



## مدل سازی تحلیلی سرعت زاویه‌ای حد الاستیک در دیسک دوار مدرج تابعی تحت شرایط بارگذاری مکانیکی - حرارتی

ساناز جعفری

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸/۱۲/۰۱

بازنگری: ۱۳۹۹/۰۳/۰۱

پذیرش: ۱۳۹۹/۰۶/۱۰

ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۶/۲۶

### کلمات کلیدی:

دیسک دوار

مواد مدرج تابعی

روش هموتوپي پرتوريشن

تنش تسليم

سرعت زاویه‌ای حد

**خلاصه:** تنش‌های حرارتی ناشی از تغییرات دمایی به همراه سرعت زاویه‌ای بالا در دیسک‌های دوار صنعتی مقاومت ماده سازنده دیسک را کاهش خواهد داد. بنابراین آنالیز دیسک‌های دوار تحت بارگذاری‌های حرارتی-مکانیکی و تخمین سرعت زاویه‌ای حد به عنوان معیاری برای آغاز تغییر شکل‌های پلاستیک مهم می‌باشد. در این مقاله مدل سازی تحلیلی برای آنالیز ترموالاستیک دیسک‌های دوار مدرج تابعی با متغیر در نظر گرفتن تمامی خواص هندسی و مکانیکی در راستای شعاعی دیسک انجام خواهد شد. روش هموتوپي پرتوريشن به عنوان یک روش تحلیلی برای حل معادلات به کار برده می‌شود. نتایج با روش عددی تفاضلات محدود و هم چنین داده‌های مراجع راستی آزمایی می‌گردند. با آنالیز عددی تاثیر پارامتر تغییر ضخامت، نوع بارگذاری حرارتی و شرایط مرزی بر سرعت زاویه‌ای حدی و شعاع شروع تغییر شکل‌های پلاستیک بررسی خواهد شد. از مدل تامورا-توموتا-اوزاوا برای محاسبه تنش تسلیم در شعاع‌های مختلف دیسک مدرج تابعی استفاده می‌شود و نحوه وابستگی آن به پارامترهای موجود در مدل سازی تحلیلی به عنوان نتیجه ارائه خواهد شد. در نهایت نشان داده شد که با گرادینان دمایی مناسب در سطح خارجی دیسک به عنوان شرط مرزی، می‌توان سطح تنش‌های حرارتی را کنترل کرد و در مقایسه با شرط مرزی حرارتی ثابت سطح تنش را تا ۲۰٪ کاهش داد.

### ۱-مقدمه

دیسک‌های دوار قطعات مکانیکی هستند که در طیف وسیعی از دستگاه‌ها و تجهیزات مکانیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند. با توجه به حرارت بالایی که در برخی موارد دیسک‌ها در معرض آن قرار دارند، مواد سازنده آن‌ها باید قابلیت‌ها بالا برای تحمل هر دو تنش‌های مکانیکی و حرارتی داشته باشند. به دلیل تفاوت بالای تنش در مقاطع مختلف یک دیسک دوار با ضخامت یکنواخت، بهتر است از دیسک‌هایی با ضخامت غیریکنواخت استفاده شود تا توزیع تنش اصلاح گردد. در نتیجه امروزه استفاده از دیسک‌هایی با پروفیل ضخامت غیر یکنواخت، ساخته شده از مواد مدرج تابعی<sup>۱</sup> توصیه می‌گردد و به علت کاربردهای فراوان آن‌ها در مهندسی، تخمین تنش

در آن‌ها موضوعی مهم است.

مواد مدرج تابعی برای نخستین بار در سال ۱۹۸۴ در کشور ژاپن برای ساخت تجهیزات فضایی مورد استفاده قرار گرفتند. هدف از کاربرد این مواد به عنوان مواد کامپوزیتی غیر همگن، افزایش کارایی اجزای مختلف سازه، کنترل تغییر شکل‌ها و تنش‌های ناخواسته به همراه رسیدن به خواص مطلوب این مواد مانند استحکام بالا، وزن کم، رسانایی خوب، مقاومت بالا در مقابل خوردگی و دمای زیاد است. در این مواد، خواص در هر نقطه توسط یک قانون اختلاط مناسب به صورت تابعی از خواص اجزاء تشکیل دهنده (معمولا فلز و سرامیک) تعریف می‌شود.

در طی سالیان دیسک‌های دوار از جنبه‌های متفاوتی مورد بررسی قرار گرفتند که در بیشتر آن‌ها دیسک از ماده همگن با خواص مکانیکی مشخص و ثابت در امتداد شعاعی دیسک ساخته شده است.

1 Functionally graded material (FGM)

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: s.jafari@ub.ac.ir



پلاستیک دیسک‌های دوار با ضخامت متغیر برای اولین بار توسط اکبری و همکاران بررسی شد. ایشان نشان دادند که با در نظر گرفتن مدل‌های خرابی در شبیه‌سازی، می‌توان پیش‌بینی‌های واقعی‌تری از سرعت‌های زاویه‌ای حد پلاستیک کامل در دیسک‌های دوار ارائه داد [۹]. اخیراً سندهی و همکاران<sup>۴</sup> بر اساس روابطی مبتنی بر معادلات المان محدود تغییر شکل و تنش را در دیسک‌های دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی ارتوتروپیک قطبی بررسی کردند. در این تحقیق اعلام شد که دیسک دوار با پروفایل ضخامت خطی دارای حداقل تنش است و در بین پروفایل‌های ضخامت در نظر گرفته شده مناسب‌ترین می‌باشد. به علاوه، اثرات پارامتر درجه بندی و سایر پارامترهای حاکم بر درجه ارتوتروپیک را نیز بررسی کردند [۱۰]. حسینی و همکاران آنالیز تنشی را برای نانو دیسک‌های دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی با ضخامت متغیر بر مبنای تئوری‌های مبتنی بر گرادیان کرنش ارائه دادند. ایشان معادلات تعادل و شرایط مرزی برای نانو دیسک را بر اساس اصل همپلتون به دست آوردند. نتایج این تحقیق نشان داد که اثر ضخامت در تنش این نوع از دیسک بیشتر از تأثیر شاخص درجه بندی مواد مدرج تابعی است و تفاوت بین تنش پیش‌بینی شده توسط تئوری‌های کلاسیک و گرادیان کرنش زمانی زیاد است که نانو دیسک کوچک باشد [۱۱].

در تمامی مواردی که در بالا ذکر شد، دیسک‌های مدرج تابعی هم‌دما بودند. در واقع هیچ گونه تغییرات دمایی در دیسک وجود نداشت. اما ارسالان جزء اولین محققانی بود که معادلات حاکم بر دیسک‌های دوار را در هر دو حالت الاستیک و پلاستیک با فرض غیرهم‌دما بودن دیسک برای پروفایل‌های تغییر ضخامت مختلف به وسیله توابع فوق هندسی<sup>۵</sup> حل نمود [۱۲]. در ادامه آنالیز ترموالاستیک دیسک‌های دوار مدرج تابعی با در نظر گرفتن پروفیل ضخامت و سرعت زاویه‌ای متغیر توسط دای و همکاران<sup>۶</sup>، توسط روشی نیمه‌تحلیلی انجام شد. ایشان نشان دادند که تغییرات در شعاع دیسک، سرعت زاویه‌ای و گرادیان دمایی، ماکزیمم مقدار تنش و تغییر مکان در دیسک دوار را تحت تأثیر قرار می‌دهد [۱۳]. پنگ و همکاران<sup>۷</sup> تنش‌های حرارتی در دیسک‌های دوار مدرج تابعی را به کمک معادلات انتگرال‌های فردهم مدل نمودند و آن‌ها را به کمک

از اولین تحقیقات انجام شده بر روی دیسک‌های دوار می‌توان به حل تحلیلی دیسک‌های الاستیک-پلاستیک همگن توسط گمر<sup>۱</sup> با استفاده از تئوری تسلیم ترسکا اشاره کرد [۱]. ارسالان<sup>۲</sup> نیز مدل محاسباتی را برای تحقیق بر روی تغییر شکل پلاستیک دیسک‌های دوار حلقوی با ضخامت متغیر که بر روی شفت صلبی قرار گرفته‌اند ارائه نمود. او از معیار تسلیم فون میزز و هم چنین قانون سختی سوئیفت برای شبیه‌سازی رفتار کرنش سختی غیر خطی ماده همگن استفاده کرد و سرعت زاویه‌ای حد پلاستیک را برای این مدل انتخابی در مقادیر متفاوتی از پارامترهای هندسی و سختی محاسبه کرد [۲]. به دست آوردن تغییر شکل الاستیک-پلاستیک دیسک دوار همگن ضخامت متغیر با سه نوع شرط مرزی آزاد، تحت فشار و تحت قید در راستای شعاعی در سطح داخلی، کار بعدی ارسالان بوده است. آن‌ها نشان دادند که وابسته به نوع شرط مرزی استفاده شده، هسته پلاستیک می‌تواند شامل یک یا دو یا سه ناحیه باشد که به وسیله شکل‌های مختلفی از معیار تسلیم ارائه می‌شود [۳].

در زمینه دیسک‌های دوار مدرج تابعی، یو و همکارانش<sup>۳</sup> از نخستین محققانی بودند که استفاده از این مواد را برای ساخت دیسک‌های دوار مطرح کردند و دیسک‌های دوار از جنس فیبرهای کامپوزیتی را در بارگذاری سرعت زاویه‌ای ثابت و توزیع دمایی یکنواخت مورد بررسی قرار دادند. ایشان فرض کردند که مدول الاستیک، ضریب انبساط حرارتی و چگالی بر اساس یک تابع توانی در امتداد شعاعی دیسک تغییر کند [۴]. نقد آبادی و همکاران راه حل ترموالاستیکی نیمه تحلیلی برای دیسک‌های دوار متقارن توپر و توخالی ساخته شده از مواد مدرج تحت شرایط تنش صفحه‌ای ارائه دادند [۵]. در ادامه تغییر شکل الاستیک دیسک‌های دوار مدرج تابعی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول توسط بیات و همکاران مورد مطالعه قرار گرفت [۶]. حل تحلیلی الاستیک-پلاستیک برای بررسی توزیع تنش-کرنش در دیسک‌هایی با ضخامت و چگالی متغیر به کمک روش‌های هموتوبی پرتوربیشن و جداسازی آدمین از کارهای انجام شده توسط حجتی و همکاران است. این شکل از خواص مواد با وجود دامنه تغییرات خواص محدود در گروه مواد مدرج تابعی قرار می‌گیرند [۷-۸]. تأثیر مدل‌های خرابی مواد نرم بر روی رفتار تغییر شکل‌های

4 Sondhi et al  
5 Hyper geometric functions  
6 Dai et al  
7 Peng et al

1 Gamer  
2 Eraslan  
3 You et al

روش‌های عددی حل کردند [۱۴]. آنالیز المان محدود دیسک‌های دوار مدرج تابعی در بارگذاری‌های ترموالاستیک توسط افسر و همکاران<sup>۱</sup> انجام شد. ایشان نشان دادند که میدان‌های تغییرمکان-تنش در این دیسک‌ها تحت تاثیر پروفایل توزیع دما و ضخامت در امتداد شعاعی دیسک، سرعت زاویه‌ای دیسک و تفاوت دما بین سطوح داخلی و خارجی دیسک است و با کنترل کردن این پارامترها می‌توان آن‌ها را کنترل کرد [۱۵]. آنالیز الاستیک-پلاستیک دیسک‌های دوار مدرج تابعی تحت بارگذاری‌های ترموالاستیک با روش تکرار متغیر<sup>۲</sup> توسط نایاک و همکاران انجام گردید. از اصل مینیمم‌سازی انرژی پتانسیل در تئوری تغییر شکلی هنکی<sup>۳</sup> برای به‌دست‌آوردن معادلات میدان حاکم استفاده کردند و توانستند تاثیر پارامترهای موجود در خواص مکانیکی و هندسی و هم چنین تابع توزیع دما را بر سرعت زاویه‌ای حدی به دست آورند [۱۶]. در دیسک‌های دوار تحت بارگذاری‌های ترمو-الاستیکی با شدت بالا احتمال فعال شدن مکانیزم‌های خزشی وجود دارد. در همین راستا ژرفی و همکاران آنالیز خزشی وابسته به زمان را برای دیسک‌های دوار مدرج تابعی با ضخامت زیاد، برای دو الگو متفاوت از خواص مکانیکی غیریکنواخت ارائه دادند. ایشان برای حل معادلات خود از روش عددی کوادریچر دیفرانسیلی استفاده کردند و نشان دادند که پارامترهای خزشی، وابسته به دما، سایز ذرات و کسر حجمی ذرات می‌باشند [۱۷]. به علاوه ژرفی رفتار خزشی دیسک‌های دوار مدرج تابعی را با در نظر گرفتن توزیعی غیرخطی و غیریکنواخت برای خواص مکانیکی مورد بررسی قرار داد و نتیجه گرفت که بارگذاری‌های خارجی بر نرخ خزش در دیسک دوار موثر هستند. تاثیر تغییرات درجه حرارت بر روی دیسک‌هایی با ذرات مادی کمتر، بسیار جدی‌تر از دیسک با تعداد ذرات مادی بالا است [۱۸]. تاثیر گردیان دمایی بر روی تغییرمکان دیسک‌های دوار مدرج، با تعریف تغییرات خطی برای توزیع درجه حرارت در امتداد شعاعی دیسک توسط کائور و همکاران<sup>۴</sup> مورد بررسی قرار گرفت. ایشان نشان دادند که رفتار خزشی در دیسک با گردیان دمایی در امتداد شعاعی نسبت به دیسک دما ثابت بسیار تاثیرگذارتر است [۱۹].

