



تخمین سریع جهت گیری اولیه ناوبری اینرسی براساس فیلتر کالمن و مشاهده گر مود لغزشی مرتبه بالا

سعید خان کلانتری^۱، کاظم حیدری^۲، محسن حاجی زاده^۳، حسن محمدخانی^{۴*}

۱- دانشکده برق و کامپیوتر، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

۲- دانشکده برق و کامپیوتر، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

۳- دانشکده مکانیک، دانشگاه امام حسین، تهران، ایران

۴- دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه امام حسین، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۹/۰۲/۲۶

بازنگری: ۱۳۹۹/۰۴/۲۰

پذیرش: ۱۳۹۹/۰۵/۲۸

ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۶/۰۱

کلمات کلیدی:

ناوبری اینرسی

جهت گیری اولیه

خطای زاویه سمت

فیلتر کالمن

مشاهده گر مود لغزشی مرتبه بالا

خلاصه: سیستم ناوبری اینرسی یک سیستم ناوبری کور بوده و دقت آن کاملاً به دقت تخمین شرایط اولیه و به ویژه جهت گیری اولیه وابسته است، به همین دلیل تعیین دقیق جهت گیری اولیه در یک سیستم ناوبری اینرسی بسیار مهم است. در این مقاله یک روش جدید برای افزایش دقت و سرعت همگرایی جهت گیری اولیه در یک سیستم ناوبری اینرسی ارائه شده است. روش ارائه شده در این مقاله یک روش دو مرحله‌ای است که شامل تلفیق فیلتر کالمن با مشاهده گر مود لغزشی مرتبه بالا می‌باشد. در سیستم ناوبری اینرسی خطاهای تراز یابی بسیار سریع تر از خطای زاویه سمت همگرا می‌شوند، بنابراین همگرایی زاویه سمت زمان زیادی را به زمان تخمین جهت گیری اولیه تحمیل می‌کند. به همین دلیل در این مقاله در مرحله اول به کمک فیلتر کالمن متغیرهای حالت سیستم تخمین زده می‌شوند و پس از آنکه متغیرهای حالت به جز زاویه سمت همگرا شدند، مرحله دوم آغاز می‌شود. در مرحله دوم نتایج تخمین حاصل از فیلتر کالمن به عنوان ورودی برای تعریف یک سیستم با ورودی نامعین، معادل با سیستم خطای ناوبری اینرسی به کار برده شده و با استفاده از مشاهده گر مود لغزشی مرتبه بالا، متغیر زاویه سمت، از سیستم جدید با ورودی نامعین تخمین زده می‌شود. نتایج شبیه سازی نشان می‌دهد که استفاده از روش ارائه شده در این مقاله علاوه بر افزایش سرعت همگرایی باعث افزایش دقت تخمین نیز می‌شود.

۱- مقدمه

مانند سامانه موقعیت یاب جهانی^۲ به راحتی قابل اندازه گیری هستند و دقت ناوبری اینرسی حساسیت کمتری به دقت آن‌ها دارد. در این مقاله روش جدیدی برای تخمین شرایط اولیه سیستم ناوبری و به ویژه جهت گیری اولیه یک سیستم ناوبری ارائه شده است. در مقالات مختلف تعیین جهت گیری اولیه را با عنوان هم‌محوری اولیه^۲ یا تراز اولیه [۱-۳] بیان کرده‌اند. تراز اولیه شامل دو مرحله است در مرحله اول که به آن تراز یابی ابتدایی گفته می‌شود، هدف تعیین جهت گیری اولیه با یک خطای قابل قبول است که این امر می‌تواند با روش‌های کلاسیک مانند حداقل مجموع مربعات به صورت یک مسئله تخمین مقید بدست آید. تراز یابی ابتدایی^۴ در واقع یک مرحله ابتدایی برای انجام مرحله دوم تراز یابی یعنی تراز یابی دقیق است [۴] هدف این مقاله ارائه یک روش جدید برای مسئله تراز یابی دقیق می‌باشد.

سیستم ناوبری اینرسی^۱ کاربرد فراوانی در ناوبری ربات‌ها، خودروهای خودران، کشتی‌ها، زیر دریایی‌ها، اجسام پرنده و غیره دارد. به همین دلیل تحقیقات فراوانی در جهت استفاده از آن صورت گرفته است. یک ویژگی ذاتی سیستم ناوبری اینرسی وابستگی دقت نتایج آن به دقت شرایط اولیه تخمین است. در واقع سیستم ناوبری اینرسی اساساً یک سیستم ناوبری کور می‌باشد به این معنی که دقت ناوبری کاملاً به دقت تخمین اولیه وابسته است به همین دلیل محاسبه و تخمین شرایط اولیه در ناوبری اینرسی بسیار مهم بوده و بسیاری از پژوهش‌های انجام شده در حوزه ناوبری اینرسی مربوط به تخمین شرایط اولیه و به خصوص جهت گیری اولیه سیستم ناوبری است. در یک سیستم ناوبری اینرسی چالش اصلی تخمین جهت گیری اولیه می‌باشد زیرا سرعت اولیه و موقعیت اولیه توسط سنسورهای دیگر

2 Global Positioning System (GPS)

3 Initial Alignment

4 Coarse

1 Inertial Navigation System (INS)

* نویسنده عهده دار مکاتبات: hmohammadkhani@ihu.ac.ir



برای تخمین جهت‌گیری اولیه سیستم نوابری اینرسی روش‌های مختلفی ارائه شده است. معروف‌ترین روش، استفاده از فیلتر کالمن [۵] برای تخمین حالت‌های سیستم خطای نوابری اینرسی است. فیلتر کالمن یک تخمین‌گر بهینه خطی بدون بایاس برای مینیمم‌سازی کواریانس خطای تخمین می‌باشد. در فیلتر کالمن استاندارد فرضیاتی بر روی مدل سیستم و ویژگی‌های نویز در نظر گرفته شده است به همین دلیل پژوهش‌های فراوانی جهت بهبود فیلتر کالمن استاندارد برای تخمین حالت‌های یک سیستم اتفاقی انجام گرفته است. در واقع با توجه به مشاهده‌ناپذیر بودن تعدادی از حالت‌های سیستم خطای نوابری اینرسی فیلتر کالمن به‌تنهایی نمی‌تواند تخمین دقیقی از حالت‌های سیستم ارائه دهد. همچنین اگر فیلتر کالمن به تنهایی برای تخمین حالت‌های سیستم خطای نوابری اینرسی مورد استفاده قرار گیرد زمان همگرایی بسیار طولانی خواهد بود، در حالی که در بسیاری از کاربردها نیازمند زمان همگرایی کوتاه هستیم.

تحقیقات زیادی برای تخمین حالت‌های اولیه و به‌خصوص جهت‌گیری اولیه سیستم نوابری اینرسی انجام گرفته است. در [۶] یک روش براساس تلفیق تخمین‌گر فازی تطبیقی با فیلتر کالمن خنثی برای افزایش سرعت همگرایی تخمین جهت‌گیری اولیه ارائه شده است. در [۷] یک روش برای بهبود تخمین جهت‌گیری اولیه در سیستم‌های نوابری در شرایط حرکت با سرعت و شتاب متغیر ارائه شده است. در [۸] یک روش براساس نرخ انتقال فاز برای سیستم‌های نوابری اینرسی همراه با سامانه موقعیت‌یاب جهانی ارائه شده است، وابستگی به اطلاعات سامانه موقعیت‌یاب جهانی یک اشکال اساسی این روش است زیرا این اطلاعات ممکن است در دسترس نباشند. در [۹] هانگ و وانگ یک فیلتر کالمن دو مرحله‌ای برای تخمین جهت‌گیری اولیه جسم ارائه داده‌اند، در روش ارائه‌شده فیلتر کالمن اولیه در واقع برای انجام ترازیبی ابتدایی و فیلتر ثانویه برای انجام ترازیبی دقیق مورد استفاده قرار گرفته است. با این حال روش ارائه‌شده بسیار کند بوده و برای خطای ترازیبی بزرگ پاسخ مطلوبی نخواهد داشت. در این مقاله نیز نویسندگان از اطلاعات سامانه موقعیت‌یاب جهانی استفاده کرده‌اند. استفاده از سامانه موقعیت‌یاب جهانی برای نوابری اینرسی و تلفیق دیتای آن با سنسورهای شتاب‌سنج و ژيروسکوپ کار معمولی می‌باشد با این حال در تعیین جهت‌گیری اولیه نقش چندانی ندارد زیرا می‌توان معادلات خطای

نوابری اینرسی را به‌گونه‌ای بازنویسی کرد که مستقل از موقعیت اولیه باشد. در [۱۰] یک فیلتر کالمن تطبیقی برای تعیین جهت‌گیری اولیه سیستم نوابری اینرسی معرفی شده است. در مراجع [۱۱-۱۴] هدف ارائه روش‌های بهینه برای تخمین ترازیبی است. در [۱۵] یک روش برای ترازیبی بر مبنای انتگرال‌گیری سرعت-موقعیت براساس روش‌های بهینه‌یابی ارائه شده است. در این مقاله بایاس سنسورها در نظر گرفته نشده است. در [۱۶] بایاس سنسور ژيروسکوپ به‌عنوان یک متغیر حالت جدید به مدل دینامیکی جهت‌گیری اولیه الحاق شده است تا بتواند به کمک روش‌های بهینه‌یابی علاوه بر ترازیبی، مقدار بایاس را نیز به‌طور همزمان تخمین بزند. در [۱۷] برای تخمین جهت‌گیری اولیه در سیستم نوابری اینرسی از ترکیب فیلتر کالمن با فیلتر پیش‌بین استفاده شده است در این روش ابتدا به کمک فیلتر پیش‌بین مدل خطا، تخمین زده شده و سپس به کمک ترکیب فیلتر کالمن و فیلتر پیش‌بین خطای تخمین کاهش می‌یابد. در [۱۸] از فیلتر کالمن مقاوم برای تخمین جهت‌گیری اولیه در سیستم نوابری اینرسی استفاده شده است در این مقاله مدل خطای نوابری اینرسی با مدل سنسور ژيروسکوپ الحاق شده و سپس فیلتر کالمن مقاوم برای تخمین جهت‌گیری اولیه مورد استفاده قرار گرفته است.

