌های فیلتراسیون تا حفاری چاه‌های نفت و گاز و بسیاری موارد دیگر را شامل می‌شود. شکل هندسه جریان در شکل ۱ نمایش داده شده است. نخستین بار، کوئت [۱] سیالی را در شکاف بین دو استوانه هم‌مرکز قرار داد و با حرکت دادن استوانه‌های فوق نسبت به یکدیگر، توانست از طریق اندازه‌گیری گشتاور حاصل

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: n_ashrafi@hotmail.com





شکل ۱: شکل و پارامترهای هندسی مسئله مورد تحقیق

Fig. 1. The schematic and geometrical parameters of the problem

غیرنیوتنی، در شکاف عریض مورد بررسی قرار گرفته است. این پژوهش بر روی روغن سیلیکون به عنوان سیال مرجع و سیال ویسکوالاستیک بوگر انجام شده است. وایزبرگ و همکاران [۶]، تاخیر در انتقال را با استفاده از حرکت استوانه‌ای داخلی برای جریان تیلور-کوئت مورد مطالعه قرار داده‌اند. در بررسی فوق، سیال بکاررفته، سیال نیوتنی در نظر گرفته شده است. خیات [۷] پایداری جریان سیالات غیرنیوتنی ویسکوالاستیک را در جریان تیلور-کوئت بررسی کرده است. اشرفی و خیات [۸] به بحث بی‌نظمی در جریان تیلور-کوئت با اعمال شرایط مرزی و روش ساده‌سازی گالرکین بر روی معادلات ناویراستوکس پرداخته‌اند. در این پژوهش، با استفاده از شرایط مرزی مختلط، عدد موج بحرانی که به ازای آن، جریان گردابی تیلور بصورت کامل حاکم می‌شود ارایه شده است. آنها سپس به بررسی پایداری جریان گردابی تیلور پرداخته و رفتارهای دینامیکی غیر خطی را در این محدوده بررسی نموده‌اند و آن را با حالت نیوتنی مقایسه کرده‌اند. همچنین اشرفی و همکارانش [۹] اثرات کاویتاسیون در جریان سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی در بین دو استوانه غیرهم‌مرکز را از طریق آزمایشگاهی مورد مطالعه قرار داده‌اند.

خیات و لی [۱۰] در تحقیقی جریان سیالاتی که ویسکوزیته آنها

گردآوری کرده‌اند. این مطالعات در نبود مولفه‌ی محوری سرعت برای استوانه‌ی داخلی صورت پذیرفته است. کولمن [۴] مدلی را برای جریان تیلور-کوئت، با در نظر گرفتن سیال نیوتنی معرفی کرد که از این نمونه و شرایط اولیه‌ی آن در این پژوهش استفاده شده است. وی معادلات حاکم بر مدل ارائه شده را در شکاف باریک در حالت چرخش استوانه‌ی داخلی با سرعت زاویه‌ای و همچنین سکون استوانه‌ی خارجی مورد بررسی قرارداد و معادلات ناویراستوکس را با روش اختلاف محدود به شکل گالرکین ساده‌سازی نمود و به بحث پایداری و انتقال حرارت جریان پرداخت. پس از ساده‌سازی به روش گالرکین، دستگاه معادلات سه‌بعدی به دست آمد که بسیار مشابه با معادلات لورنز بود. معادلات لورنز محصول حل مسأله‌ی مربوط به جریان سیال بر اثر اختلاف دما در لایه‌ای از هوا بوده است و ارتباطی با تاریخچه‌ی حل مسایل تیلور-کوئت نداشت. مدل کولمن نمی‌توانست ناپایداری گردابه‌های تیلور را پیش‌بینی کند و بنابراین نمی‌توانست آغاز رفتار آشفته سیال را محاسبه نماید. برگر کار کولمن را برای شکافهای محدود ادامه داد. اسمیزیک و اگبرز [۵] ساختارهای جریان و پایداری در جریان تیلور-کوئت در حالات نیوتنی و غیرنیوتنی را بررسی کرده‌اند که در آن تشکیل ساختار، الگوی جریان و پایداری برای سیال نیوتنی و

مقیاس هندسی و تاثیر شعاع انحنا بر پایداری سیال ویسکوالاستیک در هندسه تیلور- کوئت پرداخته‌اند. در این تحقیق که به صورت تجربی انجام شده است، تاثیر هندسه بر رفتار جریان بررسی شده و نتیجه‌گیری شده است که استفاده از تحلیل پایداری خطی با استفاده از مدل اولدریود تطابق خوبی با نتایج آزمایش ندارد.

مسئله‌ی مورد بررسی در تحقیق حاضر، همان تیلور- کوئت کلاسیک می‌باشد که حرکت اجباری استوانه‌ی داخلی به آن اعمال شده است. در این پژوهش، تأثیر غیرنیوتنی بودن ضعیف بر روی پایداری جریان چرخشی مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین از مدل کارو- برد [۱۸] برای وابستگی ویسکوزیته به نرخ کرنش استفاده خواهد شد. در پژوهش پیش‌رو، با فرض شکاف باریک بین دو استوانه و بهره‌گیری از روش گالرکین به حل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی چهارمجهولی پرداخته می‌شود و پایداری و رفتار دینامیکی سیال در حضور حرکت محوری استوانه‌ی داخلی و تاثیر شاخص غیرنیوتنی سیال، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲- فرمول‌بندی مسئله

جریان سیال رقیق شونده تراکم‌ناپذیری را بین دو استوانه هم‌مرکز باشعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_0 در نظر بگیرید که $D=R_1-R_0$ شکاف بین دو استوانه در نظر گرفته می‌شود. استوانه خارجی ساکن بوده و استوانه داخلی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد. معادلات حاکم بر سیال تراکم‌ناپذیر شامل معادله پیوستگی و معادله مومنتم را می‌توان به فرم زیر در نظر گرفت:

$$\nabla \cdot U = 0 \quad (1)$$

$$\rho(U_T + U \cdot \nabla U) = -\nabla P + \nabla \cdot (\mu \dot{\Gamma}) \quad (2)$$

کاما در اینجا به معنی مشتق پاره‌ای اندیس ذکر شده است. مختصات استوانه‌ای فرض شده‌اند که بردارهای سرعت در این مختصات به فرم بردارهای سرعت $U = (U_R, U_\theta, U_Z)^T$ در راستای (R, θ, Z) است. محور Z در راستای محور استوانه در نظر گرفته شده است. فشار است P و ویسکوزیته وابسته به نرخ تنش می‌باشد که با فرض فوق μ_0 ویسکوزیته مربوط به نرخ برش صفر است. t زمان است و ρ دانسیته همچنین $\tau = \mu \dot{\Gamma}$ تنش بوده که $\dot{\Gamma} = \nabla U + (\nabla U)^T$ تانسور نرخ تنش است. عدد رینولدز اصلی (دورانی) بصورت $Re_i = \frac{\omega R_i D}{\nu_0}$ و عدد رینولدز محوری نیز بصورت $Re_z = \frac{DU}{\nu_0}$ تعریف می‌شود. با توجه به تقارن مسئله از وابستگی جریان به θ صرفنظر می‌شود همچنین به دلیل طولی در نظر گرفتن استوانه‌ها از تاثیر اثرات انتهایی

با تنش کم می‌شود در شکاف باریک بین دو استوانه را با در نظر گرفتن شرایط مرزی سرعت صلب برای گردابه‌ها مطالعه کرده‌اند و برای حل معادلات بقا از روش گالرکین با در نظر گرفتن توابع چاندراشکار استفاده نمودند. با بکارگیری این توابع سیالات نقیصه‌ی مدل کولمن در عدم توانایی محاسبه رفتار آشفته سیال، کمتر شده و حالت آشفتگی عملاً در سیستم دینامیکی رویت شده است. نتایج سیستم‌های دینامیکی مرتبه‌ی پایین، سازگاری خوبی با نتایج آزمایشگاهی داشتند. همچنین در تحقیقی دیگر لاریات و خلاف [۱۱] جریان بین دو استوانه را که استوانه داخلی در حال چرخش و استوانه خارجی ساکن است را برای سیال غیرنیوتنی در محدوده جریان آرام بطور عددی مورد بررسی قرار دادند. از جمله پژوهش‌های مهم انجام گرفته در زمینه جریان سیال غیرنیوتنی در هندسه تیلور- کوئت در سالهای اخیر می‌توان به کارهای انجام گرفته توسط اشرفی [۱۲] اشاره کرد. اشرفی در سال ۲۰۱۱ در مقاله‌ای به پایداری سیال ویسکوالاستیک در فضای بین دو استوانه چرخان پرداخته است. همچنین اشرفی و هذبای [۱۳] در مقاله ارائه شده در سال ۲۰۱۲ به بررسی پایداری سیال ویسکوالاستیک در هندسه تیلور- کوئت با فرض وجود گردان فشار و ساکن بودن استوانه بیرونی پرداخته و معیارهای پایداری را بررسی نموده‌اند. تفاوت کار ارائه شده در این پژوهش با مطالعه اشرفی و هذبای [۱۳] در این است که در این پژوهش، استوانه داخلی علاوه بر حرکت دورانی دارای حرکت خطی با سرعت U_1 در راستای محور استوانه نیز می‌باشد؛ ولی در کار ارائه شده در رفرنس [۱۳] استوانه داخلی تنها حرکت دورانی دارد. از جمله تحقیقات اخیر در مورد جریان تیلور- کوئت می‌توان به تحقیق تیان و همکاران [۱۴] اشاره کرد که با استفاده از هندسه تیلور- کوئت در حالتی که استوانه‌ها غیرهم‌مرکز هستند با استفاده از المان محدود جریان سیال غیرنیوتنی را شبیه‌سازی کرده و تاثیر سرعت چرخش و غیرهم‌مرکز بودن (تغییر عرض شکاف) بررسی شده است. همچنین ماسودا و همکاران [۱۵] در تحقیقی نسبت به تعریف عدد رینولدز جهت سیال رقیق شونده با استفاده از روش‌های عددی اقدام کرده‌اند. آنها در این تحقیق با تعیین ویسکوزیته موثر در عدد رینولدز و همچنین ویسکوزیته متوسط در محاسبه اتلافات با ارایه فرمول‌هایی توانسته‌اند عدد تیلور بحرانی جهت وقوع گردابه‌های تیلور را با دقت خوبی پیش‌بینی نمایند. همچنین در پژوهشی مارتینزو همکاران [۱۶] ناپایداری در هندسه تیلور- کوئت برای سیال ویسکوالاستیک حلال‌های پلیمری را از طریق اندازه‌گیری گشتاور و مشاهده جریان بررسی کرده و مشاهده کردند که در الگوی جریان برای گشتاور، پس‌ماندی مشاهده شده و جریان دارای رفتاری وابسته به زمان است. در پژوهشی شافر و همکارانش [۱۷] به بررسی

ویسکوزیته مطابق مدل کارو- برد به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود با توجه به اینکه ویسکوزیته سیال غیرخطی در صفر و بی‌نهایت به ترتیب با μ_0 و μ_∞ نمایش داده می‌شود.

$$\frac{\frac{\mu}{\mu_0} - \frac{\mu_\infty}{\mu_0}}{1 - \frac{\mu_\infty}{\mu_0}} = \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (7)$$

با معرفی عدد بی‌بعد دپورا به فرم:

$$De = \frac{\lambda R_i \omega}{D} \quad (8)$$

و عدد دپورای محوری به فرم:

$$De_i = De \frac{U_i}{R_i \omega} = \frac{\lambda U_i}{D} \quad (9)$$

و نام‌گذاری $s = \frac{\mu_\infty}{\mu_0}$ رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\mu}{\mu_0} = s + (1-s) \left[1 + (De_i \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (10)$$

با توجه به اینکه در این پژوهش سیال مورد بحث رقیق‌شونده می‌باشد، $0 < n < 1$ در نظر گرفته می‌شود. با بسط سه جمله از معادله (۱۰) و صرف‌نظر کردن از توان‌های بالای $(De_i \dot{\gamma})^2$ در بسط فوق (با توجه به اینکه $De_i \dot{\gamma} < 1$ می‌باشد) و همچنین تعریف پارامتر α به فرم زیر:

$$\alpha = (1-s) \left(\frac{n-1}{2} \right) De^2 \quad (11)$$

معادله (۱۰) به فرم زیر خلاصه می‌گردد:

$$\eta(\dot{\gamma}) = 1 + \frac{\alpha}{N_i^2} \dot{\gamma}^2 \quad (12)$$

α از آن جهت بعنوان ضریبی مهم تلقی می‌گردد که خواص رئولوژیکی مانند s ، n و γ و خواص هندسی و شرایط مرزی مانند

