



## Stability analysis and snap-through evaluation of the cable-driven continuum robots

Sh. Hashemi-Pour Moosavi, A. Ehsani-Seresht\*

Department of Mechanical Engineering, Hakim Sabzevari University, Sabzevar, Iran

**ABSTRACT:** Most of the continuum robots have flexible backbones that are deformed under the internal and external loads and a considerable amount of potential energy may be stored in the backbone. Hence, the continuum robots are exposed to instability issues such as snap-through. The snap-through instability occurs when, with changes in the applied forces, the robot reaches the boundary of its stable region and then moves toward a stable configuration in an uncontrolled manner. Snap-through instability is harmful to the continuum robots and its prediction is important for the design and control of the robot. However, most of the studies focused on design, kinematics, and dynamics of the continuum robots and there are limited studies worked on stability analysis of these robots. In this paper, the stability analysis of the cable-driven continuum robots is investigated. For this, the static equilibrium configurations of the robot are firstly determined under the internal and external loadings. Then, the stiffness matrix of the robot is obtained and the robot stability and snap-through condition are evaluated. The accuracy of the static equations of the robot is verified using the experimental results and the possibility of snap-through occurrence is modeled through simulations. Besides, the effects of the external loads, robot configuration in space, and cross-section of the backbone on the workspace and snap-through occurrence are studied.

### Review History:

Received: Jan. 06, 2020

Revised: Jun. 29, 2020

Accepted: Jun. 29, 2020

Available Online: Jul. 09, 2020

### Keywords:

Continuum robot

Snap-through

Virtual power

Stiffness matrix

Stability

### 1- Introduction

Continuum robots have infinite degrees of freedom due to their flexible structure. Therefore, the kinematic and dynamic analysis of the continuum robots is more complex than conventional robots. So far, various methods have been proposed for the kinematic modeling of continuum robots. Among them, the constant curvature [1-3] and the variable curvature [4, 5] kinematic models are the most famous models. For dynamic modeling of the continuum robots, various models based on Euler-Lagrange [6] formulation, Kane's formulation [7], and Cosserat rod theory [5] have been proposed.

In addition to the kinematic and dynamic modeling of the continuum robots, it is important to investigate the stability of these robots and the occurrence of the snap-through phenomena in these robots. Continuum robots are under-actuated robots. Therefore, to control their movement they should be in their stable equilibrium region. Continuum robots may deviate from their stable region under certain loading conditions and the snap-through may occur for them. The purpose of this paper is to provide a method for analyzing the stability of the cable-driven continuum robots in three-dimensional space. For this purpose, a three-dimensional static model of the robot is obtained. Then, a stiffness matrix is created for the continuum robot and the stability of the robot is evaluated based on the Eigen-values of the stiffness matrix. Next, the snap-through condition of the continuum

robot is described. Finally, the stable workspace of the robot is obtained under different load conditions

### 2- Kinematics of cable-driven Continuum Robots

A representative model of a cable-driven continuum robot is shown in Fig. 1. The kinematic model of the robot is based on the reference [6], where for each section of the robot three DOFs are considered.

### 3- Static Equations

To obtain the static equations of the robot, the virtual power method introduced in the reference [7] is used. The virtual power equation of a robot with  $n$  moving parts is calculated as follows:

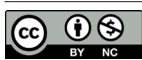
$$P = \sum_{i=1}^n (M_{i,ex} \cdot \omega_i + F_{i,ex} \cdot v_i) \quad (1)$$

where,  $F_{i,ex}$  and  $M_{i,ex}$  are the resultant external forces and torques exerted to the center of mass of the part  $i$ . Also  $v_i$  and  $\omega_i$  are the linear and angular velocities of part  $i$ , respectively.

### 4- Validation of Static Model

Fig. 2 shows the experimental setup for validation of the static model.

\*Corresponding author's email: a.ehsaniseresht@hsu.ac.ir



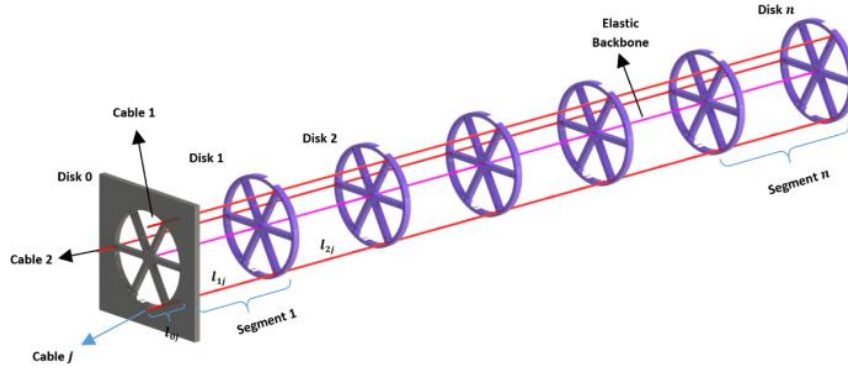


Fig. 1. A cable-driven continuum robot

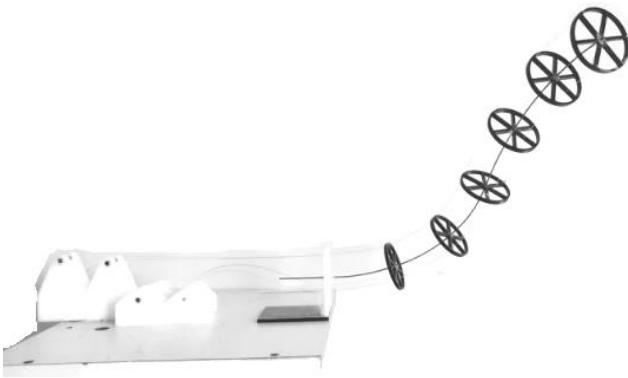


Fig. 2. The continuum robot used for experimental validation

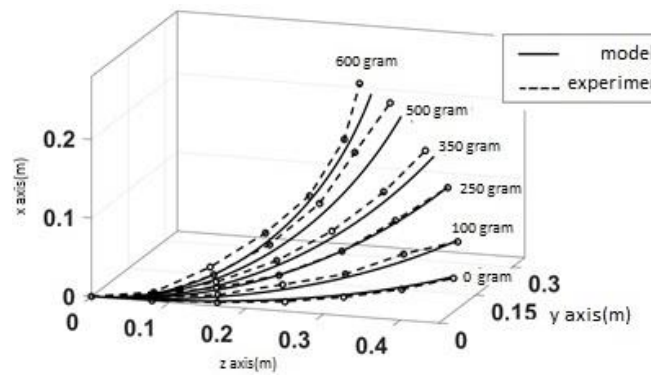


Fig. 3. Comparison of the results obtained from the static model and experiments

The continuum robot was tested in several out-of-plane loadings. For the actuation of the robot, the actuation cables were pulled by different mass loads. Fig. 3 demonstrates that the static model accurately predicts the deformation of the robot.

**5- Stability Analysis of Continuum Robot**

The stiffness matrix is obtained through partial differentiation of the total potential energy of the robot,  $\Pi$ , with respect to its generalized coordinates  $q_i (i = 1 : n)$  as the following equation:

$$s = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_j} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_1} & & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} & & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_n \partial q_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_n \partial q_j} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_n \partial q_n} \end{bmatrix} \quad (2)$$

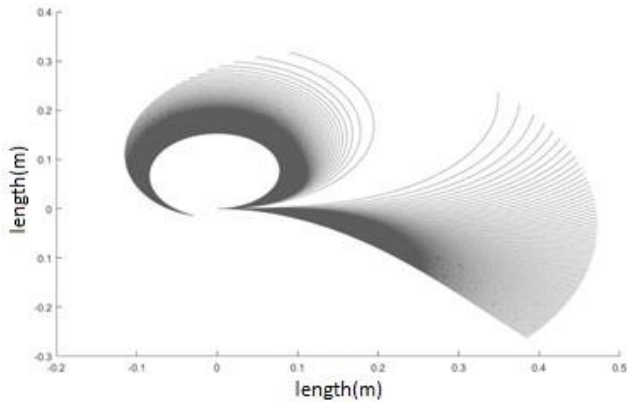
For the stability of the robot all Eigen values of the stiffness matrix must be positive. Because the total potential

of the robot varies through the load conditions, therefore the Eigen values of the stiffness matrix may change. If the smallest Eigen value of the stiffness matrix becomes negative, the robot becomes unstable on that equilibrium condition. It is worth mentioning that if a robot reaches to an unstable static equilibrium condition, it quickly moves to another static equilibrium with stable condition. This phenomenon is known as snap-through. Fig. 4 shows a snap-through condition for the continuum robot, when a mass load is attached to the robot's tip and simultaneously the robot is actuated by a cable's force.

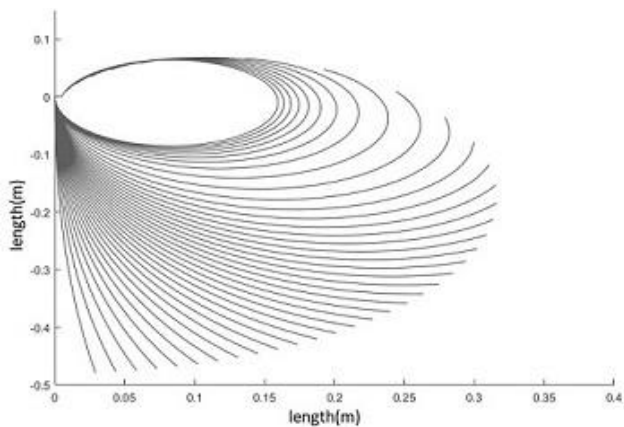
To predict the occurrence of the snap-through in the continuum robot, the Eigen values of the stiffness matrix are used. Fig. 5 shows when the actuation force of the robot increases, the smallest Eigen value of the continuum robot decreases to zero. Because the negative Eigen value is equivalent to unstable static equilibrium, the robot suddenly jumps to a stable configuration and snap-through occurs.

**6- Investigating Stable Workspace for Continuum Robot**

Simulations and experiments have shown that various factors, such as the tip mass of the robot, the robot's orientation in space, and the cross-sectional area of the robot's backbone may affect the stable workspace of the robot. For example, Fig. 6 shows that the snap-through of the robot that was shown in Fig. 4 was eliminated in the vertical orientation of the robot.



**Fig. 4.** The static configurations of the continuum robot when a 50gr mass load is attached to the robot's tip and the actuation force increases gradually.



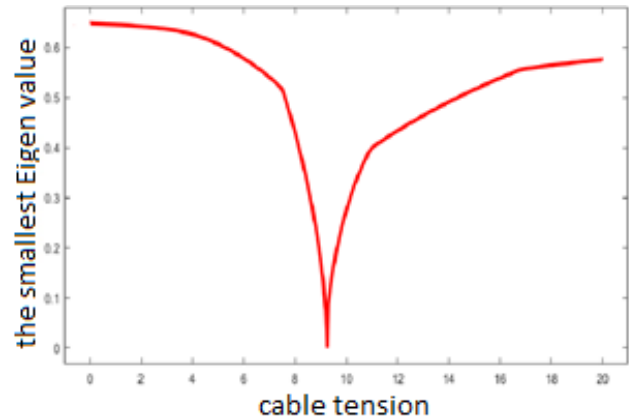
**Fig. 6.** The static configurations of the continuum robot in a vertical orientation when a 50gr mass load is attached to the robot's tip and the actuation force increases gradually.

## 7- Conclusions

In this study, the stability analysis of the cable-driven continuum robots was performed and it was shown the snap-through instability may be predicted by the Eigen values of the stiffness matrix.