طبق توضیحات بالا تحقیقات پیشین در دیسک‌های دوار عموماً شامل شبیه‌سازی‌های المان محدود، حل‌های نیمه تحلیلی یا روش‌های

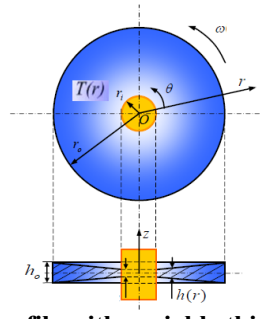
برای رسیدن به یک حل قابل اطمینان، با دقت بالا و هزینه کم، در این مقاله برای اولین بار مدل تحلیلی برای آنالیز رفتار ترموالاستیک دیسک‌های دوار مواد مدرج تابعی با ضخامت متغیر در حالت کلی و برای انواع متفاوتی از بارگذاری حرارتی و شرایط مرزی دیسک ارائه می‌شود که در آن معادلات حاکم بر مدل‌سازی به کمک روش تحلیلی هموتوبی پرتوریشن حل خواهند شد. دیسک در این تحقیق دارای پروفیل تغییر ضخامت در راستای شعاعی است، توخالی می‌باشد. از معیار فون میزز برای محاسبه تنش‌های معادل در دیسک استفاده می‌شود و ماده سازنده دیسک در ناحیه تغییرشکل‌های پلاستیک از رفتار کرنش سختی خطی پیروی خواهد کرد. بر همین اساس سرعت زاویه‌ای دورانی دیسک به عنوان معیاری برای محدود کردن ماکزیمم تنش معادل به کار برده خواهد شد. از مدل ارائه‌شده توسط تامورا-توموتا-اوزاوا<sup>۵</sup> برای محاسبه تنش تسلیم در شعاع‌های مختلف دیسک دوار استفاده می‌شود. راستی آزمایی نتایج ارائه‌شده به کمک روش تفاضلات محدود و هم چنین نتایج مقالات موجود در مراجع انجام خواهد شد. بعد از راستی آزمایی نتایج، مطالعه پارامتریک برای مقادیر متفاوتی از پارامتر تغییر ضخامت، نوع بارگذاری حرارتی، شرایط مرزی دیسک انجام می‌گیرد تا سرعت زاویه‌ای حد الاستیک و مکان آغاز تغییرشکل‌های پلاستیک در هر مورد تعیین گردد. مدل ارائه‌شده در این مقاله قادر به محاسبه تنش-تغییرمکان در دیسک‌ها تحت بارگذاری‌های مکانیکی-حرارتی را برای انواع شرایط مرزی متناسب

- 1 Afsar et al
- 2 Variational iteration method
- 3 Hencky deformation theory
- 4 Kaour et al



شکل ۱. دیسک دوار با شرایط مرزی متفاوت در سطوح داخلی و خارجی [۱۵]

Fig. 1. Rotating disk with different boundary conditions on inner and outer surfaces



شکل ۲. نمونه‌ای از پروفیل دیسک با ضخامت متغیر بر حسب پارامترهای  $r_i$  و  $r_o$  در دستگاه مختصات استوانه‌ای

Fig. 2. An example of a disk profile with variable thickness in terms of  $r_i$  and  $r_o$  in a cylindrical coordinate system

جدول ۱. پارامترهای ابعادی دیسک دوار حلقوی

Table 1. Dimensional parameters of a rotating disk

ضخامت دیسک ( $h_0$ )	شعاع خارجی ( $r_o$ )	شعاع داخلی ( $r_i$ )
۰/۱ m	۱ m	۰/۲ m

۲-۲- خواص هندسی و مکانیکی دیسک دوار مدرج تابعی در این مقاله دیسک دوار حلقوی با ضخامت کم و پروفیل ضخامت متغیر در راستای شعاعی مدل می‌گردد. شعاع دیسک در سطوح داخلی و خارجی به ترتیب با  $r_i$  و  $r_o$  نشان داده می‌شود. دیسک‌های دوار ضخامت متغیر را عموماً با در نظر گرفتن دستگاه مختصاتی استوانه‌ای ( $r, \theta, z$ ) مطابق شکل ۲ مدل‌سازی می‌کنند. دیسک با سرعت زاویه‌ای ثابت  $\omega$  حول محور خود دوران می‌کند و تحت تاثیر بارگذاری حرارتی متقارن  $T(r)$  نیز قرار دارد. از آنجایی که نسبت شعاع به ضخامت در دیسک‌های دوار زیاد است، می‌توان با دقت قابل قبولی دیسک را نازک در نظر گرفت و فرض تنش صفحه‌ای با حالت تقارن محوری را در معادلات میدان اعمال کرد ( $\sigma_z = 0$ ). به علاوه پارامترهای ابعادی دیسک را می‌توان در جدول ۱ مشاهده کرد.

با محیط‌های کاری واقعی است. به علاوه، این مدل بر اساس روش حل تحلیلی هموتوبی پرتوربیشن را می‌توان برای دیسک‌های دوار با هر فرمی از توابع تغییر خواص هندسی و مکانیکی و انواع بارگذاری‌های پیچیده ترکیبی به کار برد.

## ۲- مدل سازی مکانیکی - حرارتی دیسک دوار

### ۱-۲- شرایط مرزی دیسک دوار

در تناسب با شرایط کاری واقعی دیسک‌های دوار، مدل‌سازی تحلیلی و ارائه نتایج در این مقاله برای سه نوع شرط مرزی متفاوت در سطوح داخلی و خارجی دیسک دوار مطابق با شکل ۱ انجام می‌شود. همان طور که مشخص است در شرایط مرزی تحت قید شعاعی، سرعت زاویه‌ای از طریق شفت دوار به دیسک منتقل می‌شود.

جدول ۲. خواص مکانیکی فلز و سرامیک در ماده مدرج تابعی دیسک دوار [۱۴]

Table 2. Mechanical properties of metal and ceramics in a functionally graded rotating disk [14]

خواص مواد	آلومینیوم	زیرکونیا
مدول یانگ ( $E$ )، GPa	۷۰	۱۵۱
ضریب پواسان ( $\nu$ )	۰/۳	۰/۳
چگالی ( $\rho$ )، $\text{kg/m}^3$	۲۷۰۰	۵۷۰۰
ضریب انبساط حرارتی ( $\alpha$ )، $10^{-6}/^\circ\text{C}$	۲۳	۱۰
ضریب هدایت جا به جایی ( $k$ )، $\text{W/m}^\circ\text{C}$	۲۰۹	۲
تنش تسلیم ( $\sigma_0$ )، MPa	۳۰۰	---
مدول تانژانت ( $E_t$ )، GPa	۳۵	---
ثابت $q$ ، GPa		۷/۵

$$V(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^m, \quad m = \frac{\ln(P_i/P_o)}{\ln(r_i/r_o)} \quad (2)$$

در این رابطه  $P_i$  و  $P_o$  به ترتیب خاصیت مکانیکی در سطح داخلی و خارجی دیسک می‌باشند. شاخص درجه‌بندی  $m$  نیز بر اساس شرایط تعریف شده برای مواد مدرج تابعی در سطح داخلی و خارجی دیسک به دست آمده است. در سطح داخلی ( $r = r_i$ ) خاصیت مکانیکی  $P_i$  است و در سطح خارجی ( $r = r_o$ ) خاصیت مکانیکی  $P_o$  خواهد بود. مدول الاستیک، چگالی، ضریب انبساط حرارتی، ضریب هدایت حرارتی به همراه پروفیل تغییر ضخامت دیسک بر اساس روابط (۱) و (۲)، بین سطوح داخلی و خارجی مطابق جدول ۳ تغییر خواهند کرد و ضریب پواسان در دیسک ثابت در نظر گرفته می‌شود. زیرا مقادیر این ضریب در فلزات و سرامیک‌ها تفاوت کمی با هم دارد و متغیر در نظر گرفتن آن، تنها باعث پیچیده‌تر شدن معادلات حاکم خواهد شد. در این فرم از تابع کسر حجمی، این خواص سرامیک است که در راستای شعاعی دیسک افزایش می‌یابد. این موضوع با توجه به این که سرامیک تحمل دمای بالاتری نسبت به فلز دارد، دمای سیال اطراف دیسک در این مقاله از دمای اولیه آن بالاتر است و در نتیجه آن دیسک دچار افزایش دما خواهد شد هماهنگی دارد. در روابط موجود در جدول ۳،  $E_e, \rho_e, \alpha_e, k_e$  به ترتیب مقادیر مرجع برای مدول الاستیک، چگالی، ضریب انبساط حرارتی و ضریب هدایت جابه‌جایی می‌باشند

در دیسک‌های دوار مدرج تابعی، سطح داخلی عموماً از ماده‌ای که خصوصیات فلزات را دارد مانند آلومینیوم ساخته می‌شود. از آنجاییکه سطح خارجی دیسک در دماهای کاری بالا قرار می‌گیرد، ماده‌ای با خواص سرامیک‌ها برای سطح خارجی دیسک انتخاب می‌شود که دیرگداز بودن و مقاومت در دماهای بالا جزء خواص اصلی آنها است. با در نظر گرفتن یک قانون اختلاط مناسب می‌توان خواص مکانیکی را به عنوان تابعی از کسر حجمی، بین خواص سرامیک و فلز از لبه داخلی تا لبه خارجی تغییر داد. در این مقاله سطح داخلی دیسک از جنس آلومینیوم و سطح خارجی دیسک از جنس سرامیک زیرکونیا<sup>۱</sup> است. خواص مکانیکی این مواد در جدول ۲ آورده شده است. همان طور که از جدول مشخص است برای زیرکونیا مقدار تنش تسلیم مشخصی وجود ندارد که دلیل آن به خواص سرامیک‌ها باز می‌گردد که به نوعی ماده ترد شناخته می‌شوند.

در ادامه این مقاله از قانون اختلاط با تابع کسر حجمی به فرم توانی برای تعریف خاصیت مکانیکی  $P(r)$  استفاده شده است [۱۴]:

$$P(r) = P_e \left(\frac{r}{r_o}\right)^m \quad (1)$$

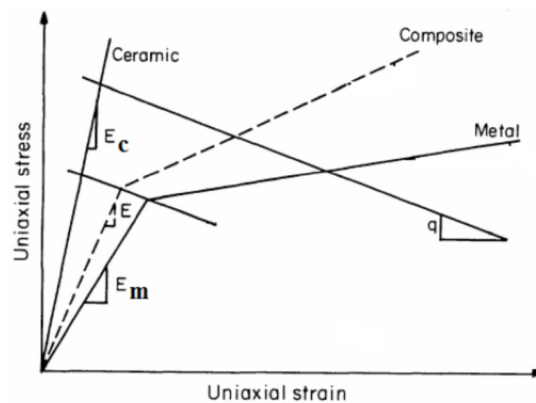
بر اساس رابطه (۱) می‌توان تابع کسر حجمی  $V(r)$  و شاخص درجه بندی خواص  $m$  را به صورت زیر تعریف کرد:

1 Zirconia ( $\text{ZrO}_2$ )

جدول ۳. خواص مکانیکی مواد مدرج تابعی با تعریف پارامترهای موجود در آنها

Table 3. Mechanical properties of functionally graded materials by defining its parameters

پروفیل ضخامت	ضریب هدایت حرارتی	ضریب انبساط حرارتی	چگالی	مدول الاستیک
$h(r) = h_c \left( \frac{r}{r_o} \right)^{m_5}$	$k(r) = k_c \left( \frac{r}{r_o} \right)^{m_4}$	$\alpha(r) = \alpha_c \left( \frac{r}{r_o} \right)^{m_3}$	$\rho(r) = \rho_c \left( \frac{r}{r_o} \right)^{m_2}$	$E(r) = E_c \left( \frac{r}{r_o} \right)^{m_1}$
$h_e = h_o$	$k_e = k_o$	$\alpha_e = \alpha_o$	$\rho_e = \rho_o$	$E_e = E_o$
$-1 \leq m_5 \leq 0$	$m_4 = \frac{\ln(k/k_o)}{\ln(r_i/r_o)}$	$m_3 = \frac{\ln(\alpha/\alpha_o)}{\ln(r_i/r_o)}$	$m_2 = \frac{\ln(\rho/\rho_o)}{\ln(r_i/r_o)}$	$m_1 = \frac{\ln(E/E_o)}{\ln(r_i/r_o)}$



شکل ۳. نمودار تنش- کرنش برای فلزات، سرامیک ها و مواد مدرج تابعی [۱۴]

Fig. 3. Stress-strain diagrams for metals, ceramics and functional graded materials [14]

در این رابطه  $\sigma_r(r)$  و  $\sigma_\theta(r)$  به ترتیب تنش های شعاعی و محیطی در دیسک می باشند. از آنجاییکه بارگذاری، هندسه و شرایط مرزی در دیسک دوار متقارن است، تنش برشی در دیسک تشکیل نمی شود و این تنش ها، همان مولفه های تنش های اصلی در دیسک هستند. اما، تحلیل تسلیم در مواد مدرج تابعی متفاوت با مواد همگن است و همانند سایر خواص در این مواد، تنش تسلیم نیز در نقاط مختلف ماده متفاوت است. مطابق با شکل ۳ نمودار تنش- کرنش برای این مواد بین نمودارهای مربوط به فلز و سرامیک قرار می گیرد. در این حالت می توان تنش تسلیم در دیسک دوار را با استفاده از یک پارامتر تجربی به نام  $q$  محاسبه کرد.  $q$  با استفاده از اختلاف تنش در فلز و سرامیک به اختلاف کرنش در آنها به صورت رابطه زیر تعریف می شود [۲۱-۲۲]:

$$q = \frac{\sigma_c - \sigma_m}{\varepsilon_c - \varepsilon_m} \quad (4)$$

در واقع مقدار  $q$  به عوامل گوناگونی بستگی داشته و در عمل و

و همان ضخامت دیسک در سطح خارجی ( $r = r_o$ ) است. به علاوه پارامترهای  $m_1, m_2, m_3, m_4$  به عنوان پارامترهای شاخص درجه بندی این خواص مکانیکی در ساختار مواد مدرج تابعی و  $m_5$  به عنوان پارامتر تغییر ضخامت دیسک شناخته می شوند.