نیز می‌توان چشم‌پوشی کرد. جهت تسهیل در نوشتن معادلات با در نظر گرفتن سرعت‌های بی‌بعد استوانه‌ها به طریق زیر می‌توان نسبت به بی‌بعدسازی اقدام کرد:

$$\begin{aligned} z &= \frac{Z}{D} \quad r = \frac{R - R_i}{D} \quad \eta = \frac{\mu}{\mu_0} \\ u_z &= \frac{1}{U_i} V_z \quad u_\theta = \frac{1}{R_i \omega} U_\theta \\ u_r &= \frac{D}{v_0} U_r \end{aligned} \quad (3)$$

$$p = \frac{D^2}{\rho v_0^2} P \quad t = \frac{v_0}{D^2} T$$

$$D = R_o - R_i \quad \varepsilon = \frac{D}{R_i}$$

$$Ta = \left(\frac{R_i \omega D}{v_0} \right)^2 \frac{D}{R_i}$$

در این تحقیق جریان مجموع دو جریان پایه و انحرافی در نظر گرفته می‌شود. جریان انحرافی شامل مولفه‌های سرعت: u'_z ، u'_θ ، u'_r و فشار p' و ویسکوزیته η' می‌باشد بنابراین:

$$\begin{aligned} U_R &= U'_R + \hat{U}_R \quad , \quad U_\theta = U'_\theta + \hat{U}_\theta \\ U_Z &= U'_Z + \hat{U}_Z \end{aligned} \quad (4)$$

در فرمول فوق موارد مشخص شده با علامت $(\hat{\quad})$ مربوط به جریان پایه می‌باشد. با فرض شکاف باریک و با در نظر گرفتن حرکت محوری برای استوانه داخلی مولفه‌های سرعت جریان پایه و فشار با توجه به شرایط مرزی زیراز حل تحلیلی بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \hat{u}_r(0) = \hat{u}_r(1) = 0 \quad , \quad \hat{u}_\theta(0) = 1 \\ \hat{u}_\theta(1) = 0 \quad , \quad \hat{u}_z(0) = 1 \quad \hat{u}_z(1) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

در رابطه فوق N_i بصورت $N_i = \frac{\omega R_i}{U_i}$ تعریف می‌شود. همچنین عدد بی‌بعد تیلور را می‌توان بر مبنای عدد رینولدز دورانی و فاصله شکاف بین دو استوانه به فرم زیر تعریف کرد:

$$\varepsilon = \frac{D}{R_i} \quad , \quad Ta = Re^2 \varepsilon \quad (6)$$

روش تصویرکردن گالرکین شامل بسط دادن سرعت و فشار بر حسب توابع متعامد و تصویرکردن معادلات بقا و پیوستگی روی هر کدام از توابع فوق جهت کاستن از تعداد متغیرها است. استفاده از روش گالرکین از روش‌های متداول در حل معادلات دیفرانسیل پیچیده بوده و در مقالات زیادی از آن بهره گرفته شده است [۴، ۱۲، ۱۳]. از آنجایی که گردابه‌های تیلور ساختاری تکرارشونده دارد، جواب‌های تناوبی شامل مدهای سینوسی و کسینوسی بر حسب Γ و Z انتخاب می‌شوند. همچنین نامحدود بودن طول استوانه اجازه می‌دهد تا توابع تعریف‌شونده برای سرعت و فشار، به صورت بسط فوریه در نظر گرفته شود. با این روش، دستگاهی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به دستگاهی از معادلات دیفرانسیل معمولی با متغیر زمان و توابعی که همان ضرایب جملات بسط هستند تبدیل می‌شوند.

$$u(r, z, t) = u'_r(r, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{nm}(t) \sin n\pi r \cos mkz \quad (19)$$

$$v(r, z, t) = u'_\theta(r, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} v_{nm}(t) \sin n\pi r \cos mkz + v_{n0}(t) \sin n\pi r \right] \quad (20)$$

$$w(r, z, t) = u'_z(r, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{nm}(t) \cos n\pi r \sin mkz \quad (21)$$

$$p(r, z, t) = p'(r, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} p_{nm}(t) \cos n\pi r \cos mkz \quad (22)$$

در روابط فوق u, v, w, p و Γ و Z ترم‌های سرعت و فشار جریان انحرافی بوده که جهت سهولت در نوشتن روابط از علامت پریم آنها صرف نظر شده است. تنها برخی از جملات هر یک از بسط‌های فوق مورد استفاده قرار می‌گیرند چرا که طبق آزمایش‌های انجام گرفته این جملات شامل مدهای غالب بوده واز بقیه جملات در مقابل آنها صرف نظر شده است.

$$u(r, z, t) = u_{11}(t) \sin(\pi r) \cos(kz) \quad (23)$$

$$v(r, z, t) = v_{10}(t) \sin(\pi r) + v_{11}(t) \sin(\pi r) \cos(kz) + v_{20}(t) \sin(2\pi r) \quad (24)$$

ω, R_1 و D را در خود جاداده است. α را می‌توان به عنوان شاخص غیرنیوتنی بودن در نظر گرفت. α برای سیالات ضخیم برشی مثبت و برای سیالات رقیق‌شونده منفی است. از این‌رو برای سیال مورد بررسی در این پژوهش، مقدار α منفی و در گستره تغییر -1 تا 0 فرض می‌شود. نهایتاً با تحلیل جریان لایه‌ای و انحرافی خواهیم داشت:

$$\eta(\dot{\gamma}) = 1 + \alpha \quad (13)$$

$$\eta' = \alpha (u_{,r}^2 + u_{,z}^2 - 2u_{,rz}) \quad (14)$$

و معادلات سرعت و فشار و ویسکوزیته برای جریان پایه به فرم زیر می‌آید:

$$\hat{u}_\theta = 1 - r, \quad \hat{u}_z = 1 - r, \quad \hat{u}_r = 0$$

$$\hat{p}_{,r} = Ta(1-x)^2, \quad \hat{\eta} = 1 + \frac{\alpha}{Ni^2} + \alpha \quad (15)$$

همانگونه که از مقادیر \hat{u}_z و \hat{u}_θ مشخص است نمودار مقادیر سرعت زاویه‌ای و محوری بر حسب شعاع بی‌بعد در محدوده بین دو استوانه خطی خواهد بود. با جایگذاری و ساده‌سازی معادلات بدست‌آمده در معادلات ممنت و پیوستگی خواهیم داشت:

$$u_{,r} + Re_z w u_{,z} + Re_z (1-r) u_{,z} + u u_{,r} - Tav^2 - 2Tav(1-r) = -p_{,r} + 2\eta_{,r} u_{,r} + \quad (16)$$

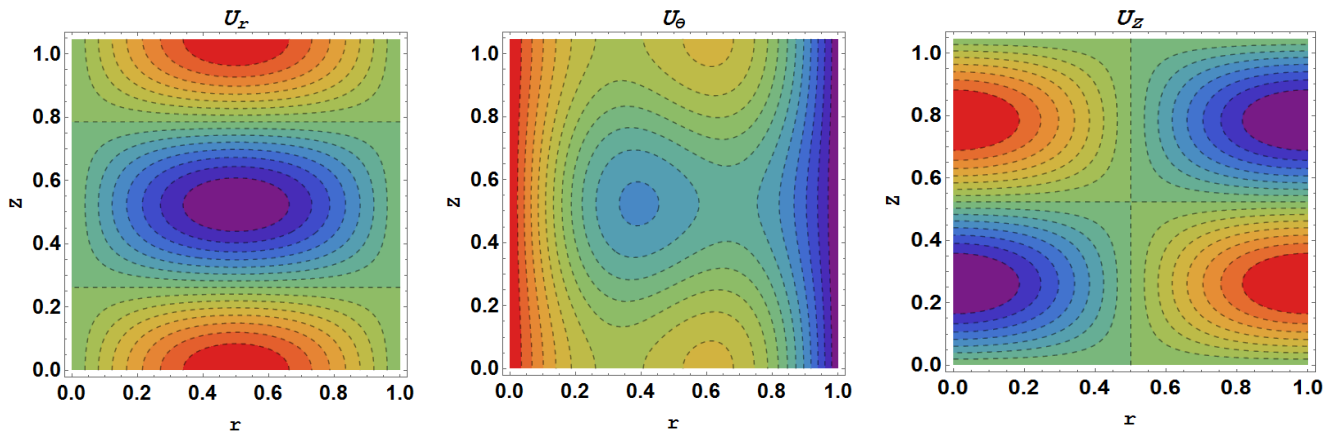
$$(\eta' + \hat{\eta})(u_{,rr} + u_{,zz}) + \eta'_{,z} \left(\begin{matrix} u_{,z} \\ + Re_z (w_{,r} - 1) \end{matrix} \right)$$

$$v_{,t} + Re_z w v_{,z} + Re_z (1-r) v_{,z} + u v_{,r} - u = (\eta' + \hat{\eta})(v_{,rr} + v_{,zz}) + \eta_{,z} v_{,z} + \eta'_{,r} (v_{,r} - 1) \quad (17)$$

$$w_{,t} + Re_z w w_{,z} + Re_z (1-r) w_{,z} + u w_{,r} - u = (\eta' + \hat{\eta})(w_{,rr} + w_{,zz}) + 2\eta'_{,z} w_{,z} + \quad (18)$$

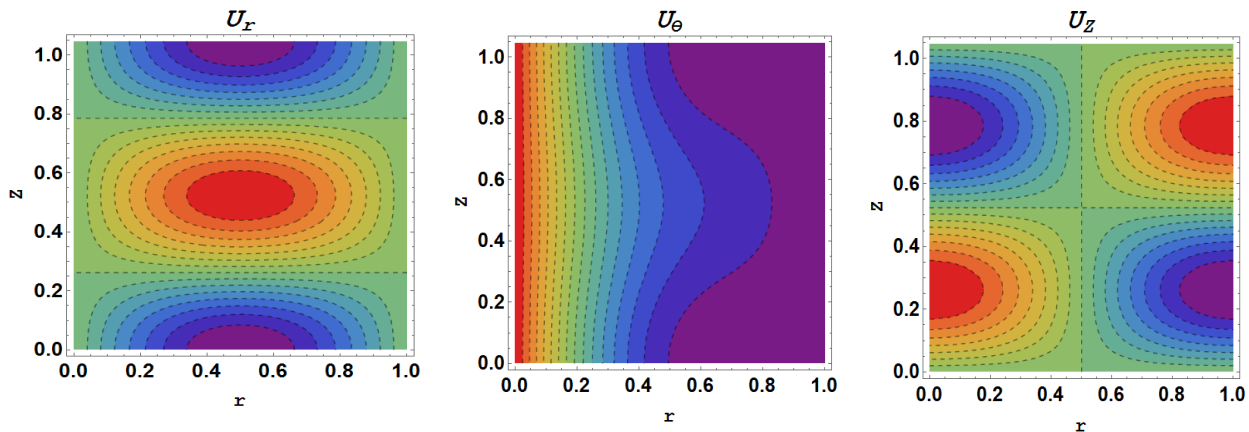
$$\eta'_{,r} \left(\frac{1}{Re_z} u_{,z} + w_{,r} - 1 \right) - \frac{p_{,z}}{Re_z}$$

۳- ساده‌سازی معادلات حاکم با استفاده از روش تصویرکردن گالرکین



شکل ۲: کانتورهای مولفه‌های سرعت در صفحه r-z برای شرایط $\alpha = -0.05, k = 6, Re_z = 0, Ta = 8000$

Fig. 2. Velocity component contours on r-z section for conditions $\alpha = -0.05, k = 6, Re_z = 0, Ta = 8000$



شکل ۳: کانتورهای مولفه‌های سرعت در صفحه r-z برای شرایط $\alpha = -0.05, k = 6, Re_z = 25, Ta = 8000$

Fig. 3. Velocity component contours on r-z section for conditions $\alpha = -0.05, k = 6, Re_z = 25, Ta = 8000$

شده است. با ضرب کردن جملات مناسب با استفاده از خاصیت توابع متعامد در دو سوی معادلات ممنوم به گونه‌ای که با صفر شدن انتگرال برخی جملات، هر معادله تنها شامل مشتقات زمانی یکی از ضرایب $w_{11}, u_{11}, v_{11}, v_{10}, v_{20}$ خواهد گردید. پس از جایگذاری و انتگرال‌گیری روی ضخامت شکاف دو استوانه و دوره تناوب جملات انحرافی، وابستگی پاسخ‌های حاصل از انتگرال‌گیری به متغیرهای r و z از بین رفته و تنها مجهولات باقی‌مانده، ضرایب زمانی خواهد بود و مشتقات ضمنی به مشتقات معمولی تبدیل خواهند شد. با جایگزینی توابع انحرافی در معادله پیوستگی خواهیم داشت:

$$w_{11} = -\frac{1}{Re_z} \frac{\pi}{k} u_{11} \quad (27)$$

$$w(r, z, t) = w_{11}(t) \cos(\pi r) \sin(kz) \quad (25)$$

$$p(r, z, t) = p_{11}(t) \cos(\pi r) \cos(kz) \quad (26)$$

مدهای غالب مدهایی مشخص شده هستند که به ازای آنها شروع شکل‌گیری گردابه‌های تیلور (عدد تیلور بحرانی) همخوانی مناسب و قابل پذیرشی با عدد تیلور بحرانی حاصل از آزمایش داشته‌اند. کافی است معادلات (۱۹) تا (۲۲) را در معادلات پیوستگی و ممنوم جایگزین کرده و روی بازه‌های $r \in [0, 1]$ و $z \in [0, \frac{\pi}{k}]$ یعنی یک دوره تناوب، انتگرال‌گیری نمود. انتگرال‌گیری فوق دوگانه بوده و همان طور که اشاره شد روی ناحیه دو بعدی از r و z محاسبه