بسیاری از پژوهش‌های انجام‌شده در حوزه سیستم‌های نوابری اینرسی مربوط به افزایش سرعت همگرایی و دقت تخمین ترازیبی می‌باشد. با این حال سرعت و دقت همگرایی در تضاد با هم بوده و برای رسیدن به دقت بیشتر به زمان بیشتر نیز نیاز است [۱۹]. سرعت همگرایی ترازیبی برای ترازیبی زاویه سمت و ترازیبی افقی یکسان نبوده و در واقع ترازیبی زاویه سمت بسیار دیرتر همگرا می‌شود. به‌همین دلیل پژوهش‌های فراوانی در جهت ارائه روش‌هایی برای کاهش زمان همگرایی ترازیبی زاویه سمت انجام گرفته است. به‌عنوان مثال در [۲۰، ۲۱] پس از همگرایی ترازیبی افقی، ترازیبی زاویه سمت به کمک خروجی اندازه‌گیری شده و مشتق آن تخمین زده شده است. در [۲۲] هانگ و همکارانش یک روش جدید برای محاسبه جهت‌گیری اولیه براساس فیلتر کالمن و سنسورهای جابجایی، جهت تصحیح خطاهای ژيروسکوپ ارائه کرده‌اند. در [۲۳] ابتدا به کمک فیلتر کالمن ترازیبی افقی تخمین زده شده و سپس به کمک مشاهده‌گر اغتشاش ترازیبی زاویه سمت نیز تخمین زده می‌شود. در [۲۳] در طراحی مشاهده‌گر اغتشاش از وجود نویز صرف‌نظر شده

* ارائه مدل معادل با سیستم خطای ناوبری اینرسی، به کمک تخمین اولیه حاصل از فیلتر کالمن به گونه‌ای که شرایط مورد نیاز برای همگرایی فیلتر طبقه دوم یعنی مشاهده‌گر مود لغزشی مرتبه بالا را برقرار کند.

* ارائه یک روش دو مرحله‌ای برای تخمین جهت‌گیری اولیه با دقت بالا و زمان همگرایی سریع.

* افزایش دقت و کاهش زمان همگرایی تخمین.

* مقاوم‌بودن فیلتر ارائه‌شده در مقابل نویز و اغتشاشات سیستم. در ادامه مقاله در بخش دوم مدل‌سازی و مشخصات ذاتی سیستم خطای ناوبری اینرسی بررسی شده است، در بخش سوم مدل معادل با سیستم خطای ناوبری اینرسی و سازگاری آن با شرایط همگرایی و پایداری مشاهده‌گر مود لغزشی مورد بررسی قرار گرفته است، در بخش چهارم طراحی مشاهده‌گر برای تخمین جهت‌گیری اولیه سیستم خطای ناوبری اینرسی براساس فیلتر کالمن و مشاهده‌گر مود لغزشی مرتبه بالا ارائه شده است، در بخش پنجم شبیه‌سازی فیلتر ارائه شده برای تخمین جهت‌گیری اولیه سیستم ناوبری اینرسی و مقایسه نتایج آن با فیلتر کالمن و فیلتر ارائه‌شده در [۲۳] آورده شده است، در بخش ششم نتایج و مزایای روش ارائه شده در این مقاله بحث شده است.

۲- مدل‌سازی و مشخصات خطای ناوبری اینرسی

دو روش برای مدل‌سازی خطای ناوبری اینرسی در مقالات توسعه داده شده است. یکی از این مدل‌ها به نام روش اغتشاش^۱ (چارچوب حقیقی^۲) [۲۸، ۲۹] و دیگری به نام مدل خطای پسا زاویه^۳ (چارچوب محاسباتی^۴) [۳۰، ۳۱] شناخته می‌شوند. هر دو روش نتایج یکسانی داشته و به معادلات یکسانی منجر می‌شوند [۳۲].

معادلات دیفرانسیلی که معادلات خطای ناوبری اینرسی را توصیف می‌کنند به دو قسمت مربوط به معادلات حرکت انتقالی و معادلات توصیف‌کننده جهت‌گیری تقسیم می‌شوند. هر کدام از دسته معادلات مربوط به حرکت انتقالی و جهت‌گیری به دو صورت قابل بیان بوده و باعث ایجاد دو نسخه از معادلات حرکت انتقالی و جهت‌گیری جسم

است، به همین دلیل این روش در حضور نویز عملکرد مطلوبی ندارد. همان‌طور که گفته شد یک روش برای افزایش سرعت همگرایی تخمین جهت‌گیری اولیه در سیستم ناوبری اینرسی استفاده از فیلترهای کمکی پس از همگرایی ترازیبی افقی می‌باشد. در این مقاله برای تخمین جهت‌گیری اولیه روش جدیدی بر مبنای فیلتر کالمن و مشاهده‌گر مود لغزشی مرتبه بالا ارائه شده است. در واقع پس از اعمال فیلتر کالمن و پس از آنکه ترازیبی افقی همگرا شد خطای همگرایی ترازیبی زاویه سمت به‌عنوان یک ورودی نامعین برای سیستمی معادل با سیستم خطای ناوبری اینرسی در نظر گرفته می‌شود. سپس برای تخمین حالت‌های سیستم جدید مشاهده‌گر مود لغزشی مرتبه بالا استفاده می‌شود. فیلترهای مختلفی برای تخمین حالت‌های یک سیستم با ورودی نامعین توسعه داده شده‌اند. به‌عنوان مثال در [۲۴، ۲۵] برای یک سیستم با ورودی نامعین در خروجی، فیلتر بدون بایاس و با مینیمم کواریانس خطای تخمین ارائه شده است. در [۲۶] یک فیلتر بدون بایاس با کم‌ترین کواریانس خطای تخمین برای یک سیستم اتفاقی ارائه شده است که به‌طور همزمان حالت‌ها و ورودی‌های نامعین را برای یک سیستم اتفاقی با ورودی نامعین در معادلات حالت و خروجی تخمین می‌زند. در [۲۷] برای تخمین همزمان حالت‌های سیستم و ورودی نامعین مشاهده‌گر مود لغزشی مرتبه بالا ارائه شده است. یک ویژگی مشاهده‌گر مود لغزشی مرتبه بالا مقاوم‌بودن آن در برابر نویز و اغتشاش است از این رو استفاده از این مشاهده‌گر برای تخمین جهت‌گیری اولیه سیستم ناوبری اینرسی بسیار مناسب است. در این مقاله از روش ارائه‌شده در [۲۷] و ترکیب آن با فیلتر کالمن برای تخمین جهت‌گیری اولیه سیستم ناوبری اینرسی استفاده شده است.

در این مقاله یک سیستم معادل با سیستم خطای ناوبری اینرسی به گونه‌ای تعریف شده است که شرایط پایداری و همگرایی فیلتر ارائه‌شده در [۲۷] را برقرار نماید. نتایج شبیه‌سازی روش ارائه‌شده در این مقاله نشان می‌دهد که علاوه بر سرعت همگرایی دقت همگرایی نیز افزایش یافته است. در این مقاله با توجه به مقاوم‌بودن مشاهده‌گر مود لغزشی مرتبه بالا، در ارائه مدل مشابه برای مرحله دوم فیلتر از وجود نویز صرف‌نظر نشده است در حالی که در [۲۳] در تعریف سیستم برای مشاهده‌گر اغتشاش از وجود نویز صرف‌نظر شده است. به‌صورت خلاصه، نوآوری‌ها و نتایج این مقاله شامل موارد زیر می‌باشد:

1 Perturbation approach
2 True frame
3 Psi-angle
4 Computer frame

، ∇ بردار خطای شتاب، f بردار نیرو، $\ddot{A}g$ خطای بردار شتاب محاسبه شده، ρ بردار نرخ چرخش چارچوب حقیقی نسبت به چارچوب زمین و ε بردار دریافت زیروسکوپ^۴ می باشد. مطابق مرجع [۳۱] می توان نشان داد

$$\underline{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega \cos L \\ 0 \\ -\Omega \sin L \end{bmatrix} \quad (۲)$$

که در آن L عرض جغرافیایی^۵ محلی و \dot{U} نرخ چرخش زمین می باشد. بردار ω به صورت رابطه (۳) قابل محاسبه است

$$\omega = \underline{\Omega} + \rho \quad (۳)$$

که

$$\rho = \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \cos L \\ -\dot{L} \\ -\lambda \sin L \end{bmatrix} \quad (۴)$$

با حل معادلات روابط (۴-۱)، مدل فضای حالت معادلات خطای ناوبری اینرسی به صورت ماتریس ۵ حاصل می شود.

که در آن sL و cL به ترتیب مشخص کننده $\sin(L)$ و $\cos(L)$ می باشند همچنین زیر نویس های E ، N و D به ترتیب نشان دهنده مؤلفه شمال، مؤلفه شرق و مؤلفه زیرین^۶ هستند.

در مدل سازی خطا برای سیستم ناوبری اینرسی بیش تر به مدل سازی سیستم در حالت سکون^۷ پرداخته می شود زیرا بخش اصلی زمان فعالیت یک سیستم ناوبری در حالت کروزر^۸ قرار دارد و در این حالت تفاوت معادلات با حالت ساکن بسیار ناچیز است. همچنین در بسیاری از موارد کالیبراسیون و تعیین جهت گیری اولیه یک سیستم ناوبری در حالت ساکن انجام می گیرد. در حالت سکون $\dot{L} = \dot{\lambda} = 0$ همچنین بردار نیرو به صورت رابطه (۶) می باشد.