Also, it was shown that the robot's orientation, tip mass load and cross-section affect the workspace of the robot. Therefore, the following suggestions may be useful to increase the workspace of the robot:

- a) To decrease the mass attached to the robot's tip.
- b) To Increase the robot's cross-sectional area.
- c) To use the robot in an appropriate orientation when the robot's tip mass is considerable.



**Fig. 5.** The smallest Eigen value of the stiffness matrix vs. the actuation cable's force

## 8. REFERENCES

- [1] R.J. Webster III, B.A. Jones, Design and kinematic modeling of constant curvature continuum robots: A review, *The International Journal of Robotics Research*, 29(13) (2010) 1661-1683.
- [2] F. Qi, F. Ju, D. Bai, Y. Wang, B. Chen, Kinematic analysis and navigation method of a cable-driven continuum robot used for minimally invasive surgery, *The International Journal of Medical Robotics and Computer Assisted Surgery*, 15(4) (2019) e2007.
- [3] S. Sara, Farid, T. pour, G. rad, Cinematic modeling of continuum robot arm inspired by origami with curved-fixed elements, *Modares Mechanical Engineering*, 19(11) 0-0.
- [4] T. Mahl, A. Hildebrandt, O. Sawodny, A variable curvature continuum kinematics for kinematic control of the bionic handling assistant, *IEEE transactions on robotics*, 30(4) (2014) 935-949.
- [5] D.C. Rucker, B.A. Jones, R.J. Webster III, A geometrically exact model for externally loaded concentric-tube continuum robots, *IEEE Transactions on Robotics*, 26(5) (2010) 769-780.
- [6] A. Ehsani-Seresht, S. Hashemi-Pour Moosavi, Dynamic Modeling of the Cable-Driven Continuum Robots in Hybrid Position-Force Actuation Mode, *Journal of Mechanisms and Robotics*, 12(5) (2020).
- [7] W.S. Rone, P. Ben-Tzvi, Continuum robot dynamics utilizing the principle of virtual power, *IEEE Transactions on Robotics*, 30(1) (2013) 275-287.

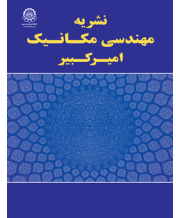
### HOW TO CITE THIS ARTICLE

SH. Hashemi-Pour Moosavi, A. Ehsani-Seresht, *Stability analysis and snap-through evaluation of the cable-driven continuum robots*, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 53(4) (2021) 499-502.

DOI: [10.22060/mej.2020.15175.6639](https://doi.org/10.22060/mej.2020.15175.6639)







## تحلیل پایداری و بررسی پدیده‌ی جهش در ربات‌های پیوسته با محرک کابلی

شاهین هاشمی پور موسوی، عباس احسانی سرشت\*

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۱۶

بازنگری: ۱۳۹۹/۰۴/۰۹

پذیرش: ۱۳۹۹/۰۴/۰۹

ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۴/۱۹

### کلمات کلیدی:

ربات‌های پیوسته

پدیده‌ی جهش

توان مجازی

ماتریس سفتی

پایداری

**خلاصه:** اغلب ربات‌های پیوسته دارای ستون فقرات منعطف و تغییرشکل‌پذیر هستند. از این‌رو، تحت بارگذاری‌های داخلی و خارجی، دچار تغییرشکل می‌شوند و انرژی پتانسیل قابل‌ملاحظه‌ای در آن‌ها ذخیره می‌شود. در نتیجه، این ربات‌ها در معرض پدیده‌هایی همچون ناپایداری و جهش قرار دارند. جهش زمانی رخ می‌دهد که با تغییر نیروهای اعمالی، ربات به انتهای ناحیه‌ی پایدار خود برسد و به صورت غیرقابل‌کنترل از وضعیت تعادل ناپایدار به وضعیت تعادل پایدار خود حرکت کند. جهش در ربات‌های پیوسته پدیده‌ای نامطلوب و مضر است. بنابراین پیش‌بینی وقوع آن بسیار حائز اهمیت است. با این حال، عمده‌ی مطالعات انجام‌شده در حوزه‌ی ربات‌های پیوسته بر طراحی، تحلیل سینماتیک و دینامیک این ربات‌ها معطوف بوده و تحقیقات در زمینه‌ی پایداری این ربات‌ها محدود است. در این مقاله، تحلیل پایداری دسته‌ای از ربات‌های پیوسته با محرک‌های کابلی مورد توجه قرار می‌گیرد. برای این منظور ابتدا به کمک روابط تعادل استاتیکی، وضعیت(های) تعادل ربات تحت بارگذاری‌های داخلی و خارجی تعیین می‌شود. سپس با تشکیل ماتریس سفتی برای ربات، پایداری ربات و شرایط وقوع پدیده‌ی جهش بررسی می‌شود. به منظور ارزیابی صحت مدل استاتیکی، از آزمایش‌های تجربی استفاده می‌شود. همچنین با انجام شبیه‌سازی، احتمال وقوع جهش در ربات‌های مذکور بررسی می‌شود. علاوه، تاثیر مقدار نیروی خارجی، جهت‌گیری ربات در فضا و سطح مقطع ستون فقرات ربات بر فضای کاری و وقوع جهش در ربات مطالعه می‌شود.

### ۱- مقدمه

فقراتی منعطف هستند و برای حرکت خود از خم‌شدن و تغییر شکل ستون فقرات خود کمک می‌گیرند. ربات‌های پیوسته در مقایسه با ربات‌های گسسته، دارای ابعادی کوچک‌تر و امپدانس ذاتی کم‌تر هستند. از این‌رو، امکان استفاده از آن‌ها در محیط‌های کوچک، با ساختار پیچیده و آسیب‌پذیر نظیر جراحی‌های کم‌تهاجمی بدن انسان وجود دارد. قابلیت‌های منحصربه‌فرد ربات‌های پیوسته سبب شده است تا نمونه‌های مختلفی از این ربات‌ها توسعه پیدا کند [۲-۶] و در زمینه‌های مختلفی از جمله بازرسی توربین‌های گاز [۷]، عملیات امداد و نجات [۸، ۹] و همچنین در جراحی‌های کم‌تهاجمی مغز، مجراهای تنفسی، گوارشی و تناسلی انسان [۱۰-۱۲] مورد استفاده

ربات‌ها را می‌توان بر اساس ساختارشان به سه دسته تقسیم کرد [۱]. دسته‌ی اول، ربات‌های گسسته هستند که از تعدادی بازوی صلب و چند مفصل یک درجه آزادی قابل کنترل تشکیل شده‌اند. دسته‌ی دوم، ربات‌های مار مانند یا ربات‌های با درجات آزادی مضاعف<sup>۱</sup> هستند. ساختار این ربات‌ها مشابه ربات‌های گسسته است. با این حال تعداد درجات آزادی آن‌ها نسبت به دسته‌ی اول بسیار بیشتر است. دسته‌ی سوم، ربات‌های پیوسته هستند که دارای ستون

1 -Hyper-Redundant

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: a.ehsaniseresht@hsu.ac.ir



قرار گیرند.

ربات‌های پیوسته به دلیل ماهیت منعطف خود دارای بی‌نهایت درجه آزادی هستند. به همین دلیل، تحلیل سینماتیک ربات‌های پیوسته پیچیده‌تر از سایر ربات‌هاست. تا به حال روش‌های مختلفی برای مدل‌سازی سینماتیک این ربات‌ها پیشنهاد شده است که از آن جمله می‌توان به مدل‌سازی سینماتیک ربات پیوسته همانند یک ربات گسسته با درجات آزادی مضاعف [۱۳-۱۵]، مدل‌سازی با فرض انحنای ثابت برای هر بخش از ربات [۱۶-۱۸] و مدل‌سازی با فرض انحنای متغیر [۱۹، ۲۰] اشاره کرد. به منظور کنترل حرکت ربات‌های پیوسته، برخی از محققین با توجه به ناچیزبودن جرم اجزای مختلف ربات و همچنین حرکت آهسته‌ی آن‌ها از اثرات سرعت و شتاب ربات در معادلات حرکت صرف‌نظر کرده و از مدل‌سازی استاتیکی برای تحلیل حرکت ربات استفاده کرده‌اند [۲۱-۲۳]. تحلیل حرکت ربات‌های پیوسته به کمک مدل‌سازی دینامیکی، روش دقیق‌تری است که با صرف هزینه‌ی محاسباتی بیشتر میسر می‌شود [۲۴]. در مرجع [۲۵] با استفاده از روش توان مجازی، مدلی دینامیکی برای ربات‌های پیوسته با محرک کابلی ارائه شده است. در مراجع [۲۶-۲۸] از روش لاگرانژ برای استخراج معادلات دینامیک ربات‌های پیوسته با محرک کابلی استفاده شده است.

علاوه بر مدل‌سازی سینماتیک، استاتیک و دینامیک ربات‌های پیوسته، بررسی ناپایداری و وقوع پدیده‌ی جهش در این ربات‌ها حائز اهمیت است. ربات‌های پیوسته با داشتن بی‌نهایت درجه آزادی و محرک‌هایی به تعداد محدود، جزو ربات‌های کم‌محرک<sup>۱</sup> دسته‌بندی می‌شوند. از این رو، کنترل حرکت آن‌ها در صورتی امکان‌پذیر است که این ربات‌ها در محدوده‌ی تعادل پایدار خود قرار داشته باشند. ربات‌های پیوسته ممکن است تحت شرایط بارگذاری خاص از محدوده‌ی پایدار خود خارج شده و پدیده‌ی جهش<sup>۲</sup> در آن‌ها رخ بدهد. ربات‌های پیوسته در بعضی از شرایط بارگذاری دارای چندین وضعیت تعادل هستند. با تغییر بار اعمالی به ربات، این وضعیت‌های تعادل نیز جابجا می‌شوند و ممکن است ربات به مرز ناپایداری برسد. در این صورت ربات از وضعیت تعادل ناپایدار خود جهش کرده و به وضعیت تعادل دیگری که پایدار است حرکت می‌کند. پدیده‌ی جهش با توجه به نوع استفاده از این ربات‌ها می‌تواند اثرات مخربی

1 Under Actuated

2 Snap through

داشته باشد. به‌ویژه در ربات‌های لوله‌ای هم‌مرکز که در جراحی‌های کم‌تهاجمی استفاده می‌شوند، وقوع این پدیده می‌تواند سبب آسیب جدی در بافت‌های بدن انسان شود [۲۹]. بررسی پدیده‌ی جهش در ربات‌های لوله‌ای هم‌مرکز [۳۰]، ربات‌های پیوسته‌ی موازی [۳۱] و ربات‌های پیوسته با محرک میله‌ای [۳۲] انجام شده است. با این حال، بررسی‌های نویسندگان مقاله نشان می‌دهد، تا به حال روشی برای تحلیل پایداری ربات‌های پیوسته با محرک کابلی ارائه نشده است. بعلاوه اثر وقوع پدیده‌ی جهش بر فضای کاری قابل استفاده‌ی ربات نیز تا به حال انجام نشده است.

هدف این مقاله ارائه‌ی روشی برای تحلیل پایداری ربات‌های پیوسته‌ی کابلی در فضای سه‌بعدی است. برای این منظور ابتدا بر اساس روش توان مجازی توسعه داده‌شده در مرجع [۲۵] مدل استاتیکی سه‌بعدی برای ربات‌های پیوسته‌ی کابلی بدست می‌آید. سپس، با تشکیل ماتریس سفتی [۳۳، ۳۴] تحلیل پایداری ربات‌های پیوسته‌ی کابلی انجام می‌شود. این روش اگرچه برای ربات‌های پیوسته‌ی کابلی ارائه می‌شود، اما قابلیت استفاده در تحلیل پایداری سایر ربات‌های پیوسته را نیز دارد.