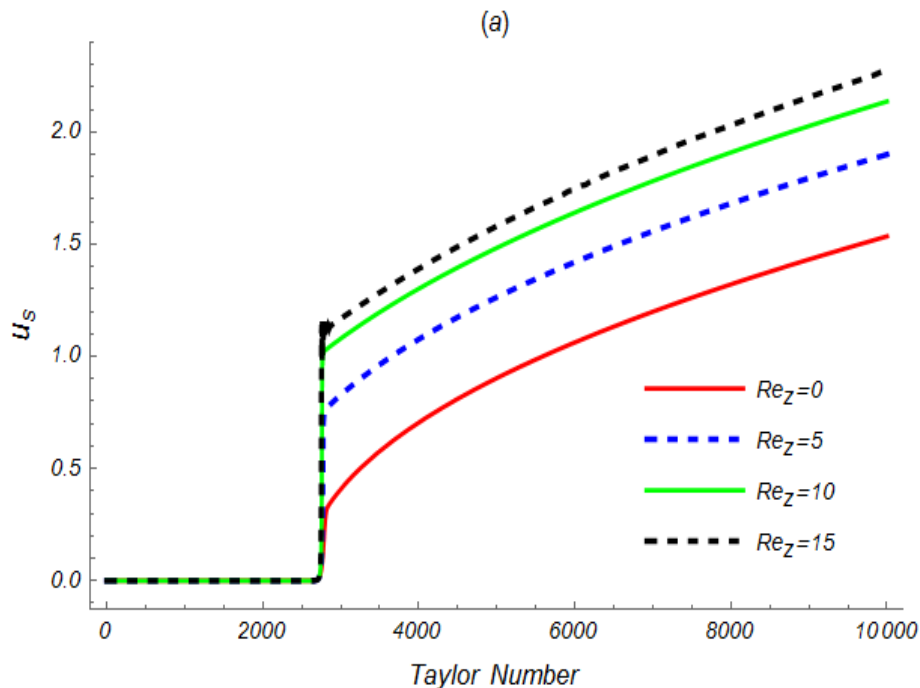
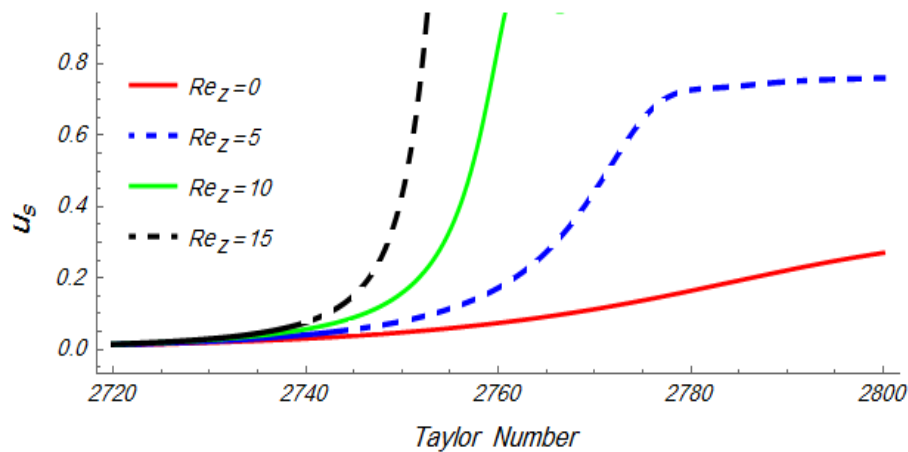
$$v(t) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} v_{11}(t) \quad (29)$$

$$w(t) = -\pi v_{20}(t) \quad (30)$$

$$s(t) = \pi v_{10}(t) \quad (31)$$

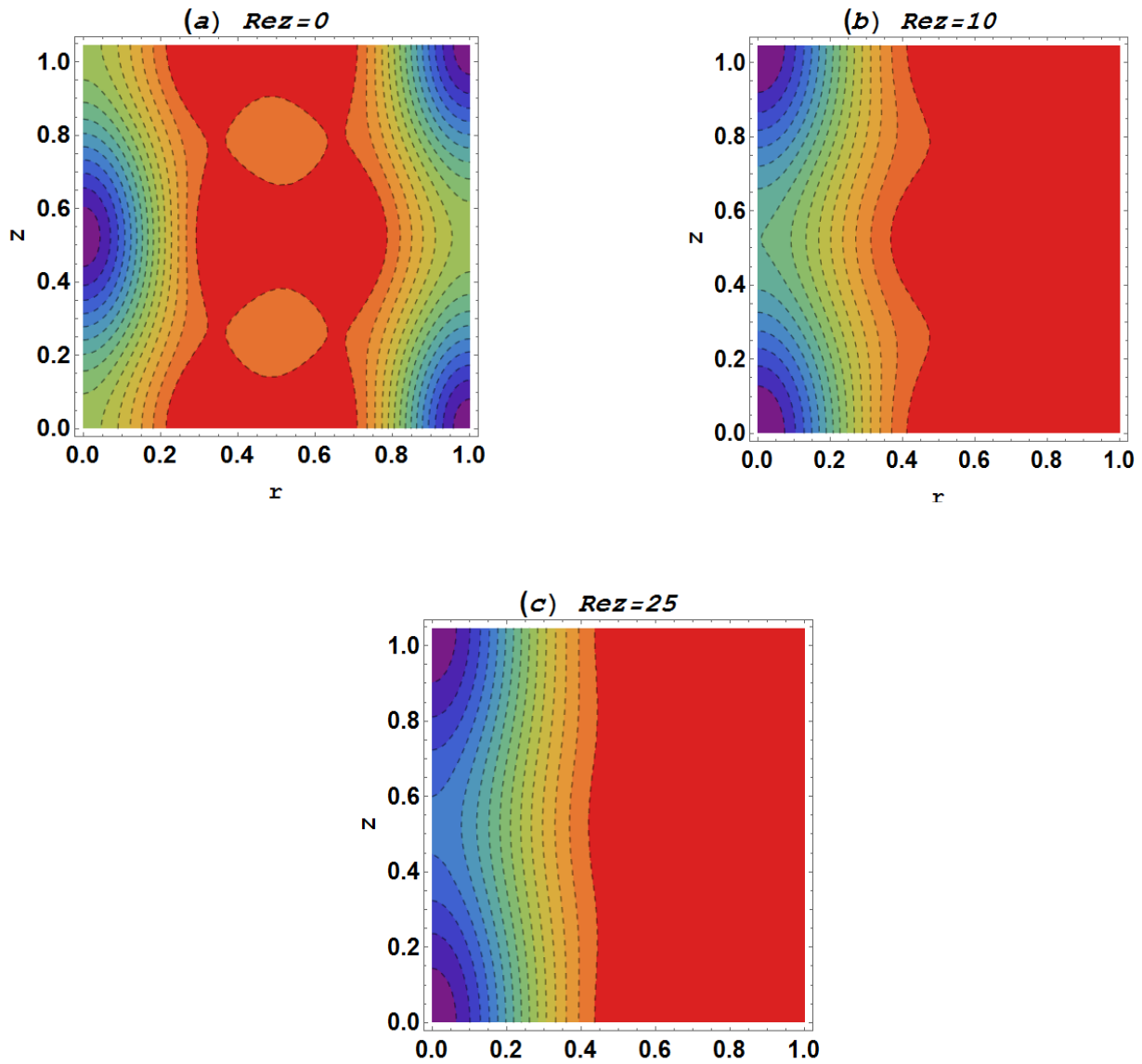
بنابراین دو مجهول u_{11} و w_{11} با رابطه (۲۷) به یکدیگر وابسته می‌شوند و این امر به انضمام حذف p_{11} بین معادلات ممنوم محوری و شعاعی، موجب کاهش تعداد مجهولات و معادلات می‌گردد. قبل از ارایه این سیستم چهارمعادله چهارمجهولی، مقیاس‌گذاری زیر روی پارامترهای سرعت بفرم زیر اعمال می‌شود:

$$u(t) = \frac{\pi\tau}{\sqrt{2}} u_{11}(t) \quad (28)$$



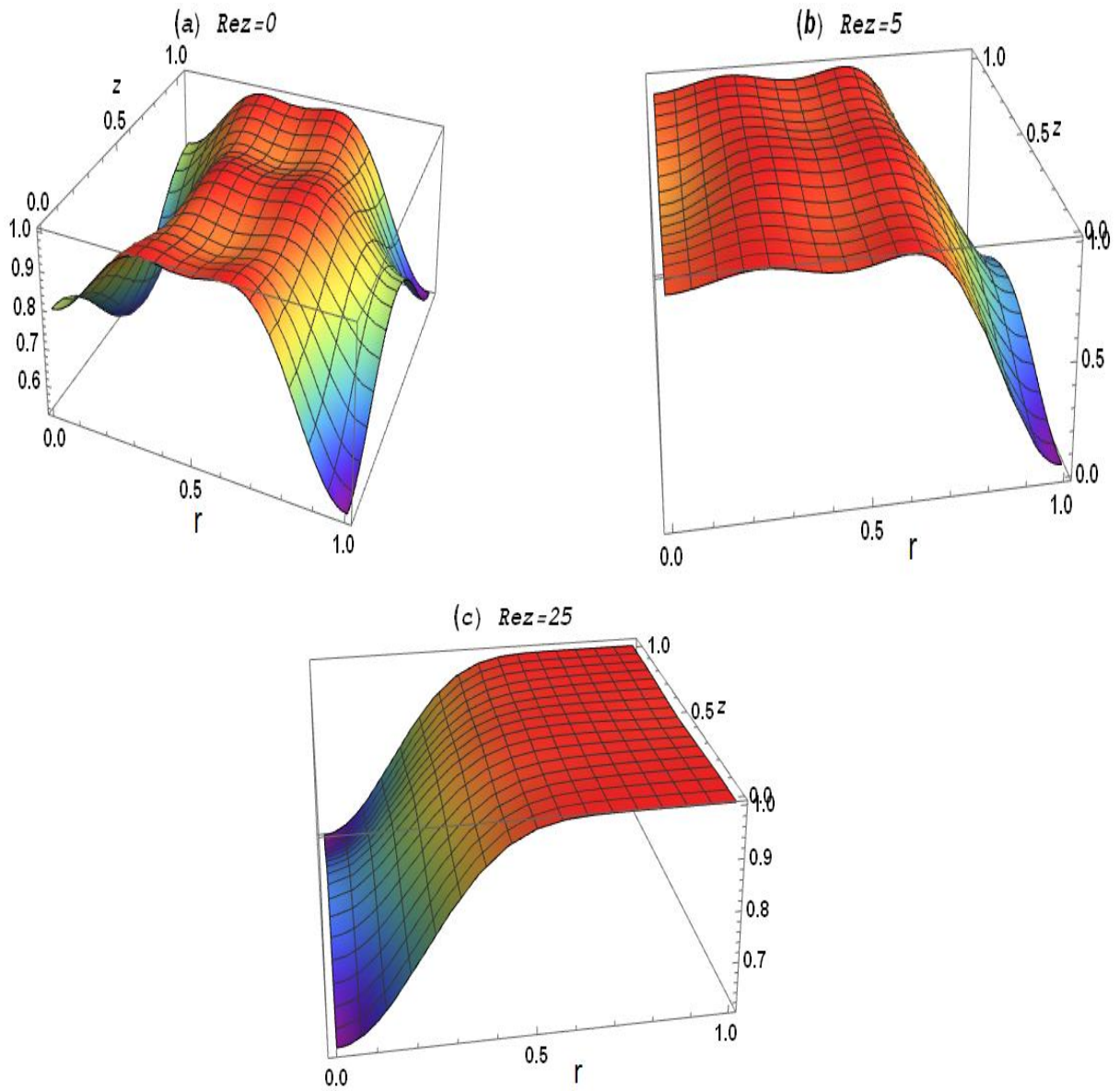
شکل ۴: نمودار پارامتر u_s سیال غیرنیوتنی بر حسب عدد تیلور $\alpha = -0.025, k = 6$ در اعداد Re_z متفاوت در حالت مستقل از زمان الف: نمودار اصلی ب: بزرگنمایی در محدوده تیلور بحرانی

Fig.4. Parametric graph u_s of non-Newtonian fluid according to Taylor number, $\alpha = -0.025, k = 6$, at different Re_z numbers independent of time -a original -b magnification in critical Taylor range