### ۳-۲- تنش معادل در دیسک دوار مدرج تابعی

در این مقاله رفتار مواد مدرج تابعی برای تغییر شکل های الاستیک- پلاستیک به صورت کرنش سختی خطی تعریف شده است. از نقطه نظر شروع تسلیم در مواد همگن، زمانی که تنش معادل فون میزز در دیسک به تنش تسلیم مواد سازنده دیسک برسد، دیسک وارد تغییر شکل های پلاستیک می شود و سرعت زاویه ای معادل با آن به عنوان سرعت زاویه ای حد الاستیک نامگذاری می گردد. تنش معادل فون میزز در دیسک دوار حلقوی ساخته شده از مواد همگن طبق رابطه زیر محاسبه می شود [۲۰]:

$$\sigma_{eq}(r) = \sqrt{\sigma_r(r)^2 + \sigma_\theta(r)^2} - \sigma_r(r)\sigma_\theta(r) \quad (3)$$



$$C_{11}T(r_i) + C_{12} \left. \frac{dT(r)}{dr} \right|_{r=r_i} = \xi_i \quad (8)$$

$$C_{21}T(r_o) + C_{22} \left. \frac{dT(r)}{dr} \right|_{r=r_o} = \xi_o \quad (9)$$

در این روابط  $i, j=1, 2$ ،  $C_{ij}$  ثوابتی هستند که با ضرایب انتقال حرارت و جابه‌جایی در ارتباطند و  $i, j=1, 2$ ،  $\xi_{ij}$  ثوابتی در سطح داخلی و خارجی دیسک دوار می‌باشند. در این مقاله دو نوع شرط مرزی حرارتی خاص بر دیسک دوار اعمال می‌گردد:

• شرط مرزی حرارتی  $A$ : دما در سطح داخلی  $T_i$  و در سطح خارجی دیسک  $T_o$  مشخص و ثابت است.  
در این صورت ثوابت موجود در روابط (۸) و (۹) به صورت زیر خلاصه می‌شوند [۱۳]:

$$\xi_i = T_i, \quad \xi_o = T_o \quad (10)$$

$$C_{11} = C_{21} = 1, \quad C_{12} = C_{22} = 0$$

• شرط مرزی حرارتی  $B$ : دمای سطح داخلی دیسک  $T_i$  ثابت است و در سطح خارجی گرادیان دمایی دیسک برابر  $T_o$  باشد.  
در این صورت ثوابت موجود در روابط (۸) و (۹) به صورت زیر خلاصه می‌شوند [۱۳]:

$$\xi_i = T_i, \quad \xi_o = T_o \quad (11)$$

$$C_{11} = C_{22} = 1, \quad C_{12} = C_{21} = 0$$

#### ۲-۵- مدل سازی مکانیکی دیسک دوار

مطابق با شکل ۲، دیسک دوار حلقوی مدرج تابعی تحت بارگذاری‌های متقارن مکانیکی و حرارتی ( $T=T(r)$ ) قرار دارد. در مسئله مورد بررسی، آنالیز تنش‌های ترموالاستیک در دیسک دوار با نوشتن معادلات تعادل حاکم بر دیسک به فرم ناویر، بر اساس روابط حاکم بر تغییرشکل‌های کوچک، حالت تنش ضفحه‌ای و اعمال فرض تقارن محوری انجام می‌گیرد. بر این اساس تمامی متغیرهای موجود در معادلات ناویر مستقل از موقعیت محیطی  $\theta$  می‌باشند، مولفه تنش برشی ( $\tau_{r\theta}(r)$ ) از معادلات حذف خواهد شد و مولفه تنش در راستای ضخامت ( $\sigma_z$ ) نیز برابر صفر است. در نتیجه معادلات حاکم

با توجه به تعداد عوامل تأثیرگذار، مقدار آن به صورت تجربی محاسبه می‌گردد بر اساس این پارامتر می‌توان تنش تسلیم براساس مدل تامورا-توموتا-اوزاوا از رابطه زیر محاسبه کرد [۲۱-۲۲]:

$$\sigma_y(r) = \sigma_{ym} \left( (1 - V_c(r)) \frac{q + E_m}{q + E_c} \frac{E_c}{E_m} V_c(r) \right) \quad (5)$$

در این رابطه  $\sigma_{ym}$  تنش تسلیم در جزء فلزی و  $V_c(r)$  جزء حجمی سرامیک می‌باشد. زمانی که تنش معادل فون میزز در دیسک دوار ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی به تنش تسلیم در رابطه (۵) برسد، تغییرشکل‌های پلاستیک در دیسک دوار آغاز می‌شوند. با این توضیحات می‌توان سرعت زاویه‌ای حد الاستیک را در دیسک دوار مدرج تابعی پیش‌بینی کرد. به علاوه، ضریب کرنش سختی موثر در مواد کامپوزیت ( $E_{Tf}$ ) بر اساس پارامتر  $q$  به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۱-۲۲]:

$$E_{Tf} = \frac{V_c(r) E_c + V_m(r) E_{Tm} R'}{V_c(r) + V_m(r) R'}, \quad R' = \frac{q+1}{q + \frac{E_{Tm}}{E_c}} \quad (6)$$

در روابط زیر اندیس  $c$  به سرامیک‌ها و زیر اندیس  $m$  به فلزات اشاره دارد و  $E_{Tm}$  همان ضریب کرنش سختی در فلزات می‌باشد.

#### ۲-۴- مدل سازی حرارتی دیسک دوار مدرج تابعی

در این مقاله دیسک دوار تحت میدان حرارتی قرار دارد که در امتداد شعاعی دیسک تغییر می‌کند. با در نظر گرفتن تقریب یک بعدی از توزیع دما، معادله انتقال حرارت پایدار حاکم بر دیسک دوار با صرف نظر کردن از منبع گرمایی و با داشتن ضریب هدایت جابه‌جایی ( $k(r)$ ) و پروفیل ضخامت ( $h(r)$ ) به شکل زیر بیان می‌شود [۱۴]:

$$\frac{d}{dr} \left( rh(r)k(r) \frac{dT(r)}{dr} \right) = 0 \quad (7)$$

در این رابطه  $T(r)$  تابع توزیع دما در دیسک است. شرایط مرزی حرارتی بر سطوح داخلی و خارجی دیسک دوار را در حالت کلی می‌توان به کمک روابط زیر تعریف کرد [۱۳]:

بر دیسک ( $T(r)$ ) در راستای شعاعی تغییر می‌کند و به کمک تابع ضریب انبساط حرارتی  $\alpha(r)$  به شکل زیر قابل محاسبه است [۲۰]:

$$\varepsilon^T(r) = \alpha(r)T(r) \quad (18)$$

با در نظر گرفتن شرط تقارن محوری، روابط کرنش- تغییر مکان در دیسک دوار به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۰]:

$$\varepsilon_r(r) = \frac{du_r(r)}{dr} \quad (19)$$

$$\varepsilon_\theta(r) = \frac{u(r)}{r} + \frac{1}{r} \frac{du_\theta(r)}{dr} \rightarrow \varepsilon_\theta(r) = \frac{u(r)}{r} \quad (20)$$

برای رسیدن به فرم نویر معادلات تعادل، بایستی مولفه‌های تنش حاکم بر دیسک دوار در رابطه (۱۵) جایگذاری شوند. در همین راستا می‌توان این مولفه‌های تنش را به کمک روابط زیر بیان کرد [۲۰]:

$$\sigma_r(r) = \frac{E(r)}{1-\nu^2} (\varepsilon_r(r) + \nu\varepsilon_\theta(r) - (1+\nu)\alpha(r)T(r)) \quad (21)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{E(r)}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta(r) + \nu\varepsilon_r(r) - (1+\nu)\alpha(r)T(r)) \quad (22)$$

با جایگزینی روابط بالا در معادله تعادل (۱۵)، معادله نویر حاکم بر دیسک‌های دوار بر اساس تغییر مکان در راستای شعاعی دیسک ( $u_r(r)$ ) به دست می‌آید [۲۰]:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 u_r(r)}{dr^2} + \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{h(r)} \frac{dh(r)}{dr} + \frac{1}{E(r)} \frac{dE(r)}{dr} \right) \frac{du_r(r)}{dr} + \\ & \left( \frac{\nu}{rh(r)} \frac{dh(r)}{dr} + \frac{\nu}{rE(r)} \frac{dE(r)}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) u_r(r) + \\ & \left( -\frac{1}{h(r)} \frac{dh(r)}{dr} - \frac{1}{E(r)} \frac{dE(r)}{dr} - \frac{1}{\alpha(r)} \frac{d\alpha(r)}{dr} \right) \\ & \alpha(r)(1+\nu)T(r) = -\frac{(1-\nu^2)\rho(r)\omega^2 r}{E(r)} \end{aligned} \quad (23)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود این یک معادله دیفرانسیل غیرخطی از مرتبه دو و غیرهمگن است و در آن مراتب متفاوتی از مشتقات تابع مجهول وجود دارد. به علاوه تغییرات خواص مکانیکی و هندسی مطابق با روابط وجود در جدول ۳ را می‌توان در این معادله

فقط تابعی از تغییر مکان‌هایی در راستای شعاعی ( $u_r(r)$ ) و محیطی ( $u_\theta(r)$ ) هستند. از جمله مزیت‌های روش نویر برای حل معادلات تعادل این است که تغییر مکان‌های مجهولی که از حل این فرم از معادلات تعادل به دست می‌آیند خود به خود معادله سازگاری حاکم بر دیسک را ارضاء می‌کنند [۷-۹]:

$$\varepsilon_r(r) = \frac{d}{dr}(r\varepsilon_\theta(r)) \quad (12)$$

در این رابطه  $\varepsilon_r(r)$  کرنش شعاعی و  $\varepsilon_\theta(r)$  کرنش محیطی در دیسک دوار می‌باشد. در شکل ۴ المانی از دیسک دوار به همراه تمامی نیروهای داخلی در امتداد شعاعی ( $r$ ) و محیطی ( $\theta$ ) نشان داده شده است. با در نظر گرفتن این شکل می‌توان معادلات تعادل را در این دو راستا به صورت زیر بیان کرد [۲۰]:

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r(r)h(r)r) + \frac{d\tau_{r\theta}(r)}{d\theta}h(r) - \sigma_\theta(r)h(r) = -\rho(r)\omega^2 r^2 h(r) \quad (13)$$

$$\frac{d}{dr}(\tau_{r\theta}(r)h(r)r) + \tau_{r\theta}(r)h(r) = -\rho(r)\omega^2 r^2 h(r) \quad (14)$$

در این روابط  $\rho(r)$  تابع توزیع چگالی در دیسک،  $\omega$  سرعت زاویه ای و  $\omega^\circ$  شتاب زاویه‌ای دیسک می‌باشند. با در نظر گرفتن توضیحات بالا و این موضوع که دیسک تحت سرعت زاویه‌ای ثابت قرار دارد ( $\omega^\circ = 0$ )، معادلات تعادل به فرم زیر خلاصه می‌شوند [۲۰]:

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r(r)h(r)r) - \sigma_\theta(r)h(r) = -\rho(r)\omega^2 r^2 h(r) \quad (15)$$

بر اساس قانون هوک می‌توان رابطه بین مولفه‌های تنش- کرنش را برای تغییر شکل‌های الاستیک به صورت زیر تعیین کرد [۲۰]:

$$\varepsilon_r(r) = \frac{1}{E(r)}(\sigma_r(r) - \nu\sigma_\theta(r)) + \varepsilon^T(r) \quad (16)$$

$$\varepsilon_\theta(r) = \frac{1}{E(r)}(\sigma_\theta(r) - \nu\sigma_r(r)) + \varepsilon^T(r) \quad (17)$$

در این رابطه،  $\varepsilon^T(r)$  بیانگر کرنشی است که از تغییر دما در دیسک ایجاد می‌گردد. این کرنش بر اساس تابع تغییر دما حاکم



ارضاء کند:  $v(r, p): \Theta \times [0, 1] \rightarrow R$  را به نحوی تشکیل داد که معادلات زیر را

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0 \quad (27)$$

که  $u_0$  و  $p \in [1, 0]$  یک حدس اولیه از معادله (۲۴) می باشد که بطور کلی شرایط مرزی را ارضاء می کند. بدیهی است که از معادله (۲۷) داریم:

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0 \quad (28)$$

$$H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0 \quad (29)$$

واضح است که وقتی  $p = 0$  باشد، معادله (۲۷) به یک معادله خطی و در هنگامی که  $p = 1$  باشد، به معادله غیرخطی اولیه تبدیل می گردد. بنابراین فرآیند افزایش یکنواخت  $p$  از صفر به یک، همان فرآیند تبدیل  $L(v) - L(u_0) = 0$  به  $A(v) - f(r) = 0$  می باشد که اساس روش هموتوپبی است. بر همین اساس جواب معادله (۲۴) را به توان به صورت یک سری توانی از  $p$  نوشت:

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots \quad (30)$$

برای شروع حل بایستی معادله (۳۰) را در معادله (۲۷) جایگزین کرد و رابطه به دست آمده را بر حسب توان های مختلف  $p$  (  $p^0, p^1, p^2, \dots$  ) مرتب نمود. هر یک از ضرایب توان های  $p$  یک معادله دیفرانسیل بر اساس متغیر  $v(r, p)$  خواهند بود که بایستی حل شوند و در نهایت با حد زیر جواب تقریبی معادله (۲۴) را بدست آورد:

مشاهده کرد. حل تحلیلی این معادله بسیار سخت است، اما برای اولین بار در این مقاله معادله حرارتی حاکم بر دیسک به همراه معادله ناویر حاکم بر تغییر شکل های دیسک دوار به روش تحلیلی هموتوپبی پرتوربیشن حل خواهند شد.