در ادامه‌ی این مقاله، ابتدا سینماتیک ربات پیوسته کابلی معرفی می‌شود. سپس، با استفاده از روش توان مجازی مدلی استاتیکی از یک ربات پیوسته کابلی ارائه می‌شود. در بخش چهارم مدل استاتیکی ارائه‌شده با نتایج تجربی حاصل از یک نمونه‌ی ساخته‌شده مقایسه شده و صحت‌گذاری می‌شود. در بخش پنجم تحلیل پایداری ربات با استفاده از روش انرژی ارائه می‌شود. در بخش ششم با استفاده از شبیه‌سازی پدیده‌ی جهش بررسی شده و فضای کاری ربات تحت تاثیر پدیده‌ی جهش بدست می‌آید. در نهایت، در بخش هفتم نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای مطالعات بعد ارائه می‌شود.

## ۲- سینماتیک ربات پیوسته‌ی کابلی

تحلیل سینماتیک ربات پیوسته‌ی کابلی را می‌توان به صورت بالقوه در دو مرحله انجام داد. مرحله‌ی اول تعیین ارتباط فضای کاری و فضای شکلی ربات است، که در آن موقعیت و جهت‌گیری مجری نهایی در فضای دکارتی بر حسب میزان خمش و پیچش بدنه‌ی ربات بدست می‌آید. مرحله‌ی دوم تعیین ارتباط فضای عملگری و فضای شکلی ربات است، که در آن ارتباط بین میزان جابجایی

توسط نیروی کشش  $m$  کابل کنترل می‌شود.

## ۲-۲- معادلات سینماتیکی

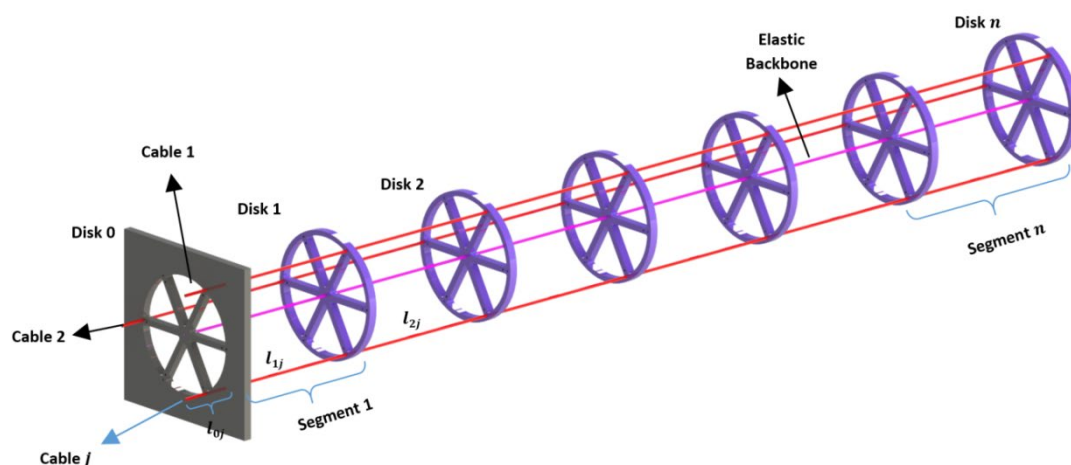
برای توصیف سینماتیک ربات، به هر یک از دیسک‌های 0 تا  $n$  یک دستگاه مختصات محلی متصل می‌کنیم. مطابق شکل ۲ برای دیسک  $i$  ام، مبدأ چهارچوب  $\{i\}$  را واقع بر مرکز دیسک  $i$  ام در نظر می‌گیریم. محور  $z_i$  را مماس بر ستون فقرات ربات در محل دیسک  $i$  ام فرض می‌کنیم. محورهای  $x_i$  و  $y_i$  را نیز هم‌راستا با  $x_0$  و  $y_0$  در حالت بدون بار فرض می‌کنیم. فرض می‌کنیم هر یک از دیسک‌ها نسبت به دیسک ماقبل خود دارای سه درجه آزادی دورانی شامل دو درجه آزادی خمشی و یک درجه آزادی پیچشی است. با فرض درجات آزادی مذکور، مرجع [۲۵] دوران  $zyz$  اویلر را برای توصیف جهت‌گیری چارچوب‌های متوالی در ربات پیشنهاد می‌کند. با این حال، دوران  $zyz$  اویلر دارای تکنیکی مجازی به ازای حالتی است که ربات بخواهد تنها در راستای محور  $x$  خمش داشته باشد. از این رو، دوران مورد استفاده در این مقاله، روشی است که قبلاً توسط نویسندگان این مقاله در مرجع [۲۶] گزارش شده است. این روش در ادامه آمده است:

مطابق شکل ۲ فرض کنیم چارچوب  $\{i-1\}$  موقعیت و جهت‌گیری دیسک  $i-1$  ام را نشان می‌دهد. همچنین فرض کنیم چارچوب  $\{i\}$  موقعیت و جهت‌گیری دیسک  $i$  ام را قبل از تغییر شکل ربات نشان می‌دهد. بردار یکه‌ی دلخواه  $k_i$  که را در صفحه‌ی  $x_i, y_i$  قرار دارد

کابل‌های محرک و میزان خمش و پیچش بدنه‌ی ربات بدست می‌آید. بدست‌آوردن سینماتیک مرحله‌ی اول برای تمامی ربات‌های پیوسته‌ی کابلی الزامی است. اما سینماتیک مرحله‌ی دوم زمانی مورد نیاز است که برای کنترل حرکت ربات، طول کابل‌های محرک کنترل شود. اما اگر از نیروی کشش کابل‌ها برای کنترل حرکت ربات استفاده شود، آنگاه اثر این نیرو مستقیماً بر اجزای مختلف ربات اعمال شده و میزان خمش و پیچش آن‌ها بدست می‌آید. به عبارت دیگر در این حالت به مرحله‌ی دوم سینماتیک ربات نیازی نخواهد بود. بنابراین، از آنجا که در این مقاله از نیروی کشش کابل‌های محرک برای کنترل ربات استفاده می‌شود، تنها محاسبه‌ی مرحله‌ی اول سینماتیک مورد نیاز است. خواننده‌ی علاقه‌مند در صورتی که بخواهد سینماتیک مرحله‌ی اول و دوم را به همراه هم مطالعه نماید می‌تواند به مرجع [۲۶] نوشته‌ی نویسندگان این مقاله مراجعه نماید.

## ۲-۱- ساختار ربات پیوسته‌ی کابلی

ربات پیوسته‌ی کابلی ساختاری همانند شکل ۱ دارد. این بازو از یک ستون فقرات منعطف با مقطع دایروی تشکیل شده است که در حالت بدون بارگذاری کاملاً مستقیم است. بر روی این ستون فقرات  $n+1$  دیسک قرار دارد که محل عبور و یا اتصال کابل‌های محرک است. دیسک شماره 0 ثابت است و پایه‌ی ربات نامیده می‌شود. همان‌طور که در شکل مشخص شده است هر دیسک با میله‌ی ماقبل خود یک قسمت از ربات پیوسته در نظر گرفته می‌شود. حرکت ربات



شکل ۱. نمای سه‌بعدی از ربات پیوسته کابلی با سه کابل هدایت‌کننده

Fig. 1. Three dimensional view of a cable driven continuum robot with three guided cables

$$\beta_i = s \phi_i \theta_i \quad (3)$$

در معادلات ۲ و ۳،  $\alpha_i$  زاویه خمش حول  $x_{i-1}$ ،  $\beta_i$  زاویه خمش حول  $y_{i-1}$  و  $\gamma_i$  زاویه پیچش حول محور  $z_{i-1}$  می‌باشد. همچنین  $\theta_i$  برآیند خمش دیسک  $i$  حول محورهای  $x_{i-1}$  و  $y_{i-1}$  می‌باشد. متغیرهای  $\phi_i$  و  $\theta_i$  به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

$$\theta_i = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2} \quad (4)$$

$$\phi_i = \text{atan2} \left( \frac{\beta_i}{\theta_i}, \frac{\alpha_i}{\theta_i} \right) \quad (5)$$

با جایگذاری از روابط (۲) و (۳) در رابطه‌ی (۱) داریم:

$$R_{i,i} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_i^2}{\theta_i^2} v \theta_i + c \theta_i & \frac{\alpha_i \beta_i}{\theta_i^2} v \theta_i & \frac{\beta_i}{\theta_i} s \theta_i \\ \frac{\alpha_i \beta_i}{\theta_i^2} v \theta_i & \frac{\beta_i^2}{\theta_i^2} v \theta_i + c \theta_i & -\frac{\alpha_i}{\theta_i} s \theta_i \\ -\frac{\beta_i}{\theta_i} s \theta_i & \frac{\alpha_i}{\theta_i} s \theta_i & c \theta_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} c \gamma_i & -s \gamma_i & 0 \\ s \gamma_i & c \gamma_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و با محور  $x_i$  زاویه‌ی  $\phi_i$  می‌سازد، در نظر می‌گیریم. می‌توانیم فرض کنیم دیسک  $i$  ام برای رسیدن از وضعیت اولیه به وضعیت نهایی خود ابتدا حول محور  $k_i$  به میزان  $\theta_i$  خم می‌شود. در این وضعیت میانی، موقعیت و جهت‌گیری دیسک را با چارچوب  $\{i\}$  نشان می‌دهیم. در مرحله‌ی بعد فرض می‌کنیم دیسک  $i$  ام به میزان  $\gamma_i$  حول محور  $z_i$  دچار پیچش می‌شود تا به وضعیت نهایی خود که با چارچوب  $\{i\}$  نشان داده می‌شود برسد. در نتیجه، می‌توان ماتریس دورانی که جهت‌گیری چارچوب  $\{i\}$  نسبت به چارچوب  $\{i-1\}$  را نشان می‌دهد به صورت زیر بدست آورد:

$$R_{i,i} = R_{k_i}(\theta_i) R_{z_i}(\gamma_i)$$

$$= \begin{bmatrix} c \phi_i c \phi_i v \theta_i + c \theta_i & c \phi_i s \phi_i v \theta_i & s \phi_i s \theta_i \\ c \phi_i s \phi_i v \theta_i & s \phi_i s \phi_i v \theta_i + c \theta_i & -c \phi_i s \theta_i \\ -s \phi_i s \theta_i & c \phi_i s \theta_i & c \theta_i \end{bmatrix} \quad (1)$$

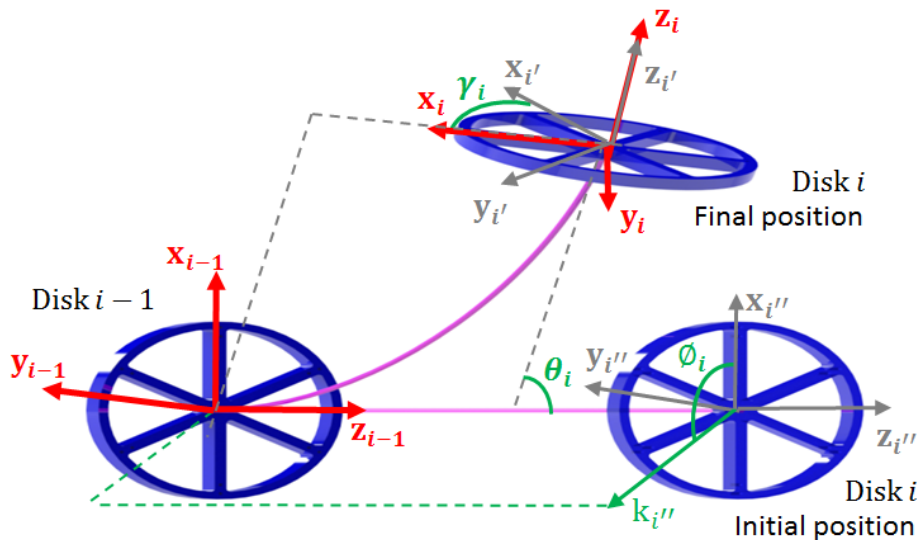
$$\begin{bmatrix} c \gamma_i & -s \gamma_i & 0 \\ s \gamma_i & c \gamma_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