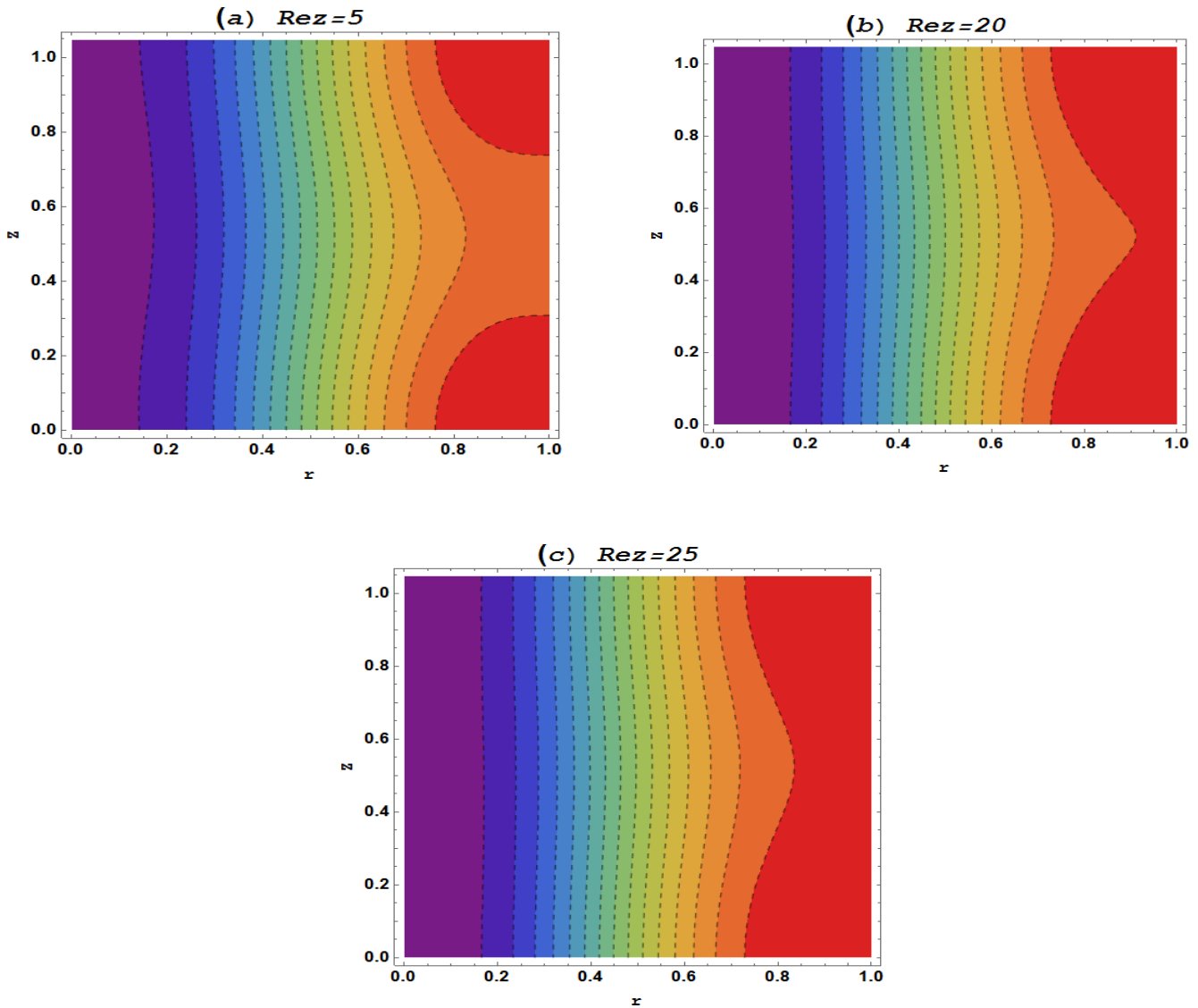
شکل ۵. کانتورهای ویسکوزیته ($\alpha = -0.05, k = 6, Ta = 8000$) در حالت مستقل از زمان: الف: بدون جریان محوری
 ب: با جریان محوری $Re_z = 5$ ج: با جریان محوری $Re_z = 25$

Fig.5. Viscosity contours ($\alpha = -0.05, k = 6, Ta = 8000$) in time-independent mode a: No axial flow
 b- Axial flow $Re_z = 5$: c- Axial flow $Re_z = 25$

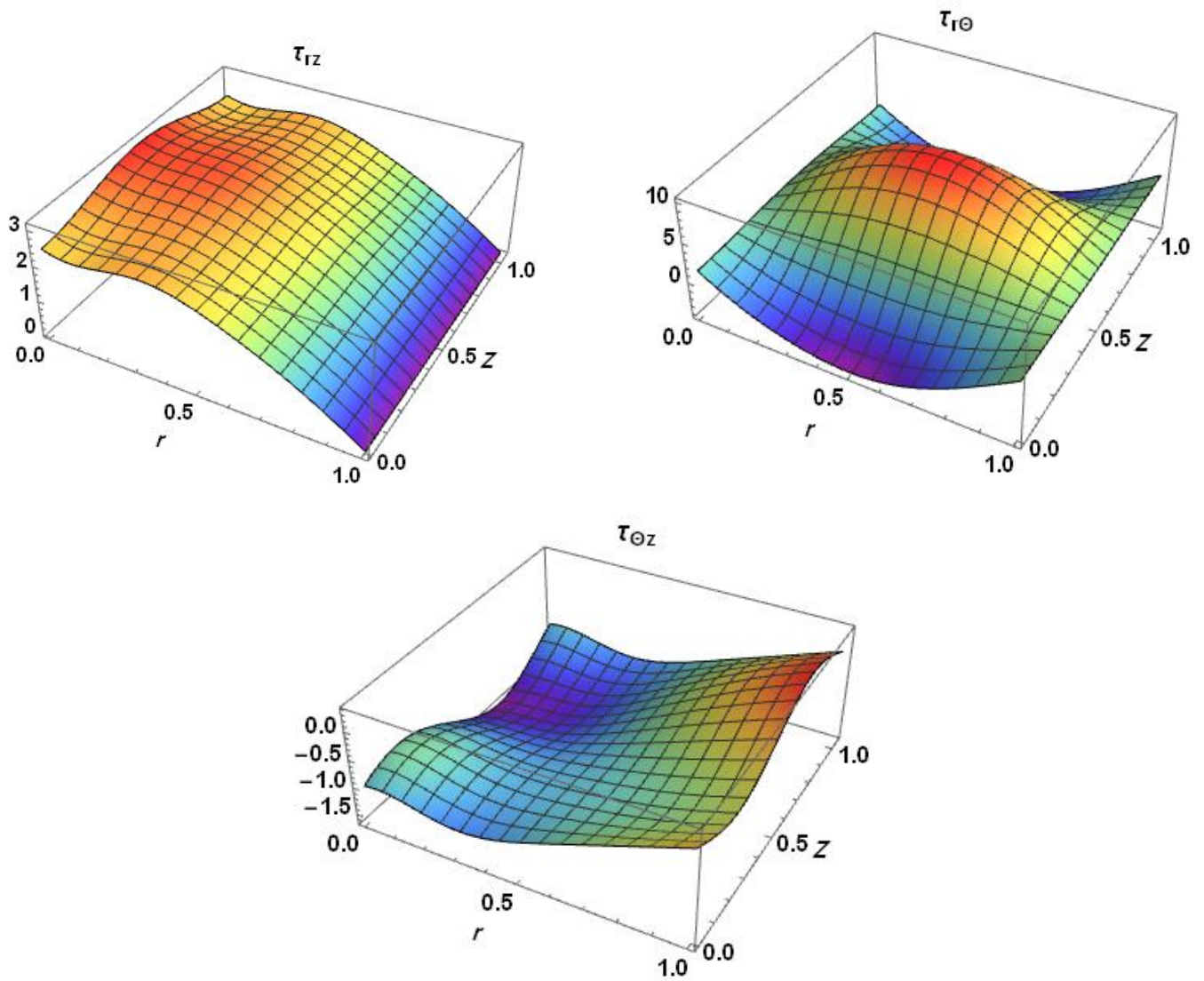


شکل ۶: پروفیل‌های سه بعدی ویسکوزیته ($\alpha = -0.05, k = 6, Ta = 8000$) در حالت مستقل از زمان
 الف: بدون جریان محوری ب: با جریان محوری $Re_z = 5$ ج: با جریان محوری $Re_z = 25$

Fig .6. Three-dimensional viscosity profiles ($\alpha = -0.05, k = 6, Ta = 8000$) in time-independent mode
 a: No axial flow: b- Axial flow $Re_z = 5$: c- Axial flow $Re_z = 25$

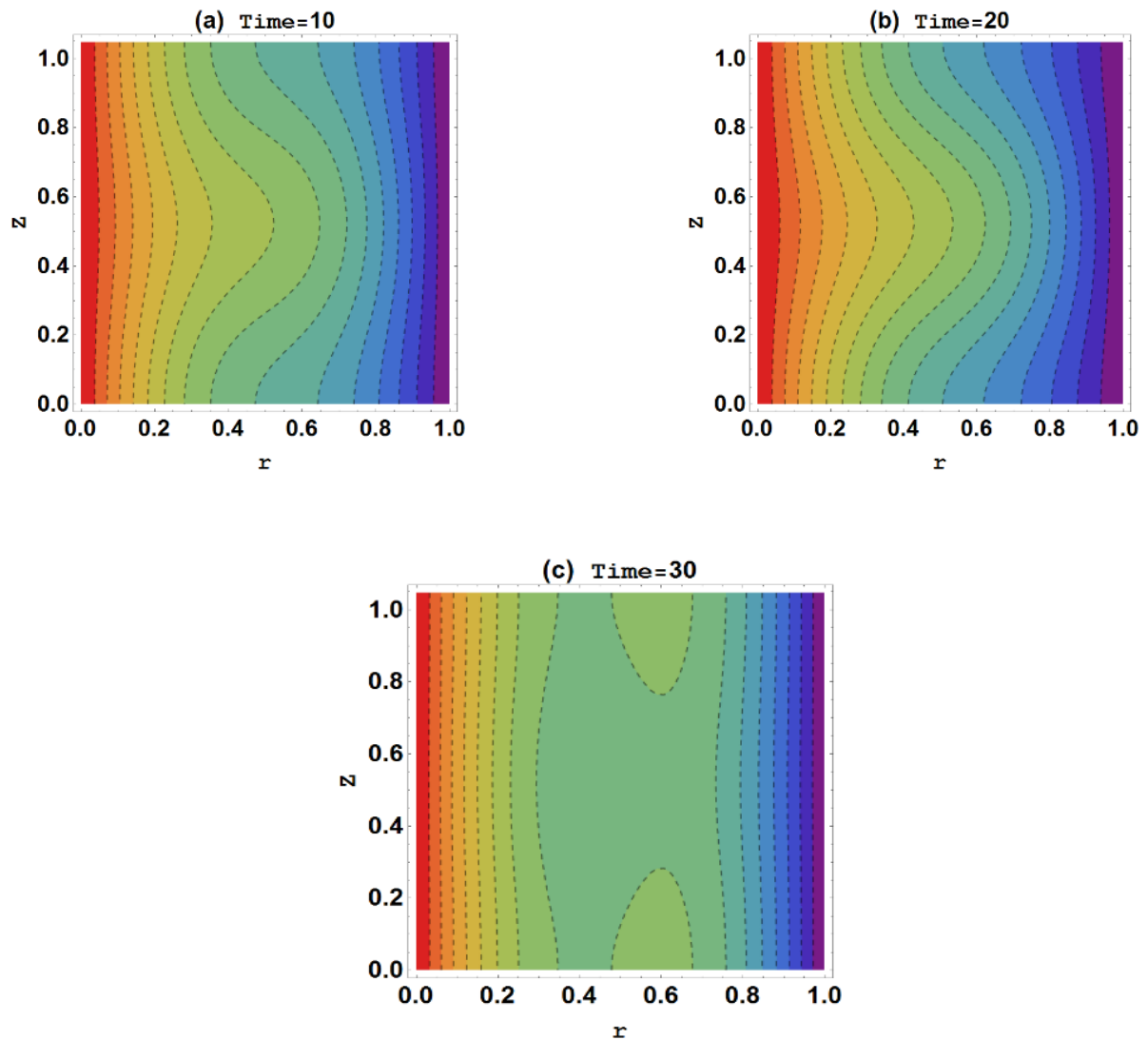


شکل ۷. کانتورهای فشار ($\alpha = -0.05, k = 6, Ta = 8000$) در حالت مستقل از زمان
 الف: با جریان محوری $Re_z = 5$ ب: با جریان محوری $Re_z = 20$ ج: با جریان محوری $Re_z = 25$
Fig. 7. Pressure contours ($\alpha = -0.05, k = 6, Ta = 8000$) in Independent of time mode
a: with axial flow $Re_z = 5$: b-with axial flow $Re_z = 20$: c- with axial flow $Re_z = 25$



شکل ۸: پروفیل‌های سه بعدی تنش ($\alpha = -0.05, k = 6, Re_z = 10, Ta = 8000$) در حالت مستقل از زمان با جریان محوری

Fig.8. Three-dimensional stress profiles in Independent of time mode for
($\alpha = -0.05, k = 6, Re_z = 10, Ta = 8000$)



