



Numerical simulation of mixed convection of Bingham fluid between two coaxial cylinders

H.R. Askarifard Jahromi, A. Raisi*, B. Ghasemi, A. Ahmadi Nadooshan

Engineering Faculty, Shahrekord University, Shahrekord, Iran

ABSTRACT: In this paper, mixed convection of Bingham fluid between two coaxial cylinders has been studied numerically without using any regularization method. The temperature of the inner rotating cylinder is higher than the temperature of the outer stationary cylinder. The finite volume method and non-iterative PISO algorithm have been employed to solve the problem. One of the OpenFOAM solvers, icoFoam, has been modified for solving the exact Bingham model. After validating the modified solver, it has been used to solve the problem for the following ranges of conditions: Reynolds number, $Re=10$, Prandtl number, $Pr=10$, Grashof number, $Gr=500$, Bingham number, $0 \leq Bn \leq 1000$, and aspect ratio (AR) of 0.1. The effects of the Bingham number on flow and heat transfer characteristics such as the shape and size of the unyielded regions, streamline contours, the local and mean Nusselt number, and the torque coefficient have been investigated. The mean Nusselt number and the torque coefficient decreases and increases, respectively, when the Bingham number increases. The variation range of the local Nusselt number and dimensionless tangential stress on the inner wall decrease with the Bingham number.

Review History:

Received: Feb. 21, 2020
Revised: Jun. 22, 2020
Accepted: Jun. 22, 2020
Available Online: Jul. 05, 2020

Keywords:

Numerical study
Heat transfer
Mixed convection
Bingham fluid
Two coaxial cylinders.

1- Introduction

The Bingham fluid is a non-Newtonian fluid that behaves like a solid when the applied stress is less than a certain value, τ_y , and yields when the stress exceeds τ_y . After yielding, the relation between stress and strain is linear. Because of this behavior, the constitutive equation of a Bingham fluid is discontinuous. The main issue in the numerical simulation of a Bingham flow is the discontinuity of the constitutive equation. The regularization method is the most straightforward way to solve the issue. The discontinuous constitutive equation is replaced by a smooth equation in the regularization methods. The troublesomeness in convergence, the inaccuracy in the distinguishing of unyielded regions, and the high errors at large Bingham numbers are some of the weaknesses of the regularization methods [1-3]. Employing variational inequalities theory [4] is a way to study Bingham flow without any regularization. So far, almost all numerical simulations of the exact Bingham flow have been done by in-house code and for simple geometries. The first aim of the article is the creation of a solver that solves the flow and heat transfer of a Bingham fluid with the exact model regardless of geometric complexities. For this purpose, one of the OpenFOAM solvers has been modified.

After validation of the solver with [5], it has been employed to study mixed convection of Bingham fluid between two coaxial cylinders. The effect of Bingham number on the flow and heat transfer characteristics such as the size and shape of the unyielded regions, the streamlines contours, the velocity

variations, the local and mean Nusselt numbers and the torque coefficient have been investigated for the following conditions: $Re=10$, $Pr=10$, $Gr=500$, $AR=0.1$ and $0 \leq Bn \leq 1000$.

2- Problem Statement and Governing Equations

The space between two coaxial cylinders is filled with the Bingham fluid, as shown in Fig. 1. The hotter inner cylinder rotates with constant velocity, and the outer wall is at rest. The dimensionless form of the governing equations and the boundary conditions are written as follows:

$$\nabla \cdot \mathbf{V}^* = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D^* \mathbf{V}^*}{Dt^*} = -\nabla p^* + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \mathbf{\Lambda}^* (\mathbf{V}^*) + \frac{Bn}{Re} \nabla \cdot \mathbf{\Lambda} - Ri T^* \quad (2)$$

$$\mathbf{\Lambda} = P_M \left(\mathbf{\Lambda} + Pr Bn \mathbf{\Lambda}^* (\mathbf{V}^*) \right) \quad (3)$$

$$\frac{D^* T^*}{Dt^*} = \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 T^* \quad (4)$$

$$\begin{aligned} V_\theta^*(r^*=0) = 1 & & V_\theta^*(r^*=1) = 0 \\ V_r^*(r^*=0) = 0 & & V_r^*(r^*=1) = 0 \\ T^*(r^*=0) = 1 & & T^*(r^*=1) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

*Corresponding author's email: raisi@sku.ac.ir

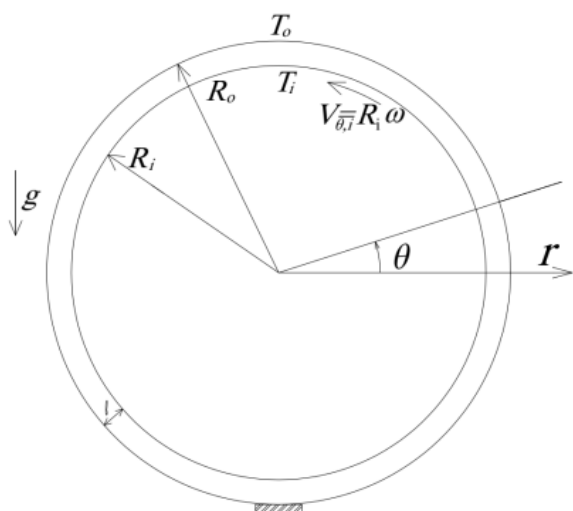


Fig. 1. The schematic diagram of the physical model.

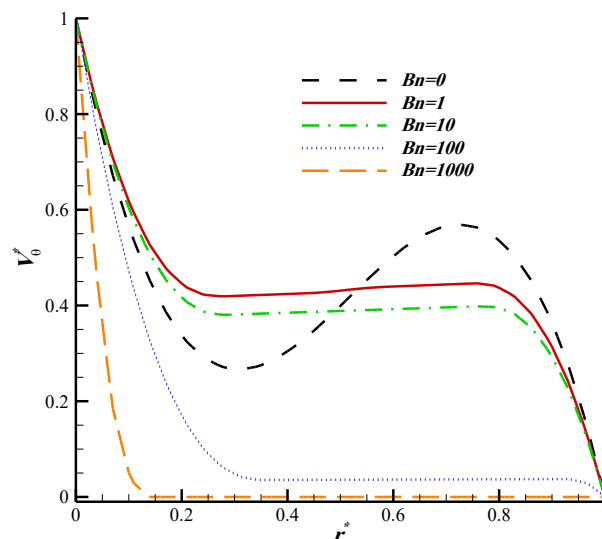


Fig. 3. The variation of dimensionless tangential velocity at $\theta=180^\circ$ for $Gr=500$, $Re=10$, $Pr=10$, and different Bingham numbers.

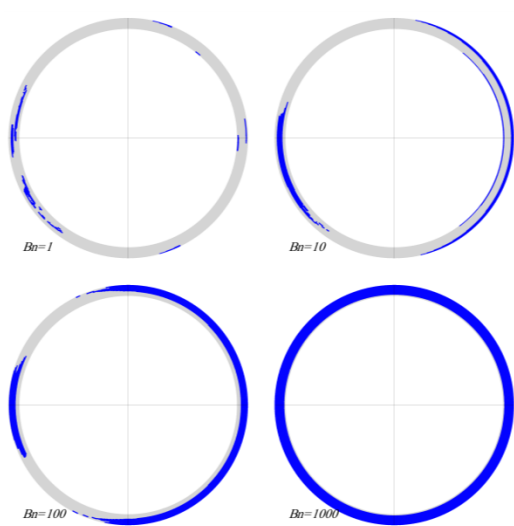


Fig. 2. The unyielded regions for $Gr=500$, $Re=10$, $Pr=10$, and different Values of Bingham number.

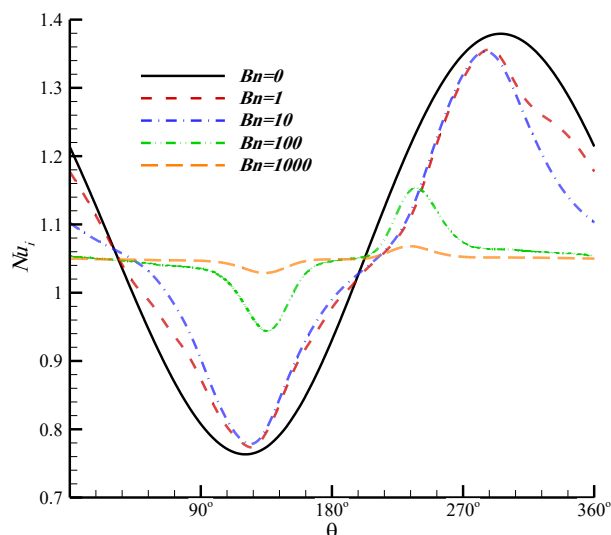


Fig. 4. The variation of the local Nusselt number on the inner wall for $Gr=500$, $Re=10$, $Pr=10$, and different values of Bingham number.

3- Results and Discussion

Fig. 2 shows the distribution of the unyielded regions for different Bingham numbers. There are two kinds of unyielded regions: the dead zones in which the fluid is at rest, and the plug zones in which the velocity gradient is zero. At $Bn=1$, the small unyielded regions scatter throughout the domain. The regions merge and become larger as the Bingham increases. At $Bn=1000$, the buoyancy effect is negligible, and the dead area attached to the outer wall has a constant thickness.

The dimensionless tangential velocity along $\theta=180^\circ$ is plotted in Fig. 3. At $Bn=0$, the velocity magnitude first decreases then increases (due to buoyancy) and again decreases to reach zero

as one moves from the outer to the inner wall. At the low Bingham numbers, the plug zones are formed in the middle of the annuls and velocity gradient approaches zero. Fig. 3 is compatible with Fig. 4. For example, the plug zone on the left side of the annulus at $Bn=100$ does not stick to the outer wall and a thin layer of fluid yields in this region. The region is evident in Fig. 3, where the velocity gradient of $Bn=100$ is not zero for the small interval near $r^*=1$.