### ۳- معرفی روش های تحلیلی و عددی

#### ۳-۱- روش تحلیلی هموتوپبی پرتوربیشن [۲۳-۲۷]

در این بخش روش هموتوپبی پرتوربیشن با توضیح اصول این روش توسط معادله دیفرانسیلی غیرخطی زیر انجام می گیرد:

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Theta \quad (24)$$

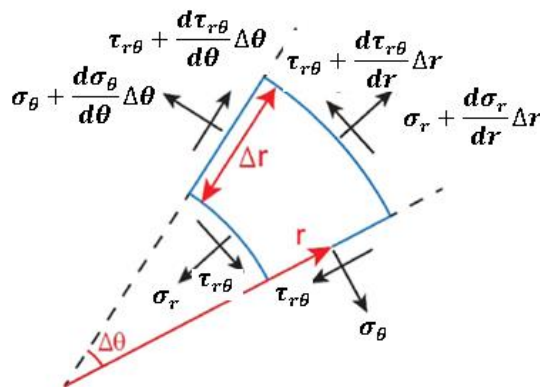
با شرایط مرزی:

$$B(u, \frac{\partial u}{\partial n}) = 0, \quad r \in \Gamma \quad (25)$$

در روابط بالا،  $u$  تابع مجهول،  $A$  یک عملگر دیفرانسیلی کلی،  $f(r)$  تابع تحلیلی معلوم،  $B$  یک عملگر مرزی و  $\Gamma$  مرز حوزه  $\Theta$  می باشد. یکی از مهمترین مراحل حل به این روش، یافتن بخش های خطی و غیر خطی عملگر  $A$  است و در همین راستا می توان این عملگر را به طور کلی به دو قسمت خطی  $L$  و غیرخطی  $N$  تجزیه کرد. بنابراین معادله (۲۴)، را می توان بصورت زیر نوشت:

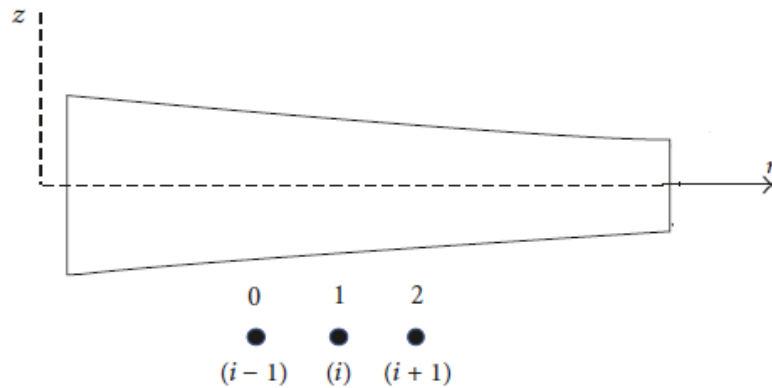
$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \quad (26)$$

بر اساس تکنیک هموتوپبی، می توان تابع هموتوپبی



شکل ۴. نیروهای داخلی بر روی المانی از دیسک دوار [۲۰]

Fig. 4. Internal forces on the element of the rotating disk [20]



شکل ۵. شبکه بندی تفاضلات محدود برای دیسک در راستای شعاعی

Fig. 5. Finite difference meshing for disk in radial direction

تقسیم شود. در این مقاله مطابق با شکل ۵، دیسک دوار در راستای شعاعی خود گره‌بندی می‌شود. اندیس تقسیم‌بندی در امتداد شعاعی  $i$  و تعداد گره‌ها در این امتداد  $N$  در نظر گرفته می‌شود. فاصله بین گره‌های متوالی نیز  $(\delta_r)$  است. مشتق تابع  $f(r)$  در نقاط داخلی شبکه با استفاده از معادلات تفاضلات مرکزی تقریب زده می‌شود. اما مشتقات برای گره‌های موجود در مرز، بر اساس روابط تفاضلات جلو رونده و عقب رونده نوشته می‌شوند. به عنوان نمونه روابط تفاضلات مرکزی-جلورونده-عقب رونده برای مشتقات مرتبه اول تابع  $f(r)$ ، با در نظر گرفتن تقسیم‌بندی مساوی به صورت زیر می‌باشد:

$$\left. \frac{df}{dr} \right|_{r=r_i} \xrightarrow{\text{Central}} \frac{f^{i+1} - f^{i-1}}{2\delta_r} + O(h^2)$$

$$\left. \frac{df}{dr} \right|_{r=r_i} \xrightarrow{\text{Forward}} \frac{f^{i+1} - f^i}{\delta_r} + O(h)$$

$$\left. \frac{df}{dr} \right|_{r=r_i} \xrightarrow{\text{Backward}} \frac{f^i - f^{i-1}}{\delta_r} + O(h)$$
(۳۲)

بر همین اساس فرم تفاضلات مشتقات مرتبه دوم  $f(r)$  نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots \quad (31)$$

سری فوق، در اکثر موارد به جواب همگرا می‌شود، ولی سرعت همگرایی به جمله غیرخطی  $N(v)$  بستگی دارد.

### ۳-۲-روش عددی تفاضلات محدود

در این مقاله از روش تفاضلات محدود [۲۸ و ۲۹] به همراه نتایج موجود در مقالات پیشین برای راستی آزمایشی حل تحلیلی هموتوپیی پرتوربیشن استفاده می‌شود. این روش یکی از ساده‌ترین و قدیمی‌ترین روش‌ها برای حل عددی معادلات دیفرانسیلی است که حل آنها به صورت تحلیلی غیرممکن است و تخمین صحیح مشتقات تابع به کمک روابط تفاضلات نقش اصلی را در آن خواهند داشت. در روش تفاضلات سطح جسم با در نظر گرفتن گره‌هایی در فواصل مشخص شبکه‌بندی می‌شود. دقت حل مسئله وابسته به تعداد گره‌های در نظر گرفته شده در داخل شبکه است و این دقت با افزایش دادن تعداد گره‌ها تا میزان مورد نظر قابل افزایش می‌باشد. اما، افزایش تعداد گره‌ها باعث افزایش حجم محاسبات نیز خواهد شد. برای حل معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی مشخص، بایستی محدوده تغییرات متغیرها به  $N-1$  قسمت

حال بخش‌های خطی و غیرخطی معادله (۳۵) برای رسیدن به همگرایی پاسخ‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$L(T(r)) = \frac{d^2}{dr^2} T(r) + \frac{(1+m_4-m_5)}{r} \frac{d}{dr} T(r) \quad (36)$$

$$N(T(r)) = 0 \quad (37)$$

$$f(r) = 0 \quad (38)$$

در ادامه تابع هموتویی را به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$H(v, p) = L(v(r)) - L(u_o(r)) + pL(u_o(r)) + p[N(v(r)) - f(r)] = 0 \quad (39)$$

در این معادله  $v(r)$  به عنوان تابع مجهول و  $u_o(r)$  به عنوان تابع شرایط اولیه برای حل معادله دیفرانسیل مورد استفاده قرار می‌گیرد که خود آن نیز مجهول است. در این مقاله این توابع مجهول به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$L(v(r)) = \frac{d^2}{dr^2} v(r) + \frac{(1+m_4-m_5)}{r} \frac{d}{dr} v(r) \quad (40)$$

$$L(u_o(r)) = \frac{d^2}{dr^2} u_o(r) + \frac{(1+m_4-m_5)}{r} \frac{d}{dr} u_o(r) \quad (41)$$

در مرحله بعدی  $v(r)$  را به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$v(r) = v_o(r) + pv_1(r) + p^2v_2(r) \quad (42)$$

با جایگزین نمودن معادلات (۴۰-۴۲) در معادله هموتویی (۳۹) و مرتب نمودن رابطه به وجود آمده بر حسب توان‌های  $p$  داریم:

$$p^0: -\frac{m_4}{r} \frac{d}{dr} u_o(r) + \frac{m_4}{r} \frac{d}{dr} v_o(r) - \frac{m_5}{r} \frac{d}{dr} v_o(r) + \frac{m_5}{r} \frac{d}{dr} u_o(r) - \frac{d^2}{dr^2} u_o(r) + \frac{d^2}{dr^2} v_o(r) - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} u_o(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} v_o(r) \quad (43)$$

$$p^1: \frac{m_4}{r} \frac{d}{dr} u_1(r) - \frac{m_5}{r} \frac{d}{dr} v_1(r) + \frac{m_4}{r} \frac{d}{dr} u_o(r) - \frac{m_5}{r} \frac{d}{dr} u_o(r) + \frac{d^2}{dr^2} u_o(r) + \frac{d^2}{dr^2} v_o(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} u_o(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} v_1(r) \quad (44)$$

$$\left. \frac{d^2 f}{dr^2} \right|^{r=r_i} \xrightarrow{\text{Central}} \frac{f^{i+1} - 2f^i + f^{i-1}}{\delta_r^2} + O(h^2) \quad (33)$$

$$\left. \frac{d^2 f}{dr^2} \right|^{r=r_i} \xrightarrow{\text{Forward}} \frac{f^{i+2} - 2f^{i+1} + f^i}{\delta_r} + O(h)$$

$$\left. \frac{d^2 f}{dr^2} \right|^{r=r_i} \xrightarrow{\text{Backward}} \frac{f^i - 2f^{i-1} + f^{i-2}}{\delta_r} + O(h)$$

روابط تفاضلات برای دیگر مشتقات به کمک الگوریتم [۲۸ و ۲۹]

محاسبه شده‌اند که برای حجم بالا از آوردن آنها خودداری می‌شود. برای رسیدن به راه‌حلی صحیح و موثر از فرمول بندی تفاضلات مرتبه دوم در یک بعد برای مدل سازی دیسک دوار در این تحقیق استفاده می‌شود. برای هر کدام از گره‌های داخلی موجود در شبکه بندی با اندیس خاص  $i$ ، معادلات حاکم (حرارتی-ناویر) در فرم تفاضلات محدود نوشته می‌شوند. به علاوه شرایط مرزی حاکم بر دیسک نیز بایستی برای گره‌های مرزی در فرم تفاضلات محدود بازنویسی شود. هر گره داخلی در شبکه بندی دارای یک درجه آزادی مجهول است. تعداد  $N-2$  گره که برای آنها فرم تفاضلی معادلات نوشته می‌شوند و در نهایت با در نظر گرفتن شرایط مرزی در روابط، تعداد معادلات تعادل با تعداد مجهولات مسئله برابر خواهند شد. در روش تفاضلات محدود نهایتاً به یک دستگاه معادلات جبری خطی خواهیم رسید که بایستی با در نظر گرفتن حوزه مسئله و شرایط مرزی حل شود تا مقادیر مجهول در هر یک از نقاط شبکه به دست آید. این دستگاه معادلات خطی در فرم ماتریس توسط رابطه (۳۴) معرفی می‌شود.

$$AU = B \quad (34)$$

#### ۴- حل معادلات حاکم

۴-۱- حل معادلات به روش تحلیلی هموتویی پرتوربیشن

۴-۱-۱- معادله انتقال حرارت

فرم نهایی معادله دیفرانسیل حاکم بر انتقال حرارت پایدار در دیسک دوار مدرج تابعی، با جایگزینی توابع تعریف شده برای ضریب هدایت جابه‌جایی و پروفیل ضخامت دیسک در رابطه (۷) به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d^2}{dr^2} T(r) + \frac{(1+m_4-m_5)}{r} \frac{d}{dr} T(r) = 0 \quad (35)$$

دیسک دوار مدرج تابعی، با جایگزینی توابع مدول الاستیک، چگالی، ضریب انبساط حرارتی و پروفیل ضخامت در رابطه (۲۳) به صورت زیر می باشد:

$$\frac{d^2 u_r(r)}{dr^2} + \left( \frac{1+m_1-m_5}{r} \right) \frac{du_r(r)}{dr} + \left( \frac{-1+vm_1-m_5}{r^2} \right) u_r(r) + \left( \frac{(-m_1-m_3+m_5)(1+v)\alpha_e \left( \frac{r}{r_0} \right)^{m_3}}{r} \right) T(r) = \frac{(1-v^2)\rho_e \left( \frac{r}{r_0} \right)^{m_2} \omega^2 r \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-m_1}}{E_e} \quad (50)$$

همان طور که مشخص است در این رابطه تابع توزیع دما در دیسک ( $T(r)$ ) وجود دارد که در بخش قبلی به کمک روش هموتپی پرتوریشن حل شده است. حال بایستی این حل در رابطه بالا جایگذاری شود تا در نهایت یک معادله دیفرانسیل بر اساس تغییر مکان در راستای شعاعی دیسک به دست آید:

$$\frac{d^2 u_r(r)}{dr^2} + \left( \frac{1+m_1-m_5}{r} \right) \frac{du_r(r)}{dr} + \left( \frac{-1+vm_1-m_5}{r^2} \right) u_r(r) + \left( \frac{(-m_1-m_3+m_5)(1+v)\alpha_e \left( \frac{r}{r_0} \right)^{m_3}}{r} \right) (C_1 + C_2 r^{-m_4+m_5}) = \frac{(1-v^2)\rho_e \left( \frac{r}{r_0} \right)^{m_2} \omega^2 r \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-m_1}}{E_e} \quad (51)$$