شکل ۹: کانتورهای سرعت مماسی در صفحه r-z برای شرایط $(\alpha = -0.075, k = 6, Re_z = 5, Ta = 40000)$ وابسته به زمان

Fig.9. Tangential velocity contours on r-z section in depended of time mode for conditions

$$(\alpha = -0.075, k = 6, Re_z = 5, Ta = 40000)$$

متمتیکا، مولفه‌های سرعت معلوم می‌شوند و با جمع کردن مولفه‌های سرعت انحرافی بدست‌آمده با مولفه‌های سرعت جریان پایه که در رابطه ۱۵ آورده شده، میدان سرعت بطور کامل معلوم می‌شود. سپس با استفاده از مشتقات سرعت مقادیر مولفه‌های تنش محاسبه می‌شوند

۴- سرعت، ویسکوزیته و فشار در حالت مستقل از زمان

مولفه‌های میدان سرعت کل از جمع مولفه‌های سرعت جریان پایه (معادله (۱۵)) و مولفه‌های سرعت انحرافی بدست‌آمده از حل معادلات (۳۲) تا (۳۵) بدست می‌آیند. تا یک عدد تیلور مشخص، این جریان یک جریان لایه‌ای خالص و از نوع جریان کوئت می‌باشد. پس از رسیدن جریان تیلور به یک مقدار مشخص که به نام تیلور بحرانی نامیده می‌شود، شاهد تشکیل گردابه‌های تیلور خواهیم بود. تا حد مشخص از جریان تیلور، سرعت در نقاط مختلف جریان تنها تابعی از I و Z (مختصات مکانی) و مستقل از زمان می‌باشد. در شکل‌های ۲ و ۳ مولفه‌های سرعت برای جریان تیلور- کوئت در صفحه $I-Z$ برای حالت مستقل از زمان در دو حالت بدون و با وجود حرکت محوری استوانه داخلی آورده شده‌است. گردابه‌های تیلور بوضوح در شکل‌های ارائه شده قابل تشخیص‌اند. از مقایسه نمودارهای بدست‌آمده می‌توان به نتایج زیر رسید:

کانتورهای سرعت شعاعی، رفتاری پریودیک و یکسان را بر روی هر دو سیلندر خارجی و داخلی از خود نشان می‌دهند. همچنین بیشینه سرعت شعاعی در قسمت مرکزی گردابه‌ها می‌باشد چراکه با نزدیک شدن به دیواره‌های دو استوانه داخلی و خارجی، سرعت بدلیل تشکیل لایه مرزی کاهش می‌یابد و روی دیواره‌ها سرعت شعاعی برابر صفر است. برای سرعت مماسی می‌توان مشاهده کرد که با فاصله گرفتن از استوانه داخلی و نزدیک شدن به استوانه خارجی مقدار عددی سرعت کاهش می‌یابد. مکان قرارگرفتن مقادیر بیشینه و کمینه سرعت‌ها در حالت مستقل از زمان، مستقل از مقدار عدد تیلور بوده و با تغییر عدد تیلور تنها مقادیر سرعت‌ها تغییر می‌کند. دو گردابه متوالی نسبت به هم دارای حرکت معکوس می‌باشند، به عبارتی اگر یک گردابه ساعتگرد باشد، گردابه بعدی پادساعتگرد خواهد بود. مولفه شعاعی سرعت که در جریان پایه وجود نداشته در گردابه‌های تیلور پدیدار می‌شود. در کانتور سرعت محوری، اکستریم‌ها با فاصله یکسان و متقارن وجود دارند، همچنین مقادیر اکستریم‌ها نیز متقارن بدست می‌آیند. اکستریم سرعت محوری بر روی دیواره‌ها است. از مقایسه دو شکل ۳ و ۴ مشخص است که اعمال سرعت محوری بر روی شکل‌گیری کانتورهای سرعت موثر است و این تأثیر بخصوص بر روی کانتور سرعت مماسی بیشتر نمود دارد. در شکل ۴ تأثیر عدد رینولدز

معادلات فوق $\tau = \frac{1}{k + \pi^2}$ می‌باشد. دلیل استفاده از ضرایب مقیاس‌شده، کاستن از تبعات غیرخطی بودن دستگاه معادلات دیفرانسیل و هم‌گون‌سازی پاسخ‌ها از نظر مرتبه کمیت می‌باشد. بدیهی است که پس از حل معادلات، با عکس تبدیلات صورت‌پذیرفته، ضرایب اصلی محاسبه می‌گردد و استفاده از این تبدیلات تأثیری بر جواب نهایی نخواهد داشت و نهایتاً روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{du}{dt} = A_1 u + A_2 T a v + A_3 T a s v + \alpha \left(B_1 u + B_2 \cdot Re_z \cdot s^2 + B_3 \cdot s^2 u + B_4 \cdot Re_z \cdot v^2 + B_5 u v^2 + B_6 \cdot Re_z \cdot w \right. \\ \left. + B_7 u w + B_8 \cdot Re_z \cdot w^2 + B_9 u w^2 \right) \quad (32)$$

$$\frac{dv}{dt} = A_4 u + A_5 v + A_6 u w + \alpha \left(B_{10} v + B_{11} \cdot s^2 v + B_{12} \cdot v^3 + B_{13} v w + B_{14} v w^2 \right) \quad (33)$$

$$\frac{dw}{dt} = A_7 \cdot Re_z \cdot v + A_8 u v + A_9 w + \alpha (B_{15} \cdot s^2 + B_{16} \cdot v^2 + B_{17} \cdot w + B_{18} \cdot s^2 \cdot w + B_{19} \cdot v^2 \cdot w + B_{20} \cdot w^3) \quad (34)$$

$$\frac{ds}{dt} = A_{10} \cdot s + A_{11} \cdot Re_z \cdot v + \alpha \left(B_{21} \cdot s + B_{22} \cdot s^3 + B_{23} \cdot s \cdot v^2 \right. \\ \left. + B_{24} \cdot s \cdot w + B_{25} \cdot s \cdot w^2 \right) \quad (35)$$

مقادیر ضرایب $B_1 \sim B_{25}$ و $A_1 \sim A_{11}$ در ضمیمه یک انتهای مقاله آورده شده‌است. از حل معادلات غیرخطی فوق با روش‌های مختلف عددی مانند رانگ- کوتا و اوایلر ضمنی و با استفاده از نرم‌افزار

نیز در شکل ۸ آورده شده است.

۵- مولفه‌های سرعت در حالت وابسته به زمان

با افزایش عدد تیلور شاهد این خواهیم بود که طبیعت رژیم جریان تغییر کرده و دیگر جریان مستقل از زمان نخواهد بود. به عنوان مثال شکل ۹ کانتورهای مولفه سرعت مماسی به ازای یک مقدار عدد تیلور یکسان در سه زمان مختلف نشان می‌دهند. همانگونه که از مشاهده شکل‌ها مشخص می‌شود در این محدوده از عدد تیلور کانتورهای مولفه سرعت مماسی تابع زمان بوده و در بازه‌های متفاوت، دارای شکل‌های متفاوت خواهند بود.

۶- رفتار دینامیک غیرخطی معادلات حاکم

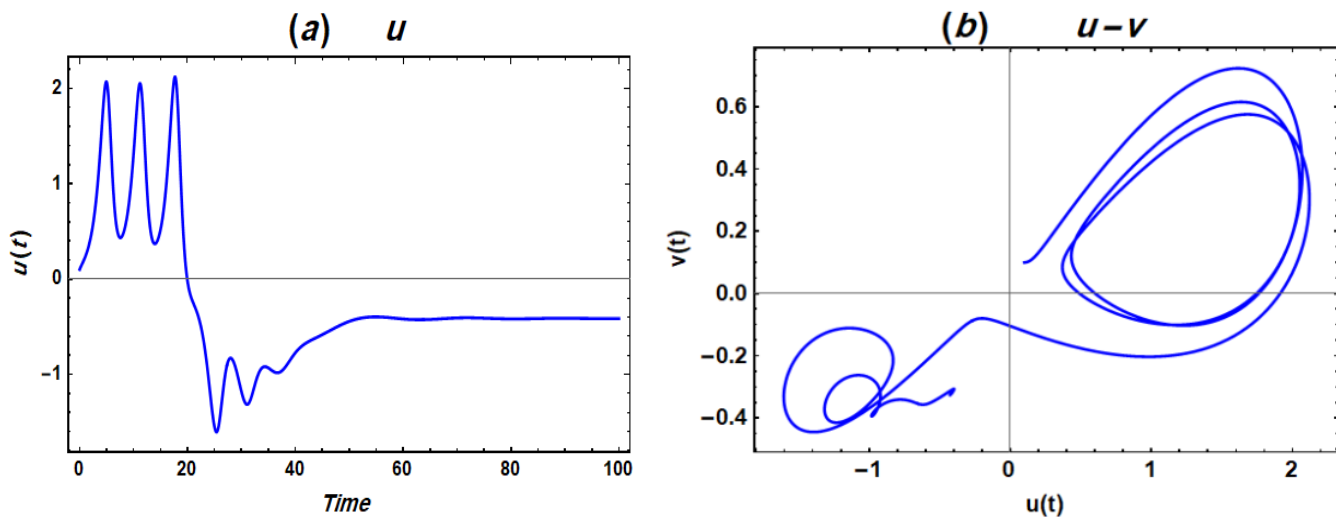
بی‌نظمی یا آشوب، یک رفتار طولانی مدت غیرپریودیک در یک سیستم غیرخطی است که شدیداً به شرایط اولیه حساس می‌باشد. منظور از رفتار طولانی مدت غیرپریودیک در سیستم‌های دینامیکی آن است که مسیریابی وجود دارند که وقتی زمان به بی‌نهایت میل می‌کند، مسیر این سیستم‌ها به نقاط ثابت، مدارهای پریودیک و یا مدارهای شبه‌پریودیک منتهی نمی‌شود. آشوب گویای آن است که سیستم دارای ورودی‌ها یا پارامترهای تصادفی نیست ولی رفتار

محوری و عدد تیلور بر پارامتر u در حالت مستقل از زمان برای سیال غیرنیوتونی رقیق‌شونده بررسی شده و در نمودار ۴-b با دقت بیشتری بر روی تغییرات در ناحیه تشکیل گردابه‌های تیلور زوم شده است.

در شکل ۴ تأثیر بالا رفتن عدد رینولدز محوری و به عبارت دیگر افزایش سرعت حرکت استوانه داخلی در کاهش عدد تیلور بحرانی مشخص است. همچنین ناحیه‌ای که جریان قبل از رسیدن به سرعت پایدار دارای نوسان می‌باشد قابل تشخیص است.

در شکل ۵ کانتورهای ویسکوزیته نمایش داده شده است. با مقایسه شکل‌ها مشخص می‌گردد که با اعمال حرکت محوری نقاط اکسترم ویسکوزیته تغییر نمی‌کند و فقط محدوده ماکزیمم مقدار ویسکوزیته توسعه می‌یابد به طوری که بطور کامل سمت راست میدان را فرامی‌گیرد.

کانتورهای فشار برای حالت مستقل از زمان در شکل ۷ ارایه شده‌اند. همانطور که از کانتورهای فشار مشخص است ناحیه پرفشار (قرمز رنگ) بر روی سیلندر بیرونی و ناحیه کم‌فشار (بنفش رنگ) بر روی سیلندر داخلی تغییر می‌کند. همانگونه که از شکل نیز مشخص است افزایش رینولدز محوری در یک عدد تیلور ثابت باعث نفوذ و گسترش منطقه اکسترم فشار در میدان جریان از استوانه بیرونی به استوانه داخلی می‌شود. نمودار مربوط به تغییرات ویسکوزیته و تنش