The distribution of the local Nusselt Number on the inner wall is shown in Fig. 4 for different Bingham numbers. The warm fluid moves upward due to the buoyancy force, so the minimum value of the temperature gradient or Nusselt

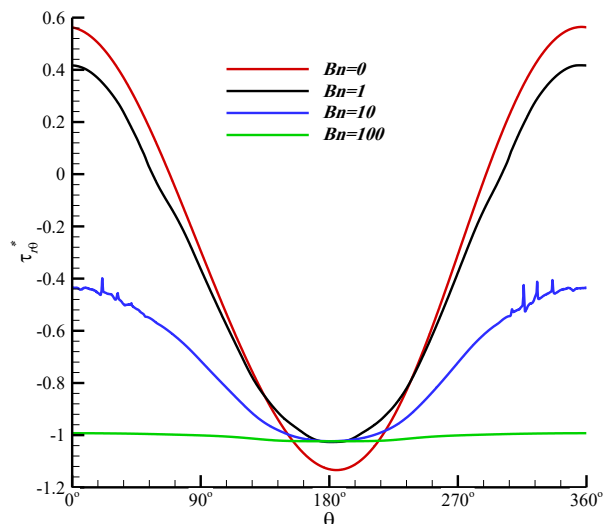


Fig. 5. The distribution of the dimensionless shear stress on the inner wall for $Gr=500$, $Re=10$, $Pr=10$, and different values of Bingham number

number occurs at the top of the annulus. Vice versa, the maximum value of the Nusselt number occurs at the bottom. As the Bingham number increases and the unyielded regions are formed, heat transfer occurs more uniformly, and the variation of the Nusselt number decreases. The mean Nusselt number decreases with the Bingham number.

The distribution of dimensionless tangential stress, $\tau_{r\theta}^*$, on the inner wall is plotted in Fig. 5 for different Bingham numbers. The maximum $\tau_{r\theta}^*$ occurs at $\theta=180^\circ$ due to the existence of opposite buoyancy. By comparing Figs. 2 and 5, one can figure out that the zig-zagging behavior of $\tau_{r\theta}^*$ at $Bn=100$

is due to the formation of the unyielded layer there. As the Bingham number increases, $Bn=100$ and 1000 , the direction of $\tau_{r\theta}^*$ does not change, and its variation decreases.

4- Conclusions

In this article, a solver, which solves the flow and heat transfer of Bingham fluid with the exact model, has been obtained. As a numerical experiment, mixed convection of Bingham fluid between two coaxial cylinders has been studied. The flow and heat transfer characteristics have been presented and discussed.

References

- [1] I.A. Frigaard, C. Nouar, On the usage of viscosity regularisation methods for visco-plastic fluid flow computation, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 127 (2005) 1-26.
- [2] R.R. Huilgol, G.H.R. Kefayati, Natural convection problem in a Bingham fluid using the operator-splitting method, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 220 (2015) 22-32.
- [3] A. Syrakos, G.C. Georgiou, A.N. Alexandrou, Performance of the finite volume method in solving regularised Bingham flows: Inertia effects in the lid-driven cavity flow, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 208-209 (2014) 88-107.
- [4] R. Glowinski, J.L. Lions, R. Tremoliers, *Numerical Analysis of Variational Inequalities.*, North-Holland Publishing Company Amsterdam. New York. Oxford, 8 (1981).
- [5] O. Turan, A. Sachdeva, N. Chakraborty, R.J. Poole, Laminar natural convection of Bingham fluids in a square enclosure with differentially heated side walls, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166 (2011) 1049-1063.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

H.R. Askarifard Jahromi, A. Raisi, B. Ghasemi, A. Ahmadi Nadooshan, . Numerical simulation of mixed convection of Bingham fluid between two coaxial cylinders, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 53(Special Issue 5) (2021) 807-810

DOI: [10.22060/mej.2020.17979.6700](https://doi.org/10.22060/mej.2020.17979.6700)





مطالعه عددی جریان انتقال حرارت جابجایی توأم سیال بینگهام در بین دو استوانه هم‌مرکز

حمیدرضا عسکری فرد چهرمی، افراسیاب رئیسی*، بهزاد قاسمی، افشین احمدی ندوشن

۱- دانشکده فنی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸/۱۲/۲
بازنگری: ۱۳۹۹/۴/۲
پذیرش: ۱۳۹۹/۴/۲
ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۴/۱۵

کلمات کلیدی:

مطالعه عددی
انتقال حرارت
جابجایی توأم
سیال بینگهام
دو استوانه هم‌مرکز.

خلاصه: در این مقاله، جریان دوبعدی انتقال حرارت جابجایی توأم سیال بینگهام در بین دو استوانه هم‌مرکز بدون استفاده از روش تنظیم‌کننده مورد مطالعه عددی قرار گرفته است. دمای دیوار داخلی، که با سرعت ثابت در حال دوران است، از دمای دیوار ساکن بیرونی بیشتر است. مسئله بر اساس روش حجم محدود و با استفاده از الگوریتم غیر تکراری پیرو حل شده است. بدین منظور یکی از حل‌کننده‌های نرم‌افزار اپن‌فوم برای حل دقیق جریان بینگهام توسعه داده شد. ابتدا حل‌کننده توسعه‌یافته اعتبارسنجی شد. سپس با ثابت‌در نظر گرفتن پارامترهای نسبت منظری ($AR = 0.1$)، عدد رینولدز ($Re = 10$)، عدد پرانتل ($Pr = 10$) و عدد گراشف ($Gr = 500$)، اثر تغییرات عدد بینگهام در محدوده ($0 \leq Bn \leq 1000$) بر رفتارهای هیدرودینامیکی و حرارتی مسئله همچون شکل و اندازه نواحی تسلیم‌نشده، خطوط جریان، توزیع سرعت، عدد ناسلت موضعی و میانگین، ضریب گشتاور و توزیع تنش مماسی مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش عدد بینگهام نواحی تسلیم‌نشده توسعه می‌یابد و میزان انتقال حرارت و عدد ناسلت کاهش و ضریب گشتاور افزایش می‌یابد. همچنین بازه تغییرات عدد ناسلت موضعی و تنش مماسی بر روی دیوار داخلی با افزایش عدد بینگهام کاهش می‌یابد.

۱- مقدمه

سیالات ویسکوپلاستیک یکی از انواع سیالات غیرنیوتنی هستند که کاربرد فراوانی در صنایع مختلف همچون نفت، حفاری، تولید رنگ و تولید مواد غذایی و بهداشتی دارند. در این نوع سیال اگر تنش اعمالی بر سیال کمتر از مقدار مشخصی (تنش تسلیم) باشد، سیال همچون یک جامد عمل می‌کند و جاری نمی‌شود اما اگر تنش اعمالی بیشتر از تنش تسلیم باشد، سیال جاری می‌شود. این رفتار سیالات ویسکوپلاستیک سبب ناپیوسته‌شدن معادله ساختاری می‌شود. سیال بینگهام، که در آن رابطه بین تنش و کرنش پس از تسلیم به صورت خطی است، یکی از انواع سیالات ویسکوپلاستیک به شمار می‌آید. یکی از مهم‌ترین مشکلات در حل عددی جریان بینگهام، ناپیوسته‌بودن معادله ساختاری است. برای غلبه بر این مشکل راه‌کارهای مختلفی وجود دارد. یکی از آن‌ها جایگزینی معادله ساختاری با یک معادله پیوسته و هموار است. به این روش، روش تنظیم‌کننده^۱ گفته

می‌شود. روش‌های پاپاناستاسیو^۲ [۱] و بی-ویسکوزیته^۳ [۲] دو تا از

معروف‌ترین روش‌های تنظیم‌کننده به شمار می‌آیند.

میتسالیس و زیزیس [۳] با استفاده از روش المان محدود همراه با مدل پاپاناستاسیو به مطالعه عددی جریان سیال بینگهام درون یک محفظه مربعی شکل پرداختند. آن‌ها تأثیر عدد بینگهام بر روی خواص جریان و شکل نواحی تسلیم‌نشده را مورد بررسی قرار دادند. توران و همکاران با استفاده از نرم‌افزار تجاری فلونت، که از روش تنظیم‌کننده پاپاناستاسیو استفاده می‌کند، به مطالعه عددی جریان انتقال حرارت طبیعی درون یک محفظه مربعی شکل [۴] و جریان انتقال حرارت جابجایی توأم در یک محفظه استوانه‌ای [۵] پرداختند. با وجود آنکه استفاده از روش‌های تقریبی و تنظیم‌کننده راحت است اما پژوهشگران بسیاری به معایب این روش‌ها اشاره کرده‌اند [۶-۹]. عدم همگرایی در اعداد بینگهام بزرگ و عدم دقت قابل قبول در مشخص کردن مناطق تسلیم‌نشده از جمله معایب این روش‌ها هستند. همچنین در مسائلی که تنش در مناطق وسیعی از دامنه به تنش

2 Papanastasiou method

3 Bi-viscosity method

1 Regularization method

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: raisi@sku.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode> دیدن فرمایید.



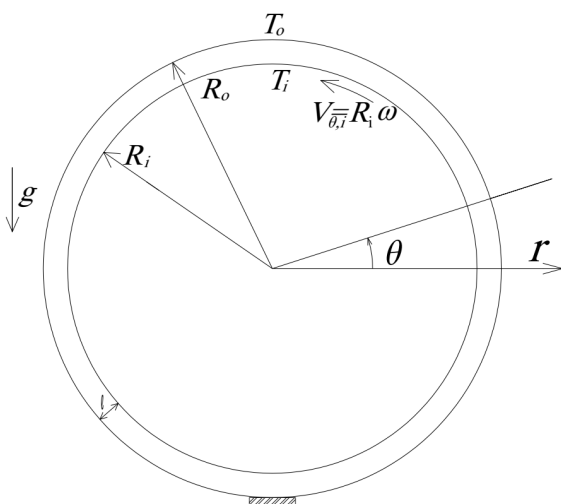
با مدل دقیق، که هزینه محاسباتی زیادی به همراه دارد، بسیار راهگشا باشد. در این پژوهش جریان بینگهام بین دو استوانه هم‌مرکز مورد بررسی قرار می‌گیرد.