می شوند. دو نسخه مربوط به معادلات حرکت انتقالی وابسته به انتخاب خطای مکان و یا خطای سرعت به عنوان متغیرهای معادلات هستند. همچنین دو نسخه مربوط به معادلات خطای جهت گیری مربوط به انتخاب متغیرهای معادلات به صورت جهت گیری نسبت به چارچوب محاسباتی و یا چارچوب واقعی هستند. معادلات مختلف حاصل از این دو نسخه قابل تبدیل به هم بوده و همسان^۱ می باشند.

۲-۱- معادلات خطای ناوبری اینرسی

در اکثر منابع [۲۶، ۳۳] برای بدست آوردن معادلات خطای ناوبری اینرسی از روش مدل خطای پسا زاویه استفاده شده و همچنین خطای سرعت به عنوان متغیرهای حالت معادلات مربوط به حرکت انتقالی در نظر گرفته می شود. در این مقاله نیز از روش مدل خطای پسا زاویه استفاده کرده و خطای سرعت به عنوان متغیرهای حالت معادلات مربوط به حرکت انتقالی در نظر گرفته شده است. همچنین جهت گیری نسبت به چارچوب محاسباتی به عنوان متغیرهای حالت معادلات جهت گیری در نظر گرفته شده است.

هرچند که جهت گیری نسبت به چارچوب محاسباتی قابل سنجش نبوده و یک مشخصه غیرواقعی از جهت گیری را در اختیار قرار می دهد، اما استفاده از این متغیرها در معادلات جهت گیری سبب می شود که بین این معادلات و معادلات مربوط به حرکت انتقالی وابستگی^۲ بوجود نیاید. جهت گیری جسم نسبت به مختصات واقعی از طریق حل معادلات خطای ناوبری اینرسی برای موقعیت و جهت گیری قابل محاسبه است.

به این ترتیب معادلات مدل خطای ناوبری اینرسی در دستگاه مختصات (N-E-D) به صورت رابطه (۱) قابل بیان است [۲۶، ۳۳].

$$\begin{aligned} \delta \dot{v} + (\underline{\Omega} + \omega) \times \delta v &= \nabla - \psi \times f + \Delta g \\ \dot{r} + \rho \times r &= \delta v \\ \dot{\psi} + \omega \times \psi &= \varepsilon \end{aligned} \quad (۱)$$

که در آن δv ، r و ψ به ترتیب بردار خطای سرعت، موقعیت و جهت گیری بوده و \dot{U} بردار نرخ چرخش زمین، \dot{U} بردار نرخ چرخش زاویه ای چارچوب حقیقی جسم نسبت به چارچوب اینرسی^۳

4 Gyro drift
5 Latitude
6 Down
7 Rest
8 Cruising Mode

1 Identical
2 Coupling
3 Inertial frame

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} r_N \\ r_E \\ r_D \\ \delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D \\ \psi_N \\ \psi_E \\ \psi_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\lambda}sL & \dot{L} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{\lambda}sL & 0 & \dot{\lambda}cL & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dot{L} & \dot{\lambda}cL & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -g/R & 0 & 0 & 0 & -(2\Omega+\dot{\lambda})sL & \dot{L} & 0 & -f_D & f_E \\ 0 & -g/R & 0 & (2\Omega+\dot{\lambda})sL & 0 & (2\Omega+\dot{\lambda})cL & f_D & 0 & -f_N \\ 0 & 0 & 2g/R & -\dot{L} & (2\Omega+\dot{\lambda})cL & 0 & -f_E & f_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\Omega+\dot{\lambda})sL & \dot{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\Omega+\dot{\lambda})sL & 0 & (\Omega+\dot{\lambda})cL \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dot{L} & -(\Omega+\dot{\lambda})cL & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_N \\ r_E \\ r_D \\ \delta v_N \\ \delta v_E \\ \delta v_D \\ \psi_N \\ \psi_E \\ \psi_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \nabla_N \\ \nabla_E \\ \nabla_D \\ \varepsilon_N \\ \varepsilon_E \\ \varepsilon_D \end{bmatrix} \quad (5)$$

با حذف معادلات مربوط به r_N, r_E, r_D و δv_D از رابطه (۵) و ادغام آن با معادلات رابطه (۷) مدل فضای حالت رابطه (۸) برای خطای ناوبری اینرسی ایجاد می‌گردد. ۵ معادله اول مربوط به دینامیک خطای ناوبری اینرسی و ۵ معادله بعدی مربوط به دینامیک سنسورها می‌باشد.

۲-۲- معادلات فضای حالت سیستم خطای ناوبری اینرسی و مشخصات آن

با انتخاب متغیرهای حالت به صورت $x = [\delta v_N, \delta v_E, \psi_N, \psi_E, \psi_D, \nabla_N, \nabla_E, \varepsilon_N, \varepsilon_E, \varepsilon_D]^T$ و با در نظر گرفتن اینکه تنها خطای سرعت در معادلات خطای ناوبری اینرسی قابل اندازه‌گیری است، معادلات خطای ناوبری اینرسی به صورت روابط (۹-۱۱) خواهد بود [۳].

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_0 x \\ y &= C_0 x \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta v_N \\ \delta v_E \\ \psi_N \\ \psi_E \\ \psi_D \\ \nabla_N \\ \nabla_E \\ \varepsilon_N \\ \varepsilon_E \\ \varepsilon_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2\Omega_D & 0 & g & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\Omega_D & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega_D & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_D & 0 & -\Omega_N & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_N \\ \delta v_E \\ \psi_N \\ \psi_E \\ \psi_D \\ \nabla_N \\ \nabla_E \\ \varepsilon_N \\ \varepsilon_E \\ \varepsilon_D \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$f = \begin{bmatrix} f_N \\ f_E \\ f_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (6)$$

که در آن g شتاب جاذبه زمین است. همچنین در بسیاری از موارد کالیبراسیون و تعیین جهت‌گیری اولیه در یک سیستم ناوبری در شرایطی انجام می‌گیرد که مشخصات جغرافیایی کاملاً مشخص است به این ترتیب $r_N \sim r_E \sim r_D \sim 0$ بوده و از معادلات (۵) حذف می‌گردند. در تعیین جهت‌گیری اولیه، سیگنال‌های δv_N و δv_E اندازه‌گیری می‌شوند. سیگنال δv_D نیز می‌تواند از معادلات حذف شود زیرا وابستگی بسیار ناچیزی بین این سیگنال و سیگنال‌های δv_N و δv_E وجود داشته [۳۴، ۳۵] و بنابراین نقش ناچیزی در تعیین جهت‌گیری اولیه ایفا می‌کند. در مدل‌سازی خطای ناوبری اینرسی فرض بر این است که بردار خطای شتاب فقط یک بایاس بوده و بردار دررفت ژيروسکوپ نیز یک مقدار ثابت است بنابراین:

$$\begin{aligned} \dot{\nabla} &= 0 \\ \dot{\varepsilon} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\delta v_N = 0 \Rightarrow \delta \dot{v}_N = 0 \Rightarrow \quad (14)$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} F_0 & I_{5 \times 5} \\ 0_{5 \times 5} & 0_{5 \times 5} \end{bmatrix}$$

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & -2\Omega_D & 0 & g & 0 \\ 2\Omega_D & 0 & -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega_D & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_D & 0 & -\Omega_N \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_N & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$C_0 = [I_2 \quad 0_{2 \times 8}] \quad (11)$$

مقادیر ویژه سیستم خطای ناوبری اینرسی با حل معادله $|A - \lambda I| = 0$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned} \lambda_{1-6} &= 0 \\ \lambda_{7,8} &= \pm j2\Omega_D \\ \lambda_{9,10} &= \pm j\Omega \end{aligned} \quad (12)$$

با توجه به این که سیستم قطب تکراری رو محور موهومی دارد بنابراین سیستم خطای ناوبری اینرسی یک سیستم ناپایدار می‌باشد. با بررسی ماتریس مشاهده‌پذیری برای سیستم خطای ناوبری اینرسی مشخص می‌شود که رتبه این ماتریس برابر ۷ بوده و بنابراین این سیستم مشاهده‌پذیر نمی‌باشد.

۲-۳- موانع تخمین جهت‌گیری اولیه در روش کلاسیک

در روش کلاسیک با سنجش سیگنال‌های δv_N و δv_E هدف، هدایت سیستم به سمتی است که ψ_N ، ψ_E و ψ_D به صفر میل کنند، به صفر میل کردن این خطاها هدف تعیین جهت‌گیری اولیه یک سیستم ناوبری می‌باشد. در روش کلاسیک هنگامی که خطای سنجش سرعت یعنی δv_N و δv_E به صفر برسند خطای مربوط به زوایای یعنی ψ_N ، ψ_E و ψ_D به اعداد ثابتی همگرا می‌شوند [۳] زیرا

$$\delta v_E = 0 \Rightarrow \delta \dot{v}_E = 0 \Rightarrow \quad (13)$$

$$2\Omega_D \delta v_N - g\psi_N + \nabla_E = 0 \Rightarrow \psi_N = \frac{\nabla_E}{g}$$

همچنین چون ∇_N و ∇_E مقادیر ثابتی هستند بنابراین $\dot{\psi}_N = \dot{\psi}_E = 0$ و به این ترتیب داریم

$$\begin{aligned} \psi_E = 0 &\Rightarrow \Omega_D \psi_N - \Omega_N \psi_D + \varepsilon_E = 0 \\ \Rightarrow \Omega_D \frac{\nabla_E}{g} - \Omega_N \psi_D + \varepsilon_E = 0 &\Rightarrow \\ \psi_D = \frac{1}{\Omega_N} \left(\Omega_D \frac{\nabla_E}{g} + \varepsilon_E \right) &\quad (15) \end{aligned}$$

به این ترتیب در روش کلاسیک زمانی که سیستم به حالت دائمی^۱ خود می‌رسد مقادیر خطای زاویه‌ای به صفر نمی‌رسند بلکه به مقادیر ثابتی همگرا می‌شوند.