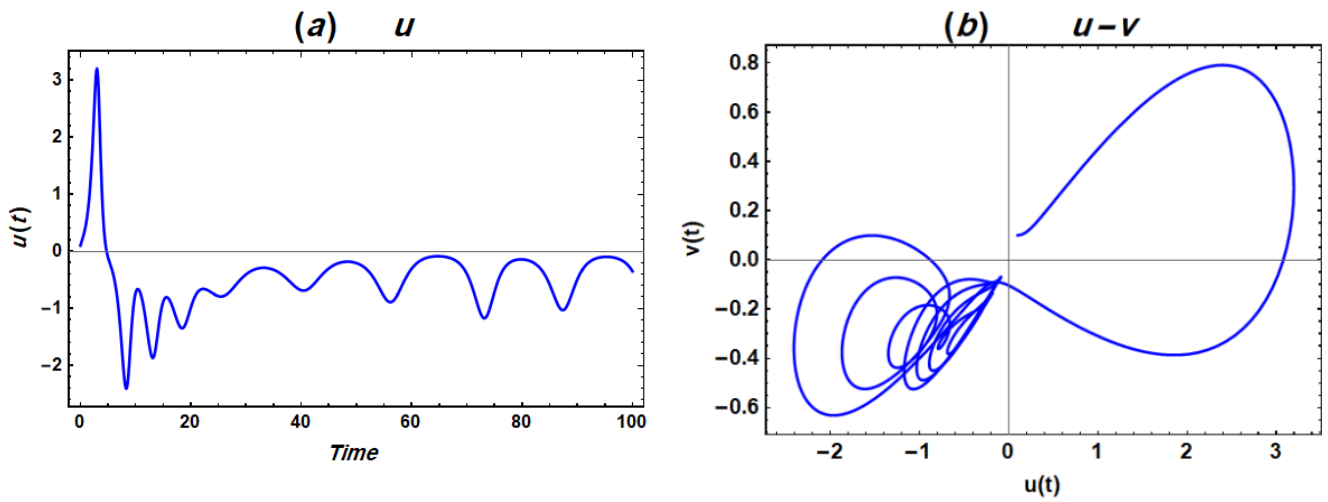


شکل ۱۰: الف: تغییرات پارامتر سرعت بر حسب زمان - ب: نمودار فازی

$$\alpha = -0.075, k = 6, Re_z = 5, Ta = 6000$$

Fig .10-a.Velocity parameter changes in terms of time-b: fuzzy diagram

$$\alpha = -0.075, k = 6, Re_z = 5, Ta = 6000$$

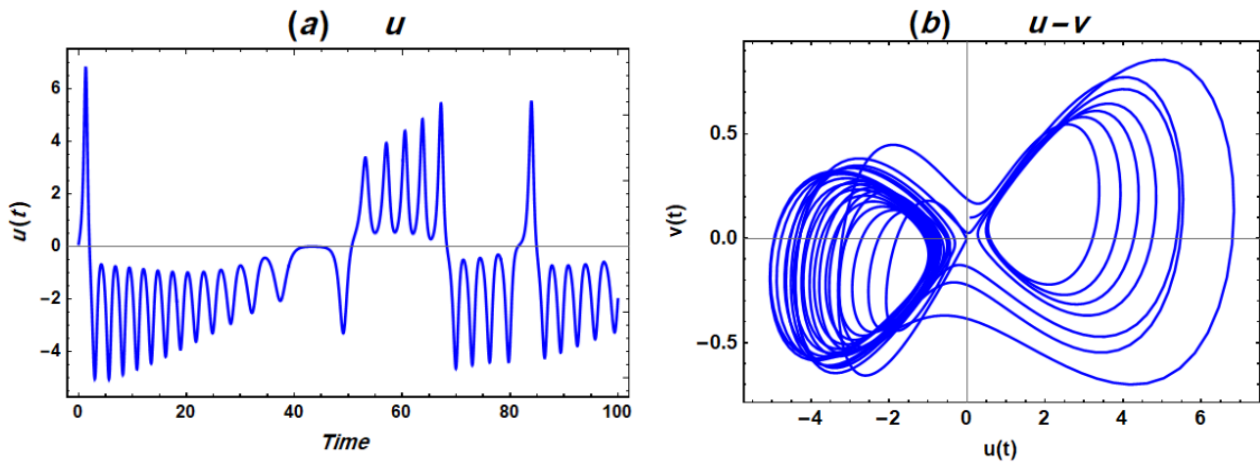


شکل ۱۱: الف: تغییرات پارامتر سرعت بر حسب زمان - ب: نمودار فازی

$$\alpha = -0.075, k = 6, Re_z = 5, Ta = 11000$$

Fig .11-a: Velocity parameter changes in terms of time-b: fuzzy diagram

$$\alpha = -0.075, k = 6, Re_z = 5, Ta = 11000$$

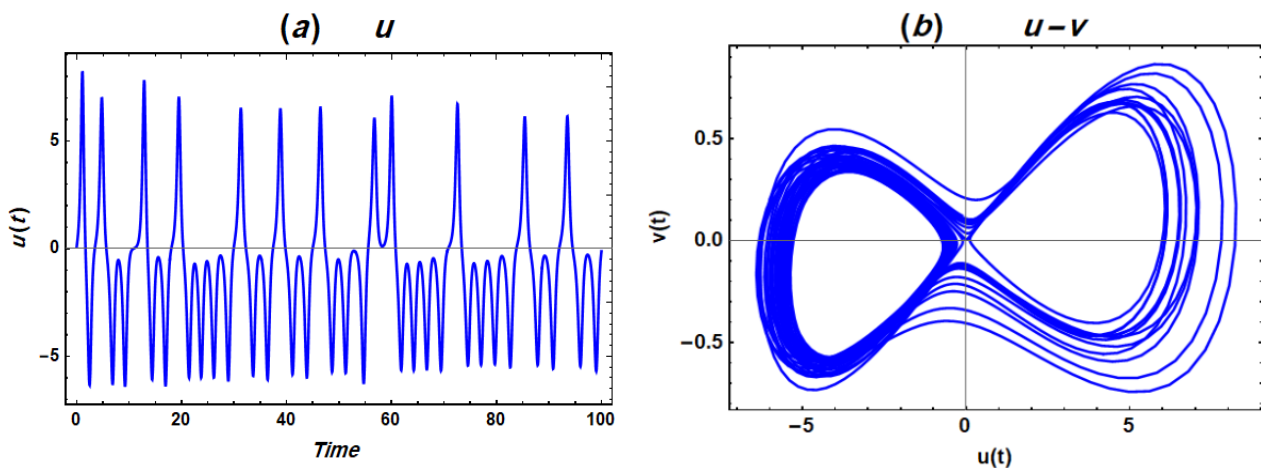


شکل ۱۲: الف: تغییرات پارامتر سرعت بر حسب زمان - ب: نمودار فازی

$$\alpha = -0.075, k = 6, Re_z = 5, Ta = 39400$$

Fig .12-a: Velocity parameter changes in terms of time -b: fuzzy diagram

$$\alpha = -0.075, k = 6, Re_z = 5, Ta = 39400$$



شکل ۱۳: الف: تغییرات پارامتر سرعت بر حسب زمان - ب: نمودار فازی

$$\alpha = -0.075, k = 6, Re_z = 5, Ta = 55370$$

Fig. 13-a: Velocity parameter changes in terms of time -b: fuzzy diagram

$$\alpha = -0.075, k = 6, Re_z = 5, Ta = 55370$$

واحد در یکی از مقادیر شرایط اولیه سرعت، احتمال اختلاف در مقادیر سرعت حتی تا بیشتر از مقادیر سرعت ماکزیمم وجود دارد.

۷- تحلیل پایداری

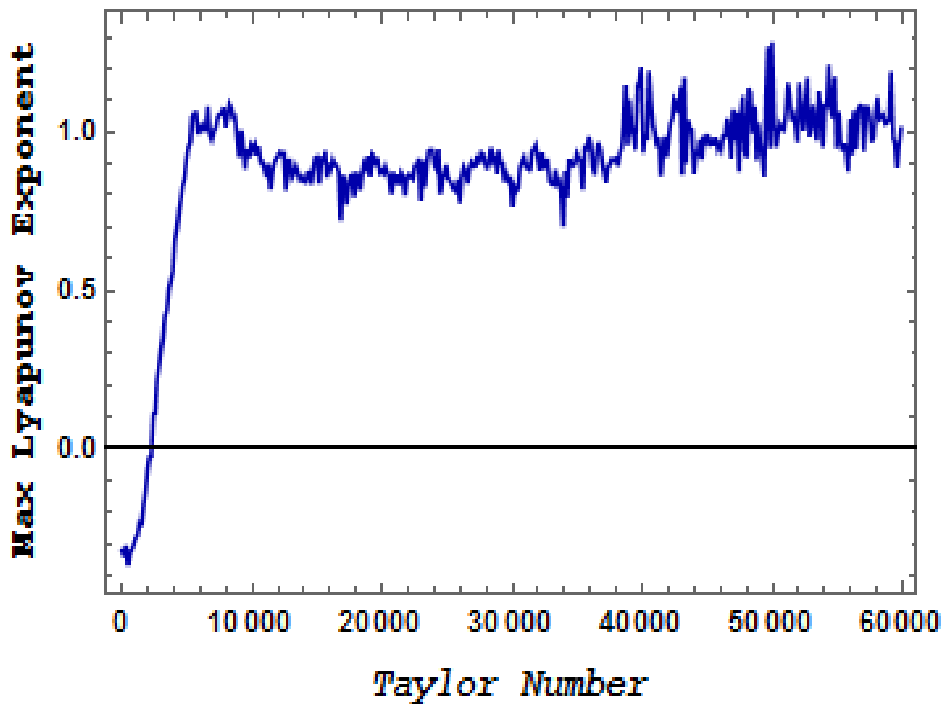
در این بخش به تحلیل پایداری جریان تیلور- کوئت بین دو استوانه با حرکت محوری استوانه داخلی پرداخته می‌شود. همانگونه که قبلاً نیز ذکر گردید، در جریان تیلور- کوئت با افزایش سرعت دوران استوانه داخلی ناپایداری‌هایی در میدان جریان ظاهر می‌شود. این ناپایداری‌ها در ابتدا به صورت مجموعه‌ای از گردابه‌های افقی و متقارن نسبت به محور استوانه ظاهر می‌شوند. وجود این گردابه‌ها، خصوصیات هیدرودینامیکی فرآیندهایی که در آنها این نوع جریان رخ می‌دهد را تغییر می‌دهند. از آنجاکه معادلات حاکم بر سیال غیرنیوتنی در هندسه تیلور- کوئت مورد بحث دارای چندین ترم غیرخطی از مرتبه بالا می‌باشند، مطالعه بی‌نظمی در این سیستم‌ها به علت وجود این ترم‌های غیرخطی از اهمیت بالایی برخوردار است. روش مورد استفاده جهت تحلیل پایداری سیال و میرایی اغتشاش وارده به این صورت است که جهت تحلیل پایداری سیستم معادلات، نسبت به خطی‌سازی معادلات حول نقاط ثابت اقدام و نتایج با تحلیل معادله مشخصه سیستم عرضه و بررسی می‌گردد. نحوه کار بدین صورت

سیستم کاملاً بی‌نظم است. این بی‌نظمی سیستم از غیرخطی بودن ناشی می‌شود.

منظور از حساس بودن به شرایط اولیه در سیستم‌های دینامیکی این است که مسیریهای مجاور با سرعت از هم جدا می‌شوند. در واقع این خصوصیت تفاوت اصلی سیستم‌های دینامیکی آشوبناک با سیستم‌های دینامیکی غیرآشوبناک است. حرکت آشوبناک یک پدیده نادر نیست و شرط لازم برای حرکت آشوبناک عبارتست از:

الف- سیستم حداقل سه متغیر دینامیکی مستقل داشته باشد.

ب- معادله‌های حرکت شامل حداقل یک جمله غیرخطی باشد تا تعدادی از متغیرها را به هم جفت کند. از آنجائیکه معادلات حاکم بدست آمده برای سیال غیرنیوتنی در جریان تیلور- کوئت با حرکت محوری استوانه داخلی نیز دارای دو شرط الف و ب بالا می‌باشند، یعنی دارای پارامترهای غیرخطی بوده و با توجه به وجود متغیرهای سرعت در سه جهت و همچنین فشار در معادلات ممنتم برای جریان سیال غیرنیوتنی مورد مطالعه، انتظار می‌رود با حرکتی آشوبناک و وابستگی جواب به شرایط اولیه مواجه گردیم. جهت نشان دادن حساسیت سیستم معادلات به شرایط اولیه می‌توان نشان داد در صورت تغییر در حد 0.001



شکل ۱۴: نمودار ماکزیمم نمای لیاپانف ($\alpha = -0.075, k = 6, Re_z = 5$)
 $\alpha = -0.075, k = 6, Re_z = 5, Ta = 39400$

Fig. 14. Maximum Lyapunov Exponent ($\alpha = -0.075, k = 6, Re_z = 5$)

مقادیر سرعت اغتشاشی بدین صورت فرض شده تا رفتار سیستم وقتی $t \rightarrow \infty$ بررسی شود در این حالت وقتی زمان به سمت بینهایت میل می‌کند اگر مقادیر سرعت اغتشاشی (u, v, w, S) صفر شوند به معنای پایداری سیستم در درازمدت و در غیراینصورت به معنای باقیماندن اغتشاش و ناپایداری است. بنابراین با خطی‌سازی معادلات حاکم و جایگذاری مقادیر فوق در معادلات خطی‌سازی شده ماتریس زیر را بدست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u}{\partial \xi_3} & \frac{\partial u}{\partial \xi_4} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi_1} & \frac{\partial v}{\partial \xi_2} & \frac{\partial v}{\partial \xi_3} & \frac{\partial v}{\partial \xi_4} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi_1} & \frac{\partial w}{\partial \xi_2} & \frac{\partial w}{\partial \xi_3} & \frac{\partial w}{\partial \xi_4} \\ \frac{\partial S}{\partial \xi_1} & \frac{\partial S}{\partial \xi_2} & \frac{\partial S}{\partial \xi_3} & \frac{\partial S}{\partial \xi_4} \end{bmatrix} \quad (38)$$