بررسی جریان و انتقال حرارت در بین دو استوانه هم‌مرکز از دیرباز تاکنون مورد توجه دانشمندان بسیاری بوده است. در یکی از اولین پژوهش‌ها، کوهن و گلداستین [۱۴] به مطالعه آزمایشگاهی و عددی جریان انتقال حرارت طبیعی هوا و آب در بین دو استوانه هم‌مرکز افقی با نسبت منظری $(L/D_i = 1/8)$ پرداختند. یو [۱۵] جریان انتقال حرارت توأم هوا در بین دو استوانه هم‌مرکز برای $Re \leq 1500$ ، $Gr \leq 5.0 \times 10^5$ و $0.5 \leq D_i/L \leq 5$ را مورد مطالعه عددی قرارداد. در این پژوهش دیوار داخلی ثابت و گرم‌تر از دیوار خارجی دوار بود. بر اساس اعداد رایلی و رینولدز سه رژیم گوناگون جریان (یک گردابه، دو گردابه و بدون گردابه) برای این هندسه گزارش کرد. مطالعه جریان سیالات غیر نیوتنی به‌ویژه سیال بینگهام در این نوع هندسه نیز می‌تواند بسیار کاربردی و با اهمیت باشد. اخیراً نیز معصومی و همکاران [۱۶] و همچنین راوگوئی و همکاران [۱۷] جریان انتقال حرارت طبیعی سیال بینگهام در میان دو استوانه هم‌مرکز را مورد مطالعه عددی قرار داده‌اند. نویسندگان در هردو مقاله مدل دقیق جریان بینگهام را کنار گذاشته‌اند و از روش تقریبی پاپاناستاسیو استفاده کرده‌اند. درحالی‌که استفاده از مدل دقیق بینگهام در جریان میان دو استوانه هم‌مرکز، بخصوص با نسبت‌های منظری کوچک، ضروری است. بر اساس بررسی‌های انجام‌شده، تاکنون پژوهشی به حل عددی جریان و انتقال حرارت جابجایی توأم سیال بینگهام بین دو استوانه هم‌مرکز

تسلیم نزدیک می‌شود، استفاده از روش تنظیم‌کننده با خطای زیادی همراه است [۶].

برای حل جریان بینگهام با مدل دقیق و بدون استفاده از روش تنظیم‌کننده، از تئوری نابرابری تغییرات استفاده می‌شود [۱۰]. دین و گلووینسکی [۱۱] با استفاده از این تئوری و روش المان محدود به بررسی جریان سیال بینگهام در یک محفظه مربعی شکل پرداختند. هیلوگل و کفایتی با استفاده از روش المان محدود [۷] و لتیس بولتزمن [۸] همراه با تئوری نابرابری تغییرات جریان انتقال حرارت طبیعی و توأم سیال بینگهام درون یک محفظه را مورد بررسی قرار داده‌اند. پژوهشگرانی که به مطالعه جریان بینگهام با استفاده از روش حجم محدود پرداخته‌اند به دلیل سهولت در به‌کارگیری، غالباً به روش‌های تنظیم‌کننده توجه کرده‌اند و به ندرت به شبیه‌سازی مدل دقیق بینگهام پرداخته‌اند. وینی و همکاران [۱۲] به مطالعه عددی جریان انتقال حرارت اجباری درون یک لوله متقارن محوری با استفاده از روش لاگرانژی اگمنت^۲ همراه با روش حجم محدود پرداختند. چوپین و دوبویز [۱۳] به حل عددی مدل دقیق جریان بینگهام درون یک محفظه با استفاده از روش حجم محدود پرداختند. آن‌ها با استفاده از یک روش جدید برای گسسته‌سازی زمان، به همگرایی مسئله سرعت بخشیدند.

تقریباً همه پژوهشگران شبیه‌سازی مدل دقیق جریان بینگهام را با استفاده از کدنویسی انجام داده‌اند. بنابراین هندسه‌های مورد بررسی توسط آن‌ها ساده (غالباً محفظه مربعی) بوده است. حال آنکه بررسی جریان بینگهام در هندسه‌های پیچیده‌تر، هم به دلیل کاربردهای فراوان مهندسی و هم به لحاظ تئوری از اهمیت بالایی برخوردار است. لذا ساخت حل‌کننده‌ای که قادر به حل جریان بینگهام فارغ از پیچیدگی‌های هندسی باشد، می‌تواند مبنایی برای کارهای پژوهشی آتی در زمینه‌ی سیالات بینگهام باشد. لذا یکی از اهداف این پژوهش ساخت این حل‌کننده بوده است و این هدف با توسعه‌ی یکی از حل‌کننده‌های نرم‌افزار اپن‌فوم محقق شده است. به‌گونه‌ای که حل‌کننده توسعه‌یافته قادر به حل سه‌بعدی و ناپایا جریان و انتقال حرارت سیال بینگهام با استفاده از مدل دقیق برای هر هندسه‌ای خواهد بود. یکی دیگر از مزیت‌های نرم‌افزار اپن‌فوم امکان بهره‌گیری از پردازش موازی است و استفاده از آن می‌تواند در حل جریان بینگهام



شکل ۱. فیزیک مسئله

Fig. 1. The schematic diagram of the physical model

- 1 The theory of variational inequalities
- 2 The augmented Lagrangian method

بدون استفاده از روش تنظیم‌کننده نپرداخته است. بنابراین، در این پژوهش ابتدا به توسعه‌ی حل‌کننده نرم‌افزار اینفوم به‌منظور حل جریان و انتقال حرارت سیال بینگهام پرداخته شده است و پس از اعتبارسنجی حل‌کننده توسعه‌یافته، از آن برای حل جریان انتقال حرارت جابجایی توأم در بین دو استوانه هم‌مرکز استفاده شده است. در قسمت نتایج و بحث، تأثیر عدد بینگهام بر ویژگی‌های هیدرودینامیکی و حرارتی جریان همچون شکل مناطق تسلیم‌نشده، خطوط جریان، عدد ناسلت و ضریب گشتاور مورد ارزیابی قرار گرفته است.

۲- فیزیک مسئله و معادلات حاکم

مطابق شکل ۱، فضای بین دو استوانه‌ی هم‌مرکز طویل با استفاده از سیال بینگهام پر شده است. دیوار داخلی در دمای T_i و دیوار خارجی در دمای T_o قرار دارند به طوری که $T_i > T_o$ است. دیوار خارجی ساکن و دیوار داخلی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω در خلاف جهت عقربه‌های ساعت در حال دوران است. نسبت منظری نیز به صورت $AR = \ell/R_i$ تعریف می‌شود. استوانه‌ها به صورت طویل فرض شده است، بنابراین مسئله را می‌توان دوبعدی در نظر گرفت.

چگالی سیال در همه‌ی معادلات، به جزء در عبارت شناوری که با استفاده از تقریب بوزینسک بیان می‌شود، ثابت در نظر گرفته می‌شود. سایر خواص ترموفیزیکی همچون گرانروی، تنش تسلیم، ضریب انتقال حرارت رسانشی و ظرفیت حرارتی ویژه نیز ثابت فرض شده است. بنابراین معادلات بقاء جرم، مومنتوم و انرژی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

$$-\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{S} - \beta \rho_o (T - T_o) \mathbf{g} = \rho_o \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \quad (2)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T \quad (3)$$

که در آن \mathbf{S} تانسور تنش اضافی و $\alpha = \frac{k}{\rho_o c_p}$ ضریب نفوذ حرارتی است. معادله ساختاری سیال بینگهام با استفاده از رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{0} & II(\mathbf{S}) \leq \tau_y \\ \mathbf{S} = \eta \mathbf{A} + \frac{\tau_y}{II(\mathbf{A})} \mathbf{A} & II(\mathbf{S}) \geq \tau_y \end{cases} \quad (4)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{V}) = \eta \mathbf{A}(\mathbf{V}) + \sqrt{2} \tau_y \mathbf{A} \quad (5)$$

در رابطه بالا τ_y تنش تسلیم، \mathbf{A} تانسور اول ریولین اریکسون^۱ ($\mathbf{L} = \mathbf{V}_o = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}_j}$ و $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{L}^T$) ثابت دوم تانسور تنش اضافی ($II(\mathbf{S}) = \sqrt{\frac{1}{2}(\mathbf{S}:\mathbf{S})}$) است. بر اساس مرجع [۱۸] این معادله ناپیوسته را می‌توان با معادله زیر جایگزین کرد:

$$\mathbf{A} : \mathbf{A} = \begin{cases} < 1 & \mathbf{A} = \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{A} \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad (6)$$

و آن را می‌توان از رابطه‌ی بازگشتی (۷) به دست آورد (برای اطلاعات بیشتر به مرجع [۱۸] مراجعه شود):

$$\mathbf{A} = P_M (\mathbf{A} + r \tau_y \mathbf{A}(\mathbf{V})), \quad \forall r > 0 \quad (7)$$

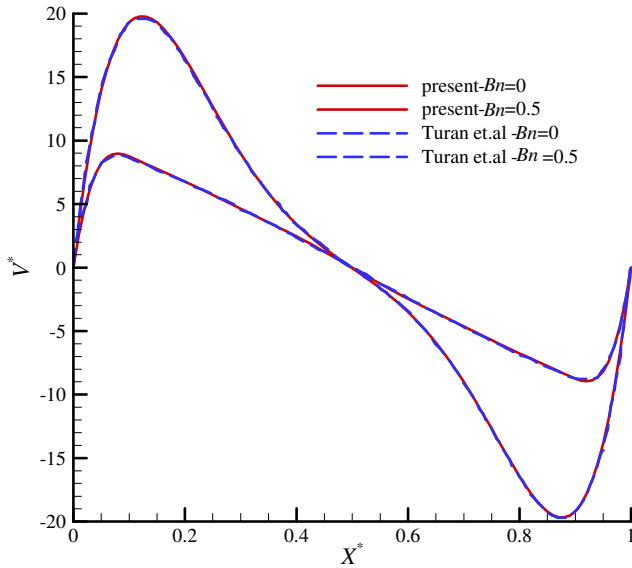
در این رابطه P_M یک عملگر است. در این عملگر اگر $\|\mathbf{R}\| < 1$ آنگاه $P_M(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ در غیر این صورت $P_M(\mathbf{R}) = \frac{\mathbf{R}}{\|\mathbf{R}\|}$. با توجه به آنچه در بالا گفته شد معادله بقاء مومنتوم به شکل زیر درمی‌آید:

$$-\nabla p + \eta \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{V}) + \sqrt{2} \tau_y \nabla \cdot \mathbf{A} - \beta \rho_o (T - T_o) \mathbf{g} = \rho_o \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \quad (8)$$