درحالی‌که:

$$s. = \sin(.), \quad c. = \cos(.), \quad v. = 1 - \cos(.)$$

پارامترهای  $\alpha_i$  و  $\beta_i$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha_i = c \phi_i \theta_i \quad (2)$$



شکل ۲. نمایش سینماتیک دیسک‌ها و نحوه دوران چهارچوب‌ها نسبت به هم

Fig. 2. The kinematic DOFs of two Consecutive disks with respect to each other



موقعیت و جهت‌گیری چهارچوب متصل به دیسک  $i$ ام نسبت به چهارچوب مرجع به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R_i = \begin{cases} R_0 & i = 0 \\ R_{i-1}R_{l,i} & i = 1:n \end{cases} \quad (13)$$

$$P_i = \begin{cases} P_0 & i = 0 \\ P_{i-1} + R_{i-1}P_{l,i} & i = 1:n \end{cases} \quad (14)$$

در روابط فوق  $R_0$  و  $P_0$  می‌توانند نسبت به هر چهارچوب مرجع دلخواهی تعریف شوند. اگر چارچوب  $\{0\}$  چارچوب مرجع باشد آنگاه ماتریس  $R_0$  ماتریس همانی و بردار  $P_0$  بردار صفر خواهد بود. بردار سرعت زاویه‌ای در چارچوب عمومی به صورت زیر است:

$$\omega_i = \begin{cases} \omega_0 & i = 0 \\ \omega_{i-1} + R_{i-1}\omega_{l,i} & i = 1:n \end{cases} \quad (15)$$

$$v_i = \begin{cases} v_0 & i = 0 \\ v_{i-1} + \omega_{i-1} \times R_{i-1}P_{l,i} + R_{i-1}v_{l,i} & i = 1:n \end{cases} \quad (16)$$

که در آن  $\omega_0$  و  $v_0$  بردارهای سرعت زاویه‌ای و خطی چارچوب  $\{0\}$  نسبت به چارچوب مرجع هستند. اگر چارچوب  $\{0\}$  خود به عنوان چارچوب مرجع انتخاب شود، آنگاه این دو بردار صفر خواهند بود. همچنین،  $v_{l,i}$  مشتق زمانی بردار موقعیت  $P_{l,i}$  است.

### ۲-۳- سینماتیک سوراخ کابل‌ها

ربات پیوسته‌ی مورد مطالعه توسط نیروی کشش  $m$  کابل کنترل می‌شود. کابل  $z$ ام ( $j = 1:m$ ) به دیسک دلخواه شماره‌ی  $t_j$  کنترل می‌شود. کابل  $z$ ام متصل است و از میان دیسک‌های  $0$  تا  $t_j - 1$  عبور می‌کند. طول کابل  $z$ ام را  $l_j$  می‌نامیم و فرض می‌کنیم این طول ثابت باشد. طول بخشی از کابل  $z$ ام را که بین دیسک‌های  $i - 1$  و  $i$  قرار گرفته است  $l_{ij}$  می‌نامیم. همچنین  $l_{0j}$  را طول کابل  $z$ ام بین دیسک شماره  $0$  و محرک  $z$ ام در نظر می‌گیریم. بنابراین رابطه‌ی زیر برای کابل  $z$ ام برقرار است:

$$l_j = \sum_{i=0}^{t_j} l_{ij}, \quad j = 1:m \quad (17)$$

اگر طول ستون فقرات بین دیسک‌های  $i$  و  $i - 1$  را  $L_i$  بنامیم، موقعیت مبدأ چارچوب  $\{i\}$  نسبت به چارچوب  $\{i - 1\}$  به صورت زیر بدست می‌آید [۱۶]:

$$P_{l,i} = L_i \begin{bmatrix} \frac{\beta_i v \theta_i}{\theta_i^2} \\ -\frac{\alpha_i v \theta_i}{\theta_i^2} \\ \frac{s \theta_i}{\theta_i} \end{bmatrix} \quad (7)$$

بردار موقعیت و ماتریس دوران، تنها به ازای  $\theta_i = 0$  تقسیم بر صفر دارند. بنابراین به ازای  $\theta_i = 0$  روابط زیر را به جای روابط (۶) و (۷) استفاده می‌کنیم:

$$R_{l,i} = \begin{bmatrix} c\gamma_i & -s\gamma_i & 0 \\ s\gamma_i & c\gamma_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$P_{l,i} = L_i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

برای پیدا کردن سرعت زاویه‌ای چارچوب  $\{i\}$  نسبت به چارچوب  $\{i - 1\}$  ابتدا ماتریس پاد متقارن  $S$  را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_{l,i} = \dot{R}_{l,i} R_{l,i}^T \quad (10)$$

که در آن  $\dot{R}_{l,i}$  مشتق ماتریس دوران  $R_{l,i}$  است و  $R_{l,i}^T$  ترانهاده‌ی آن است. می‌دانیم رابطه‌ی ماتریس  $S_{l,i}$  و سرعت‌های زاویه نسبی به صورت زیر است:

$$S_{l,i} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{zl,i} & \omega_{yl,i} \\ \omega_{zl,i} & 0 & -\omega_{xl,i} \\ -\omega_{yl,i} & \omega_{xl,i} & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

در این صورت داریم:

$$\omega_{l,i} = \begin{bmatrix} S_{l,i}(3,2) \\ S_{l,i}(1,3) \\ S_{l,i}(2,1) \end{bmatrix} \quad (12)$$

و جهت آن از دیسک  $i-1$  به سمت دیسک  $i$  است. طول این بردار نیز برابر با طول کابل  $j$  ام بین دیسک‌های  $i-1$  و  $i$  است:

$$l_{ij} = N_{ij} \quad (21)$$

بردار یکه‌ی  $n_{ij}$  را همان‌گونه که در شکل ۳ نشان داده شده است به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$n_{ij} = \frac{N_{ij}}{l_{ij}} \quad (22)$$

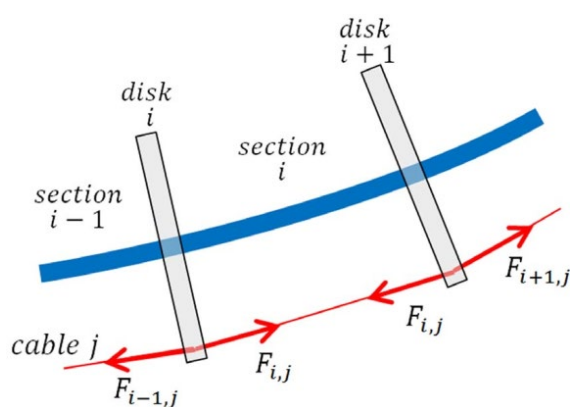
### ۳- معادلات استاتیکی

برای به دست آوردن معادلات استاتیکی از روش توان مجازی معرفی شده در مرجع [۲۵] که از آن به عنوان روش کین نیز یاد می‌شود استفاده شده است. رابطه‌ی توان مجازی برای رباتی که دارای  $n$  قسمت متحرک باشد به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$P = \sum_{i=1}^n (M_{i,ex} \cdot \omega_i + F_{i,ex} \cdot v_i) \quad (23)$$

در این رابطه  $M_{i,ex}$  و  $F_{i,ex}$  به ترتیب برآیند نیروها و گشتاورهای اعمالی خارجی به مرکز جرم قسمت  $i$  ام می‌باشند.  $\omega_i$  و  $v_i$  نیز به ترتیب سرعت‌های خطی و دورانی هر یک از این مراکز جرم می‌باشند که در قسمت سینماتیک محاسبه شده‌اند. نیروها و گشتاورهای اعمالی به ربات به شکل زیر تقسیم‌بندی می‌شوند:

$$M_{i,ex} = M_{i,act} + M_{i,el} \quad (24)$$



شکل ۴. نمایش نیروهای اعمالی از سوی محرک‌ها به دیسک‌ها [۲۴]

Fig. 4. Display of the forces applied to the disks by the actuation cables [24]

مطابق شکل ۳، کابل  $j$  ام حین عبور از دیسک‌های 0 تا  $t_j$  از فاصله‌ی  $r_{ij}$  نسبت به مرکز دیسک عبور می‌کند و زاویه‌ی آن با محور  $x_i$  برابر با  $\eta_{ij}$  است. بنابراین موقعیت محل عبور کابل  $j$  ام از دیسک  $i$  ام در چارچوب محلی  $\{i\}$  به صورت زیر خواهد بود:

$$r_{l,ij} = \begin{bmatrix} r_{ij} \cos(\eta_{ij}) \\ r_{ij} \sin(\eta_{ij}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

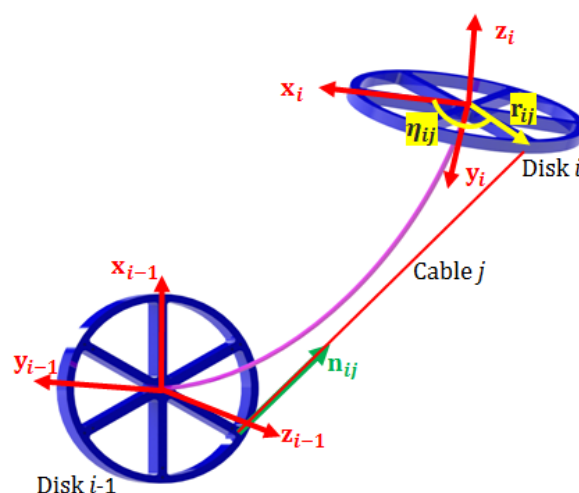
همچنین موقعیت محل عبور کابل  $j$  ام از دیسک  $i$  ام در چارچوب عمومی به صورت زیر خواهد بود:

$$p_{c,ij} = P_i + R_i r_{l,ij}, \quad j = 1 : m, \quad i = 0 : t_j \quad (19)$$

بردار  $N_{ij}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N_{ij} = p_{c,ij} - p_{c,(i-1)j}, \quad j = 1 : m, \quad i = 1 : t_j \quad (20)$$

این بردار مماس بر کابل  $j$  ام بین دیسک‌های  $i-1$  و  $i$  است



شکل ۳. نمایش فاصله و زاویه‌ی کابل نسبت به چارچوب محلی حین عبور از میان دیسک‌ها

Fig. 3. Representation of the distance and the angle of the cable relative to the local frame as it pass through the disks

درجات آزادی ربات در نظر گرفته شود. پیشنهاد می‌شود برای  $\beta_i$  و  $\gamma_i$  مقدار اولیه‌ی غیر صفر در نظر گرفته شود.