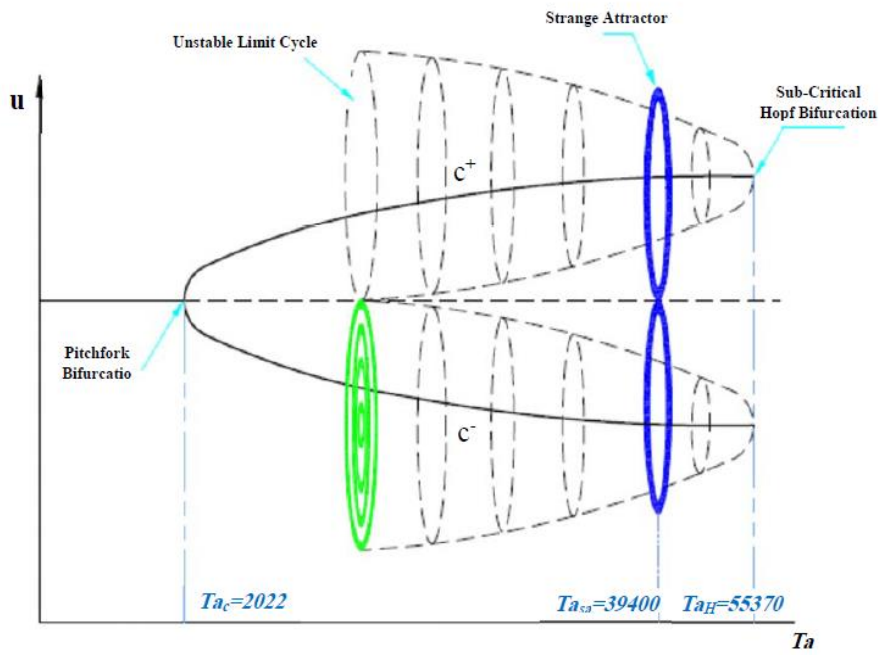
با محاسبه دترمینان و بدست‌آوردن معادله مشخصه و مقادیر ویژه

است که با فرض اینکه مقادیر سرعت u_s, v_s, w_s, S_s مشخصات سرعت نقاط ثابت معادلات حاکم باشند و با فرض اینکه مقادیر سرعت اغتشاشات وارد شده u', v', w', S' فرض شوند، برای بررسی تاثیر اغتشاش در معادلات حاکم فرض می‌کنیم:

$$\begin{aligned} u &= u_s + u', v = v_s + v', w = \\ w_s + w', S &= S_s + S' \end{aligned} \quad (36)$$

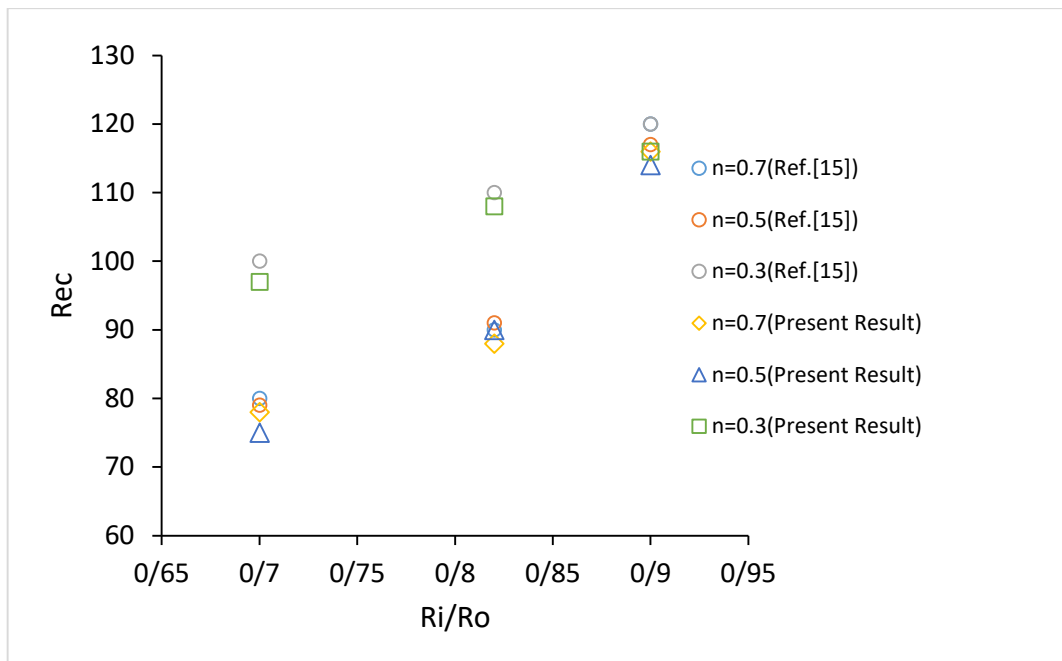
که همانگونه که بیان شد، مقادیر سرعت u_s, v_s, w_s, S_s و جواب‌های معادلات حاکم در حالت گذرا (مستقل از زمان) و نقاط ثابت سیستم فرض می‌شوند. برای بررسی تاثیر زمان بر رفتار معادلات فرض می‌کنیم:

$$\begin{aligned} u' &= \xi_1 e^{\lambda t}, v' = \xi_2 e^{\lambda t} \\ w' &= \xi_3 e^{\lambda t}, S' = \xi_4 e^{\lambda t} \end{aligned} \quad (37)$$



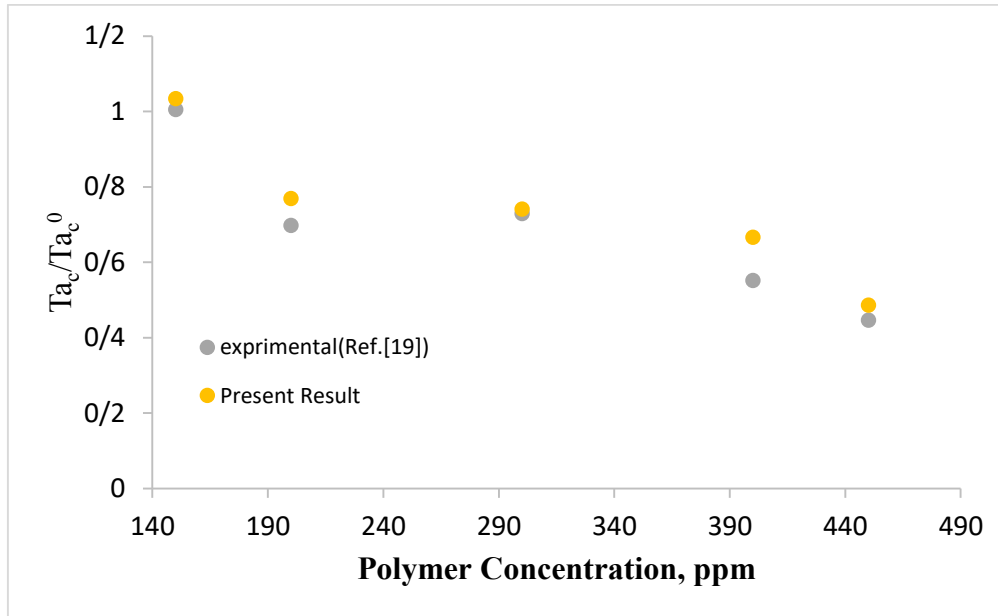
شکل ۱۵: نمودار دوشاخه شدگی بطور شماتیکی برای حالت $\alpha = -0.075, k = 6$

Fig. 15. Schematically Bifurcation diagram for $\alpha = -0.075, k = 6$



شکل ۱۶: مقایسه نتایج عددی کار حاضر با نتایج آزمایشگاهی مرجع [۱۵]

Fig. 16. Comparison of numerical results of present work with reference laboratory results [15]



شکل ۱۷: مقایسه نتایج عددی کار حاضر با نتایج شبیه سازی عددی مرجع [۱۹]. در نمودار فوق بیانگر عدد تیلور بحرانی است که در آن جریان گردابه‌های تیلور در سیال نیوتنی شروع به شکل گرفتن می‌کند.

Fig.17. Comparison of the numerical results of the present work with the numerical simulation results of the reference [19] in the above diagram illustrates the critical Taylor number where the Newtonian fluid TVF flow begins to form.

عدد تیلور تمام ریشه‌ها حقیقی دو ریشه مثبت و دو ریشه منفی داریم. با افزایش عدد تیلور دو ریشه حقیقی یکی مثبت و یکی منفی و دو ریشه مزدوج مختلط با قسمت حقیقی منفی داریم. جهت بررسی پارامتر u_s سرعت و دیاگرام فازی برای عدد تیلور $Ta = 6000$ در شکل ۱۰ آورده شده است. همانگونه که از پارامترهای سرعت نیز مشخص است، نهایتاً پارامترها به مقدار ثابتی می‌رسند.

با افزایش مقدار پارامتر کنترلی عدد تیلور با بزرگتر شدن مسیر حلقوی، پاسخ پارامترهای سرعت نامنظم شده و دیگر با گذشت زمان به ثبات نمی‌رسد. همچنین به دامنه نوسانات نیز افزوده می‌شود که به عنوان نمونه شکل ۱۱ ارایه شده است.

با افزایش پارامتر کنترلی عدد تیلور ساختار دیاگرام فازی نامنظم‌تر شده و پارامترهای سرعت دچار بی‌نظمی شدیدتری می‌شوند. به عنوان نمونه شکل‌های ۱۲ و ۱۳ جهت تیلورهای به ترتیب $Ta = 39400$ و $Ta = 55373$ آورده شده است.

در عدد تیلور $Ta = 39400$ شاهد جاذب‌های عجیب در دیاگرام‌های فازی هستیم شبیه آنچه که در پدیده لورنز می‌افتد. در اینجا نیز معادله مشخصه دو ریشه حقیقی یکی مثبت و یکی منفی و دو ریشه مزدوج مختلط با قسمت حقیقی منفی داریم.

در عدد تیلور $Ta = 55370$ همانگونه که از تغییرات پارامترهای

و بحث بر روی علامت‌های آنها، در مورد پایداری می‌توان تحلیل کرد.

۸- معادله مشخصه پایداری جریان پایه

در حالت جریان پایه با توجه به مستقل از زمان بودن این جریان، سمت راست معادلات صفر فرض می‌شوند مقادیر سرعت u_s ، v_s ، w_s و s_s جواب‌های بدیهی دستگاه معادلات یعنی:

$$u_s = v_s = w_s = s_s = 0 \quad (39)$$

است. با جایگذاری و تشکیل معادله مشخصه، مقادیر ویژه ماتریس محاسبه می‌شود و λ های بدست‌آمده یا همان مقادیر ویژه ماتریس پایداری، هنگامی منتج به پایداری هستند که مقادیری منفی اختیارکنند. اولین مقدار

مهم بدست‌آمده برای مقادیر ویژه که ریشه‌ها در آن تغییر علامت می‌دهند عدد تیلور بحرانی این جریان $Ta = 2335$ می‌باشد که در آن گردابه‌های تیلور تشکیل می‌شود. در همان ابتدای شروع جریان انحرافی، با توجه به نمودارهای فازی؛ ناپایداری جریان مشخص است که این مربوط به ریشه‌های ناپایدار جریان مشخصه می‌باشد. در این

برای این سیال عدد تیلور بحرانی $Ta = 2335$ می‌باشد. در این عدد با توجه به معادله مشخصه یکی از مقادیر مشخصه برای تمام اعداد تیلور حقیقی و منفی و ریشه‌های دیگر را نمی‌توان با حل تحلیلی بدست آورد و فقط با حل عددی به دست می‌آیند. در این عدد تیلور یکی از ریشه‌ها حقیقی و مثبت و دو ریشه دیگر موهومی مزدوج با قسمت حقیقی منفی می‌باشد. لذا در این نقطه برای عدد تیلور بحرانی دو شاخه C^+ و C^- پایدار و یک شاخه ناپایدار وجود دارد و لذا در این نقطه یک دو شاخه‌شدگی چنگکی داریم. با افزایش عدد تیلور نهایتاً به جایی می‌رسیم که مقادیر حقیقی ریشه‌های معادله مشخصه از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهند. دقیقاً در نقطه‌ای که این اتفاق می‌افتد یعنی در عدد تیلور $Ta = 55370$ مقدار مشخصه برابر با $\pm i\omega$ می‌باشد و ریشه‌ها موهومی خالص هستند و با دواپر حدی احاطه شده‌اند و در روی خود خطوط پایداری وجود دارد ولی در صورت ورود اغتشاشی بزرگ ناپایداری مشاهده می‌شود. این نقطه به نام دوشاخه‌شدگی چنگکی زیربحرانی شناخته می‌شود. همچنین در قبل از این پارامتر کنترلی و در عدد تیلور $Ta = 39400$ شبیه آنچه که در مدل لورنز شاهد هستیم شاهد جاذب‌های عجیب خواهیم بود. این موارد در شکل ۱۵ بصورت شماتیک نشان داده شده است.