با تعریف پارامترها و اعداد بی‌بعد زیر (همان سرعت مماسی دیواره داخلی است $R_{\theta,i} = R_i$):

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^* &= \frac{\mathbf{X}}{\ell}, \quad t^* = \frac{t}{\ell/V_{\theta,i}}, \quad \mathbf{V}^* = \frac{\mathbf{V}}{V_{\theta,i}}, \quad P^* = \frac{P_d}{\rho_o V_{\theta,i}^2}, \\ T^* &= \frac{T - T_o}{T_i - T_o}, \quad \mathbf{g}^* = \frac{\mathbf{g}}{g}, \quad r^* = \frac{r - R_i}{R_o - R_i} \\ Re &= \frac{\rho_o V_{\theta,i} \ell}{\eta}, \quad Pr = \frac{\eta C_p}{k} = \frac{\eta}{\rho_o \alpha}, \quad Bn = \frac{\sqrt{2} \tau_y \ell}{\eta V_{\theta,i}}, \\ Gr &= \frac{\rho_o^2 \beta g \ell^3 (T_i - T_o)}{\eta^2}, \quad Ri = \frac{Gr}{Re^2} = \frac{g \beta (T_i - T_o) \ell}{V_{\theta,i}^2} \end{aligned} \quad (9)$$

1 The first Rivlin-Ericksen tensor
2 Viscoplasticity constraint tensor



شکل ۲. توزیع سرعت عمودی بی‌بعد بر روی خط مرکزی افقی محفظه در شرایط $Pr=7$ و $Ra=104$ برای پژوهش حاضر و [۴]

Fig. 2. The comparison between the dimensionless vertical velocity of the present study and the work done by Turan et al. [4] at $y^*=0.5$ for $Ra=104$ and $Pr=7$

با استفاده از مدل دقیق و به صورت ناپایا باشد. در ادامه و با توسعه بیشتر این حل‌کننده، امکان حل مسائل انتقال حرارت سیال بینگهام با استفاده از مدل دقیق در این مقاله فراهم شد. مقدار مانده معیار برای همگرایی معادلات پیوستگی، بقاء مومنتوم و انرژی برابر با 1×10^{-6} است.

شایان ذکر است که در نرم‌افزار اینفوم تمامی مسائل به صورت سه‌بعدی حل می‌شود. در مسائل دوبعدی، همچون مسئله حاضر، از یک شبکه سه‌بعدی با تعداد یک‌خانه در راستای بعد سوم استفاده می‌شود و با تعریف مرز خالی^۲ در صفحات جلو و عقب، مسئله به یک مسئله دوبعدی تبدیل می‌شود.

۴- اعتبار سنجی حل‌کننده توسعه‌یافته

در پژوهش اخیر [۲۰] توسط نویسندگان مقاله حاضر، از صحت نتایج حل‌کننده توسعه‌یافته برای جریان بینگهام بدون انتقال حرارت اطمینان حاصل شد. در پژوهش حاضر با توسعه بیشتر حل‌کننده امکان حل مسائل انتقال حرارت سیال بینگهام نیز فراهم شد. بنابراین برای اطمینان از صحت نتایج حل‌کننده جدید، مقاله‌ی توران و همکاران [۴]، که به حل جریان انتقال حرارت طبیعی سیال بینگهام درون یک محفظه مربعی شکل با استفاده از روش تنظیم‌کننده می‌پردازد، انتخاب

با استفاده از پارامترهای بی‌بعد، معادلات بدون بعد حاکم بر مسئله به شکل زیر درمی‌آیند:

$$\nabla \cdot \mathbf{V}^* = 0 \quad (10)$$

$$\frac{D^* \mathbf{V}^*}{Dt^*} = -\nabla p_d^* + \frac{1}{Re} \nabla^* \cdot \mathbf{A}^*(\mathbf{V}^*) + \frac{Bn}{Re} \nabla^* \cdot \mathbf{\Lambda} - Ri T^* \quad (11)$$

$$\mathbf{\Lambda} = P_M (\mathbf{\Lambda} + Pr Bn \mathbf{A}^*(\mathbf{V}^*)) \quad (12)$$

$$\frac{D^* T^*}{Dt^*} = \frac{1}{Re Pr} \nabla^{*2} T^* \quad (13)$$

شرایط مرزی بدون‌بعد نیز به شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned} V_o^*(r^*=0) &= 1 & V_o^*(r^*=1) &= 0 \\ V_r^*(r^*=0) &= 0 & V_r^*(r^*=1) &= 0 \\ T^*(r^*=0) &= 1 & T^*(r^*=1) &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

۳- روش عددی

با توجه به معادلات حاکم، در حل جریان بینگهام با استفاده از مدل دقیق، یک میدان تانسوری مجهول بنام تانسور قید سیال ویسکوپلاستیک که معیار تسلیم‌شدگی سیال است به سایر مجهولات اضافه می‌شود. لذا الگوریتم حل در این نوع مسائل نسبت به سیال نیوتنی متفاوت است. تاکنون پژوهشگران برای حل این نوع مسائل، از کدنویسی استفاده کرده‌اند. کدنویسی حتی اگر به بهینه‌ترین حالت انجام شود با محدودیت‌های بسیاری همراه است. نرم‌افزار اینفوم یک نرم‌افزار متن‌باز است که می‌توان به حل‌کننده‌های آن دسترسی داشت و تغییرات موردنظر را متناسب به مسئله مورد مطالعه بر آن اعمال کرد. از دیگر قابلیت‌های اینفوم می‌توان به امکان انجام محاسبات عددی به صورت پردازش موازی اشاره کرد. بنابراین استفاده از این نرم‌افزار در مسائلی با هزینه محاسباتی زیاد، همچون جریان دقیق بینگهام، راهگشاست. حل‌کننده آیکوفوم^۱ که یکی از حل‌کننده‌های نرم‌افزار اینفوم است با استفاده از روش حجم محدود همراه با الگوریتم غیرتکراری پیزو [۱۹] به حل جریان نیوتنی می‌پردازد. در پژوهش [۲۰]، توسط نویسندگان مقاله حاضر، این حل‌کننده به نحوی توسعه داده شد که حل‌کننده قادر به حل معادلات جریان سیال بینگهام

2 empty boundary condition

1 icoFoam solver

جدول ۱. مقایسه سرعت عمودی مرجع [۴] و پژوهش حاضر در نقاط مختلف خط $y^* = 0.5$ برای $Bn = 0$ و $Bn = 0.5$

Table 1. The comparison between the dimensionless vertical velocity of the present study and the work done by Turan et al. [4] at $y^*=0.5$ for $Bn=0$ and $Bn=0.5$

x^*	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹
$y^* = 0.5$ در V^* در مرجع [۴]	۱۹/۲۸	۱۶/۲۴	۸/۹۵	۳/۳۱	۰	-۳/۴۵	-۹/۱۲	-۱۶/۴۴	-۱۹/۱۶
$y^* = 0.5$ در V^* در پژوهش حاضر	۱۹/۳۱	۱۶/۴۲	۸/۹۷	۳/۳۷	-۰/۰۴	-۳/۵۳	-۹/۰۲	-۱۶/۳۹	-۱۹/۲۰
درصد خطا نسبی	۰/۱۵	۱/۱۱	۰/۲۲	۱/۸۱	۲/۳۱	۱/۱۰	۰/۳۰	۰/۲۱
$y^* = 0.5$ در V^* در مرجع [۴]	۸/۶۵	۶/۷۵	۴/۵۳	۲/۳۳	-۰/۰۱	-۲/۳۸	-۲/۶۳	-۶/۸۷	-۸/۷۲
$y^* = 0.5$ در V^* در پژوهش حاضر	۸/۷۶	۶/۷۵	۴/۶۳	۲/۴۳	-۰/۰۱	-۲/۴۵	-۲/۶۹	-۶/۷۴	-۸/۷۵
درصد خطا نسبی	۱/۲۷	۰	۲/۲۱	۴/۲۹	۰	۲/۹۴	۲/۲۸	۱/۸۹	۰/۳۴

هر دو پژوهش درج شده است. دلیل تطابق بسیار عالی نتایج در این دو پژوهش، یکسان بودن روش عددی (روش حجم محدود)، استفاده از یک شبکه یکسان و کوچک بودن عدد بینگهام است. با توجه به شکل ۱ و جدول ۱، می‌توان از صحت فرآیند انجام شده برای توسعه حل کننده در جهت حل جریان و انتقال حرارت سیال بینگهام با استفاده از مدل دقیق اطمینان حاصل کرد.