در این مقاله هدف تخمین جهت‌گیری اولیه از روی سیگنال‌های اندازه‌گیری شده ∇_N و ∇_E به گونه‌ای است که خطای جهت‌گیری اولیه در زمان محدود به صفر برسد. عدم توانایی در روش کلاسیک ارتباط مستقیمی با عدم توانایی در تخمین کامل جهت‌گیری اولیه به روش فیلتر کالمن دارد زیرا هر دو به این دلیل است که سیستم به طور کامل مشاهده‌پذیر نبوده و این مشکل برای هر دو روش وجود دارد.

۳- مدل معادل با سیستم خطای ناوبری اینرسی با ورودی نامعین

هدف این بخش ارائه یک مدل معادل با سیستم خطای ناوبری اینرسی بیان شده در رابطه (۸) می‌باشد. تفاوت این مدل با مدل ارائه‌شده در رابطه (۹) این است که در این مدل از تخمین حاصل از فیلتر کالمن به‌عنوان ورودی اندازه‌گیری شده استفاده می‌شود. در واقع در مرحله اول با استفاده از فیلتر کالمن متغیرهای حالت سیستم رابطه (۹) تخمین زده شده و از این تخمین به‌عنوان خروجی سیستم جدید استفاده می‌شود. همان‌طور که گفته شد سرعت همگرایی تخمین متغیرهای حالت رابطه (۹) یکسان نبوده و تخمین خطای زاویه سمت بسیار دیرتر همگرا می‌شود. بنابراین با اعمال فیلتر کالمن

خروجی اندازه‌گیری شده در این سیستم می‌تواند شامل تمامی حالت‌های سیستم باشد زیرا در مرحله اول با استفاده از فیلتر کالمن حالت‌های سیستم اصلی تخمین زده می‌شود و تنها خطای زاویه سمت است که تخمین آن در اختیار نیست، اما با توجه به در نظر گرفتن خطای تخمین زاویه سمت به‌عنوان ورودی نامعین، این مسئله نیز حل شده و می‌توان هرکدام از حالت‌های سیستم را به‌عنوان خروجی سیستم جدید در نظر گرفت. ماتریس‌های خروجی به‌صورت رابطه (۲۰) در نظر گرفته می‌شود.

$$C = I_6, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.1 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.6 & 0.3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

ماتریس‌های خروجی یکتا نبوده و می‌توانند به شکل‌های مختلفی در نظر گرفته شوند اما باید دقت داشت که این ماتریس‌ها باید شرایط پایداری و همگرایی فیلتر را برقرار نمایند. انتخاب این ماتریس‌ها به شکل رابطه (۲۰) به این دلیل است که شرایط پایداری و همگرایی حالت‌ها در مشاهده‌گر مود لغزشی مرتبه بالا را برقرار نماید. برای پایداری و همگرایی مشاهده‌گر مود لغزشی باید دو شرط زیر برقرار باشد [۲۷، ۳۶، ۳۷].

شرط ۱:

سیستم رابطه (۱۶) آشکارپذیر قوی^۱ بوده و همچنین $\text{rank} \left(\begin{bmatrix} G^T & H^T \end{bmatrix} \right) = p$ باشد. که در آن p تعداد

ورودی‌های نامعین می‌باشد.

شرط ۲:

بردار d باید بتواند به‌صورت $d^T = [d_0^T \quad d_1^T \quad \dots \quad d_r^T]$ نوشته شود که d_0 کراندار، d_1 مشتق مرتبه اول کراندار و d_r مشتق مرتبه r کراندار داشته باشد. که در آن r حداقل تعداد مشتقات مورد نیاز از خروجی است که شرط هوتوس^۲ را برقرار کند. برای سیستم ارائه‌شده در رابطه (۱۶) هر دو شرط فوق برقرار می‌باشد. به راحتی می‌توان مشاهده نمود

روی سیستم رابطه (۹) و پس از همگرایی متغیرهای حالت آن به‌جز خطای زاویه سمت، تخمین حاصل به‌عنوان ورودی برای معادلات جدید در نظر گرفته می‌شود.

در این مدل تعدادی از متغیرهای حالت سیستم رابطه (۹) به همراه خطای تخمین خطای زاویه سمت به‌عنوان ورودی نامعین برای سیستم جدید در نظر گرفته می‌شود به این ترتیب مدل سیستم جدید به‌صورت رابطه (۱۶) خواهد بود.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Gd \\ y &= Cx + Hd \end{aligned} \quad (16)$$

در سیستم رابطه (۱۶)، x بردار متغیرهای حالت و d بردار ورودی‌های نامعین است که به‌صورت روابط (۱۷) و (۱۸) در نظر گرفته شده‌اند.

$$x = [\delta v_N \quad \delta v_E \quad \psi_N \quad \psi_E \quad \psi_D \quad \nabla_E]^T \quad (17)$$

$$d = [\psi_D^d \quad \nabla_N \quad \varepsilon_N \quad \varepsilon_E \quad \varepsilon_D]^T \quad (18)$$

در بردار ورودی‌های نامعین، مؤلفه ψ_D^d مربوط به خطای همگرایی زاویه سمت می‌باشد. در واقع همانطور که قبلاً گفته شد با اعمال فیلتر کالمن پس از همگرایی خطای تراز یابی افقی و خطای شتاب و دریفت ژيروسکوپ، فیلتر جدید به سیستم معادل اعمال می‌شود. به همین دلیل خطای تخمین زاویه سمت به‌عنوان ورودی نامعین در نظر گرفته شده است.

با توجه به رابطه (۸) ماتریس‌های A و G به‌صورت رابطه (۱۹) می‌باشند.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2\Omega_D & 0 & g & 0 & 0 \\ 2\Omega_D & 0 & -g & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_D & 0 & -\Omega_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1 Strong Detectable

2 Hautus Condition

۴- طراحی مشاهده‌گر برای سیستم خطای ناوبری اینرسی

همانطور که قبلاً گفته شد سیستم خطای ناوبری اینرسی یک سیستم ناپایدار و مشاهده‌ناپذیر است بنابراین تخمین‌گرهای کلاسیک نمی‌توانند نتیجه مطلوبی برای تخمین حالت‌های این سیستم داشته باشند. به‌علاوه با توجه به مشاهده‌پذیر نبودن این سیستم، فیلتر کالمن به تنهایی نمی‌تواند به‌طور کامل حالت‌های سیستم را تخمین بزند. در واقع فیلتر کالمن نمی‌تواند خطای تخمین را به صفر برساند به‌علاوه سرعت همگرایی تخمین به‌ویژه برای خطای زاویه سمت یعنی ψ_D بسیار کند می‌باشد. در این مقاله یک روش جدید برای تخمین حالت‌های سیستم خطای ناوبری اینرسی بر مبنای مشاهده‌گر مود لغزشی مرتبه بالا و فیلتر کالمن ارائه شده است. شمای کلی مشاهده‌گر معرفی شده در این مقاله در شکل ۱ نشان داده شده است. برای طراحی مشاهده‌گر مود لغزشی برای سیستم رابطه (۱۶)، مطابق مرجع [۲۷] بردار حالت‌های جدید به‌صورت رابطه (۲۳) تعریف می‌شود.

به این ترتیب سیستم رابطه (۱۶) به‌صورت رابطه (۲۴) تبدیل

$$x_{ex} = \begin{bmatrix} x^T & d^T \end{bmatrix}^T \quad (23)$$

خواهد شد.

که در آن

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ex} &= \bar{A}x_{ex} + \bar{G}d_{ex} \\ y &= \bar{C}x_{ex} + \bar{H}d_{ex} \end{aligned} \quad (24)$$

برای طراحی مشاهده‌گر مود لغزشی خروجی جدیدی به‌صورت

$$d_{ex} = \dot{d} \quad (25)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [C \quad H], \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad \bar{H} = 0 \quad (26)$$

رابطه (۲۷) تعریف می‌شود.

به این ترتیب سیستم جدیدی مطابق رابطه (۲۸) تعریف می‌شود.

$$y^* = M_{nH} x_{ex} \quad (27)$$

باید به‌گونه‌ای انتخاب شود که شرط هوتوس برای سیستم رابطه

$$rank \left(\begin{bmatrix} G^T & H^T \end{bmatrix} \right) = p = 5$$

همچنین سیستم شرط

آشکارپذیری قوی را ارضا می‌کند. طبق تعریف یک سیستم آشکارپذیر قوی می‌باشد اگر شرط رابطه (۲۱) را برقرار کند [۳۸].

$$y = 0 \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow x = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (21)$$

یک شرط لازم و کافی برای آشکارپذیری قوی یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان برقراری رابطه (۲۲) می‌باشد [۳۸].

$$rank \left(\begin{bmatrix} sI_n - A & -G \\ C & H \end{bmatrix} \right) = n + p, \quad \forall s \in C, |s| \geq 1 \quad (22)$$

رابطه (۲۲) معادل مینیمم فاز بودن سیستم است. رابطه (۲۲)

برای سیستم رابطه (۱۶) برقرار است.

اثبات:

با توجه به اینکه $rank \left(\begin{bmatrix} G^T & H^T \end{bmatrix} \right) = p$ بنابراین با

عملیات سطری-ستونی مقدماتی می‌توان ماتریس $\begin{bmatrix} G^T & H^T \end{bmatrix}$

را به فرم $\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -G & H \end{bmatrix}$ تبدیل کرد. بنابراین زیر ماتریس

را می‌توان با عملیات سطری-ستونی مقدماتی به‌صورت $\begin{bmatrix} I_{p \times p} \\ 0_{n \times p} \end{bmatrix}$ تبدیل کرد. از طرفی چون ماتریس C رنک ستونی \bar{n} دارد

بنابراین ماتریس $\begin{bmatrix} sI_n - A & -G \\ C & H \end{bmatrix}$ همواره رنک ستونی کامل

خواهد داشت. توجه شود که برای تبدیل $\begin{bmatrix} -G \\ H \end{bmatrix}$ به $\begin{bmatrix} I_{p \times p} \\ 0_{n \times p} \end{bmatrix}$ از

هیچ عملیات ستونی که به ستون‌های $\begin{bmatrix} sI_n - A \\ C \end{bmatrix}$ نیاز داشته باشد استفاده نشده است.