حال بخش‌های خطی و غیرخطی معادله (۵۱) با در نظر گرفتن شرط همگرایی، به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$L(u_r(r)) = \frac{d^2}{dr^2} u_r(r) + \left( \frac{1+m_1-m_5}{r} \right) \frac{d}{dr} u_r(r) + \left( \frac{-1+vm_1-m_5}{r^2} \right) u_r(r) \quad (52)$$

$$N(u_r(r)) = 0 \quad (53)$$

$$f(r) = \left( \frac{(-m_1-m_3+m_5)(1+v)\alpha_e \left( \frac{r}{r_0} \right)^{m_3}}{r} \right) (C_1 + C_2 r^{-m_4+m_5}) + \frac{(1-v^2)\rho_e \left( \frac{r}{r_0} \right)^{m_2} \omega^2 r \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-m_1}}{E_e} \quad (54)$$

$$p^2 : -\frac{m_4}{r} \frac{d}{dr} v_2(r) - \frac{m_5}{r} \frac{d}{dr} v_2(r) + \frac{d^2}{dr^2} v_2(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} v_2(r) \quad (45)$$

برای محاسبه تابع مجهول  $v(r)$  بایستی معادلات دیفرانسیلی بالا حل شوند. برای حل کردن معادله (۴۳) فرض می‌شود که  $u_o(r) = v_o(r)$  باشد. بنابراین داریم:

$$u_o(r) = C_1 + C_2 r^{-m_4+m_5} \quad (46)$$

با جایگذاری معادله (۴۶) در رابطه (۴۴) و حل آن بر حسب  $v_1(r)$  داریم:

$$v_1(r) = C_1 + C_2 r^{-m_4+m_5} \quad (47)$$

به طور مشابه برای معادله (۴۵) داریم:

$$v_2(r) = C_1 + C_2 r^{-m_4+m_5} \quad (48)$$

از آنجاییکه دیسک تحت منبع گرمایی خارجی قرار ندارد، در معادله دیفرانسیل حاکم بر انتقال حرارت تابع  $f(r)$  برابر با صفر است و این باعث می‌شود تا پاسخ معادلات دیفرانسیل ضرایب  $p$  یکسان باشند. برای یافتن تابع مجهول  $T(r)$  لازم است که معادلات (۴۶ تا ۴۸) را در معادله (۴۲) جایگزین شود و به طور همزمان  $v(r) \rightarrow T(r)$  و  $p \rightarrow 1$  میل داده شود. این کار به معنای یافتن پاسخ معادله دیفرانسیل حاکم بر انتقال حرارت در دیسک‌های دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی است. بنابراین حل این معادله برابر است با:

$$T(r) = C_1 + C_2 r^{-m_4+m_5} \quad (49)$$

در این رابطه پارامترهای  $C_1$  و  $C_2$  مجهول بوده و بر اساس شرایط مرزی حرارتی تعیین می‌شوند. همان طور که در بخش ۲ بیان شد دیسک تحت دو شرایط مرزی حرارتی متفاوت قرار دارد.

#### ۴-۱-۲- معادله ناویر حاکم

فرم نهایی معادله ناویر حاکم بر اساس تغییرشکل مجهول در

$$\begin{aligned}
 p^1: & -\frac{m_5}{r} \frac{d}{dr} u_0(r) - \frac{m_5}{r} \frac{d}{dr} v_1(r) + \\
 & \frac{1}{r} \frac{d}{dr} u_0(r) + \frac{m_1 v}{r^2} u_0(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} v_1(r) - \\
 & \frac{1}{r^2} v_1(r) - \frac{m_5 v}{r^2} u_0(r) + \frac{m_1 v}{r^2} v_1(r) + \\
 & \frac{m_1}{r} \frac{d}{dr} u_0(r) + \frac{d^2}{dr^2} u_0(r) + \frac{d^2}{dr^2} v_1(r) - \frac{m_5 v}{r^2} v_1(r) - \\
 & \left. \frac{1}{r^2} u_0(r) + \frac{m_1}{r} \frac{d}{dr} v_1(r) + \left( \frac{(-m_1 - m_3 + m_5)(1+v)\alpha_e \left(\frac{r}{r_0}\right)^{m_3}}{r} \right) \right) \\
 & (C_1 + C_2 r^{-m_3+m_5}) + \frac{(1-v^2)\rho_e \left(\frac{r}{r_0}\right)^{m_2} \omega^2 r \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-m_1}}{E_e} = 0
 \end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}
 p^2: & \frac{d^2}{dr^2} v_2(r) + \frac{m_1 v}{r^2} v_2(r) - \frac{m_5}{r} \frac{d}{dr} v_2(r) - \\
 & \frac{m_5 v}{r^2} v_2(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} v_2(r) - \frac{1}{r^2} v_2(r) + \frac{m_1}{r} \frac{d}{dr} v_2(r) = 0
 \end{aligned} \tag{59}$$

برای محاسبه تابع مجهول  $v(r)$  بایستی معادلات دیفرانسیلی بالا حل شوند. برای حل کردن معادله (۵۷) فرض می‌کنیم که  $v_0(r) = u_0(r)$  باشد:

$$\begin{aligned}
 v_0(r) = & C_3 r^{-\frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_5 + \frac{1}{2}\sqrt{m_1^2 - 2m_1m_5 - 4m_1v + m_5^2 + 4m_5v + 4}} + \\
 & C_4 r^{-\frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_5 - \frac{1}{2}\sqrt{m_1^2 - 2m_1m_5 - 4m_1v + m_5^2 + 4m_5v + 4}}
 \end{aligned} \tag{60}$$

با جایگذاری معادله (۶۰) در رابطه (۵۸) و حل آن بر حسب

$v_1(r)$  داریم:

$$\begin{aligned}
 v_1(r) = & C_3 r^{-\frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_5 + \frac{1}{2}\sqrt{m_1^2 - 2m_1m_5 - 4m_1v + m_5^2 + 4m_5v + 4}} + C_4 r^{-\frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_5 - \frac{1}{2}\sqrt{m_1^2 - 2m_1m_5 - 4m_1v + m_5^2 + 4m_5v + 4}} + 64\alpha_e(1+v) \\
 & ((1-v)r^{-m_1+3+m_2} r_0^{m_1-m_2} \rho_e ((-m_3-v-1)m_1 - m_3^2 + (m_5-2)m_3 + m_5(1+v))\omega^2 ((m_5+m_3-m_4+v+1)m_1 + \\
 & m_3^2 + (m_5-2m_4+2)m_3 + (-m_4-v+1)(m_5+m_4^2-2m_4) + (-m_1-m_3+m_5)E_e (-C_2((-m_3-v-1)m_1 - m_3^2 + (m_5-2) \\
 & (m_3+m_5(1+v))r^{-m_4+1+m_3+m_5} + r^{1+m_3} ((m_5+m_3-m_4+v+1)m_1 + m_3^2 + (m_5-2m_4+2)m_3 + \\
 & (-m_4-v+1)m_5 + m_4^2 - 2m_1)C_1) r_0^{m_3} ((m_5-m_2+v-3)m_1 + (-m_2-v-4)m_5 + m_2^2 + 6m_2 + 8) \\
 & \frac{((m_5-2-m_1-2m_3 + \sqrt{m_1^2 + (-4v-2m_5)m_1 + m_5^2 + 4vm_5 + 4})(m_5-2m_4+2m_1+2m_3 - \sqrt{m_1^2 + (-4v-2m_5)m_1 + m_5^2 + 4vm_5 + 4})E_e}{ \\
 & (-6+m_5+m_1+2m_2 + \sqrt{m_1^2 + (-4v-2m_5)m_1 + m_5^2 + 4vm_5 + 4})(m_5-2-m_1-2m_3 - \sqrt{m_1^2 + (-4v-2m_5)m_1 + m_5^2 + 4vm_5 + 4}) \\
 & (m_5-2m_4+2+m_1+2m_3 + \sqrt{m_1^2 + (-4v-2m_5)m_1 + m_5^2 + 4vm_5 + 4})(-6+m_5+m_1-2m_2 - \sqrt{m_1^2 + (-4v-2m_5)m_1 + m_5^2 + 4vm_5 + 4})
 \end{aligned} \tag{61}$$

(۶۰ تا ۶۲) در معادله (۴۲) جایگزین شوند و به طور همزمان

$v(r) \rightarrow u_r(r)$  و  $p \rightarrow 1$  میل داده شود. این کار به معنای یافتن پاسخ برای معادله دیفرانسیل حاکم بر دیسک‌های دوار مدرج تابعی تحت بارگذاری مکانیکی-حرارتی است. بنابراین حل این معادله برابر است با:

حال بایستی تابع هموتوبی مطابق با رابطه (۳۹) ایجاد شود. همانند حل معادله انتقال حرارت در دیسک، در این معادله  $v(r)$  به عنوان تابع مجهول و  $u_0(r)$  به عنوان تابع شرایط اولیه معادله دیفرانسیل تعریف می‌شود که خود نیز مجهول است:

$$L(v(r)) = \frac{d^2}{dr^2} v(r) + \frac{(1+m_1-m_5)}{r} \frac{d}{dr} v(r) + \frac{(-1+vm_1-m_5)}{r^2} v(r) \tag{55}$$

$$L(u_0(r)) = \frac{d^2}{dr^2} u_0(r) + \frac{(1+m_1-m_5)}{r} \frac{d}{dr} u_0(r) + \frac{(-1+vm_1-m_5)}{r^2} u_0(r) \tag{56}$$

در مرحله بعدی تابع  $v(r)$  مطابق با رابطه (۴۲) تعریف می‌شود. با جایگزین نمودن معادلات (۴۲، ۵۶، ۵۵) در معادله هموتوبی (۳۹) و مرتب نمودن رابطه به وجود آمده بر حسب توان‌های  $p$  داریم:

$$\begin{aligned}
 p^0: & -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} u_0(r) - \frac{m_1}{r} \frac{d}{dr} u_0(r) - \frac{m_1 v}{r^2} u_0(r) + \\
 & \frac{m_1 v}{r^2} \frac{d}{dr} v_0(r) + \frac{m_5 v}{r^2} u_0(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} v_0(r) - \\
 & \frac{m_5}{r} \frac{d}{dr} v_0(r) + \frac{m_1}{r} \frac{d}{dr} v_0(r) + \\
 & \frac{m_5}{r} \frac{d}{dr} u_0(r) + \frac{d^2}{dr^2} v_0(r) - \frac{m_5 v}{r^2} v_0(r) + \\
 & \frac{1}{r^2} u_0(r) - \frac{1}{r^2} v_0(r) - \frac{d^2}{dr^2} u_0(r) = 0
 \end{aligned} \tag{57}$$

به طور مشابه برای معادله (۵۹) داریم:

$$\begin{aligned}
 v_2(r) = & C_3 r^{-\frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_5 + \frac{1}{2}\sqrt{m_1^2 - 2m_1m_5 - 4m_1v + m_5^2 + 4m_5v + 4}} + \\
 & C_4 r^{-\frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_5 - \frac{1}{2}\sqrt{m_1^2 - 2m_1m_5 - 4m_1v + m_5^2 + 4m_5v + 4}}
 \end{aligned} \tag{62}$$

برای یافتن تابع مجهول  $u_r(r)$  لازم است که معادلات

$$u_r(r) = C_3 r^{-\frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_5 + \frac{1}{2}\sqrt{m_1^2 - 2m_1m_5 - 4m_1v + m_5^2 + 4m_5v + 4}} + C_4 r^{-\frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_5 - \frac{1}{2}\sqrt{m_1^2 - 2m_1m_5 - 4m_1v + m_5^2 + 4m_5v + 4}} + 64\alpha_e(1+v) \quad (63)$$

$$\frac{((1-v)r^{-m_1+3+m_2} r_o^{m_1-m_2} \rho_e((-m_3-v-1)m_1 - m_3^2 + (m_5-2)m_3 + m_5(1+v))\omega^2((m_5+m_3-m_4+v+1)m_1 + m_3^2 + (m_5-2m_4+2)m_3 + (-m_4-v+1)(m_5+m_4^2-2m_4) + (-m_1-m_3+m_5)E_e - C_2((-m_3-v-1)m_1 - m_3^2 + (m_5-2)(m_3+m_5(1+v))r^{-m_4+1+m_5+m_3} + r^{1+m_3}((m_5+m_3-m_4+v+1)m_1 + m_3^2 + (m_5-2m_4+2)m_3 + (-m_4-v+1)m_5 + m_4^2 - 2m_4)C_1)r_o^{m_3}((m_5-m_2+v-3)m_1 + (-m_2-v-4)m_5 + m_2^2 + 6m_2 + 8))}{(m_5-2-m_1-2m_3 + \sqrt{m_1^2 + (-4v-2m_5)m_1 + m_5^2 + 4vm_5 + 4})(m_5-2m_4+2m_1+2m_3 - \sqrt{m_1^2 + (-4v-2m_5)m_1 + m_5^2 + 4vm_5 + 4})E_e} \\ (-6+m_5+m_1+2m_2 + \sqrt{m_1^2 + (-4v-2m_5)m_1 + m_5^2 + 4vm_5 + 4})(m_5-2-m_1-2m_3 - \sqrt{m_1^2 + (-4v-2m_5)m_1 + m_5^2 + 4vm_5 + 4}) \\ (m_5-2m_4+2+m_1+2m_3 + \sqrt{m_1^2 + (-4v-2m_5)m_1 + m_5^2 + 4vm_5 + 4})(-6+m_5+m_1-2m_2 - \sqrt{m_1^2 + (-4v-2m_5)m_1 + m_5^2 + 4vm_5 + 4})$$

$$\begin{cases} i=1, & T(r)=T_i \rightarrow T^1=T_i \\ i=N, & \frac{d}{dr}T(r)=T_o \rightarrow \frac{T^N-T^{N-1}}{\delta_r}=T_o \end{cases} \quad (66)$$

در معادله (۶۳) پارامترهای  $C_3$  و  $C_4$  مجهول بوده و بر اساس شرایط مرزی حاکم بر دیسک تعیین می‌شوند. در این مقاله دیسک تحت سه نوع شرط مرزی متفاوت قرار دارد.