#### ۴- شبیه‌سازی و ارزیابی مدل استاتیکی

##### ۴-۱ نمونه‌ی آزمایشگاهی

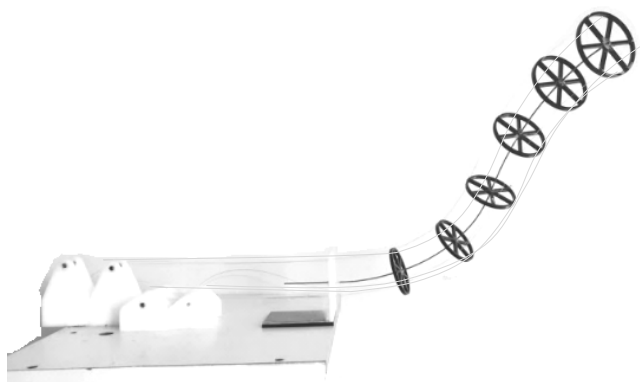
شکل ۵ ربات پیوسته با محرک کابلی را نشان می‌دهد. این ربات از یک میله‌ی منعطف از جنس فولاد فنر به‌عنوان ستون فقرات بهره می‌برد. تعداد ۷ دیسک با فواصل یکسان بر روی این ربات قرار گرفته است. این دیسک‌ها ربات را به ۶ قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. دیسک‌ها به ترتیب از ۰ تا ۶ شماره‌گذاری شده‌اند و دیسک شماره ۰ پایه ربات است. همچنین ۳ کابل محرک به دیسک آخر متصل شده‌اند که وظیفه‌ی اعمال نیرو را برعهده دارند. کابل شماره ۱ در نیمه بالایی دیسک و در جهت عمود بر صفحه می‌باشد. کابل شماره دو ۱۲۰ درجه در جهت عقربه‌های ساعت با کابل شماره یک اختلاف زاویه دارد و کابل شماره سه ۱۲۰ در جهت عکس عقربه‌های ساعت با کابل شماره یک اختلاف زاویه دارد.

مشخصات ربات پیوسته‌ی ساخته‌شده در جدول ۱ آورده شده

است:

##### ۴-۲ ارزیابی مدل استاتیکی

به‌منظور ارزیابی صحت مدل استاتیکی، دو آزمایش مختلف بر روی ربات انجام شد. این آزمایش‌ها شامل آزمایش تعادل استاتیکی ربات در



شکل ۵. ربات پیوسته ساخته‌شده در آزمایشگاه. دارای ۷ دیسک و ستون فقراتی از جنس فولاد فنر

Fig. 5. The continuum robot built in the laboratory, which has 7 discs and a backbone made of spring steel.

$$F_{i,ex} = F_{i,gr} + F_{i,act} \quad (25)$$

نیروی  $F_{i,act}$  برآیند نیروهای ناشی از کشش کابل‌های محرک بر دیسک  $i$  ام می‌باشد. نیروی ناشی از کابل‌های محرک در شکل ۴ نشان داده شده است. هر یک از این نیروها نسبت به مرکز دیسک  $i$  گشتاوری ایجاد می‌کند. برآیند این گشتاورها برابر با  $M_{i,act}$  است.  $M_{i,el}$  برآیند گشتاورهای ناشی از خمش و پیچش ستون فقرات ربات به مرکز دیسک  $i$  می‌باشد. در نهایت نیروی گرانش ناشی از جرم هر قسمت می‌باشد.

اگر درجات آزادی ربات با  $q_k$  و مشتق آن با  $\dot{q}_k$  نشان داده شوند، آنگاه می‌توان روابط سرعت خطی و زاویه‌ای ربات را بر اساس مشتقات جزئی آن‌ها نسبت به درجات آزادی ربات به صورت زیر نوشت:

$$\omega_i = \sum_k \omega_{i,k} \dot{q}_k \quad (26)$$

$$v_i = \sum_k v_{i,k} \dot{q}_k \quad (27)$$

در این صورت رابطه‌ی توان مجازی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P = \sum_{i=1}^n \sum_k \left( M_{i,ex} \cdot \omega_{i,k} + F_{i,ex} \cdot v_{i,k} \right) \dot{q}_k \quad (28)$$

برای آن که ربات در تعادل استاتیکی قرار داشته باشد، باید تغییرات توان مجازی ربات  $\Delta P$  به ازای تمامی تغییرات ممکن  $\Delta \dot{q}_k$  صفر شود. در نتیجه باید داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^n \left( M_{i,ex} \cdot \omega_{i,k} + F_{i,ex} \cdot v_{i,k} \right) = 0 \quad (29)$$

حال با داشتن  $M_{i,ex}$ ،  $F_{i,ex}$ ،  $\omega_{i,k}$  و  $v_{i,k}$  می‌توان ماتریس تعادل استاتیکی را بر اساس درجات آزادی ربات تشکیل داد و مجهولات مسئله که درجات آزادی سیستم می‌باشند را به‌دست آورد. برای تعیین مجهولات مذکور می‌توان از نرم‌افزار متلب<sup>۱</sup> و دستورات  $\text{fsolve}$  آن استفاده کرد. برای این منظور لازم است تا مقادیر اولیه‌ای برای

1 Matlab

2 fsolve

جدول ۱. مشخصات مکانیکی و هندسی ربات ساخته شده در آزمایشگاه

Table 1. Mechanical and geometric specifications of the robot made in the laboratory

ممان قطبی	ممان دوم سطح	مدول برشی	مدول یانگ	وزن هر قسمت	زاویه‌ی سوراخ‌ها	فاصله مرکز دیسک تا سوراخ	طول هر قسمت
$J_{zz} (m^4)$	$J_{xx}, J_{yy} (m^4)$	$G (GPa)$	$E (GPa)$	$M_i (gr)$	(deg)	$r_{ij} (mm)$	$L_i = l (m)$
$9/94 \times 10^{-12}$	$4/97 \times 10^{-12}$	۷۲	۲۱۰	۵/۰۳	۱۲۰	۲۸	۰/۰۸

در این رابطه  $P_{ie}$  و  $P_{is}$  موقعیت مرکز دیسک  $i$  ام، به ترتیب در نمونه‌ی آزمایشگاهی و در مدل‌سازی می‌باشد. در نتیجه،  $Er$  نسبت خطای موقعیت دیسک بر طول کل ربات بر حسب درصد است. بر اساس اندازه‌گیری‌های انجام شده حداکثر درصد خطای مدل‌سازی در بارگذاری صفحه‌ای برابر ۱/۸٪ است.

#### ۴-۲-۲ بارگذاری خارج صفحه

در این مرحله، جهت اعمال نیروی خارج صفحه به ربات، ابتدا کابل شماره‌ی ۱ با وزنه‌ای به اندازه ۶۰۰ گرم کشیده شده و سپس نیروی اعمالی به کابل شماره ۲ در مراحل مختلف از ۰ تا ۶۰۰ گرم به تدریج افزایش پیدا می‌کند. شکل ۷ نتایج شبیه‌سازی و آزمایش را نشان می‌دهد. حداکثر خطای موقعیت در این آزمایش ۷/۱۱٪ برای دیسک ۵ در نیروی کشش ۵۰۰ گرم برای کابل شماره ۲ است.

#### ۵- بررسی پایداری ربات‌های پیوسته بر اساس روش انرژی

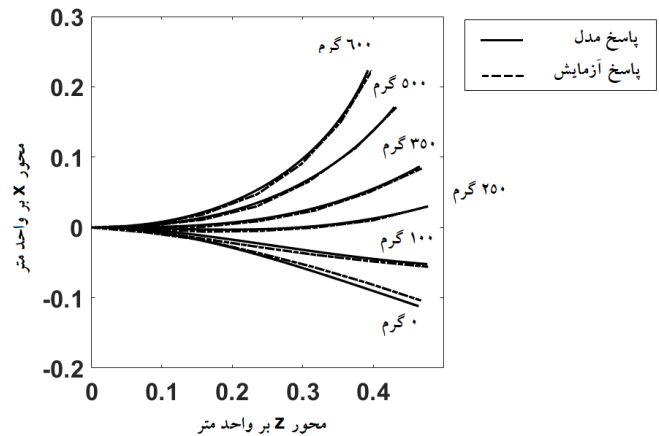
در این بخش، با تعریف ماتریس سختی روشی برای بررسی پایداری ربات‌های پیوسته در ناحیه کاری خود ارائه می‌شود.

#### ۵-۱ معرفی روش انرژی در تحلیل پایداری

یکی از روش‌های تحلیل پایداری، روش استفاده از ماتریس سختی است [۳۱، ۳۲]. در این روش ابتدا تابع انرژی پتانسیل کل سیستم،  $\Pi$ ، به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\Pi = U - W_e \quad (31)$$

با فرض پایستاربودن تمام نیروهای اعمالی به ربات،  $U$  انرژی پتانسیل الاستیک ربات و  $W_e$  کار انجام شده توسط نیروهای خارجی پایستار می‌باشد. بر اساس سینماتیک معرفی شده در بخش ۳ معادله‌ی



شکل ۶. مقایسه نتایج مدل‌سازی ریاضی با نتایج حاصل از نمونه آزمایشگاهی در بارگذاری‌های مختلف در داخل صفحه

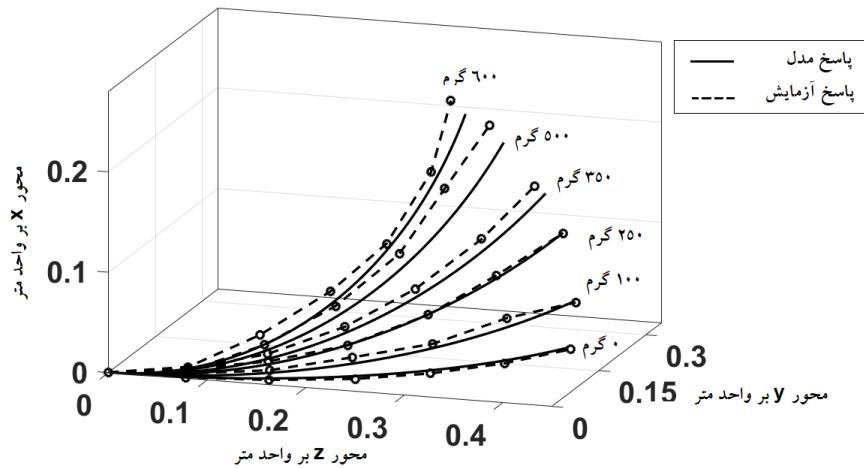
Fig. 6. Comparison of the simulation results and the experimental results in planar actuation of the robot

بارگذاری صفحه‌ای و آزمایش تعادل استاتیکی ربات در بارگذاری خارج از صفحه می‌شود. در ادامه نتایج هر کدام از این حالت‌ها ارائه شده است.

#### ۴-۲-۱ بارگذاری داخل صفحه

برای ارزیابی مدل استاتیکی در بارگذاری صفحه‌ای، بدون آن که نیروی خارجی به ربات اعمال شود، تنها از نیروی کشش کابل شماره ۱ برای تغییر شکل ربات استفاده شد. به منظور اعمال نیرو از طریق کابل ۱ به ربات، این کابل با وزنه‌های مختلفی از جرم ۰ گرم تا ۶۰۰ گرم کشیده شد. در نتیجه‌ی این بارگذاری، ربات دچار تغییر شکل شد. شکل ۶ نتایج تجربی حاصل از این بارگذاری را با نتایج شبیه‌سازی مقایسه می‌کند. مشاهده می‌شود که مطابقت بسیار خوبی بین نتایج تجربی و شبیه‌سازی وجود دارد. همچنین به منظور کمی‌سازی نتایج، از رابطه‌ی (۳۰) جهت محاسبه‌ی درصد خطای نتایج استفاده می‌شود:

$$Er = \frac{\sqrt{P_{ie} - P_{is}}}{\sum_{i=1}^n L_i} \times 100, \quad i = 1 : n \quad (30)$$



شکل ۷. مقایسه نتایج مدل سازی ریاضی با نتایج حاصل از نمونه آزمایشگاهی در بارگذاری های مختلف در خارج صفحه

Fig. 7. Comparison of the simulation results and the experimental results in out-of-lane actuation of the robot

مقادیر ویژه منفی باشد سیستم ناپایدار خواهد بود. با تغییر بارگذاری در ربات، وضعیت تعادل ربات جابجا می شود و مقادیر ویژه آن نیز عوض می شود. هرگاه با تغییر در بارگذاری، کوچک ترین مقدار ویژه مربوط به وضعیت تعادل ربات صفر شود، ربات به مرز پایداری می رسد و پس از آن ربات ناپایدار شده و به سمت وضعیت تعادل دیگری حرکت می کند که این پدیده، جهش نام دارد.