شرط ۲ نیز در مورد سیستم رابطه (۱۶) برقرار است زیرا ψ_D^d کراندار بوده و همچنین طبق رابطه (۸)، $\dot{\varepsilon}_E = 0$ ، $\dot{\nabla}_N = 0$ ،

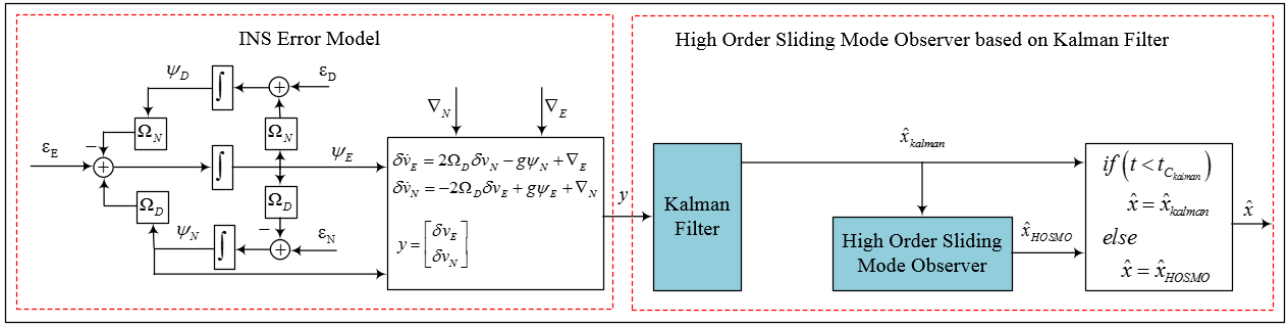
$\dot{a}_N = 0$ و $\dot{a}_D = 0$ است بنابراین تمامی مشتقات آن‌ها از هر

مرتبه‌ای کراندار می‌باشد. بعداً مشاهده می‌شود که برای سیستم رابطه

(۱۶) $r = 3$ بوده و می‌توان بردار d را به‌صورت

$$d^T = \begin{bmatrix} \psi_D^d & \nabla_N & \dot{a}_E & \begin{bmatrix} \dot{a}_N & \dot{a}_D \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

نوشت.



شکل ۱. شمای کلی مشاهده گر مود لغزشی بر مبنای فیلتر کالمن

Fig. 1. Overall view of sliding mode observer based on Kalman filter

به کمک روابط (۳۰) و (۳۱) $rank(X^+) = n - rank(X)$

(۲۸) برقرار باشد.

به راحتی می توان مشاهده کرد که $rank(M_3 \bar{G}_1) = rank(\bar{G}_1) = 5$

با در نظر گرفتن سیستم رابطه (۲۸) ابتدا به کمک تبدیل همانندی برای حالت ها و خروجی، سیستم به دو زیر سیستم تبدیل می شود بگونه ای که یکی مستقل از ورودی نامعین باشد. برای این کار تبدیل همانندی رابطه (۳۲) به سیستم رابطه (۲۸) اعمال می شود.

$$z = T x_{ex}, \quad \bar{y} = U y^* \quad (32)$$

$$T = \begin{bmatrix} \bar{G}_1^+ \\ (M_3 \bar{G}_1)^+ M_3 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} (I - \bar{G}_1 (M_3 \bar{G}_1)^+ M_3) \bar{G}_1^{++} & \bar{G}_1 \\ 0 & M_3 \bar{G}_1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$U = \begin{bmatrix} (M_3 \bar{G}_1)^+ \\ (M_3 \bar{G}_1)^+ \end{bmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{bmatrix} (I - M_3 \bar{G}_1 (M_3 \bar{G}_1)^+) (M_3 \bar{G}_1)^{++} & M_3 \bar{G}_1 \\ 0 & M_3 \bar{G}_1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

که در آن X^+ معکوس مجازی ماتریس X است. به کمک تبدیل همانندی رابطه (۳۲) سیستم رابطه (۲۸) به صورت سیستم رابطه (۳۵) تبدیل می شود.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} d_{ex} \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \bar{G}_1^+ \bar{A} (I - \bar{G}_1 (M_3 \bar{G}_1)^+ M_3) \bar{G}_1^{++} \\ A_2 &= \bar{G}_1^+ \bar{A} \bar{G}_1 \\ A_3 &= (M_3 \bar{G}_1)^+ M_3 \bar{A} (I - \bar{G}_1 (M_3 \bar{G}_1)^+ M_3) \bar{G}_1^{++} \\ A_4 &= (M_3 \bar{G}_1)^+ M_3 \bar{A} \bar{G}_1 \end{aligned} \quad (36)$$

$$C_1 = (M_3 \bar{G}_1)^+ M_3 (I - \bar{G}_1 (M_3 \bar{G}_1)^+ M_3) \bar{G}_1^{++}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ex} &= \bar{A} x_{ex} + \bar{G} d_{ex} \\ y^* &= M_{n_H} x_{ex} \end{aligned} \quad (28)$$

می توان ثابت کرد که شرط هوتوس برای سیستم رابطه (۲۸) به صورت رابطه (۲۹) ساده می شود [۲۷].

$$rank(M_{n_H} \bar{G}_1) = rank(\bar{G}_1) \quad (29)$$

که در آن $\bar{G}_1 = \bar{G} \bar{H}_\perp$ ، همچنین \bar{H}_\perp ماتریسی است که فضای تهی^۱ ماتریس $\bar{H} \in R^{n \times m}$ را پوشش^۲ می دهد. یعنی $\bar{H} \bar{H}_\perp = 0$ و $rank(\bar{H}_\perp) = m - rank(\bar{H})$. برای تعیین ماتریس M_{n_H} مطابق

مرجع [۳۹] به صورت بازگشتی بر اساس روابط (۳۰) و (۳۱)، M_{k+1} را محاسبه کرده و این کار تا زمانی که شرط هوتوس برقرار شود انجام می شود.

$$M_{k+1} = N_{k+1}^{\perp\perp} N_{k+1}, \quad M_1 = (\bar{H}^{\perp} \bar{C})^{\perp\perp} \bar{H}^{\perp} \bar{C} \quad (30)$$

$$N_{k+1} = T_k \begin{bmatrix} M_k \bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix}, \quad T_k = \begin{bmatrix} M_k \bar{G} \\ \bar{H} \end{bmatrix}^{\perp} \quad (31)$$

که در آن $N_k^{\perp\perp}$ ماتریسی است که $rank(N_k^{\perp\perp}) = rank(N_k)$ و $\det \begin{bmatrix} N_k^{\perp} \\ N_k^{\perp\perp} \end{bmatrix} \neq 0$ همچنین

برای ماتریس $X \in R^{n \times m}$ ، ترانهاده ماتریسی است که فضای تهی^۱ ماتریس X^T را پوشش می دهد یعنی $X^{\perp} X = 0$ و

1 Null Space
2 Span

[۴۰] برای مشتق‌گیری مرتبه ۳ ($n_H = 3$) می‌توان مقادیر $\lambda_{00} = 12$ ، $\lambda_{01} = 8$ و $\lambda_{02} = 5$ در نظر گرفته شود. همچنین $K(t)$ مطابق رابطه (۴۲) باید یک کران بالا برای خطا باشد.

$$\left\| \frac{d}{dt} M_{n_H} e(t) \right\| \leq K(t) \quad (42)$$

همچنین H_j درایه j -ام از بردار $H(t)$ می‌باشد که به صورت رابطه (۴۳) محاسبه می‌شود.

$$H(t) = P_{n_H} \left[y^T \quad (y^{[1]})^T \quad \dots \quad (y^{[n_H-1]})^T \right]^T - M_{n_H} \tilde{x}^{[n_H-1]} \quad (43)$$

که در آن $y^{[m]}$ مطابق رابطه (۴۴) انتگرال مرتبه m بردار y است.

$$y^{[m]}(t) = \int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{m-1}} y(\tau_m) d\tau_m \dots d\tau_2 d\tau_1 \quad (44)$$

P_k به صورت رابطه (۴۵) محاسبه می‌شود.

$$P_k = N_k^{\perp\perp} T_{k-1} \begin{bmatrix} P_{k-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (45)$$

که در آن N_k و T_k مطابق روابط (۳۰ و ۳۱) تعیین می‌شوند. شمای مشاهده‌گر مود لغزشی مرتبه بالا در شکل ۲ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود ورودی این مشاهده‌گر، تخمین حاصل از فیلتر کالمن می‌باشد.

۵- شبیه‌سازی

برای شبیه‌سازی روش ارائه‌شده در این مقاله، سیستم بیان‌شده در معادلات رابطه (۹) با در نظر گرفتن نویز در معادلات و خروجی سیستم به صورت رابطه (۴۶) بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_0 x + w \\ y &= C_0 x + v \end{aligned} \quad (46)$$

که در آن w و v به ترتیب نویز سفید و گوسی با میانگین صفر و ماتریس کواریانس Q و R به صورت رابطه (۴۷) هستند.