#### ۲-۴-۲- حل معادلات با روش عددی تفاضلات محدود

#### ۲-۴-۱- معادله انتقال حرارت

در این بخش معادله حاکم بر انتقال حرارت دیسک دوار مدرج تابعی با روش تفاضلات محدود حل می‌شود. در مرحله اول مشتقات موجود در معادله حاکم (۳۵) به کمک روابط تفاضلات دوباره‌نویسی می‌گردند:

$$\frac{(1+m_3-m_4)}{r_i} \frac{T^{i+1}-T^{i-1}}{2\delta_r} + \frac{T^{i+1}-2T^i+T^{i-1}}{\delta_r^2} = 0 \quad (64)$$

همان طور که قبلاً بیان شد امتداد شعاعی دیسک  $(r \in [r_i, r_o])$  با استفاده از  $N$  گره شبکه‌بندی می‌شود  $(i = [1, N])$ . برای گره‌های داخلی شبکه  $(i = [2, N-1])$ ، فرم تفاضلات محدود معادله (۶۴) نوشته می‌شود. به علاوه شرایط مرزی حاکم بر معادله انتقال حرارت دیسک (روابط ۱۰ و ۱۱) نیز برای گره‌های مرزی به فرم تفاضلات نوشته خواهند شد:

• شرط مرزی حرارتی **A**:

$$\begin{cases} i=1, & T(r)=T_i \rightarrow T^1=T_i \\ i=N, & T(r)=T_o \rightarrow T^N=T_o \end{cases} \quad (65)$$

• شرط مرزی حرارتی **B**:

با نوشتن این روابط دستگامی از معادلات جبری خطی به دست می‌آید. با حل این دستگام معادلات مقدار دما در هر یک از گره‌های تعریف شده در شبکه‌بندی دیسک محاسبه می‌شود. از این داده‌ها در حل تفاضلات محدود معادله ناویر حاکم بر دیسک در بخش بعدی استفاده می‌گردد.

#### ۲-۴-۲- معادله ناویر حاکم

در این قسمت معادله ناویر حاکم بر تغییر مکان دیسک دوار مدرج تابعی به کمک روش تفاضلات محدود حل می‌گردد. در ابتدا رابطه (۵۰) به صورت زیر به فرم تفاضلات نوشته می‌شود:

$$\frac{u_r^{i+1} - 2u_r^i + u_r^{i-1}}{\delta_r^2} + \frac{(1+m_1-m_5)}{r_i} \frac{u_r^{i+1} - u_r^{i-1}}{2\delta_r} + \frac{(-1+vm_1-m_5)}{r_i^2} u_r^i + \left( \frac{(-m_1-m_3+m_5)(1+v)\alpha_e \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^{m_3}}{r_i} \right) (C_1 + C_2 r_i^{-m_4+m_5}) + \frac{(1-v^2)\rho_e \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^{m_2} \omega^2 r_i \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^{-m_1}}{E_e} = 0 \quad (67)$$

برای گره‌های داخلی شبکه  $(i = [2, N-1])$ ، فرم تفاضلات محدود معادله (۶۷) نوشته می‌شود. به علاوه شرایط مرزی حاکم بر دیسک در سطوح داخلی و خارجی آن نیز برای گره‌های مرزی به فرم تفاضلات نوشته خواهد شد. در این مقاله سه شرط مرزی متفاوت برای دیسک



جدول ۴. شرایط مرزی متفاوت حاکم بر دیسک در فرم تفاضلات محدود

Table 4. Different disk boundary conditions in the form of finite differences

شرایط مرزی در سطوح داخلی و خارجی دیسک			
فرم تفاضلات محدود	سطح داخلی: تحت قید شعاعی	سطح داخلی: تحت قید شعاعی	سطح داخلی: آزاد
سطح خارجی: تحت قید شعاعی	سطح خارجی: آزاد	سطح داخلی: تحت قید شعاعی	سطح خارجی: آزاد
سطح داخلی ( $i = 1$ )	$u_r(r) = 0$ $u_r^1 = 0$	$\sigma_r(r) = 0$ $\frac{u_r^2 - u_r^1}{\delta_r} + \frac{\nu}{r_1} u_r^1 - (1 + \nu) \alpha(r_1) T(r_1) = 0$	$\sigma_r(r) = 0$ $\frac{u_r^2 - u_r^1}{\delta_r} + \frac{\nu}{r_1} u_r^1 - (1 + \nu) \alpha(r_1) T(r_1) = 0$
سطح خارجی ( $i = N$ )	$u_r(r) = 0$ $u_r^N = 0$	$\sigma_r(r) = 0$ $\frac{u_r^N - u_r^{N-1}}{\delta_r} + \frac{\nu}{r_N} u_r^N - (1 + \nu) \alpha(r_N) T(r_N) = 0$	$\sigma_r(r) = 0$ $\frac{u_r^N - u_r^{N-1}}{\delta_r} + \frac{\nu}{r_N} u_r^N - (1 + \nu) \alpha(r_N) T(r_N) = 0$

جدول ۵. پارامترهای شاخص درجه بندی مواد مدرج تابعی با پروفیل توانی تغییرات خواص، ساخته شده از آلومینیوم-زیرکونیوم

Table 5. Indexing parameters of functionally graded materials with power profiles, made of aluminum-zirconium

$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$
۰/۴۷۶۶	۰/۴۶۶۲	-۰/۵۱۷۵	-۲/۸۸۸۷

هم چنین روابط موجود در جدول ۳، در جدول ۵ لیست شده‌اند. به علاوه متغیرهای دمایی دیسک در سطح داخلی  $T_i = 25^\circ\text{C}$  و در سطح خارجی  $T_o = 125^\circ\text{C}$  در نظر گرفته شده است.

#### ۵-۱- راستی‌آزمایی روش هموتویی پرتوربیشن

در این بخش نتایج به‌دست‌آمده از روش هموتویی پرتوربیشن برای حل معادله انتقال حرارت و معادله ناویر حاکم بر تغییرشکل دیسک به دو شکل متفاوت راستی‌آزمایی می‌شوند. در ابتدا به کمک روش تفاضلات محدود، نتایج به‌دست‌آمده برای حل معادله انتقال حرارت و معادله ناویر حاکم بر تغییرشکل دیسک راستی‌آزمایی می‌شوند. در ادامه مراحل راستی‌آزمایی به کمک داده‌های موجود در مراجع کامل خواهد شد. همان‌طور که در جدول ۶ نشان داده شده است با انجام تست همگرایی پاسخ‌ها در روش تفاضلات محدود برای دیسک با شرایط مرزی آزاد-آزاد، تعداد گره‌ها در شبکه‌بندی تفاضلات محدود دیسک  $N = 401$  تعیین شد. از آنجاییکه این نوع از شرایط مرزی بالاترین سطح تنش در دیسک را نسبت به سایر شرایط مرزی دارد [۷-۹]، در نتیجه تعداد همگرا شده گره‌ها قابل استفاده برای انواع شرایط مرزی مورد بحث در این مقاله است.

در نظر گرفته شده است که فرم تفاضلات آنها به صورت زیر است: با نوشتن این روابط برای هر یک از گره‌های مرزی، دستگاهی از معادلات جبری خطی به دست می‌آید. با حل این دستگاه معادلات مقدار تغییرمکان مجهول در راستای شعاعی دیسک در هر یک از گره‌ها در شبکه‌بندی محاسبه می‌شود. با استفاده از این داده‌های تغییرمکانی می‌توان مقادیر کرنش و تنش در هر یک از این گره‌ها را محاسبه کرد.

#### ۵- آنالیز عددی

در این بخش ابتدا روش تحلیلی هموتویی پرتوربیشن به کمک حل عددی تفاضلات محدود و هم چنین نتایج موجود در مراجع راستی‌آزمایی می‌شوند. پس از تأیید نتایج ارائه‌شده برای هر دو معادلات انتقال حرارت و تغییرمکان در دیسک، آنالیز عددی بر اساس پارامترهای مسئله انجام خواهد گرفت. از آنجاییکه بایستی تغییر خواص مکانیکی در امتداد شعاعی دیسک با خواص آلومینیوم و زیرکونیوم در سطوح داخلی و خارجی هماهنگی داشته باشد، مقادیر پارامترهای  $m_1, m_2, m_3, m_4$  بر اساس خواص هندسی و مکانیکی متناظر با سطوح داخلی و خارجی دیسک در جدول‌های ۱ و ۲ و

جدول ۶. تست همگرایی تعداد گره ها در شبکه بندی تفاضلات محدود در امتداد شعاعی دیسک دوار

Table 6. Convergence testing of the number of nodes in finite difference meshing along the radial rotation of the rotating disk

تعداد گره ها در شبکه تفاضلات محدود $N$	تنش معادل فون میزز در شعاع $r=0.12$ m (MPa)
۴۰۱	۳۰۰/۰۶
۳۰۱	۳۰۰/۰۵
۲۰۱	۳۰۰/۰۰۴
۱۰۱	۲۹۹/۵۳
۵۱	۲۹۸/۸۶

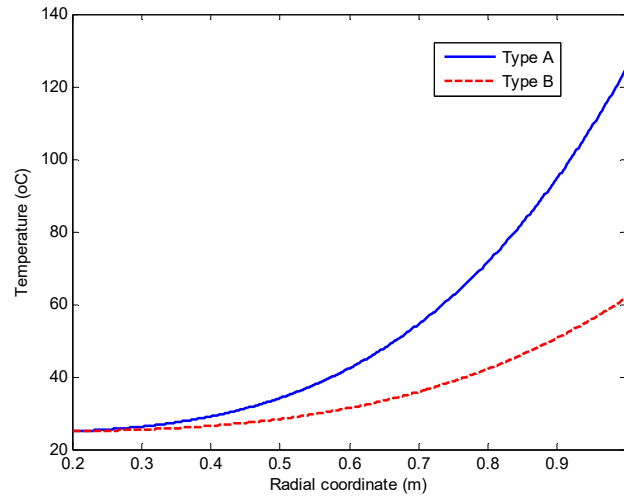
جدول ۷. مقایسه نتایج حل معادله انتقال حرارت در دیسک به دو روش تفاضلات محدود و هموتویی پرتوربیشن

Table 7. Comparison of the results of solving the heat transfer equation in a disk by finite difference method and homotopy perturbation method

درصد خطا روش هموتویی پرتوربیشن نسبت به روش تفاضلات محدود	درصد خطا روش هموتویی پرتوربیشن نسبت به روش تفاضلات محدود	دما بر اساس روش هموتویی پرتوربیشن (°C)		دما بر اساس روش تفاضلات محدود (°C)		شعاع دیسک (m)
		شرط حرارتی $A$	شرط حرارتی $B$	شرط حرارتی $A$	شرط حرارتی $B$	
		شرط حرارتی $A$	شرط حرارتی $B$	شرط حرارتی $A$	شرط حرارتی $B$	شرط حرارتی $B$
		۰	۲۵	۲۵	۲۵	۰/۲
٪۰/۰۰۴۳	۰	۲۵/۴۶۵۸	۲۶/۲۶۸۳	۲۵/۴۶۶۹	۲۶/۲۶۸۳	۰/۳
٪۰/۰۱۳	٪۰/۰۰۰۳۴	۲۶/۴۹۵۵	۲۹/۰۷۱۷	۲۶/۴۹۹۰	۲۹/۰۷۱۶	۰/۴
٪۰/۰۲۸	٪۰/۰۰۰۲۹	۲۸/۳۶۴۰	۳۴/۱۵۸۹	۲۸/۳۷۲۰	۳۴/۱۵۸۸	۰/۵
٪۰/۰۴۸	٪۰/۰۰۰۴۷	۳۱/۳۷۴۹	۴۲/۳۵۶۴	۳۱/۳۹۰۰	۴۲/۳۵۶۲	۰/۶
٪۰/۰۷۲	٪۰/۰۰۰۳۶	۳۵/۸۵۶۵	۵۴/۵۵۸۱	۳۵/۸۸۲۴	۵۴/۵۵۷۹	۰/۷
٪۰/۰۲۶	٪۰/۰۰۰۱۳	۴۲/۱۵۹۳	۷۱/۷۱۸۲	۴۲/۱۷۰۳	۷۱/۷۱۸۱	۰/۸
٪۰/۰۲۲	٪۰/۰۰۰۱۰	۵۰/۶۵۳۹	۹۴/۸۴۵۷	۵۰/۶۶۵۲	۹۴/۸۴۵۶	۰/۹
٪۰/۰۱۲	۰	۶۱/۷۲۴۹	۱۲۵	۶۱/۷۳۷۱	۱۲۵	۱

حل تحلیلی نتایج درست تری را ارائه می دهد. زیرا در روش تفاضلات محدود مشتقات موجود با توابع تفاضلات تقریب زده می شوند و این موضوع نشان دهنده برتری حل های تحلیلی نسبت به حل های عددی است. بر همین اساس توزیع دما در داخل دیسک برای دو شرط مرزی با استفاده از حل هموتویی در شکل ۶ آورده شده است. مطابق با شکل ۶، دیسک در شرط حرارتی  $B$  به واسطه گرادیان دمایی در سطح خارجی خود، تغییرات دمایی یکنواخت تری را نسبت به شرط حرارتی  $A$  تجربه می کند. در نتیجه انتظار داریم که برای شرط حرارتی  $B$

بر اساس این تست همگرایی، نتایج به دست آمده از دو روش هموتویی پرتوربیشن و تفاضلات محدود در جدول ۷ برای حل معادله انتقال حرارت پایا در شعاع های متفاوتی از دیسک و برای پارامتر تغییر ضخامت  $m_5 = -0.5$  آورده شده است. همان طور که از این جدول مشخص است نتایج دو روش برای شعاع های متفاوتی از دیسک با دقت قابل قبولی به مقادیر یکسان همگرا شده اند. برای شرط مرزی حرارتی نوع  $A$ ، نتایج دو روش بسیار به هم نزدیک است. اما، برای شرط مرزی نوع  $B$  که در آن گرادیان دمایی ظاهر می شود



شکل ۶. توزیع درجه حرارت در امتداد شعاعی دیسک برای دو نوع شرط مرزی حرارتی  $A$  و  $B$

Fig. 6. Temperature distribution along the radial direction of disk for two types of thermal boundary conditions  $A$  and  $B$

جدول ۸. مقایسه نتایج حل معادله ناویر در دیسک دوار به دو روش تفاضلات محدود و هموتویی پرتوربیشن برای پارامتر ضخامت ( $m_s = -0.5$ ).