۱۱- نتیجه‌گیری

در این پژوهش مسئله تیلور-کوئت همراه با حرکت محوری استوانه داخلی بررسی گردید. سیال مورد بررسی سیال غیرنیوتنی رقیق شونده در نظر گرفته شده و از مدل کارو-برد جهت مدل نمودن وابستگی ویسکوزیته به نرخ برش بهره گرفته شده‌است. با توجه به هندسه و طبیعت مسئله انتظار می‌رود مسئله با هر روش دیگری (مانند المان محدود) نیز حل گردد، در تیلور بحرانی شاهد تغییر پارامترهای سرعت و تبدیل جریان از حالت کوئت به جریان تیلور-کوئت و تشکیل سلول‌های تیلور باشیم. با توجه به تاثیر پارامترهای مختلف هندسی و رئولوژیکی بر رفتار و ناپایداری سیال، در حالت کلی ارائه رابطه‌ای که دربرگیرنده تاثیر تمام پارامترها باشد امکان‌پذیر نیست و سعی گردیده جهت رفع این مشکل با استفاده از بی‌بعدسازی و ارائه نمودارهای مختلف، در مورد تاثیر پارامترهایی مانند عدد تیلور و عدد رینولدز محوری بر روی رفتار جریان بحث گردد.

با توجه به اینکه معادلات حاکم در این مسئله دارای جملات غیرخطی از مرتبه بالا می‌باشند، مطالعه بی‌نظمی در این سیستم‌ها به علت وجود این جملات غیرخطی مهم می‌باشد. بنابراین از عدد تیلور که به عنوان معیار اصلی حالت رژیم جریان است، بعنوان پارامتر تغییرات حالت پایداری دینامیکی سیستم استفاده می‌شود.

سرعت نیز مشخص‌است شاهد آشوب هستیم. این عدد تیلور دوشاخه‌شدگی هاف زیربحرانی نامیده می‌شود. با توجه به بررسی‌های انجام شده در مورد تغییرات پارامترهای سرعت و دیاگرام‌های فاز می‌توان به این نتیجه رسید که بطور کلی افزایش پارامتر کنترلی عدد تیلور منجر به افزایش بی‌نظمی خواهد گردید. همچنین هنگامی که دیاگرام فاز به یک نقطه ثابت می‌رسد، نشان‌دهنده این است که رفتار سیستم دینامیکی پایدار است ایجادشدن حلقه دوم در دیاگرام فاز نیز به معنای حساس‌بودن سیستم دینامیکی به جواب‌های اولیه می‌باشد. همچنین همانگونه که مشخص است دیاگرام‌های تغییرات پارامترهای سرعت در حالت آشوبناک با گذشت زمان به یک مقدار واحد نخواهد رسید و با گذشت زمان همواره جواب‌ها دچار تغییر خواهند شد.

۹- نمودار نمای لیاپانف

استفاده از نمای لیاپانف روشی سودمند در تحلیل پایداری است. با استفاده از این روش رفتار سیستم غیرخطی بدست‌آمده در اعداد تیلور مختلف رسم می‌شود و محدوده‌هایی از اعداد تیلور که سیستم غیرخطی رفتاری آشوبناک از خود نشان می‌دهد، تعیین می‌شود. بدین‌صورت که در مقادیری از اعداد تیلور که ماکزیمم نمای لیاپانف منفی و یا نزدیک به صفر است سیستم رفتار دینامیکی منظم و غیر آشوبناک از خود نشان می‌دهد. در حالی که با مثبت شدن نمای لیاپانف سیستم به سمت بی‌نظمی پیش خواهد رفت و می‌توان انتظار رفتار آشوبناک از سیستم را داشت. نمودار نمای لیاپانف در حکم یک راهنمای مسیر است و مشخص می‌کند در کدام محدوده باید بدنبال سیستم نوسانی منظم بود و در کدام محدوده نیازی به انجام تحلیل فاز می‌باشد. در اعداد تیلور مختلف جهت یافتن محدوده پایداری نمی‌باشد و سیستم آشوبناک است.

جهت کنترل پایداری در حالت بررسی شده در شکل‌های ۱۰ تا ۱۳ با شرایط $(\alpha = -0.075, k = 6, Re_z = 5)$ که نمای لیاپانف آن در شکل ۱۴ آورده شده تقریباً در کلیه اعداد رینولدز مورد بررسی جریان آشوبناک و ناپایداری را شاهد هستیم که نمای مثبت لیاپانف در این محدوده تاییدکننده نتایج بدست‌آمده در دیاگرام‌های فاز است.

۱۰- نمودار دوشاخه‌شدگی

جهت آنالیز بهتر پایداری سیال در این قسمت از نمودار دوشاخه‌شدگی استفاده شده است. در شکل ۱۵، نمودار دوشاخه‌شدگی برای سیال با مشخصات $\alpha = -0.075, k = 6, Re_z = 5$ رسم شده‌است.

$$B_6 = \frac{256k\pi\tau^3}{3\sqrt{2}}$$

$$B_7 = 2k^6\tau^3 - 10k^4\tau^3\pi^2 - 10k^2\tau^3\pi^4 + 2\tau^3\pi^6$$

$$B_8 = -\frac{512}{15\sqrt{2}}\tau^2k\pi, B_9 = -2k^4\tau^2 - 4k^2\tau^2\pi^2 - 2\tau^2\pi^4$$

$$B_{10} = -k^2\tau - 3\tau\pi^2, B_{11} = -\left(\frac{k^2\tau}{4} + \frac{9\tau\pi^2}{4}\right)$$

$$B_{12} = -\frac{1}{16}\left(\frac{18k^4\tau}{\pi^2} + 4\tau k^2 + 18\tau\pi^2\right)$$

$$B_{13} = -2\tau(k^2 - 3\pi^2), B_{14} = -2\tau k^2 - 6\tau\pi^2$$

$$B_{15} = 38\pi^2$$

$$B_{16} = \frac{k^2\tau}{\pi} - 3\pi\tau, B_{17} = B_{20} = -12\pi^2\tau$$

$$B_{18} = -6\pi^2\tau, B_{19} = -2k\tau - 6\pi^2\tau$$

$$B_{21} = -3\pi^2\tau, B_{22} = -\frac{3}{4}\pi^2\tau, B_{23} = -\frac{\tau}{4}(k^2 + 9\pi^2)$$

$$B_{24} = -6\tau\pi, B_{25} = -6\tau\pi^2$$

منابع و مراجع

- [1] M. Couette, Etudes sur le frottement des liquides, (1890).
- [2] G.I. Taylor, VIII. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, 223(605-615) (1923) 289-343.
- [3] C. Hoffmann, S. Altmeyer, A. Pinter, M. Lücke, Transitions between Taylor vortices and spirals via wavy Taylor vortices and wavy spirals, New Journal of Physics, 11(5) (2009) 053002.
- [4] H. Kuhlmann, Model for Taylor-Couette flow, Physical Review A, 32(3) (1985) 1703.
- [5] M. Smieszek, C. Egbers, Flow structures and stability in Newtonian and non-Newtonian Taylor-Couette flow, Journal of Physics: Conference Series, 14(1) (2005) 72.

نتایج حاصل از حل میدان سرعت در نمودارها و کانتورهای مختلفی ارائه گردیده است و با توجه به نمودارها و کانتورها مشاهده می شود که با افزایش تاثیر غیرنیوتنی بودن (افزایش مقدار α) عدد تیلور بحرانی افزایش می یابد و گردابه های تیلور دیرتر امکان تشکیل دارند. همچنین با افزایش عدد رینولدز محوری تشکیل گردابه های رینولدز تسریع شده و عدد تیلور بحرانی کوچک تر می شود و با ازدیاد مقدار رینولدز محوری، ناحیه حداکثر لزجت کل از مرکز فضای دو استوانه تا جداری استوانه داخلی گسترده می شود. همچنین گردابه های تیلور به شکل دوایر تکرار شونده در محور استوانه شکل گرفته اما با در نظر گرفتن حرکت محوری استوانه داخلی، این گردابه ها به شکل مارپیچ های محوری در می آید.

پایداری جریان بیش از اینکه تابع غلظت سیال غیرنیوتنی (α) باشد متاثر از پارامتر کنترلی تیلور بوده و همچنین بررسی رفتار دینامیکی جریان گردابه های تیلور نشان می دهد که با افزایش رینولدز محوری، پایداری و بی نظمی تشدید می گردد. به بیان دیگر با افزایش رینولدز محوری رفتار سیستم دستخوش تغییرات مشهودی می گردد. همچنین با افزایش شاخص غیرنیوتنی نیز ناپایداری در سیستم تشدید می گردد. جهت صحت سنجی پژوهش انجام شده، مقادیر بدست آمده با مراجع [۱۵] و [۱۹] مقایسه شده اند و نتایج در نمودارهای ۱۶ و ۱۷ آورده شده و با توجه به نمودارها نتایج قابل قبولی بدست آمده اند.

پیوست یک

ضرایب معادلات ۳۲ تا ۳۵ عبارتند از:

$$A_1 = A_5 = A_6 = B_1 = -1, A_2 = k^2\tau^2$$

$$A_3 = \frac{16k^2\tau^2}{3\pi^2}, A_4 = A_8 = 1, A_7$$

$$= -\frac{32\sqrt{2}k\tau}{9\pi^3}A_9 = -4\pi^2\tau$$

$$A_{10} = -\pi^2\tau, A_{11} = \frac{\sqrt{2}k\tau}{\pi}$$

$$B_2 = -\frac{32k\pi\tau^3}{3\sqrt{2}}, B_3 = -\frac{k^4\tau^2}{4} - \frac{5k^2\pi^2\tau^2}{2} - \frac{\pi^4\tau^2}{4}$$

$$B_4 = -\frac{64\sqrt{2}k^5\tau^3}{9\pi^3} + \frac{32\sqrt{2}k^3\tau^3}{3\pi} - \frac{32\sqrt{2}k\pi\tau}{9}$$

$$B_5 = \frac{\tau}{8}\left(\frac{-9k^6}{\pi^2} + 13k^4 - 43k^2\pi^2 - \pi^4\right)$$

- of pseudoplastic axial Taylor–Couette flow, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47(8) (2012) 905-917.
- [14] G. Tian, M. Wang, X. Wang, G. Jin, Flow between eccentric cylinders: a shear-extensional controllable flow, *Korea-Australia Rheology Journal*, 28(2) (2016) 139-148.
- [15] H. Masuda, T. Horie, R. Hubacz, M. Ohta, N. Ohmura, Prediction of onset of Taylor-Couette instability for shear-thinning fluids, *Rheologica Acta*, 56(2) (2017) 73-84.
- [16] B. Martínez-Arias, J. Peixinho, Torque in Taylor–Couette flow of viscoelastic polymer solutions, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 247 (2017) 221-228.
- [17] C. Schäfer, A. Morozov, C. Wagner, Geometric scaling of elastic instabilities in the Taylor–Couette geometry: A theoretical, experimental and numerical study, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 259 (2018) 78-90.
- [18] R.B. Bird, R.C. Armstrong, O. Hassager, Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1: Fluid mechanics (1987) ,
- [19] O. Crumeyrolle, I. Mutabazi, M. Grisel, Experimental study of inertioelastic Couette–Taylor instability modes in dilute and semidilute polymer solutions, *Physics of Fluids*, 14(5) (2002) 1681-1688.
- [6] A.Y. Weisberg, I.G. Kevrekidis, A.J. Smits, Delaying transition in Taylor–Couette flow with axial motion of the inner cylinder, *Journal of Fluid Mechanics*, 348 (1997) 141-151.
- [7] R.E. Khayat, Non-linear overstability in the thermal convection of viscoelastic fluids, *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 58(2-3) (1995) 331-356.
- [8] N. Ashrafi, R.E. Khayat, A low-dimensional approach to nonlinear plane-Couette flow of viscoelastic fluids, *Physics of Fluids*, 12(2) (2000) 345-365.
- [9] N. Ashrafi, D. Binding, K. Walters, Cavitation effects in eccentric-cylinder flows of Newtonian and non-Newtonian fluids, *Chemical engineering science*, 56(19) (2001) 5565-5574.
- [10] Z. Li, R.E. Khayat, A nonlinear dynamical system approach to finite amplitude TaylorVortex flow of shear-thinning fluids, *International journal for numerical methods in fluids*, 45(3) (2004) 321-340.
- [11] K. Khellaf, G. Lauriat, Numerical study of heat transfer in a non-Newtonian Carreau-fluid between rotating concentric vertical cylinders, *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, 89(1-2) (2000) 45-61.
- [12] N. Ashrafi, Stability analysis of shear-thinning flow between rotating cylinders, *Applied mathematical modelling*, 35(9) (2011) 4407-4423.
- [13] N. Ashrafi, A. Hazbavi, Flow pattern and stability

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Yekta pour, N. Ashrafi. Stability analysis of shear-thinning flow in narrow gap Taylor–Couette axial flow . *Amirkabir J. Mech Eng.*, 53(special issue 3) (2021). 1745- 1766.

DOI: [10.22060/mej.2020.16685.6419](https://doi.org/10.22060/mej.2020.16685.6419)