همان‌طور که مشاهده می‌شود در سیستم رابطه (۳۵)، $z_2 \equiv \bar{y}_2$ می‌باشد، بنابراین برای تخمین آن کافی است \bar{y} تخمین زده شود. برای تخمین z_1 از مشاهده‌گر لیونبرگر^۱ به صورت رابطه (۳۷) استفاده می‌شود.

$$\dot{\hat{z}}_1 = A_1 \hat{z}_1 + L_1 (\bar{y}_1 - C_1 \hat{z}_1) + A_2 \bar{y}_2 \quad (37)$$

که در آن \hat{y} تخمین \bar{y} است. L_1 باید به گونه‌ای انتخاب شود که ماتریس $(A_1 - L_1 C_1)$ هورویتز باشد. پس از تخمین z_1 ، تخمین x_{ex} به صورت رابطه (۳۸) محاسبه می‌شود.

$$\hat{x}_{ex} = T^{-1} \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

برای تخمین \bar{y} مطابق مراجع [۲۷، ۴۰] از رابطه (۳۹) استفاده می‌شود.

$$\hat{\bar{y}} := U (v_{n_H-1} + M_{n_H} \tilde{x}) \quad (39)$$

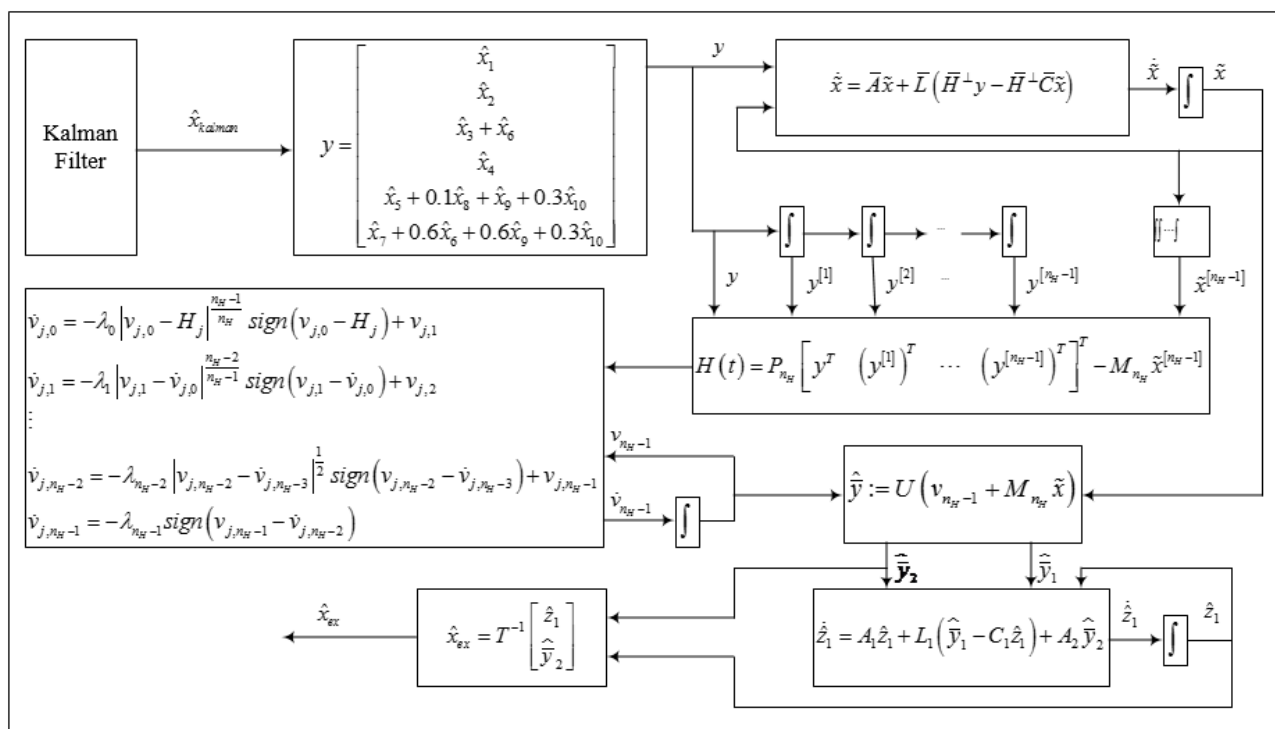
که در آن \tilde{x} به صورت رابطه (۴۰) تخمین زده می‌شود.

$$\dot{\tilde{x}} = \bar{A} \tilde{x} + \bar{L} (\bar{H}^{\perp} y - \bar{H}^{\perp} \bar{C} \tilde{x}) \quad (40)$$

\bar{L} باید به گونه‌ای انتخاب شود که ماتریس $(\bar{A} - \bar{L} \bar{H}^{\perp} \bar{C})$ هورویتز باشد. همچنین v_{j, n_H-1} که درایه j -ام از بردار v_{n_H-1} می‌باشد به صورت رابطه (۴۱) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{v}_{j,0} &= -\lambda_0 |v_{j,0} - H_j|^{\frac{n_H-1}{n_H}} \text{sign}(v_{j,0} - H_j) + v_{j,1} \\ \dot{v}_{j,1} &= -\lambda_1 |v_{j,1} - \dot{v}_{j,0}|^{\frac{n_H-2}{n_H-1}} \text{sign}(v_{j,1} - \dot{v}_{j,0}) + v_{j,2} \\ &\vdots \\ \dot{v}_{j, n_H-2} &= -\lambda_{n_H-2} |v_{j, n_H-2} - \dot{v}_{j, n_H-3}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(v_{j, n_H-2} - \dot{v}_{j, n_H-3}) + v_{j, n_H-1} \\ \dot{v}_{j, n_H-1} &= -\lambda_{n_H-1} \text{sign}(v_{j, n_H-1} - \dot{v}_{j, n_H-2}) \end{aligned} \quad (41)$$

که در آن $\text{sign}(x)$ تابع علامت بوده و همچنین λ_i می‌تواند به صورت $\lambda_i = \lambda_{0i} K(t)^{\frac{1}{n_H-i}}$ در نظر گرفته شود که مطابق مرجع



شکل ۲. شمای کلی مشاهده گر مود لغزشی مرتبه بالا

Fig. 2. Overall view of high order sliding mode observer

دقت آن نیز بسیار بالاتر است. همان طور که در شکل ۱ نشان داده شده است فیلتر ارائه شده در این مقاله از نتایج فیلتر کالمن به عنوان ورودی خود برای تخمین جهت گیری اولیه استفاده می کند به همین دلیل تا زمان ۲۲ ثانیه نتایج تخمین بر هم منطبق هستند. با توجه به اینکه همگرایی فیلتر طراحی شده در این مقاله به صورت نمایی می باشد بنابراین فیلتر تلفیق شده بسیار سریع تر از فیلتر کالمن همگرا خواهد شد. نتایج شبیه سازی نیز این موضوع را تایید می نماید.

در شکل ۴ نتایج حاصل از فیلتر ارائه شده در این مقاله و فیلتر کالمن با دقت بیش تری برای زمان های بزرگ تر از ۴۲ ثانیه برای تخمین خطای زاویه سمت نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۴ مشاهده می شود برای زمان های بزرگ تر از ۴۲ ثانیه فیلتر ارائه شده در این مقاله همگرا شده است در حالی که فیلتر کالمن پس از حدود ۸۰ ثانیه و با دقت بسیار کم همگرا شده است. برای فیلتر کالمن دقت همگرایی خطای زاویه سمت حدود ۰/۰۲ درجه و برای فیلتر ارائه شده در این مقاله حدود ۰/۰۰۳ درجه می باشد.

در شکل ۵ نتایج تخمین خطای ترازایی به کمک فیلتر ارائه شده در این مقاله نشان داده شده است. با توجه به اینکه فیلتر ارائه شده در این مقاله پس از همگرایی خطای ترازایی به کمک فیلتر کالمن

همچنین در این شبیه سازی عرض جغرافیایی محلی برابر ۳۹/۹ درجه و خطای ترازایی اولیه برای هر سه زاویه برابر ۱ درجه در نظر گرفته شده اند.

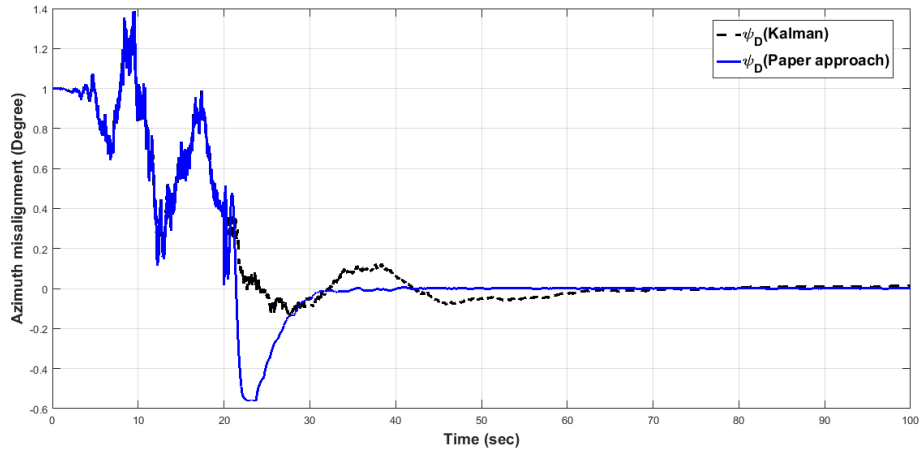
$$Q = \text{diag}[(50 \mu\text{g} / \text{Hz})^2 \quad (50 \mu\text{g} / \text{Hz})^2 \quad (0.01^\circ / \text{hr} / \text{Hz})^2 \quad (0.01^\circ / \text{hr} / \text{Hz})^2 \quad (0.01^\circ / \text{hr} / \text{Hz})^2 \quad 000000]$$

$$R = \text{diag}[(0.1\text{m} / \text{s})^2 \quad (0.1\text{m} / \text{s})^2]$$

تابع $K(t)$ که در واقع کران مشتق خطای تخمین می باشد به صورت نمایی و برابر رابطه (۴۸) در نظر گرفته می شود.