۵- نتایج و بحث

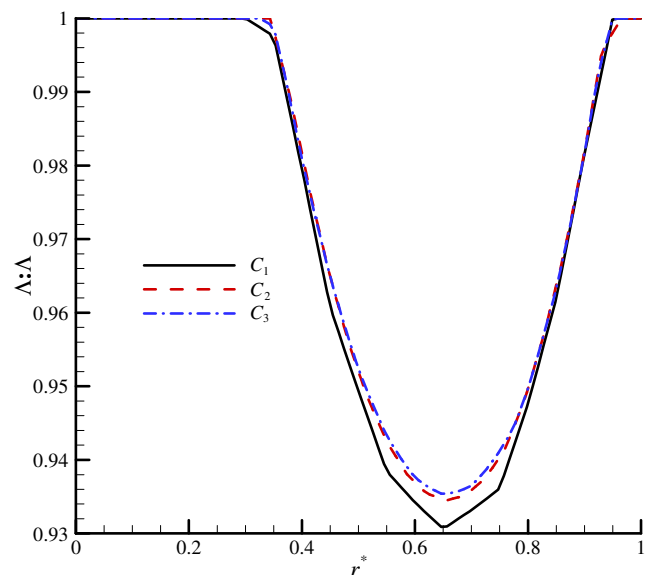
در این مقاله جریان انتقال حرارت جابجایی توأم سیال بینگهام بین دو استوانه طویل هم‌مرکز، در حالی که دیواره بیرونی ثابت و دیواره داخلی با سرعت ثابت در حال دوران است، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. مسئله، در وضعیتی که $AR = 0.1$ ، $Pr = 10$ ، $Re = 10$ ، $Gr = 500$ است، برای اعداد بینگهام مختلف (۱۰۰۰ و ۱۰، ۱، ۰) $Bn = 0, 1, 10, 1000$ (حل و تأثیر عدد بینگهام بر روی ویژگی‌های هیدرودینامیکی و

و مسئله مجدداً برای $Pr = 7$ و $Ra = 10^4$ در دو عدد بینگهام صفر و نیم توسط حل کننده‌ی جدید حل شد. با وجود آنکه در این مقاله از روش حل دقیق و در مقاله‌ی [۴] از روش تنظیم کننده استفاده شده است، اما در اعداد بینگهام کوچک و این هندسه‌ی خاص (محفله‌ی مربعی شکل) نتایج این دو روش با یکدیگر قابل مقایسه هستند. در شکل ۲ توزیع سرعت عمودی بی‌بعد در وسط محفله حاصل از هر دو پژوهش با یکدیگر مقایسه شده است. برای بررسی دقیق‌تر، در جدول ۱ مقدار سرعت عمودی بی‌بعد در چند نقطه در وسط محفله برای

جدول ۲. میانگین ضرب دونقطه‌ای تانسور قید سیال ویسکوپلاستیک در $\theta = 180^\circ$ در شرایطی که $Gr = 500$ ، $Pr = 10$ ، $Re = 10$ و $Bn = 100$ برای سه شبکه‌ی مختلف

Table 2. The average value of $\Lambda:\Lambda$ for three different meshes at $\theta=180$ for $Gr=500$, $Re=10$, $Pr=10$, $Bn=100$

شبهه	تعداد خانه	$\overline{\Lambda:\Lambda}$ در $\theta = 180^\circ$
C_1	۲۸۰۰۰	۰/۹۷۲۸
C_2	۵۷۴۲۰	۰/۹۷۴۳
C_3	۱۱۲۰۰۰	۰/۹۷۴۵



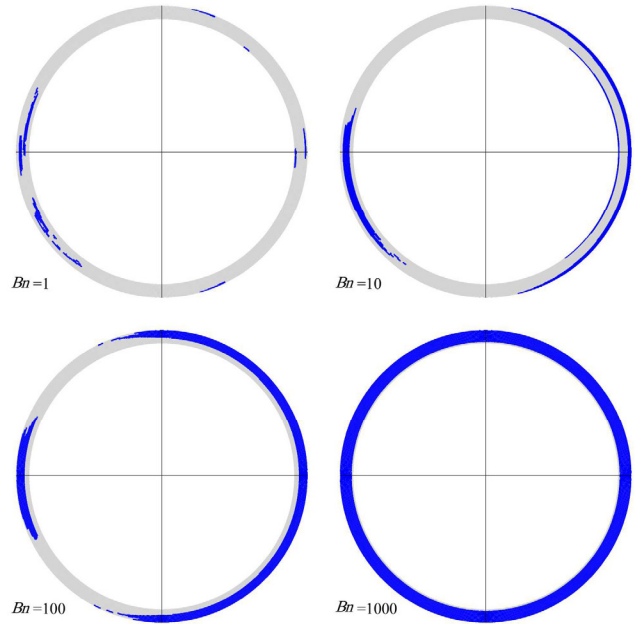
شکل ۳. توزیع ضرب دونقطه‌ای تانسور قید سیال ویسکوپلاستیک در $\theta = 180^\circ$ در شرایطی که $Gr = 500$ ، $Pr = 10$ ، $Re = 10$ و $Bn = 100$ برای سه شبکه‌ی مختلف

Fig. 3. The distribution of $\Lambda:\Lambda$ for three different meshes at $\theta=180$ for $Gr=500$, $Re=10$, $Pr=10$, $Bn=100$

۵-۲- شکل نواحی تسلیم نشده و خطوط جریان

در جریان سیالات بینگهام دو نوع ناحیه تسلیم نشده وجود دارد: یکی ناحیه مرده^۱، که در آن سیال ساکن و فاقد سرعت است، و دیگری ناحیه پلاگ^۲. در ناحیه پلاگ ذرات سیال به هم چسبیده و با سرعت یکسان حرکت می کنند. در واقع در این ناحیه گرادبان سرعت نزدیک به صفر است. در شکل ۴ نواحی تسلیم نشده برای مقادیر مختلف عدد بینگهام نشان داده شده است. در $Bn = 1$ ، وسعت نواحی تسلیم نشده کم است و این نواحی در کل دامنه پراکنده شده اند. این نواحی، به جزء در دو ناحیه بسیار کوچک چسبیده به دیواره بیرونی، غالباً از نوع پلاگ هستند. با افزایش عدد بینگهام به $Bn = 10$ ، این نواحی با یکدیگر ادغام می شوند و سه ناحیه عمده ی تسلیم نشده را به وجود می آورند. ناحیه اول: از نوع مرده و چسبیده به دیواره بیرونی در سمت راست دامنه. ناحیه دوم: از نوع پلاگ چسبیده به دیواره داخلی در سمت راست که با دیواره حرکت می کند. ناحیه سوم: یک ناحیه پلاگ که در بین دو دیواره در سمت چپ دامنه تشکیل می شود. علت تفاوت شکل و اندازه نواحی تسلیم نشده در سمت راست و چپ دامنه، وجود نیروی شناوری موافق در سمت راست و نیروی شناوری مخالف در سمت چپ است. با توجه به شکل ۴، برای $Bn = 100$ ، ضخامت ناحیه ی مرده سمت راست افزایش می یابد. در این عدد بینگهام، ناحیه تسلیم نشده سمت چپ از دیواره بیرونی جداست و این ناحیه از نوع پلاگ است. در $Bn = 1000$ تنها ناحیه ی بسیار کوچکی در اطراف دیواره داخلی تسلیم می شود و اکثر نقاط به صورت ناحیه مرده هستند. شکل نواحی مرده در این حالت متقارن است. در حقیقت در اعداد بینگهام بسیار بزرگ به دلیل تسلیم نشدن سیال، اثر نیروی شناوری از بین می رود. بررسی های ما نشان می دهد که شکل و اندازه نواحی تسلیم نشده برای حالتی که عدد بینگهام خیلی بزرگ است $Bn = 1000$ ، با حالتی که از انتقال حرارت صرف نظر می شود یکسان است.

در شکل ۵ خطوط جریان و ماکزیمم تابع جریان برای مقادیر مختلف عدد بینگهام نشان داده شده است. برای سیال نیوتنی ($Bn = 0$)، یک گردابه در سمت راست تشکیل می شود در حالی که در سمت چپ گردابه ای وجود ندارد. چنانچه دیواره داخلی را هم ساکن فرض کنیم و جریان تنها به دلیل نیروی شناوری در فضای حلقوی بین دو



شکل ۴. شکل نواحی تسلیم نشده برای $Re = 10$ ، $Pr = 10$ ، $Gr = 500$ و مقادیر مختلف عدد بینگهام
Fig. 4. The unyielded regions for $Gr=500$, $Re=10$, $Pr=10$, and different Values of Bingham number

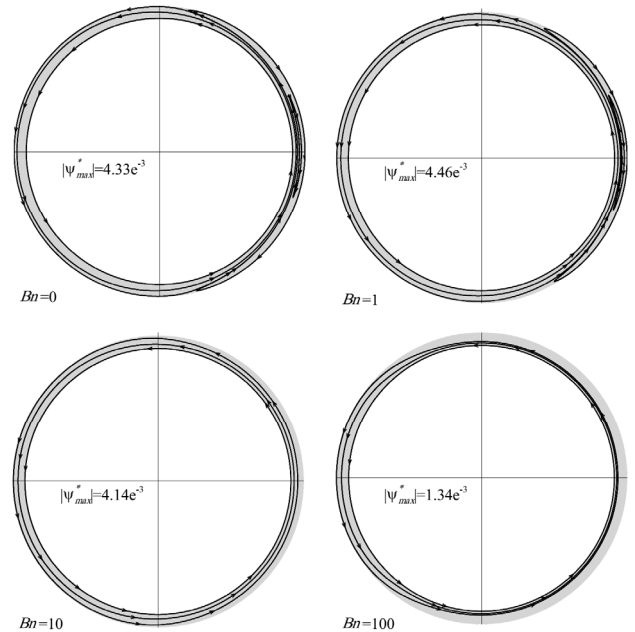
حرارتی جریان ارزیابی می شود. بنابراین مقدار عدد ریچاردسون در این پژوهش ثابت و برابر ۵ است. حل کننده توسعه یافته به صورت ناپایا به حل مسئله می پردازد، اما در شرایط بیان شده، با یک مسئله پایا روبرو هستیم و نتایج در حالت پایا نمایش داده می شود. البته از عدم تأثیر اندازه گام زمانی بر نتایج اطمینان حاصل شده است.

۵-۱- استقلال حل از شبکه

برای اطمینان از استقلال حل از شبکه، مسئله برای سه شبکه ی منظم و یکنواخت با تعداد $C_1 = 28000$ ، $C_2 = 57420$ و $C_3 = 112000$ المان در شرایطی که $Re = 10$ ، $Pr = 10$ ، $Gr = 500$ و $Bn = 1000$ حل شد. در استقلال شبکه عدد ناسلت میانگین، ضریب گشتاور و تانسور قید سیال ویسکوپلاستیک مورد بررسی قرار گرفت. در اینجا بحرانی ترین پارامتر یعنی تانسور قید سیال ویسکوپلاستیک، که معیاری از تشخیص نواحی تسلیم شده است (رابطه ۶)، مورد بررسی قرار می گیرد. توزیع و میانگین ضرب دونقطه ای تانسور قید سیال ویسکوپلاستیک در $\theta = 180^\circ$ به ترتیب در شکل ۳ و جدول ۲ نشان داده شده است. با توجه به شکل ۳ و جدول ۲، انتخاب شبکه ای با تعداد ۵۷۴۲۰ المان هم از نظر دقت نتایج و هم از نظر میزان هزینه ی محاسباتی معقول به نظر می رسد.