#### ۵-۲- بررسی پایداری ربات پیوسته در صفحه

در این بخش برای بررسی پایداری ربات پیوسته، ابتدا وزنه ای به نوک ربات متصل شده، سپس نیروی کشش کابل ۱ به تدریج از ۰ نیوتن تا ۲۰ افزایش می یابد. در مرحله ی بعد به ازای هر بارگذاری، ابتدا وضعیت تعادل ربات به دست می آید و پس از آن ماتریس سفتی و مقادیر ویژه آن محاسبه می شود. شکل ۸ موقعیت های تعادل ربات به ازای وزنه ی ۳۰ گرمی متصل به نوک ربات را نشان می دهد. همانگونه که در این شکل مشاهده است در هیچ یک از بارگذاری ها پدیده ی جهش رخ نمی دهد و تغییر شکل ربات به صورت پیوسته انجام می شود. شکل ۹ نیز نمودار کمترین مقدار ویژه ی ماتریس سفتی در مقایسه با نیروی کشش کابل ۱ را نشان می دهد. همانطور که مشاهده می شود، کمترین مقدار ویژه همواره مثبت است. بنابراین ربات همواره در ناحیه ی پایدار خود دارد. بنابراین نتایج شکل ۸ و شکل ۹ مطابقت بسیار خوبی با یکدیگر دارند. در مرحله ی دوم، مقدار وزنه ی متصل به نوک ربات به ۵۰ گرم

انرژی پتانسیل کل برای یک ربات پیوسته با محرک کابلی با فرض ثابت بودن نیروی کشش کابل ها به شکل زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_{r=1}^n \frac{GJ_{zz}}{2l} \alpha_r^2 \\ & + \frac{EJ_{xx}}{2l} \beta_r^2 + \frac{EJ_{xx}}{2l} \frac{\beta_r}{s \beta_r} \gamma_r^2 \\ & - \sum_{r=1}^n M_r \mathbf{g}^T \mathbf{p}_r \end{aligned} \quad (32)$$

که در آن  $\mathbf{g}$  بردار شتاب جاذبه است. سپس از  $\Pi$  نسبت به تمام درجات آزادی ربات،  $q_i, i = 1 : n$ ، دو بار مشتق گرفته می شود تا ماتریس سفتی  $s$  که همان ماتریس مشتقات جزئی است به شکل زیر بدست آید:

$$s = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_j} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_n \partial q_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_n \partial q_j} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_n \partial q_n} \end{bmatrix} \quad (33)$$

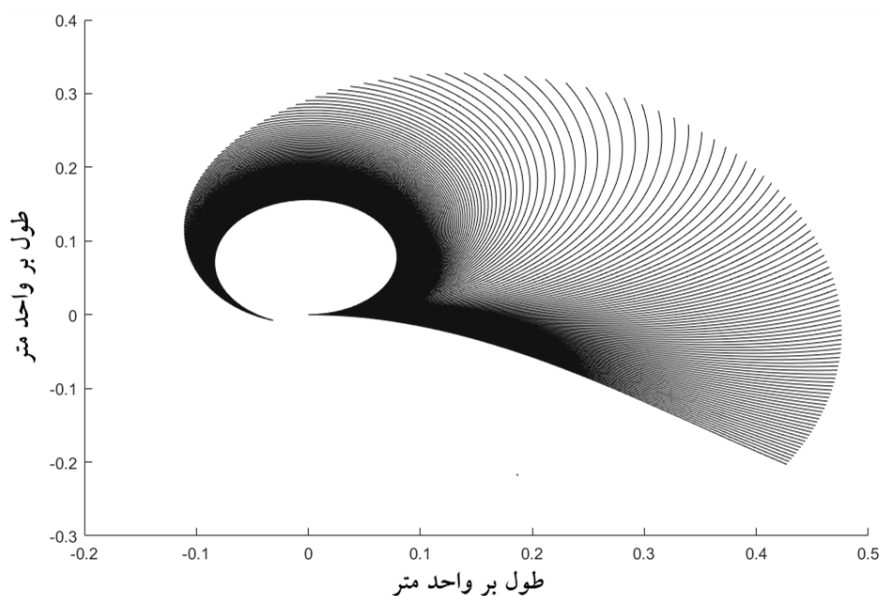
پس از آن، مقادیر ویژه ی ماتریس سفتی محاسبه می شود. اگر تمامی مقادیر ویژه به ازای یک نقطه ی تعادل مشخص مثبت باشند، ربات در آن نقطه دارای تعادل پایدار است. اما اگر حداقل یکی از

معنای رسیدن ربات به مرز پایداری و وقوع پدیده‌ی جهش است.

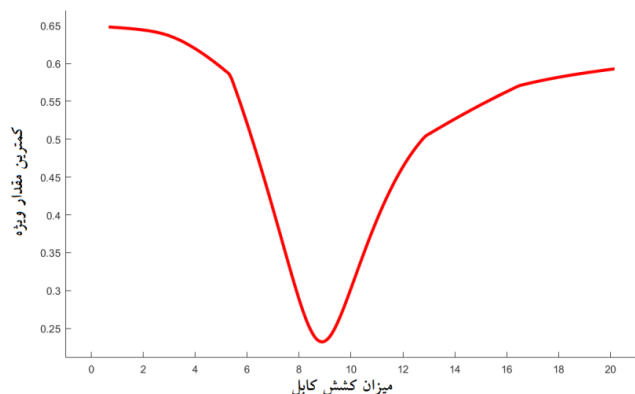
### ۶- بررسی فضای کاری

شبیه‌سازی‌ها و آزمایش‌های مختلف نشان می‌دهند که عوامل مختلفی از جمله جرم وزنه‌ی متصل به نوک ربات، جهت‌گیری ربات در فضا و سطح مقطع ستون فقرات ربات می‌تواند بر فضای کاری و وقوع پدیده‌ی جهش موثر باشد. از این رو، ادامه به بررسی تاثیر عوامل

افزایش داده شد و کابل ۱ تحت کشش قرار گرفت. مطابق شکل ۱۰، با افزایش نیروی کشش کابل ۱ وضعیت تعادل استاتیکی ربات به تدریج دچار تغییر می‌شود تا این که به ازای اعمال نیروی ۹/۲ نیوتن به مرز ناحیه‌ی پایدار خود رسیده و پدیده‌ی جهش در آن رخ داده است. شکل ۱۱ نمودار کمترین مقدار ویژه و ویژه‌ی ماتریس سفتی به ازای نیروی کشش کابل ۱ نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود در مرحله‌ای از بارگذاری مقدار ویژه‌ی ربات صفر می‌شود. این مساله به

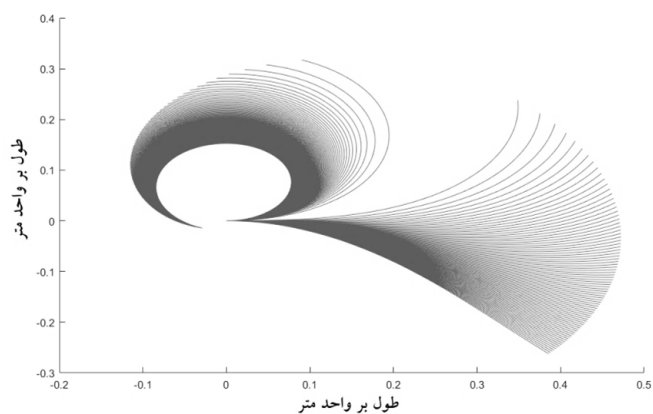


شکل ۸. موقعیت ربات پیوسته در بارگذاری‌های ۱ نیوتن تا ۲۰ با افزایش ۰/۱ نیوتنی درحالی که وزنه‌ای به اندازه‌ی ۳۰ گرم به انتهای آن متصل است.  
**Fig. 8. The static configurations of the continuum robot when a 30gr mass load is attached to the robot's tip and the actuation force increases gradually**



شکل ۹. نمودار تغییرات مقدار ویژه به مقدار کشش کابل با بار انتهایی ۳۰ گرم

**Fig. 9. The smallest Eigen value of the stiffness matrix vs. the actuation cable's force for a 30gr mass load at the robot's tip**



شکل ۱۰. موقعیت ربات پیوسته در بارگذاری‌های ۱ نیوتن تا ۲۰ با افزایش ۰/۱ نیوتنی درحالی که وزنه‌ای به اندازه ۵۰ گرم به انتهای آن متصل است و مشاهده وقوع پدیده‌ی جهش

**Fig. 10. The static configurations of the continuum robot when a 50gr mass load is attached to the robot's tip and the actuation force increases gradually**

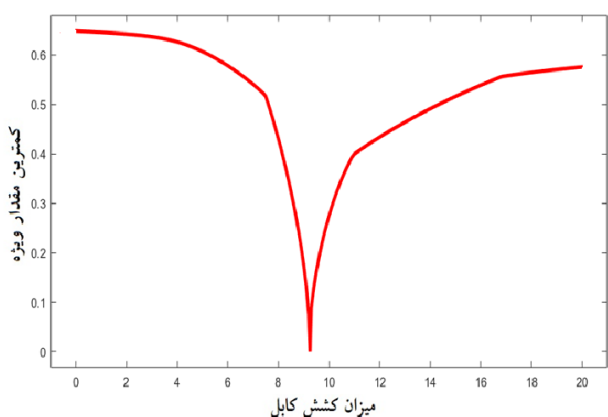
ربات در حالتی که جرمی به نوک آن متصل نیست بدست آمد. شکل ۱۲ نمودار موقعیت مکانی ربات در بارگذاری‌هایی مابین ۱ تا ۲۰ نیوتن را به ازای شرایط مذکور نمایش می‌دهد.

برای بررسی پایداری ربات در این وضعیت، مانند مراحل قبل نمودار کمترین مقدار ویژه ربات به ازای نیروی کشش کابل مطابق شکل ۱۳ رسم شد. همان‌طور که قابل مشاهده است ربات به مرز پایداری نزدیک نمی‌شود.

شکل ۱۴ به مقایسه فضای کاری ربات در حالت بدون بارگذاری

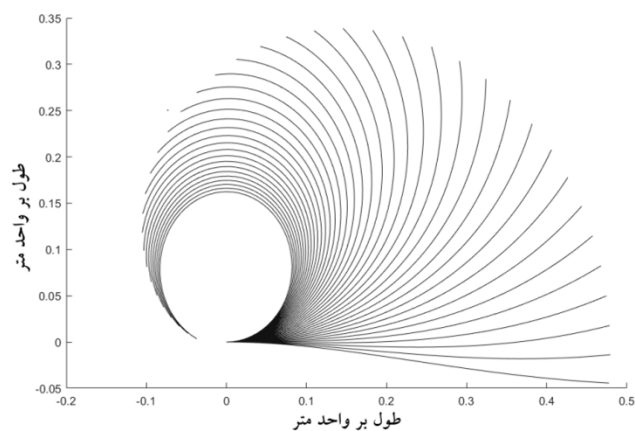
اشاره شده بر فضای کاری ربات پرداخته می‌شود.