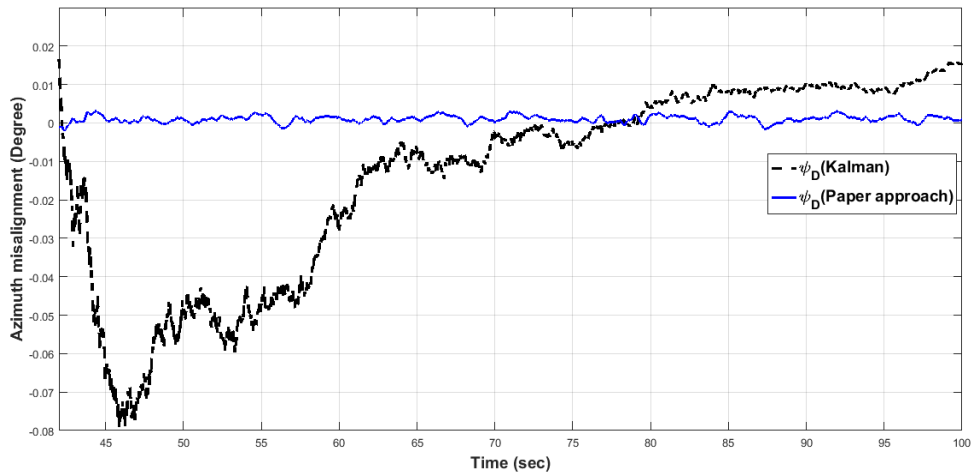
$$K(t) = 18e^{-\frac{1}{4}t}$$

در شکل ۳ نتایج شبیه سازی برای تخمین حالت های سیستم رابطه (۴۶) با تخمین گر معرفی شده در شکل ۱ و مقایسه آن با نتایج حاصل از تخمین جهت گیری اولیه به کمک فیلتر کالمن برای خطای زاویه سمت نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می شود فیلتر ارائه شده در این مقاله نسبت به فیلتر کالمن هم سریع تر بوده و هم



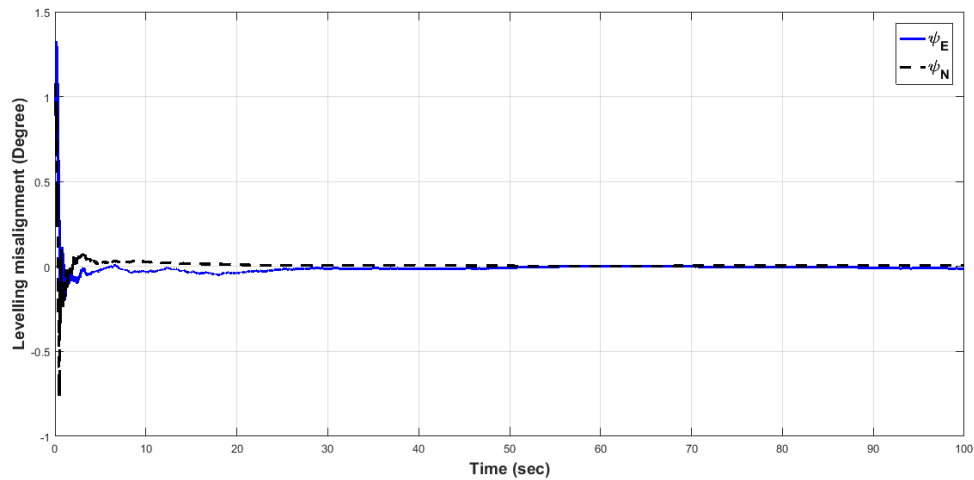
شکل ۳. مقایسه تخمین خطای زاویه سمت به کمک فیلتر کالمن و فیلتر معرفی شده در این مقاله

Fig. 3. Comparison of azimuth error estimation by the filter introduced in this paper and Kalman filter



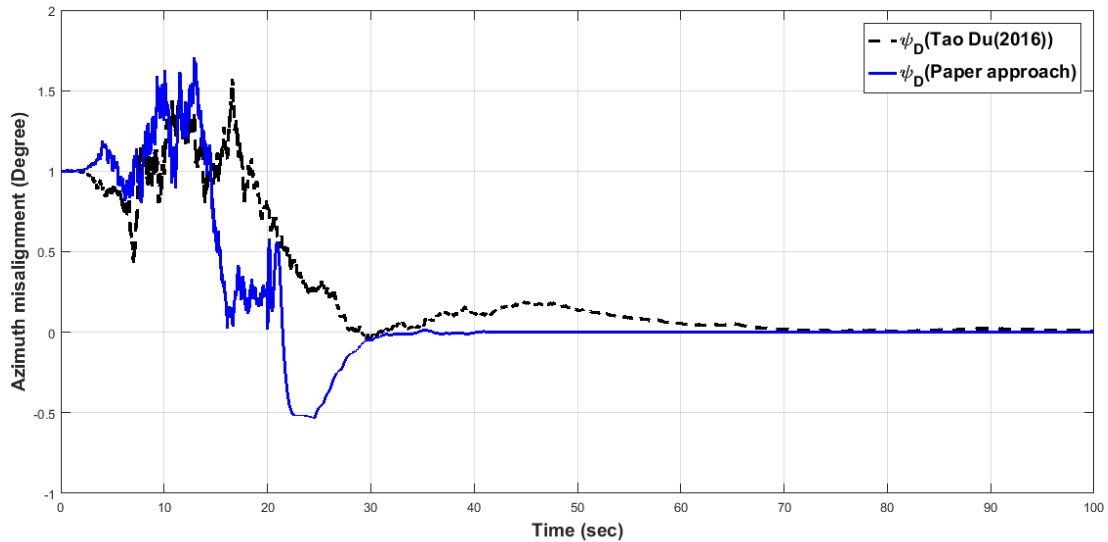
شکل ۴. مقایسه تخمین خطای زاویه سمت به کمک فیلتر کالمن و فیلتر ارائه شده در این مقاله برای زمان‌های بزرگ‌تر از ۴۲ ثانیه

Fig. 4. Comparison of azimuth error estimation by the filter introduced in this paper and Kalman Filter for times greater than 42 seconds



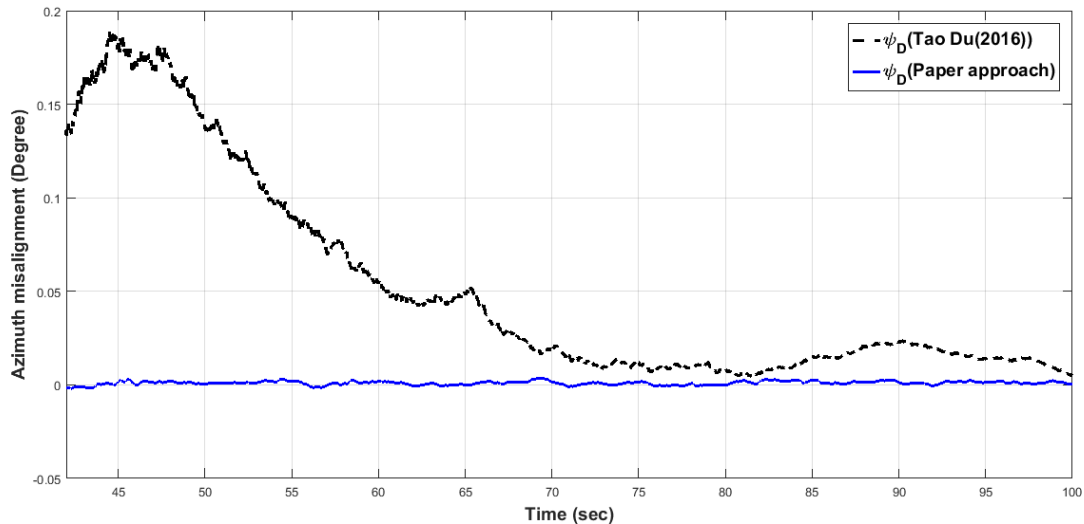
شکل ۵. تخمین خطای تراز یابی به کمک فیلتر ارائه شده در این مقاله

Fig. 5. Leveling misalignment Estimation by the filter introduced in this paper



شکل ۶. مقایسه تخمین خطای زاویه سمت به کمک فیلتر معرفی شده در این مقاله و فیلتر مرجع [۲۳]

Fig. 6. Comparison of azimuth error estimation by the filter introduced in this paper and the filter in reference [23]



شکل ۷. مقایسه فیلتر ارائه شده در این مقاله و فیلتر مرجع [۲۳] برای زمان‌های بزرگ‌تر از ۴۲ ثانیه

Fig. 7. Comparison of azimuth error estimation by the filter introduced in this paper and the filter in reference [23] for times greater than 42 seconds

فیلتر ارائه شده در [۲۳] حدود ۷۰ ثانیه و دقت آن حدود ۰/۰۲ درجه می‌باشد. در حالی که زمان همگرایی فیلتر ارائه شده در این مقاله حدود ۴۲ ثانیه و دقت آن حدود ۰/۰۰۳ درجه می‌باشد. نتایج حاصل از تخمین خطای زاویه سمت به کمک فیلتر کالمن، فیلتر ارائه شده در [۲۳] و فیلتر طراحی شده در این مقاله به صورت خلاصه در جدول ۱ آمده است. توجه شود که مقدار موثر خطا براساس زمان‌های بزرگ‌تر از ۴۲ ثانیه محاسبه شده است.

مورد استفاده قرار می‌گیرد بنابراین نتایج آن با نتایج فیلتر کالمن تفاوتی ندارد.

نتایج حاصل از شبیه‌سازی فیلتر ارائه شده در [۲۳] در حضور نویز و مقایسه آن با فیلتر ارائه شده در این مقاله برای تخمین خطای زاویه سمت در شکل ۶ نشان داده شده است. همان‌طور که قبلاً گفته شد فیلتر ارائه شده در [۲۳] در حضور نویز عملکرد مطلوبی نداشته و در مقایسه با فیلتر ارائه شده در این مقاله بسیار کندتر همگرا شده و دقت بسیار کم‌تری دارد.