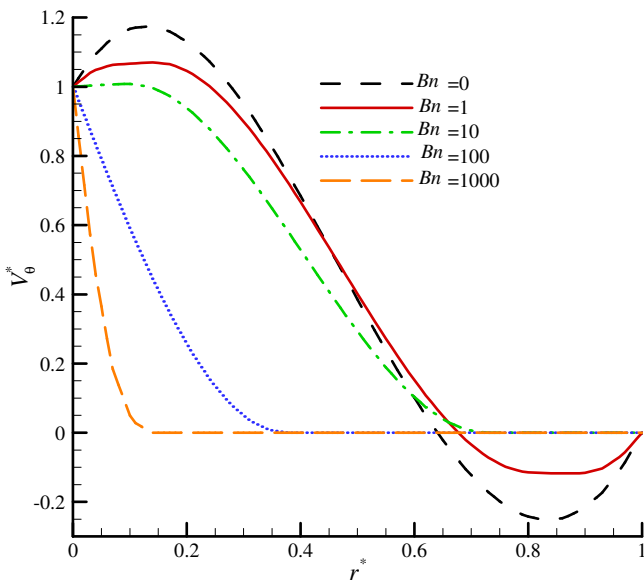
1 Dead zone
 2 Plug zone

مختلف بینگهام در شکل ۶ نشان داده شده است. در جریان نیوتنی ($Bn=0$)، با حرکت از سمت دیواره داخلی به سمت دیواره بیرونی، سرعت مماسی ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد، با ادامه کاهش جهت سرعت عوض می‌شود، و نهایتاً بر روی دیواره داخلی صفر می‌شود. این رفتار سرعت مماسی به دلیل تشکیل گردابه در این ناحیه است (شکل ۵). برای جریان سیال بینگهام با $Bn=1$ ، همین رفتار تکرار می‌شود. با این تفاوت که اندازه کمینه و بیشینه سرعت نسبت به جریان نیوتنی کمتر است. با توجه به شکل ۶، در نقاط کمینه و بیشینه سرعت، مقدار گرادیان سرعت به سمت صفر میل می‌کند و این نقاط همان نقاطی هستند که در آن ناحیه کوچک پلاگ به وجود می‌آید (شکل ۴). با افزایش عدد بینگهام به مقدار ۱۰، همان‌طور که در بالا بیان شد، گردابه از بین می‌رود، بنابراین سرعت مماسی نیز تغییر جهت نمی‌دهد. تشکیل ناحیه پلاگ در اطراف دیواره داخلی و ناحیه مرده در اطراف دیواره بیرونی برای $Bn=10$ ، سبب صفرشدن گرادیان سرعت در این نواحی می‌شود (شکل ۶). در $Bn=100$ ، با فاصله گرفتن از دیواره داخلی سرعت کاهش می‌یابد و در $r^*=0.38$ صفر می‌شود و مقدار آن، به دلیل تشکیل ناحیه مرده، تا دیواره بیرونی صفر باقی می‌ماند. در $Bn=1000$ ، تنها



شکل ۵. خطوط جریان برای $Gr=500$ ، $Pr=10$ ، $Re=10$ و مقادیر مختلف عدد بینگهام
Fig. 5. Streamlines for $Gr=500$, $Re=10$, $Pr=10$, and different values of Bingham number

استوانه ایجاد شود، دو گردابه متقارن در سمت چپ و راست محفظه تشکیل می‌شود. گردابه سمت راست ساعت‌گرد و گردابه سمت چپ پادساعت‌گرد خواهند بود. در مسئله حاضر، چرخش دیواره داخلی، در خلاف جهت عقربه‌های ساعت، گردابه سمت راست را تقویت و گردابه سمت چپ را تضعیف می‌کند. بنابراین برای $Bn=0$ تنها یک گردابه ساعت‌گرد در سمت راست تشکیل می‌شود و در سمت چپ گردابه‌ای وجود ندارد. در جریان سیال با عدد بینگهام برابر با یک، همانند جریان نیوتنی تنها یک گردابه در سمت راست تشکیل می‌شود اما گردابه، در مقایسه با جریان نیوتنی، فضای کمتری را اشغال می‌کند و ضعیف‌تر است. برای مقادیر بزرگ‌تر عدد بینگهام ($Bn=10, 100$) به دلیل افزایش ناحیه تسلیم‌نشده مرده در سمت چپ و راست محفظه، گردابه‌ای در محفظه تشکیل نمی‌شود و به دلیل محدودشدن فضا برای جریان سیال، خطوط جریان در مجاورت دیواره داخلی به هم فشرده می‌شوند و از شدت جریان، به‌خصوص در $Bn=100$ ، به‌شدت کاسته می‌شود.



شکل ۶. توزیع سرعت مماسی بی‌بعد در $\theta=0^\circ$ برای $Re=10$ ، $Pr=10$ و مقادیر مختلف عدد بینگهام
Fig. 6. The variation of dimensionless tangential velocity at $\theta=0^\circ$ for $Gr=500$, $Re=10$, $Pr=10$, and different Bingham numbers

۵-۳- توزیع سرعت

توزیع سرعت مماسی در فاصله بین دو استوانه در $\theta=0^\circ$ برای اعداد

توزیع سرعت مماسی برای $Bn = 1000$ در $\theta = 0^\circ$ (شکل ۶) و $\theta = 180^\circ$ (شکل ۷)، این موضوع را به خوبی نشان می‌دهد.

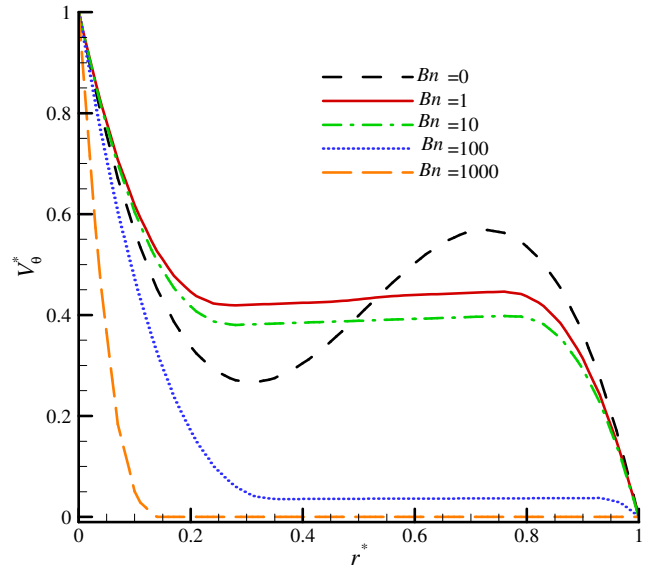
۱-۱- تغییرات عدد ناسلت

عدد ناسلت موضعی و میانگین بر روی دیواره‌ی داخلی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$Nu_i = \frac{hL}{k} = \frac{-k \frac{\partial T}{\partial r} |_{r=R_i} \ell}{k(T_i - T_o)} = -\frac{\partial T^*}{\partial r^*} |_{r^*=0} \quad (15)$$

$$\overline{Nu}_i = \frac{\int_0^{2\pi} Nu_i(\theta) R_i d\theta}{2\pi R_i} = \frac{\int_0^{2\pi} Nu_i(\theta) d\theta}{2\pi} \quad (16)$$

در شکل ۸ توزیع عدد ناسلت موضعی بر روی دیواره داخلی، در شرایطی که $Re = 10$ ، $Pr = 10$ و $Gr = 500$ است، برای مقادیر مختلف عدد بینگهام نشان داده شده است. به طور معمول، در حالتی که جریان سیال نیوتنی و جریان سیال تنها ناشی از جابجایی طبیعی باشد کمترین و بیشترین میزان انتقال حرارت به ترتیب در بالا، $\theta = 90^\circ$ ، و پایین، $\theta = 270^\circ$ ، دامنه روی می‌دهند. دلیل این امر آن است که سیال گرم بر اثر شناوری به سمت بالای دامنه صعود می‌کند و انباشت سیال گرم در بالای دامنه سبب می‌شود که گرادیان دما در بالای دامنه از سایر نقاط کمتر باشد لذا کمترین میزان انتقال حرارت در این ناحیه روی می‌دهد. از طرف دیگر، حرکت سیال سرد به سمت پایین محفظه سبب می‌شود که بیشترین گرادیان دمایی و انتقال حرارت در ناحیه پایین دامنه روی دهد. با توجه به شکل ۸، زمانی که مکانیسم انتقال حرارت هم طبیعی و هم اجباری است کمترین و بیشترین میزان انتقال حرارت در $Bn = 0$ به ترتیب در $\theta = 120^\circ$ و $\theta = 295^\circ$ روی می‌دهند. جابجاشدن این نقاط نسبت به حالت انتقال حرارت طبیعی به دلیل چرخش پادساعت گرد دیواره داخلی است. در عدد $Bn = 1$ روند تغییرات عدد ناسلت بر روی دیواره داخلی همانند جریان سیال نیوتنی است با این تفاوت که، به دلیل تضعیف شدن جریان سیال، در نقاط که میزان انتقال حرارت ماکزیمم است عدد ناسلت کاهش می‌یابد و بالعکس در نقاطی که میزان انتقال



شکل ۷. توزیع سرعت مماسی بی بعد در $\theta = 180^\circ$ برای $Re = 10$ ، $Pr = 10$ و مقادیر مختلف عدد بینگهام $Gr = 500$ ،

Fig. 7. The variation of the dimensionless tangential velocity at $\theta = 180^\circ$ for $Gr = 500$, $Re = 10$, $Pr = 10$, and different values of Bingham number

یک ناحیه نازک اطراف دیواره داخلی تسلیم می‌شود (شکل ۴) و این موضوع در شکل ۶ نیز به وضوح مشخص است.