۱-۶ تأثیر جرم وزنه‌ی متصل به نوک ربات پیوسته بر فضای کاری آن اکثر ربات‌های پیوسته برای انجام یک عمل خاص از یک گیرنده در محل مجری نهایی خود استفاده می‌کنند. همان‌طور که در بخش قبل مشاهده شد جرم وزنه‌ی آویزان‌شده در نوک ربات می‌تواند بر پایداری و فضای کاری آن تأثیر داشته باشد. به منظور بررسی تأثیر جرم وزنه‌ی متصل به نوک ربات بر فضای کاری آن، ابتدا مسیر حرکت



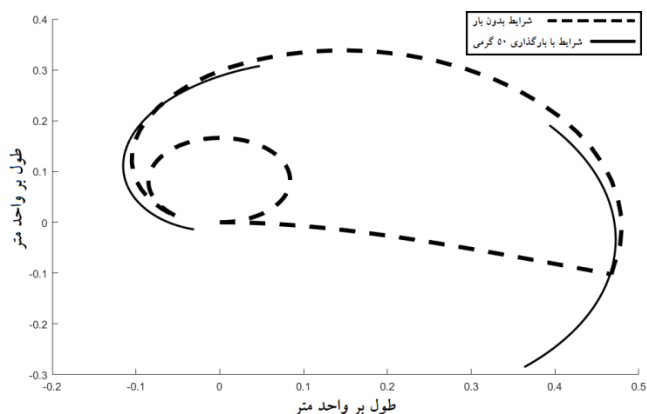
شکل ۱۱. نمودار تغییرات مقدار ویژه ماتریس سفتی به مقدار کشش کابل با وزنه‌ی انتهایی ۵۰ گرم و مشاهده وقوع پدیده‌ی جهش

**Fig. 11. The smallest Eigen value of the stiffness matrix vs. the actuation cable's force for a 50gr mass load at the robot's tip**



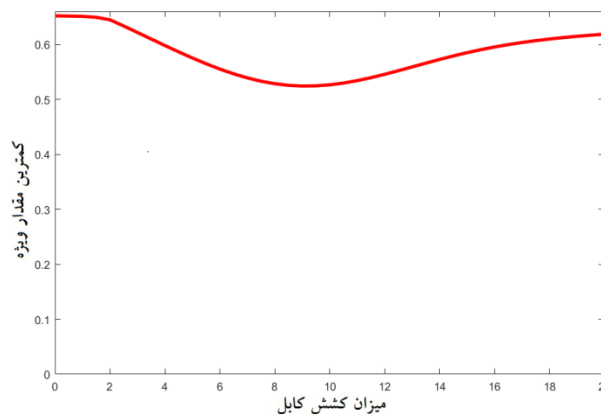
شکل ۱۲. موقعیت ربات پیوسته در بارگذاری‌های ۱ نیوتن تا ۲۰ با افزایش ۰/۵ نیوتنی درحالی‌که وزنه‌ای به نوک آن متصل نیست.

**Fig. 12. The static configurations of the continuum robot when there is no mass load at the robot's tip and the actuation force increases gradually**



شکل ۱۴. مقایسه فضای کاری ربات در حالت بدون بارگذاری و در حین بارگذاری ۵۰ گرمی

**Fig. 14. The workspace of the robot when there is no load the robot's tip compared to a situation that a 50gr mass load is attached to the robot's tip**



شکل ۱۳. نمودار تغییرات مقدار ویژه ماتریس سفتی به مقدار کشش کابل بدون وزنه‌ی انتهایی و نمایش عدم وقوع پدیده‌ی جهش

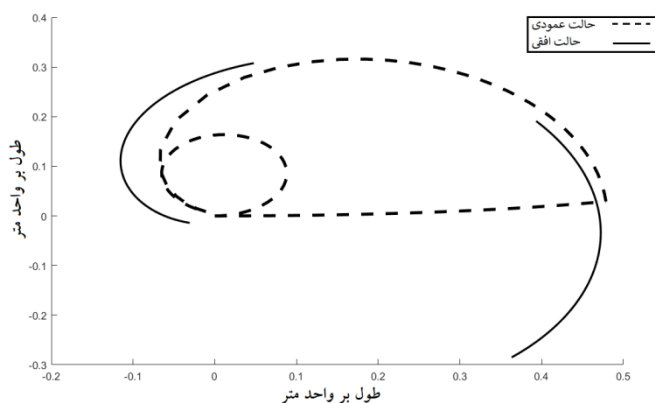
**Fig. 13. The smallest Eigen value of the stiffness matrix vs. the actuation cable's force when there is no mass load at the robot's tip**

ربات را کاهش دهد در نتیجه باید در انتخاب جهت‌گیری و میزان بار انتهایی دقت لازم را به عمل آورد و بهینه‌ترین حالت ممکن را انتخاب نمود.

### ۳-۶ تأثیر سطح مقطع ربات پیوسته بر فضای کاری آن

از دیگر عواملی که می‌تواند تأثیر چشمگیری در فضای کاری ربات داشته باشد مقاومت ستون فقرات ربات در مقابل خمش می‌باشد. با ثابت نگه‌داشتن جنس ربات می‌توان این افزایش مقاومت در مقابل خمش را از طریق افزایش مساحت سطح مقطع به دست آورد. نتایج زیر با بارگذاری ۵۰ گرم و با افزایش ۲۵ درصدی مساحت سطح مقطع و نیروی کشش کابل از ۱ تا ۴۰ نیوتن حاصل شده است. همان‌طور که در شکل ۱۷ مشاهده می‌شود ربات در تمامی مراحل بارگذاری دچار پدیده‌ی جهش نمی‌شود. البته لازم به ذکر است که در این مرحله برای رسیدن به چنین فضای کاری، بیشترین مقدار نیروی کشش کابل از ۲۰ نیوتن به ۴۰ نیوتن افزایش داده شده است. در ادامه شکل ۱۸ به مقایسه فضای کاری در این وضعیت و حالت عادی پرداخته می‌شود:

همان‌طور که مشاهده شد عوامل مختلف می‌توانند تأثیر متفاوتی بر فضای کاری ربات پیوسته داشته باشند. بعضی از موارد اشاره شده می‌توانند دامنه پایداری ربات پیوسته را افزایش بدهند درحالی‌که دامنه حرکتی ربات پیوسته کاهش پیدا می‌کند. مانند زمانی که طول ربات را کاهش یا سطح مقطع ربات را افزایش می‌دهیم. عواملی دیگر مانند تغییر جهت فضایی ربات از حالت افقی به عمودی می‌تواند با



شکل ۱۶. مقایسه فضای کاری ربات در حالت افقی و عمودی در حین بارگذاری ۵/۰ نیوتنی

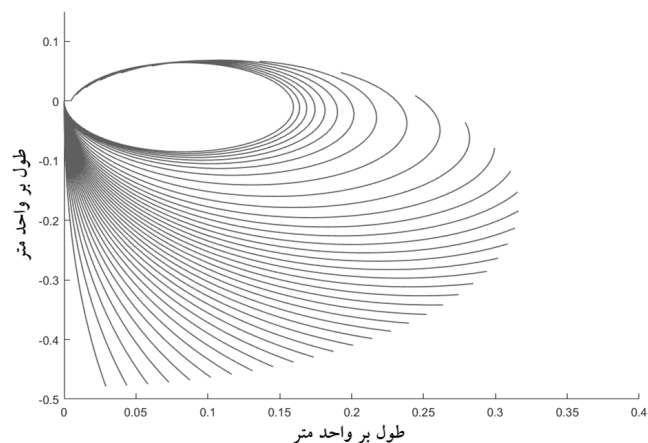
Fig. 16. Comparison of the robot's workspace in horizontal and vertical orientation of the robot when a 50gr mass load is attached to the robot's tip

و در حین بارگذاری ۵۰ گرمی در نوک ربات می‌پردازد. مشاهده می‌شود که ربات پیوسته در وضعیت بدون بارگذاری دچار جهش نمی‌شود و در فضای کاری خود به شکل پیوسته عمل می‌کند. اما در هنگام متصل‌شدن وزنه‌ی ۵۰ گرمی به نوک ربات، بخشی از فضای کاری نسبت به حالت بدون وزنه حذف شده است که این اتفاق ناشی از وقوع پدیده‌ی جهش می‌باشد.

### ۲-۶ تأثیر جهت‌گیری ربات پیوسته در فضا بر فضای کاری آن

اکثر ربات‌های پیوسته‌ی بررسی شده در مقالات به صورت افقی قرار گرفته‌اند. در این بخش بررسی می‌شود که اگر ربات پیوسته به شکل عمودی قرار بگیرد چه تأثیری در فضای کاری و همچنین میزان پایداری ربات دارد. برای این منظور به ربات پیوسته‌ی عمودی وزنه‌ی ۵۰ گرمی متصل می‌شود و مطابق شکل ۱۵ مشاهده می‌شود برخلاف حالت افقی ربات در این شرایط دچار پدیده‌ی جهش نمی‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت تغییر جهت‌گیری ربات پیوسته از حالت افقی به عمودی باعث افزایش میزان پایداری ربات می‌شود.

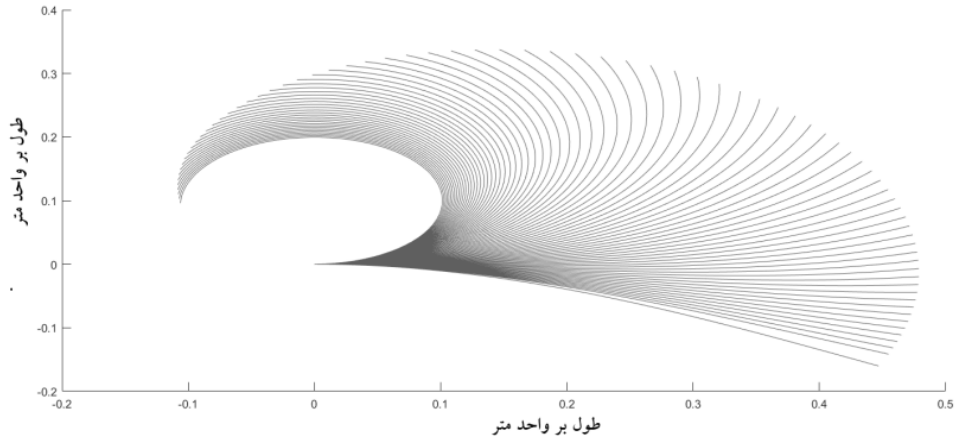
در شکل ۱۶ به مقایسه فضای کاری ربات پیوسته در دو حالت عمودی و افقی پرداخته شده است. با توجه به شکل ۱۶ می‌توان دریافت، با این‌که تغییر جهت‌گیری ربات پیوسته می‌تواند باعث افزایش میزان پایداری آن شود با این حال می‌تواند نقاط قابل‌دسترسی برای



شکل ۱۵. موقعیت ربات پیوسته در بارگذاری‌های ۱ تا ۲۰ نیوتن در حالت عمودی با افزایش ۰/۵ نیوتنی کشش کابل ۱ درحالی‌که وزنه‌ای به اندازه ۵۰ گرم به انتهای آن متصل است

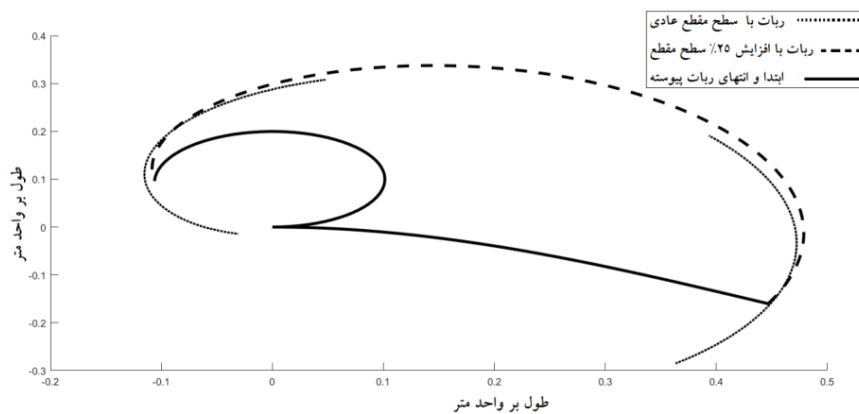
Fig. 15. The static configurations of the continuum robot in vertical orientation when a 50gr mass load is attached to the robot's tip and the actuation force increases gradually.