همان‌طور که در شکل ۷ مشاهده می‌شود زمان همگرایی برای

جدول ۱. مقایسه فیلتر طراحی شده در این مقاله با فیلتر کالمن و فیلتر ارائه شده در [۲۳] برای خطای زاویه سمت

Table 1. Comparison between the filter designed in this paper and the Kalman filter and the filter presented in [23] for azimuth error

مقدار موثر خطا	دامنه همگرایی	زمان همگرایی	فیلتر
۰/۱۹ دقیقه	۰/۰۰۳ درجه	۴۲ ثانیه	فیلتر ارائه شده در این مقاله
۴/۵۹ دقیقه	۰/۰۲ درجه	۷۰ ثانیه	فیلتر ارائه شده در [۲۳]
۲/۴۳ دقیقه	۰/۰۲ درجه	۸۰ ثانیه	فیلتر کالمن

۶- نتیجه گیری

در این مقاله یک روش جدید به منظور کاهش زمان همگرایی و افزایش دقت برای تخمین جهت گیری اولیه سیستم ناوبری اینرسی ارائه شده است. فیلتر طراحی شده در این مقاله شامل دو مرحله است در مرحله اول با استفاده از فیلتر کالمن خطای تراز یابی تخمین زده می شود و پس از همگرایی آن ها مرحله دوم فیلتر که در واقع یک مشاهده گر مود لغزشی مرتبه بالا می باشد برای تخمین خطای زاویه سمت مورد استفاده قرار می گیرد. همان طور که از نتایج شبیه سازی مشاهده می شود، فیلتر طراحی شده در این مقاله باعث افزایش سرعت و دقت همگرایی تخمین زاویه سمت در سیستم ناوبری اینرسی می شود. در یک سیستم ناوبری اینرسی دقت ناوبری به شدت به دقت تخمین اولیه و به ویژه دقت جهت گیری اولیه وابسته است. در بسیاری از کاربردها سرعت همگرایی تخمین اولیه بسیار مهم می باشد. با توجه به نتایج شبیه سازی زمان همگرایی فیلتر طراحی شده در این مقاله نسبت به فیلترهای ارائه شده در پژوهش های دیگر بسیار کم تر است. یک مزیت فیلتر ارائه شده در این مقاله مقاوم بودن آن به نویز و اغتشاش است. بسیاری از فیلترهای معرفی شده برای تخمین جهت گیری اولیه در سیستم ناوبری اینرسی در حضور نویز و اغتشاش عملکرد مطلوبی ندارند اما فیلتر طراحی شده در این مقاله با توجه به ویژگی ذاتی مشاهده گر مود لغزشی مرتبه بالا نسبت به نویز و اغتشاش مقاوم است.

علائم

علائم انگلیسی

g شتاب جاذبه زمین، m/s^2

v بردار خطای سرعت، m/s

r بردار خطای موقعیت، m

علائم یونانی

ω بردار جهت گیری اولیه، درجه
بردار نرخ چرخش زمین، $^\circ/hr$

ε بردار دریافت ژيروسکوپ، $^\circ/hr$
 ∇ بردار خطای شتاب، g

زیر نویس

D زیرین

E شرق

N شمال

بالا نویس

$+$ معکوس مجازی

$[m]$ انتگرال مرتبه m

مراجع

- [1] R.M. Rogers, Applied mathematics in integrated navigation systems, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2007.
- [2] R.M. Rogers, Applied mathematics in integrated navigation systems. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Reston, Virginia, USA, (2003).
- [3] D. Titterton, J.L. Weston, J. Weston, Strapdown inertial navigation technology, IET, 2004.
- [4] N. El-Sheimy, S. Nassar, A. Noureldin, Wavelet denoising for IMU alignment, IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, 19(10) (2004) 32-39.

- Electronic Systems, 49(2) (2013) 1006-1023.
- [16] L. Chang, J. Li, S. Chen, Initial alignment by attitude estimation for strapdown inertial navigation systems, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 64(3) (2014) 784-794.
- [17] G. Cheng, S. Cao, L. Guo, W. Chen, Initial alignment of Inertial Navigation System based on a predictive iterated Kalman filter, in: 2018 37th Chinese Control Conference (CCC), IEEE, 2018, pp. 4655-4660.
- [18] X. Xu, J. Lu, T. Zhang, A Fast-Initial Alignment Method With Angular Rate Aiding Based on Robust Kalman Filter, *IEEE Access*, 7 (2019) 51369-51378.
- [19] W. Li, W. Wu, J. Wang, L. Lu, A fast SINS initial alignment scheme for underwater vehicle applications, *The Journal of Navigation*, 66(2) (2013) 181-198.
- [20] Z. Chuanbin, T. Weifeng, J. Zhihua, A novel method improving the alignment accuracy of a strapdown inertial navigation system on a stationary base, *Measurement Science and Technology*, 15(4) (2004) 765.
- [21] X. Wang, Fast alignment and calibration algorithms for inertial navigation system, *Aerospace Science and Technology*, 13(4-5) (2009) 204-209.
- [22] Y. Huang, Y. Zhang, X. Wang, Kalman-filtering-based in-motion coarse alignment for odometer-aided SINS, *IEEE Transactions on instrumentation and measurement*, 66(12) (2017) 3364-3377.
- [23] T. Du, L. Guo, J. Yang, A fast initial alignment for SINS based on disturbance observer and Kalman filter, *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 38(10) (2016) 1261-1269.
- [24] M. Hou, R. Patton, Optimal filtering for systems with unknown inputs, *IEEE transactions on Automatic Control*, 43(3) (1998) 445-449.
- [25] Y. Cheng, H. Ye, Y. Wang, D. Zhou, Unbiased minimum-variance state estimation for linear systems with unknown input, *Automatica*, 45(2) (2009) 485-491.
- [26] J. NASH, R. J. D'APPOLITO, K. ROY, Error analysis of hybrid aircraft inertial navigation
- [5] R. Kalman, A new approach to linear filtering and prediction theory, *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, 83 (1961) 95-108.
- [6] J. Li, N. Song, G. Yang, R. Jiang, Fuzzy adaptive strong tracking scaled unscented Kalman filter for initial alignment of large misalignment angles, *Review of Scientific Instruments*, 87(7) (2016) 075118.
- [7] Y. Zhang, L. Luo, T. Fang, N. Li, G. Wang, An improved coarse alignment algorithm for odometer-aided sins based on the optimization design method, *Sensors*, 18(1) (2018) 195.
- [8] J.G. Park, J.G. Lee, C.G. Park, SDINS/GPS in-flight alignment using GPS carrier phase rate, *GPS Solutions*, 8(2) (2004) 74-81.
- [9] S. Han, J. Wang, A novel initial alignment scheme for low-cost INS aided by GPS for land vehicle applications, *The Journal of Navigation*, 63(4) (2010) 663-680.
- [10] F. Jiancheng, Y. Sheng, Study on innovation adaptive EKF for in-flight alignment of airborne POS, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 60(4) (2011) 1378-1388.
- [11] D. Gu, N. El-Sheimy, T. Hassan, Z. Syed, Coarse alignment for marine SINS using gravity in the inertial frame as a reference, in: 2008 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium, IEEE, 2008, pp. 961-965.
- [12] P.M. Silson, Coarse alignment of a ship's strapdown inertial attitude reference system using velocity loci, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 60(6) (2011) 1930-1941.
- [13] K. Taizhong, F. Jiancheng, W. Wei, Quaternion-optimization-based in-flight alignment approach for airborne POS, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 61(11) (2012) 2916-2923.
- [14] J. Li, J. Xu, L. Chang, F. Zha, An improved optimal method for initial alignment, *The Journal of Navigation*, 67(4) (2014) 727-736.
- [15] Y. Wu, X. Pan, Velocity/position integration formula part I: Application to in-flight coarse alignment, *IEEE Transactions on Aerospace and*

- AMHERST SCHOOL OF ENGINEERING, 1968.
- [35] A. Yavnai, I. Y. Bar-Itzhack, Self-contained updating of ground inertial navigation system, *Israel Journal of Technology*, 18 (1980) 304-313.
- [36] L. Fridman, A. Levant, J. Davila, High-order sliding modes observer for linear systems with unbounded unknown inputs, *IFAC Proceedings Volumes*, 42(17) (2009) 216-221.
- [37] F.J. Bejarano, L. Fridman, Unbounded unknown inputs estimation based on high-order sliding mode differentiator, in: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference, IEEE, 2009*, pp. 8393-8398.
- [38] H.L. Trentelman, A.A. Stoorvogel, M. Hautus, *Control theory for linear systems*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [39] B. Molinari, A strong controllability and observability in linear multivariable control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(5) (1976) 761-764.
- [40] A. Levant, Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control, *International journal of Control*, 76(9-10) (2003) 924-941.
- systems, in: *Guidance and Control Conference, 1972*, pp. 848.
- [27] F.J. Bejarano, L. Fridman, High order sliding mode observer for linear systems with unbounded unknown inputs, *International Journal of Control*, 83(9) (2010) 1920-1929.
- [28] K.R. Britting, *Inertial navigation systems analysis*, (1971).
- [29] C. Broxmeyer, C. Leondes, *Inertial navigation systems*, in, *American Society of Mechanical Engineers Digital Collection*, 1964.
- [30] I. Guidance, GR Pitman, Jr., Ed, in, *John Wiley & Sons, Inc., New York*, 1962.
- [31] C.T. Leondes, *Guidance and control of aerospace vehicles*, McGraw-Hill New York, 1963.
- [32] D.O. Benson, A comparison of two approaches to pure-inertial and Doppler-inertial error analysis, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, (4) (1975) 447-455.
- [33] J.A. D'Appolito, *The evaluation of Kalman filter designs for multisensor integrated navigation systems*, Air Force Avionics Laboratory, 1971.
- [34] C. Hutchinson, H. Wondergem, *An error analysis technique for inertial navigation systems and Kalman filters*, MASSACHUSETTS UNIV

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:
S. Khankalantary, K. Heidari, M. Hajizadeh, H. Mohammadkhani, Fast initial alignment for inertial navigation system based on high order sliding mode observer and Kalman filter, Amirkabir J. Mech. Eng., 53(6)(2021) 3571-3586.
DOI: [10.22060/mej.2020.18407.6815](https://doi.org/10.22060/mej.2020.18407.6815)