در شکل ۷ نیز توزیع سرعت مماسی بی بعد در $\theta = 180^\circ$ برای مقادیر مختلف عدد بینگهام نشان داده شده است. در این ناحیه گردابه‌ای تشکیل نمی‌شود. اما اثر نیروی شناوری سبب می‌شود که با فاصله گرفتن از دیواره دوار داخلی، مقدار سرعت مماسی برای جریان نیوتنی ابتدا کاهش سپس افزایش و مجدداً کاهش یابد و نهایتاً بر روی دیواره بیرونی صفر شود. در $Bn = 1$ ، اثر نیروی شناوری کمتر می‌شود و گرادیان سرعت در فضای بین دو استوانه کاهش می‌یابد و دو ناحیه پلاگ کوچک و مجزا در این ناحیه تشکیل شود. با افزایش بیشتر عدد بینگهام ($Bn = 10$)، این ناحیه وسعت بیشتری پیدا می‌کند و گرادیان سرعت در ناحیه بزرگ تری به سمت صفر میل می‌کند. ناحیه پلاگ تشکیل شده در $Bn = 100$ به دیواره بیرونی نمی‌چسبد و با آن یک فاصله‌ی بسیار باریک دارد (شکل ۴)، این موضوع به خوبی در شکل ۷ مشخص است. با توجه به این شکل، گرادیان سرعت در نزدیکی $r^* = 1$ ، در ناحیه بسیار کوچکی، مخالف صفر است. همان طور که در بالا بیان شد، در $Bn = 1000$ با از بین رفتن اثر نیروی شناوری، مسئله به یک مسئله متقارن تبدیل می‌شود. مقایسه

جدول ۳. مقادیر عدد ناسلت میانگین و ضریب گشتاور برای مقادیر

مختلف عدد بینگهام و $Re = 10$ ، $Pr = 10$ ، $Gr = 500$

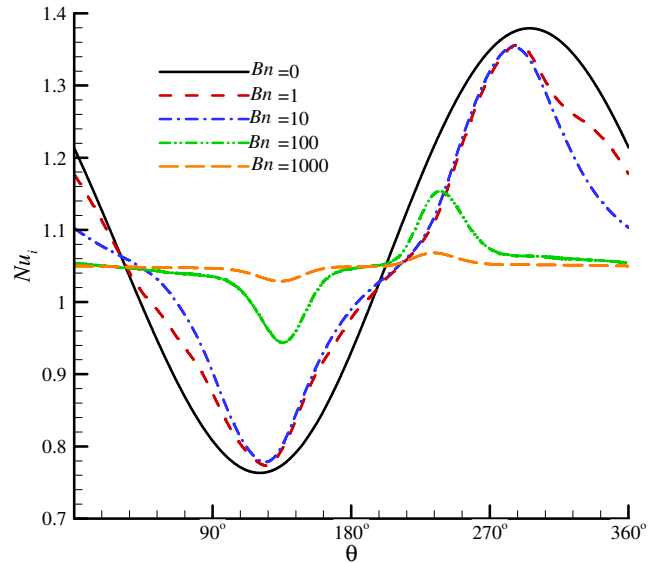
Table 3. The average Nusselt number and the torque coefficient on the inner wall for $Gr=500$, $Re=10$, $Pr=10$, and different values of Bingham number

اندازه ضریب گشتاور (C_T)	ناسلت میانگین (\overline{Nu}_i)	عدد بینگهام
۰/۲۹۲	۱/۰۷۵	۰
۰/۳۴۵	۱/۰۶۶	۱
۰/۷۲۹	۱/۰۶۳	۱۰
۱/۰۰۵	۱/۰۵۰	۱۰۰
۱/۰۱۶	۱/۰۴۹	۱۰۰۰

(طول مشخصه \times مساحت مشخصه $\times \frac{\rho \nu}{\mu}$) مرسوم است (به‌طور مثال [۲۱]). البته در تعریف C_T در نظر گرفتن تنش تسلیم، برای مقایسه‌ی عادلانه بین موارد که اعداد مختلف بینگهام دارند، ضروری است [۲۲]. لذا ضریب گشتاور به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

در رابطه‌ی بالا عمق، برابر واحد در نظر گرفته شده است. با توجه به جدول ۲، ضریب گشتاور با افزایش عدد بینگهام افزایش می‌یابد. با افزایش عدد بینگهام به دلیل افزایش وسعت ناحیه مرده، ناحیه‌ای که سیال در آن جاری می‌شود پهنای کمتری دارد لذا میزان گرادیان سرعت و متعاقب آن تنش و ضریب گشتاور افزایش می‌یابد. در شکل ۹ تنش مماسی بی‌بعد ($\hat{\sigma}_e = \frac{\hat{\sigma}_e}{0.5\hat{n}V_{i0}^2 + \hat{\sigma}_y}$) بر روی دیواره داخلی در اعداد بینگهام مختلف نشان داده شده است.

برای جریان سیال نیوتنی ($Bn = 0$)، همان‌طور که پیش‌ازین بیان شد، یک گردابه ساعت‌گرد در سمت راست محفظه تشکیل می‌شود و باعث می‌شود که بیشینه سرعت در فاصله بین دیوارهای داخلی و خارجی رخ دهد. در این ناحیه گرادیان سرعت روی دیوار داخلی مثبت و تنش برشی نیز مثبت و در جهت چرخش استوانه داخلی به آن وارد می‌شود. در این حالت در سمت چپ محفظه که گردابه‌ای تشکیل نمی‌شود، بیشینه سرعت سیال بر روی دیوار داخلی رخ می‌دهد و در سرتاسر فضای بین دیوارهای داخلی و خارجی گرادیان سرعت منفی می‌شود و تنش برشی در خلاف جهت چرخش استوانه



شکل ۸. توزیع عدد ناسلت موضعی بر روی دیوار داخلی برای $Re = 10$ ، $Pr = 10$ ، $Gr = 500$ و مقادیر مختلف عدد بینگهام

Fig. 8. The variation of the local Nusselt number on the inner wall for $Gr=500$, $Re=10$, $Pr=10$, and different values of Bingham number

حرارت کمینه است عدد ناسلت افزایش می‌یابد. در واقع در جریان سیال بینگهام بازه تغییرات ناسلت موضعی نسبت به جریان سیال نیوتنی کمتر است. با افزایش بیشتر عدد بینگهام تغییرات ناسلت موضعی بر روی دیواره کاهش بیشتری می‌یابد، به‌نحوی که برای $Bn = 1000$ تغییرات موضعی عدد ناسلت قابل‌اغماض است. دلیل این امر آن است که با افزایش عدد بینگهام و وسعت بیشتر نواحی تسلیم‌نشده، اثرات نیروی شناوری کمتر می‌شود و هدایت، مکانیسم غالب انتقال حرارت می‌شود. با توجه به شکل ۸، در $Bn = 100$ ، در نواحی که مناطق مرده وجود دارد میزان انتقال حرارت تقریباً ثابت است. همچنین با افزایش عدد بینگهام نقاط بیشینه و کمینه ناسلت به $\theta = 180^\circ$ نزدیک می‌شوند.

عدد ناسلت میانگین با افزایش عدد بینگهام دائماً کاهش می‌یابد. با توجه به جدول ۳ این کاهش در اعداد بینگهام کوچک‌تر محسوس‌تر است به‌گونه‌ای که مقدار عدد ناسلت میانگین برای $Bn = 100$ و $Bn = 1000$ تفاوت چندانی با یکدیگر ندارند.

۵-۴- ضریب گشتاور و توزیع تنش مماسی

تعریف ضریب گشتاور به‌صورت نسبت گشتاور مقاوم به حاصل ضرب

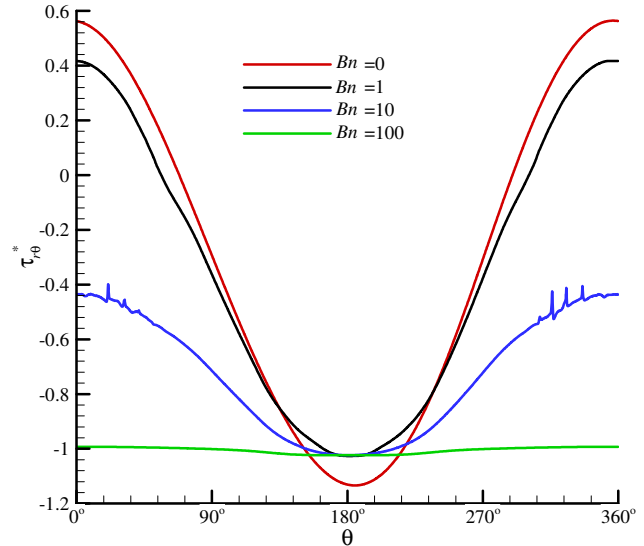
1 The torque coefficient

و تنش بر روی این سطح محاسبه می‌شود. این رفتارهای زیگزاگی که می‌تواند حاصل از خطای عددی باشد، در این سطح مورد انتظار است.

۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش ابتدا با توسعه حل‌کننده‌ی نرم‌افزار اپن‌فوم، حل‌کننده‌ای به دست آمد که قادر به حل جریان و انتقال حرارت سیال بینگهام با استفاده از مدل دقیق در شرایط ناپایا است. پس از اعتبارسنجی حل‌کننده توسعه‌یافته، از آن برای مطالعه عددی جریان انتقال حرارت جابجایی توأم سیال بینگهام در بین دو استوانه هم‌مرکز استفاده شد. با ارائه شکل نواحی تسلیم‌نشده، خطوط جریان، توزیع سرعت، توزیع عدد ناسلت موضعی و توزیع تنش مماسی، اثر عدد بینگهام بر مشخصات هیدرودینامیکی و حرارتی جریان برای یک هندسه‌ی مشخص ($AR=1$) و شرایط ثابت ($Re=10$ ، $Pr=10$)، $Gr=500$ مورد بحث و بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل از این پژوهش به صورت زیر قابل جمع‌بندی است.