شکل ۱۷. موقعیت ربات پیوسته در بارگذاری‌های ۱ تا ۴۰ نیوتن در حالت افزایش ۲۵٪ سطح مقطع با بار انتهایی ۵۰ گرم

**Fig. 17. The static configurations of the continuum robot with 25% increase in the robot's cross section when a 50gr mass load is attached to the robot's tip and the actuation force increases gradually**



شکل ۱۸. مقایسه فضای کاری ربات در حالت عادی با بار انتهایی ۵۰ گرم با حالت افزایش ۲۵٪ سطح مقطع با بار انتهایی ۵۰ گرم

**Fig. 18. The workspace of the robot when a 50gr mass load is attached to the robot's tip in two conditions, with normal cross section and 25% increase in the robot's cross section**

پیوسته با استفاده از نتایج به دست آمده امکان بررسی فضای کاری با در نظر گرفتن پدیده‌ی جهش به وجود آمده است. از این رو این مقاله پیشنهادات زیر را برای افزایش این فضا ارائه می‌دهد:

۱- وزنه‌ی انتهایی متصل به ربات پیوسته می‌تواند در پایداری ربات بسیار تاثیرگذار باشد و با افزایش آن ربات سریع‌تر به مرز پایداری می‌رسد و دچار جهش می‌شود که در نتیجه بخشی از فضای کاری خود را از دست می‌دهد.

۲- می‌توان با افزایش در اندازه‌ی سطح مقطع ربات، میزان پایداری را تا حد چشمگیری افزایش داد. البته لازم به ذکر است که در مقابل به نیروی بیشتری نیز برای کشش کابل‌ها احتیاج است.

داشتن فضای حرکتی مناسب، دامنه پایداری ربات را نیز افزایش داده است.

#### ۷- جمع بندی

در این پژوهش پایداری ربات‌های پیوسته با محرک کابلی مطالعه شد و وقوع پدیده‌ی جهش در آن این ربات‌ها مورد بررسی قرار گرفت. از آنجا که بررسی پایداری ربات مستلزم استفاده از یک مدل استاتیکی مناسب است، در این مقاله از یک مدل سینماتیکی و استاتیکی سه بعدی با در نظر گرفتن خمش و پیچش در ربات استفاده شد. به منظور ارزیابی صحت مدل، نتایج شبیه‌سازی با نتایج تجربی مقایسه، و صحت مدل ارزیابی شد. بعد از تحقیق در مورد پایداری ربات‌های

[9] A. Wolf, H.B. Brown, R. Casciola, A. Costa, M. Schwerin, E. Shamas, H. Choset, A mobile hyper redundant mechanism for search and rescue tasks, in: Proceedings 2003 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2003)(Cat. No. 03CH37453), IEEE, 2003, pp. 2889-2895.

[10] J. Burgner-Kahrs, D.C. Rucker, H. Choset, Continuum robots for medical applications: A survey, IEEE Transactions on Robotics, 31(6) (2015) 1261-1280.

[11] N. Simaan, R. Taylor, P. Flint, A dexterous system for laryngeal surgery, in: IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA'04. 2004, IEEE, 2004, pp. 351-357.

[12] N. Simaan, Snake-like units using flexible backbones and actuation redundancy for enhanced miniaturization, in: Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation, IEEE, 2005, pp. 3012-3017.

[13] G.S. Chirikjian, A general numerical method for hyper-redundant manipulator inverse kinematics, in: [1993] Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation, IEEE, 1993, pp. 107-112.

[14] I.A. Gravagne, I.D. Walker, On the kinematics of remotely-actuated continuum robots, in: Proceedings 2000 ICRA. Millennium Conference. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Symposia Proceedings (Cat. No. 00CH37065), IEEE, 2000, pp. 2544-2550.

[15] I.A. Gravagne, I.D. Walker, Kinematic transformations for remotely-actuated planar continuum robots, in: Proceedings 2000 ICRA. Millennium Conference. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Symposia Proceedings (Cat. No. 00CH37065), IEEE, 2000, pp. 19-26.

[16] R.J. Webster III, B.A. Jones, Design and kinematic modeling of constant curvature continuum robots: A review, The International Journal of Robotics Research, 29(13) (2010) 1661-1683.

[17] F. Qi, F. Ju, D. Bai, Y. Wang, B. Chen, Kinematic analysis and navigation method of a cable-driven continuum robot used for minimally invasive surgery, The International Journal of Medical Robotics and Computer Assisted

۳- تأثیر جهت‌گیری ربات پیوسته بر فضای کاری و میزان پایداری در این مقاله نشان داده شد. پس می‌توان در صورت امکان ربات پیوسته را برای افزایش میزان پایداری که در نتیجه افزایش فضای کاری را به همراه دارد به صورت عمودی استفاده کرد.

### منابع

[1] G. Robinson, J.B.C. Davies, Continuum robots-a state of the art, in: Proceedings 1999 IEEE international conference on robotics and automation (Cat. No. 99CH36288C), IEEE, 1999, pp. 2849-2854.

[2] H. Ohno, S. Hirose, Study on slime robot (proposal of slime robot and design of slim slime robot), in: Proceedings. 2000 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2000)(Cat. No. 00CH37113), IEEE, 2000, pp. 2218-2223.

[3] B.A. Jones, I.D. Walker, Practical kinematics for real-time implementation of continuum robots, IEEE Transactions on Robotics, 22(6) (2006) 1087-1099.

[4] S. Cobos-Guzman, D. Axinte, J. Kell, A Novel Continuum Robot Using Twin-Pivot Compliant Joints: Design, Modeling, and Validation.

[5] Z.Y. Bayraktaroglu, Snake-like locomotion: Experimentations with a biologically inspired wheel-less snake robot, Mechanism and Machine Theory, 44(3) (2009) 591-602.

[6] W. McMahan, B. Jones, I. Walker, V. Chitrakaran, A. Seshadri, D. Dawson, Robotic manipulators inspired by cephalopod limbs, Proceedings of the Canadian Engineering Education Association (CEEA), (2004).

[7] X. Dong, D. Axinte, D. Palmer, S. Cobos, M. Raffles, A. Rabani, J. Kell, Development of a slender continuum robotic system for on-wing inspection/repair of gas turbine engines, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 44 (2017) 218-229.

[8] J. Casper, R.R. Murphy, Human-robot interactions during the robot-assisted urban search and rescue response at the world trade center, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), 33(3) (2003) 367-385.

- Hybrid Position-Force Actuation Mode, Journal of Mechanisms and Robotics, 12(5) (2020).
- [27] A. Amouri, C. Mahfoudi, A. Zaatri, Dynamic Modeling of a Spatial Cable-Driven Continuum Robot Using Euler-Lagrange Method, International Journal of Engineering and Technology Innovation, 10(1) (2019) 60.
- [28] A. Amouri, A. Zaatri, C. Mahfoudi, Dynamic modeling of a class of continuum manipulators in fixed orientation, Journal of Intelligent & Robotic Systems, 91(3-4) (2018) 413-424.
- [29] R.J. Webster III, J.M. Romano, N.J. Cowan, Mechanics of precurved-tube continuum robots, IEEE Transactions on Robotics, 25(1) (2008) 67-78.
- [30] Q. Peyron, K. Rabenoroosa, N. Andreff, P. Renaud, A numerical framework for the stability and cardinality analysis of concentric tube robots: Introduction and application to the follow-the-leader deployment, Mechanism and Machine Theory, 132 (2019) 176-192.
- [31] J. Till, D.C. Rucker, Elastic stability of Cosserat rods and parallel continuum robots, IEEE Transactions on Robotics, 33(3) (2017) 718-733.
- [32] X. Wang, D. Zhuang, S. Geng, Y. Liu, R. Kang, Stability Analysis of Rod-Driven Continuum Robots Based on Finite Element Models to Avoid Buckling, in: 2019 IEEE 9th Annual International Conference on CYBER Technology in Automation, Control, and Intelligent Systems (CYBER), IEEE, 2019, pp. 215-220.
- [33] L. Cedolin, Stability of structures: elastic, inelastic, fracture and damage theories, World Scientific, 2010.
- [34] M. Ohsaki, K. Ikeda, Stability and optimization of structures: generalized sensitivity analysis, Springer Science & Business Media, 2007.
- Surgery, 15(4) (2019) e2007.
- [18] S. Sara, Farid, T. pour, G. rad, Cinematic modeling of continuum robot arm inspired by origami with curved-fixed elements, Modares Mechanical Engineering, 19(11) 0-0.(in persian)
- [19] T. Mahl, A. Hildebrandt, O. Sawodny, A variable curvature continuum kinematics for kinematic control of the bionic handling assistant, IEEE transactions on robotics, 30(4) (2014) 935-949.
- [20] D.C. Rucker, B.A. Jones, R.J. Webster III, A geometrically exact model for externally loaded concentric-tube continuum robots, IEEE Transactions on Robotics, 26(5) (2010) 769-780.
- [21] H. Yuan, L. Zhou, W. Xu, A comprehensive static model of cable-driven multi-section continuum robots considering friction effect, Mechanism and Machine Theory, 135 (2019) 130-149.
- [22] D.C. Rucker, R.J. Webster III, Statics and dynamics of continuum robots with general tendon routing and external loading, IEEE Transactions on Robotics, 27(6) (2011) 1033-1044.
- [23] F. Renda, M. Cianchetti, M. Giorelli, A. Arienti, C. Laschi, A 3D steady-state model of a tendon-driven continuum soft manipulator inspired by the octopus arm, Bioinspiration & biomimetics, 7(2) (2012) 025006.
- [24] Dehghani, Mosavian, A. akbari, Dynamic modeling of continuum robots with curved-fixed elements without singularity computational states, Modares Mechanical Engineering, 14(15) (2015) 231-240. (in persian)
- [25] W.S. Rone, P. Ben-Tzvi, Continuum robot dynamics utilizing the principle of virtual power, IEEE Transactions on Robotics, 30(1) (2013) 275-287.
- [26] A. Ehsani-Seresht, S. Hashemi-Pour Moosavi, Dynamic Modeling of the Cable-Driven Continuum Robots in

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

SH. Hashemi-Pour Moosavi, A. Ehsani-Seresht, Stability analysis and snap-through evaluation of the cable-driven continuum robots, AmirKabir J. Mech Eng., 53(4) (2021) 2089-2104.

DOI: 10.22060/mej.2020.15175.6639