Table 8. Comparison of the results of solving the Navier equation in a rotating disk by finite difference method and homotopy perturbation method for the thickness parameter ( $m_s = -0.5$ )

درصد خطا روش هموتویی پرتوربیشن نسبت به روش تفاضلات محدود	درصد خطا روش هموتویی پرتوربیشن نسبت به روش تفاضلات محدود	تغییر مکان بر اساس روش هموتویی پرتوربیشن ( $^{\circ}\text{C}$ )	تغییر مکان بر اساس روش تفاضلات محدود ( $^{\circ}\text{C}$ )	شعاع دیسک (m)
شرط حرارتی $B$	شرط حرارتی $A$	شرط حرارتی $B$	شرط حرارتی $A$	
٪۰/۶۸	٪۰/۷۴	٪۰/۰۱۳۱۰	٪۰/۰۱۷۳۷	۰/۲
٪۰/۴۵	٪۰/۵۲	٪۰/۰۱۳۰۵	٪۰/۰۱۷۱۴	۰/۳
٪۰/۲۸	٪۰/۳۷	٪۰/۰۱۴۰۹	٪۰/۰۱۸۴۶	۰/۴
٪۰/۱۹	٪۰/۲۴	٪۰/۰۱۵۴۴	٪۰/۰۲۰۲۳	۰/۵
٪۰/۱۷	٪۰/۱۷	٪۰/۰۱۶۸۱	٪۰/۰۲۲۲۱	۰/۶
٪۰/۱۱	٪۰/۰۸۳	٪۰/۰۱۸۰۷	٪۰/۰۲۴۰۶	۰/۷
٪۰/۱۰۲	٪۰/۰۷۷	٪۰/۰۱۹۱۰	٪۰/۰۲۵۷۰	۰/۸
٪۰/۱۰۰۷	٪۰/۰۷۳	٪۰/۰۱۹۸۴	٪۰/۰۲۷۰۵	۰/۹
٪۰/۰۴۹	٪۰/۰۳۵	٪۰/۰۲۰۲۳	٪۰/۰۲۸۰۴	۱

سطوح داخلی و خارجی قرار دارد. به علاوه دو شرط مرزی حرارتی  $A$  و  $B$  را هم می‌توان به طور جداگانه برای هر نوع از این شرایط مرزی در نظر گرفت. به منظور راستی‌آزمایی فرض می‌شود که دیسک دارای شرایط مرزی آزاد-آزاد در سطوح داخلی و خارجی است. نتایج

سطح تغییر مکان و به دنبال آن تنش در دیسک کمتر باشد. در جدول ۸ نتایج به‌دست‌آمده از دو روش هموتویی پرتوربیشن و تفاضلات محدود برای حل معادله ناویر در شعاع‌های متفاوتی از دیسک آورده شده است. دیسک تحت سه شرط مرزی متفاوت در

۵-۲- توزیع تغییر مکان شعاعی در دیسک دوار

با تائید نتایج حل معادلات حاکم در مدل سازی به روش هموتویی پرتوربیشن، توزیع تغییر مکان در راستای شعاعی دیسک دوار مدرج تابعی، برای سه شرط مرزی آزاد- آزاد، تحت قید شعاعی- آزاد و تحت قید شعاعی- تحت قید شعاعی در سطوح داخلی و خارجی دیسک، به ازاء مقادیر متفاوتی از پارامتر تغییر ضخامت  $m_3$  و سرعت زاویه ای یکسان  $\omega = 400 \text{ rad/s}$  با استفاده از حل هموتویی در شکل ۷ آورده شده است. توزیع تغییر مکان در دیسک دارای اهمیت است، زیرا به واسطه آن می توان توزیع کرنش و به دنبال آن تنش در دیسک را محاسبه کرد و از آنجا تغییر شکل های الاستیک- پلاستیک را آنالیز نمود. همان طور که در شکل مشخص است به ازاء افزایش پارامتر تغییر ضخامت  $m_3$ ، سطح تغییر مکان ها در دیسک برای دو شرط مرزی آزاد- آزاد، تحت قید شعاعی- آزاد و برای هر دو شرایط مرزی حرارتی  $A$  و  $B$  کاهش می یابد. اما در دیسک با شرایط مرزی تحت قید شعاعی- تحت قید شعاعی روند تغییرات عکس و سطح تغییر مکان ها افزایشی است. به علاوه برای هر یک از شرایط مرزی دیسک، شرط حرارتی  $B$  سطح تغییر مکان کمتر و به دنبال آن سطح تنش کمتری را در دیسک ایجاد کرده است که این موضوع دقیقاً مطابق با نتایج بیان شده برای شکل ۶ است که دیسک در شرط حرارتی گرادینانی  $B$  تغییرات دمایی یکنواخت تری را نسبت به شرط

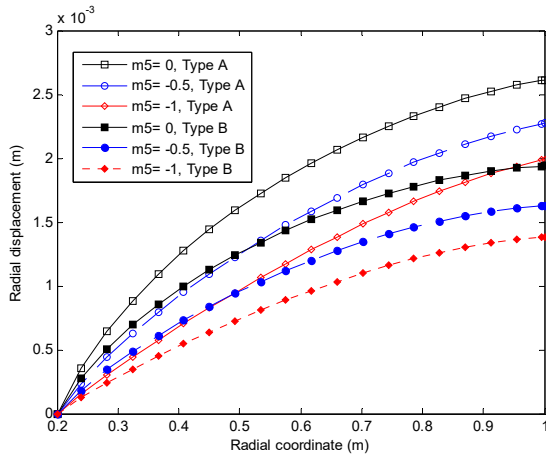
برای سرعت زاویه ای  $\omega = 400 \text{ rad/s}$  و پارامتر تغییر ضخامت  $0/5$  در جدول لیست شده اند. همانطور که مشخص است نتایج دو روش سازگاری بسیار خوبی با هم دارند و بر همین اساس می توان نتایج مدل تحلیلی ارائه شده را تائید کرد.

در انتها این بخش نتایج مدل سازی دیسک دوار مدرج تابعی با حل معادلات به کمک روش هموتویی با نتایج موجود در کار تحقیقاتی پنگ و همکاران [۱۵] مقایسه خواهد شد. ایشان در تحقیقات خود تغییر مکان و تنش ها در دیسک دوار مدرج تابعی را برای پروفیل تغییرات خواص توانی (مشابه با روابط موجود در جدول ۳)، در شعاع های متفاوتی برای دیسک با ضخامت ثابت در امتداد شعاعی، شرایط مرزی آزاد در سطوح داخلی و خارجی، شرایط مرزی حرارتی ثابت با دما سطح داخلی  $T_i = 0^\circ \text{C}$  و در سطح خارجی  $T_o = 1000^\circ \text{C}$  و هم چنین مقادیر برابر برای پارامترهای شاخص درجه بندی مواد ( $0/5$ ) برای حل معادلات خود استفاده کردند. در جدول ۹، مقایسه ای بین نتایج مدل سازی پنگ و همکاران و نتایج مدل سازی یکسان با کار ایشان با حل به کمک روش هموتویی پرتوربیشن آورده شده است. همان طور که از این مقایسه مشخص است نتایج دو روش سازگاری بیار خوبی با هم دارند و در پایان این بخش می توان حل هموتویی ارائه شده برای مدل سازی تعریف شده در این مقاله را تائید کرد.

جدول ۹. مقایسه نتایج مدل سازی به کمک روش حل هموتویی پرتوربیشن با نتایج ارائه شده در مقاله مرجع [۱۴]

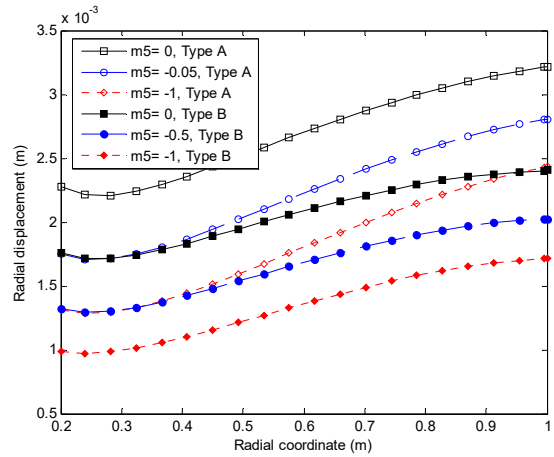
Table 9. Comparison of modeling results using homotopy perturbation method with the results presented in the reference article [14]

شعاع دیسک	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱
تغییر مکان شعاعی (m)	۰/۰۰۷۸۸۱	۰/۰۰۷۵۱۸	۰/۰۰۷۹۲۵	۰/۰۰۸۶۱۶	۰/۰۰۹۴۳۱	۰/۰۱۰۳۱۱	۰/۰۱۱۲۲۹	۰/۰۱۲۱۴۳۵	۰/۰۱۳۰۶۹۲
تنش شعاعی (MPa)	۰	۶۱۴/۴۲	۷۸۰/۸۵	۷۹۸/۳۲	۷۱۷/۹۸	۵۹۳/۰۱	۴۲۹/۰۲	۲۳۰/۵۹	۰
تنش محیطی (MPa)	۲۶۶۲/۱۵	۲۱۰۵/۳۰	۱۸۰۴/۹۲	۱۵۷۲/۸۷	۱۳۵۹/۱۰	۱۱۸۴/۳۳	۹۳۰/۳۷۷	۷۰۲/۳۴۹	۴۶۱/۷۸۸
پرتوربیشن	۲۶۶۱/۰۸	۲۱۰۶/۲۳	۱۸۰۵/۸۶	۱۵۷۳/۴۸	۱۳۶۰/۰۲	۱۱۸۴/۲۵	۹۳۰/۳۷۴	۷۰۲/۳۴۹	۴۶۱/۷۸۸



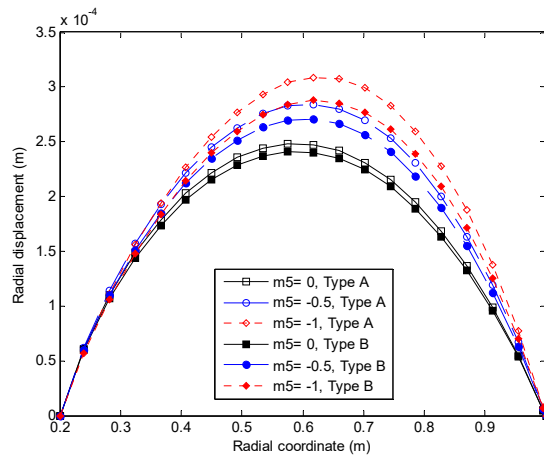
**b: Rationally constrained-Free**

ب: شرط مرزی تحت قید شعاعی- آزاد



**c: Free-Free**

الف: شرط مرزی آزاد- آزاد



**c: Rationally constrained-Rationally constrained**

ج: شرط مرزی تحت قید شعاعی- تحت قید شعاعی

شکل ۷. توزیع تغییر مکان در امتداد شعاعی دیسک برای دو شرط مرزی حرارتی  $A$  و  $B$