- در میدان جریان سیال بینگهام ناحیه‌هایی وجود دارد که در این نواحی سیال جاری نمی‌شود. بعضی از این نواحی به دیواره ثابت می‌چسبند که ناحیه تسلیم‌نشده مرده نام دارند و بعضی از این نواحی به صورت یکپارچه با توده سیال حرکت می‌کنند که ناحیه تسلیم‌نشده پلاگ نامیده می‌شوند. با افزایش عدد بینگهام نواحی تسلیم‌نشده مرده توسعه می‌یابند و جریان سیال را تضعیف می‌کنند.
- برای اعداد بینگهام کوچک ($Bn=1$) اثر نیروی شناوری تأثیرگذار است و در این حالت یک گردابه‌ی ساعت‌گرد در سمت راست محفظه تشکیل می‌شود و میدان جریان و انتقال حرارت را تحت تأثیر قرار می‌دهد.
- در اعداد بینگهام کوچک که نیروی شناوری تأثیرگذار است، جریان جابجایی طبیعی سبب می‌شود که سیال گرم به سمت ناحیه بالایی محفظه حرکت کند. حرکت سیال گرم به سمت فضای بالای محفظه سبب کاهش گرادیان دما و کاهش عدد ناسلت موضعی در این ناحیه می‌شود. و متقابلاً به دلیل حرکت سیال سرد بر اثر جابجایی طبیعی به سمت ناحیه پایینی محفظه، گرادیان دما و عدد ناسلت موضعی در این ناحیه افزایش می‌یابد. و به‌طور کلی با افزایش عدد بینگهام به دلیل بی‌اثر شدن جابجایی طبیعی و تضعیف جریان ناشی از توسعه نواحی تسلیم‌نشده عدد



شکل ۹. توزیع تنش مماسی بی‌بعد بر روی دیواره‌ی داخلی برای $Re=10$ ، $Gr=500$ ، $Pr=10$ ، و مقادیر مختلف عدد بینگهام

Fig. 9. The distribution of the dimensionless shear stress on the inner wall for $Gr=500$, $Re=10$, $Pr=10$, and different values of Bingham number

داخلی به آن وارد می‌شود. با توجه به شکل ۹، در جریان نیوتنی حداکثر اندازه‌ی تنش مماسی در $\theta=180^\circ$ روی می‌دهد که دلیل این امر مخالف بودن جهت نیروی شناوری و حرکت توده‌ی سیال است. در اعداد بینگهام کوچک ($Bn=1$) همچنان نیروی شناوری مؤثر است و در سمت راست همچنان مقدار تنش مثبت است. اما در اعداد بینگهام بزرگ‌تر رفته‌رفته اثر شناوری از بین می‌رود و تنش در تمامی نقاط منفی می‌شود، به طوری که برای $Bn=100$ اثر نیروی شناوری تقریباً از بین رفته است و تنش برشی در پیرامون استوانه داخلی ثابت و در خلاف جهت چرخش آن است. در سمت راست دامنه نیروی شناوری موافق و در سمت چپ نیروی شناوری مخالف وجود دارد. و این امر سبب تفاوت در مقدار تنش مماسی بی‌بعد بر روی دیواره داخلی می‌شود. این تفاوت در اعداد بینگهام کوچک (10 و 1) قابل ملاحظه است اما با افزایش اعداد بینگهام (1000 و 100) اثر نیروی شناوری کم می‌شود بدین ترتیب تغییرات تنش مماسی بی‌بعد در سطح دیواره داخلی نیز کم می‌شود. با توجه به شکل ۹، برای $Bn=10$ ، رفتار زیگزاگی برای تنش مماسی مشاهده می‌شود دلیل این رفتار آن است که در این عدد بینگهام ناحیه‌ی پلاگ نازکی تشکیل می‌شود در واقع مرز تسلیم‌شدگی به دیواره داخلی نزدیک است. مرز تسلیم‌شدگی یک سطح بحرانی است

چگالی، kg/m^3	ρ
تابع جریان، m^2/s	ϕ
تنش تسلیم، N/m^2	τ_y
سرعت زاویه‌ای دیواره، rad/s	ω
زیرنویس	
پارامترهای مربوط به دیواره‌ی داخلی	i
پارامترهای مربوط به دیواره‌ی خارجی	o
بردار در راستای شعاع	r
بردار در راستای مماسی	θ
بالانویس	
پارامتر بی‌بعد	*

ناسلت متوسط کاهش می‌یابد.

- با افزایش عدد بینگهام به دلیل توسعه نواحی تسلیم‌نشده و کاهش فضای جریان سیال، گرادیان سرعت افزایش و به تبع آن ضریب گشتاور نیز افزایش می‌یابد.
- در اعداد بینگهام کوچک به دلیل تشکیل گردابه در سمت راست محفظه، جهت تنش برشی در سمت راست هم‌راستا با جهت چرخش استوانه داخلی و در سمت چپ محفظه در خلاف جهت چرخش آن است.

۷- فهرست علائم

علائم انگلیسی

تانسور اول ریویلین اریکسون، $1/\text{s}$	A
نسبت منظری	<i>AR</i>
عدد بینگهام	<i>Bn</i>
ضریب گشتاور	<i>C_T</i>
گرانش، m/s^2	<i>g</i>
عدد گراش	<i>Gr</i>
ضریب انتقال حرارت جابجایی، $\text{W/m}^2\text{K}$	<i>h</i>
ضریب انتقال حرارت رسانشی، W/mK	<i>k</i>
گرادیان سرعت، $1/\text{s}$	L
فاصله‌ی دو دیواره از یکدیگر، <i>m</i>	<i>l</i>
عدد ناسلت موضعی	<i>Nu</i>
عدد ناسلت میانگین	\overline{Nu}
فشار، <i>pa</i>	<i>p</i>
فشار دینامیکی، <i>pa</i>	<i>p_d</i>
عملگر در رابطه‌ی (۷)	<i>p_M</i>
عدد پرانتل	<i>Pr</i>
شعاع، <i>m</i>	<i>R</i>
عدد رایلی	<i>Ra=PrRe</i>
عدد رینولدز	<i>Re</i>
عدد ریچاردسون	<i>Ri</i>
تانسور تنش اضافی	<i>S</i>
دما، <i>K</i>	<i>T</i>
زمان، <i>s</i>	<i>t</i>
بردار سرعت، m/s	V

علائم یونانی

ضریب نفوذ گرمایی، m^2/s	α
ضریب انبساط حجمی، $1/\text{K}$	β
گران‌روی، kg/ms	η
تانسور قید سیال ویسکوپلاستیک	Λ
	ρ

۸- مراجع

- [1] T.C. Papanastasiou, Flows of Materials with Yield, Journal of Rheology, 31 (1987) 385-404.
- [2] E.J. O'Donovan, R.I. Tanner, Numerical study of the Bingham squeeze film problem, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 15 (1984) 75-83.
- [3] E. Mitsoulis, T. Zisis, Flow of Bingham plastics in a lid-driven square cavity, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 101 (2001) 173-180.
- [4] O. Turan, A. Sachdeva, N. Chakraborty, R.J. Poole, Laminar natural convection of Bingham fluids in a square enclosure with differentially heated side walls, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 166 (2011) 1049-1063.
- [5] O. Turan, S. Yigit, N. Chakraborty, Numerical investigation of mixed convection of Bingham fluids in cylindrical enclosures with heated rotating top wall, International Journal of Heat and Mass Transfer, 108 (2017) 1850-1869.
- [6] I.A. Frigaard, C. Nouar, On the usage of viscosity regularisation methods for visco-plastic fluid flow computation, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 127 (2005) 1-26.
- [7] R.R. Huilgol, G.H.R. Kefayati, Natural convection problem in a Bingham fluid using the operator-splitting method, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 220 (2015) 22-32.
- [8] G.H.R. Kefayati, R.R. Huilgol, Lattice Boltzmann Method for simulation of mixed convection of a Bingham fluid in a lid-driven cavity, International Journal of Heat and Mass Transfer, 103 (2016) 725-743.
- [9] A. Syrakos, G.C. Georgiou, A.N. Alexandrou, Performance of the finite volume method in solving regularised Bingham flows: Inertia effects in the lid-driven cavity flow, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 208-209 (2014) 88-107.
- [10] R. Glowinski, J.L. Lions, R. Tremoliers, Numerical Analysis of Variational Inequalities., NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY AMSTERDAM

- (2019) 1188-1198.
- [17] K. Ragui, A. Boutra, R. Bennacer, Y.K. Benkahla, Progress on numerical simulation of yield stress fluid flows (Part I): Correlating thermosolutal coefficients of Bingham plastics within a porous annulus of a circular shape, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 126 (2018) 72-94.
- [18] R.R. Huilgol, *Fluid Mechanics of Viscoplasticity*, (2015).
- [19] R.I. Issa, Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting, *Journal of Computational Physics*, 62 (1986) 40-65.
- [20] H.R.A. Jahromi, A. Raisi, B. Ghasemi, A.A. Nadooshan, Numerical study of the Bingham fluid flow in a cylindrical enclosure with exact Bingham model, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 42(4) (2020).
- [21] E. Lang, K. Sridhar, N.W. Wilson, Computational Study of Disk Driven Rotating Flow in a Cylindrical Enclosure, *Journal of Fluids Engineering*, 116 (1994) 815.
- [22] R.L. Thompson, E.J. Soares, Viscoplastic dimensionless numbers, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 238 (2016) 57-64.
- . NEW YORK . OXFORD, 8 (1981).
- [11] E.J. DEAN, R. GLOWINSKI, OPERATOR-SPLITTING METHODS FOR THE SIMULATION OF BINGHAM VISCO-PLASTIC FLOW, *Chinese Annals of Mathematics*, 23 (2002) 187-204.
- [12] G. Vinay, A. Wachs, J.F. Agassant, Numerical simulation of non-isothermal viscoplastic waxy crude oil flows, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 128 (2005) 144-162.
- [13] L. Chupin, T. Dubois, A bi-projection method for Bingham type flows, *Computers and Mathematics with Applications*, 72 (2016) 1263-1286.
- [14] T.H. Kuehn, R.J. Goldstein, An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders, *Journal of Fluid Mechanics*, 74 (1976) 695-719.
- [15] J.S. Yoo, Mixed convection of air between two horizontal concentric cylinders with a cooled rotating outer cylinder, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 41 (1998) 293-302.
- [16] H. Masoumi, M.S. Aghighi, A. Ammar, A. Nourbakhsh, Laminar natural convection of yield stress fluids in annular spaces between concentric cylinders, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 138

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:
H.R. Askarifard Jahromi, A. Raisi, B. Ghasemi, A. Ahmadi Nadooshan. Numerical simulation of mixed convection of Bingham fluid between two coaxial cylinders, Amirkabir J. Mech. Eng., 53(Special Issue 5)(2021) 3417-3428.

DOI: [10.22060/mej.2020.17979.6700](https://doi.org/10.22060/mej.2020.17979.6700)