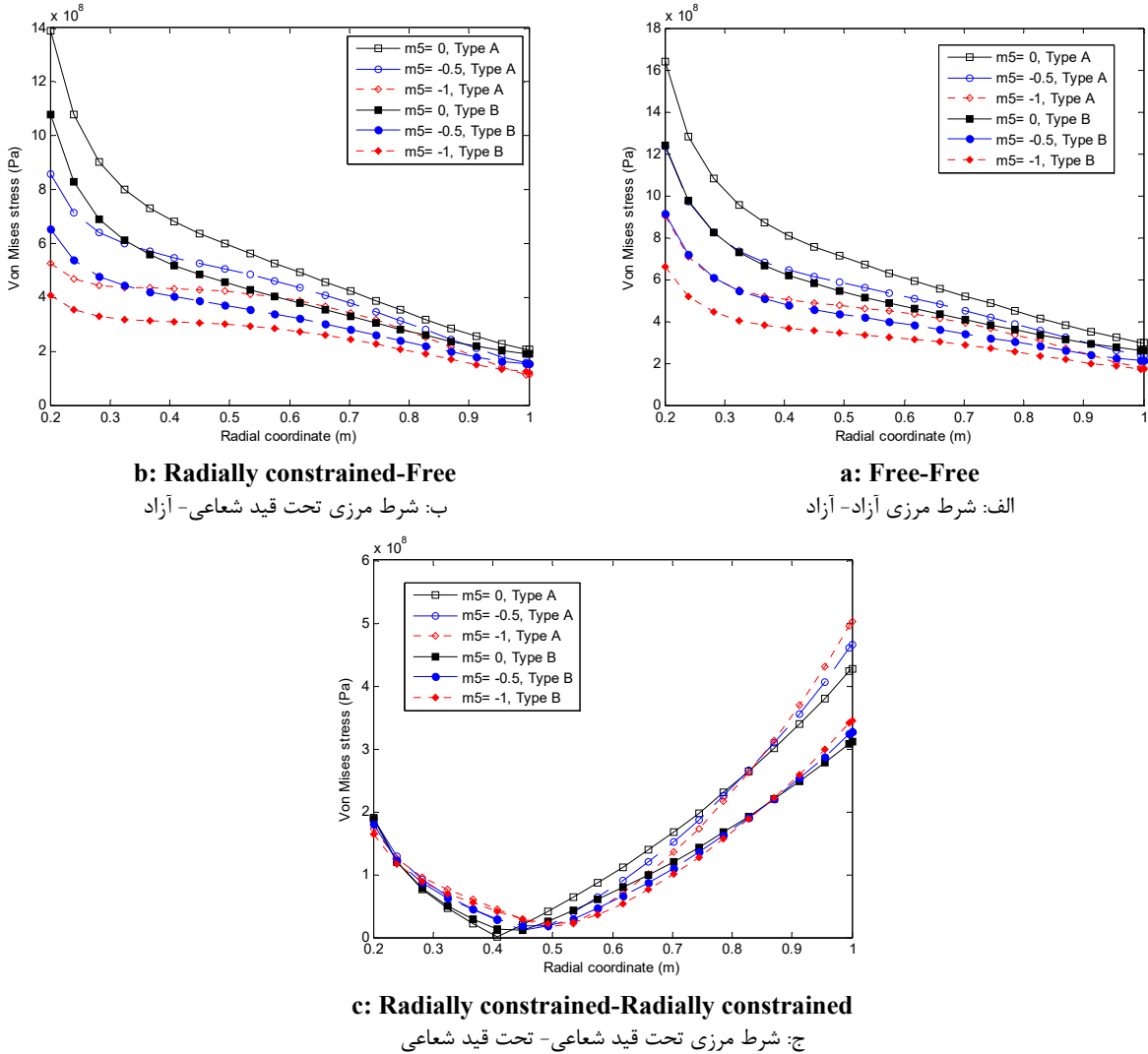
**Fig. 7. The displacement distribution along the radial direction of disk for the two thermal boundary conditions  $A$  and  $B$**

این شرایط و پارامترها در سرعت زاویه‌ای  $\omega = 400 \text{ rad/s}$  رسم شده است. همان طور که مشخص است در این سرعت زاویه‌ای، در بعضی از نمودارها مقدار تنش معادل فون میزز از تنش تسلیم جزء فلزی سازنده دیسک ( $300 \text{ MPa}$ ) عبور کرده است. برای دیسک با شرایط مرزی آزاد، لبه داخلی ماکزیمم مقدار تنش معادل فون میزز را دارد و در نتیجه برای این شرط مرزی، تسلیم از سطح داخلی دیسک آغاز می‌گردد. در این شرط مرزی با افزایش پارامتر ضخامت، سطح تنش معادل در دیسک کاهش می‌یابد. برای شرط مرزی تحت قید شعاعی-آزاد، هرچه قدر که پارامتر ضخامت افزایش می‌یابد، شعاع با بیشترین مقدار تنش فون میزز از سطح داخلی دیسک به سمت شعاع‌های میانی دیسک حرکت می‌کند و هم چنان با افزایش این

حرارتی  $A$  تجربه می‌کند. در مورد شرایط مرزی حاکم بر دیسک نیز می‌توان بیان کرد که سطح تغییر مکان‌ها در دیسک با شرایط مرزی تحت قید شعاعی- تحت قید شعاعی کمتر از شرایط مرزی تحت قید شعاعی- آزاد و آن نیز کمتر از شرایط مرزی آزاد- آزاد در سطوح داخلی و خارجی دیسک است.

۳-۵- سرعت زاویه‌ای حد الاستیک

در این بخش سرعت زاویه‌ای حد الاستیک برای دیسک دوار مدرج تابعی به اِزاء مقادیر متفاوتی از پارامتر تغییر ضخامت  $m_5$ ، شرایط مرزی حرارتی و شرایط مرزی متفاوت برای دیسک محاسبه می‌گردد. برای رسیدن به فهم مناسب، در شکل ۸ توزیع تنش فون میزز برای



**b: Radially constrained-Free**

ب: شرط مرزی تحت قید شعاعی - آزاد

**a: Free-Free**

الف: شرط مرزی آزاد-آزاد

**c: Radially constrained-Radially constrained**

ج: شرط مرزی تحت قید شعاعی - تحت قید شعاعی

شکل ۸. توزیع تنش معادل فون میزز در امتداد شعاعی دیسک برای دو شرط مرزی حرارتی *A* و *B*

**Fig. 8. Von Mises stress distribution along the radial direction of disk for the two thermal boundary conditions *A* and *B***

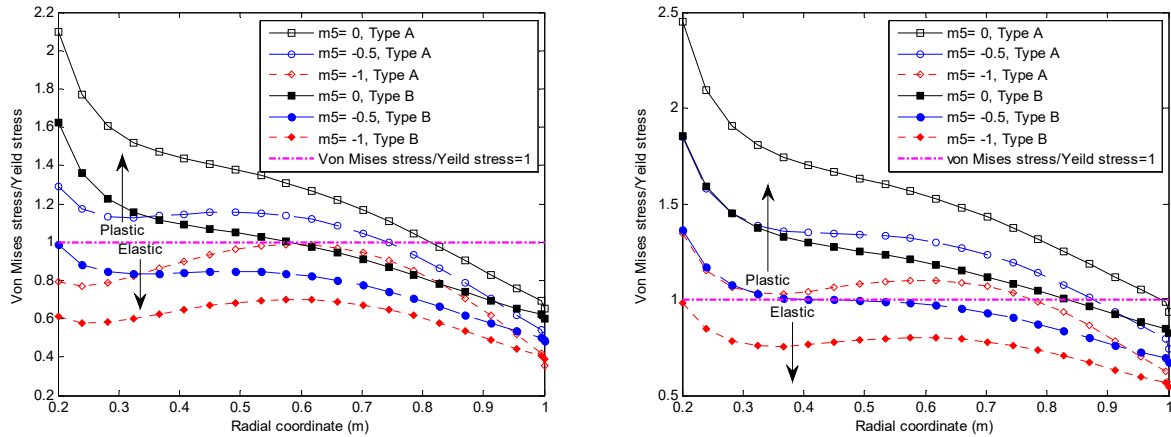
مبنای محاسبه سرعت زاویه‌ای حد الاستیک، رسیدن تنش تسلیم در دیسک طبق رابطه (۵) به تنش معادل فون میزز مطابق با رابطه (۳) می‌باشد. با در نظر گرفتن تابع کسر حجمی سرامیک  $V_c(r) = \left(\frac{r}{r_o}\right)^m$  در این مقاله رابطه (۵) به فرم زیر دوباره نویسی می‌گردد:

$$\sigma_y = \sigma_{ym} \left( \left( 1 - \left( \frac{r}{r_o} \right)^{m_1} \right) \frac{q + E_m E_c}{q + E_c E_m} \left( \frac{r}{r_o} \right)^{m_1} \right) \quad (68)$$

در این رابطه  $E_m$  با مدول الاستیک آلومینیوم،  $E_c$  با مدول الاستیک زیرکونیا و ضریب  $m_1$  طبق داده‌های جدول ۴ جایگذاری می‌گردد. در نتیجه با برابری رابطه  $\sigma_y = \sigma_{ym}$  می‌توان سرعت زاویه‌ای حد الاستیک در مواد مدرج تابعی را مطابق با رابطه (۶۹) یافت. در این

پارامتر سطح تنش معادل در دیسک کم می‌شود. اما، برای شرط مرزی تحت قید شعاعی-تحت قید شعاعی، سطح خارجی دیسک دارای بیشترین تنش فون میزز است و انتظار می‌رود که محل آغاز جریان پلاستیک در دیسک دوار از این شعاع باشد و بر خلاف شرایط مرزی قبلی، با افزایش پارامتر ضخامت، تنش فون میزز در سطح خارجی دیسک افزایش می‌یابد. در مورد تاثیر شرایط مرزی حرارتی، دیسک با شرایط مرزی حرارتی *A*، تنش معادل بیشتری را نسبت به شرط مرزی *B* در تمامی شروط مرزی دیسک تجربه می‌کند. در شرط مرزی *B* به دلیل وجود گرادیان دمایی در سطح خارجی توزیع دما در دیسک یکنواخت‌تر بوده و در نتیجه تنش حرارتی کمتری در دیسک ایجاد می‌گردد.



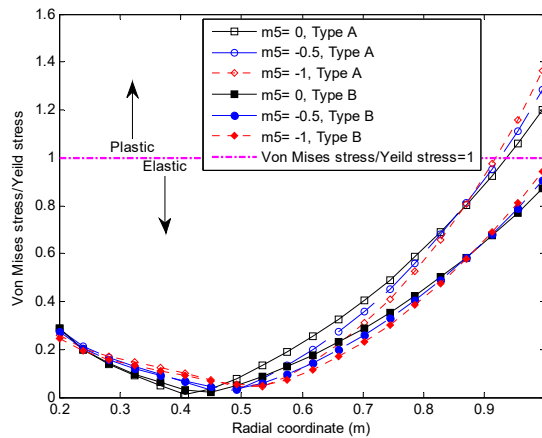


**b: Radially constrained-Free**

ب: شرط مرزی تحت قید شعاعی- آزاد

**a: Free-Free**

الف: شرط مرزی آزاد- آزاد



**c: Radially constrained-Radially constrained**

ج: شرط مرزی تحت قید شعاعی- تحت قید شعاعی

شکل ۹. توزیع نسبت  $\sigma_{eq}/\sigma_y$  در امتداد شعاعی دیسک برای دو شرط مرزی حرارتی  $A$  و  $B$

**Fig. 9. Distribution of  $\sigma_{eq}/\sigma_y$  ratio along the radial direction of disk for the two thermal boundary conditions  $A$  and  $B$**

پلاستیک آغاز شده است. در این سرعت زاویه‌ای، برای شرط مرزی آزاد- آزاد دیسک و شرایط مرزی حرارتی  $A$  و  $B$ ، بیشتر شعاع‌هایی از دیسک با پارامتر ضخامت  $m_5 = 0, -0.5$  دچار تغییرشکل‌های پلاستیک شده‌اند. فقط دیسک با پارامتر  $m_5 = -1$  با شرط مرزی حرارتی  $B$ ، در سطح داخلی در آستانه تسلیم قرار دارد و هنوز جریان‌های پلاستیک در آن شروع نشده‌اند. در مورد شرط مرزی آزاد- تحت قید شعاعی، شعاع‌های کمتری نسبت به شرط مرزی قبل وارد جریان‌های پلاستیک شده‌اند. دیسک با پارامتر ضخامت  $m_5 = -1$  برای شرط مرزی حرارتی  $A$  در شعاع میانی خود در آستانه تسلیم قرار دارد و در شرط مرزی  $B$  هنوز با شروع تغییرشکل‌های پلاستیک

رابطه دو مجهول  $r$  و  $\omega$  خواهیم داشت که به ترتیب به عنوان شعاع و سرعت زاویه‌ای که در آن تسلیم آغاز می‌گردد در نظر گرفته می‌شوند.

$$\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta} = \sigma_{ym} \left( \left( 1 - \left( \frac{r}{r_o} \right)^{m_1} \right) \frac{q + E_m E_c \left( \frac{r}{r_o} \right)^{m_1}}{q + E_c E_m \left( \frac{r}{r_o} \right)^{m_1}} \right) \quad (69)$$

قبل از ارائه مقادیر سرعت زاویه‌ای حد الاستیک، نسبت  $\sigma_{eq}/\sigma_y$  در امتداد شعاعی دیسک برای مقادیر متفاوتی از پارامتر ضخامت  $m_5$  و شرایط مرزی دیسک برای سرعت زاویه‌ای  $\omega = 400 \text{ rad/s}$  در شکل ۹ نشان داده شده است. همان طور که نشان داده شده است، برای شعاع‌هایی از دیسک که  $\sigma_{eq}/\sigma_y \geq 1$  می‌باشد تغییرشکل

جدول ۱۰. مقادیر سرعت زاویه‌ای حد الاستیک و شعاع آغاز تغییر شکل پلاستیک برای مقادیر متفاوتی از پارامتر ضخامت ( $m_5$ )

Table 10. The elastic limit angular velocity and the radius of plastic deformation initiation for different values of thickness parameter ( $m_5$ )

شرایط مرزی دیسک در سطوح داخل-خارج						شعاع دیسک (m)	$m_5$	شعاع آغاز تغییر شکل پلاستیک (m)	سرعت زاویه‌ای حد الاستیک ( $\text{rad/s}$ )
تحت قید شعاعی - تحت قید شعاعی		تحت قید شعاعی - آزاد		آزاد-آزاد					
شرط حرارتی	شرط حرارتی	شرط حرارتی	شرط حرارتی	شرط حرارتی	شرط حرارتی				
$B$	$A$	$B$	$A$	$B$	$A$				
۰/۱۶	۰/۱۶	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	$m_5 = 0$	شعاع آغاز		
۰/۱۶	۰/۱۶	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	$m_5 = -0.5$	تغییر شکل پلاستیک		
۰/۱۶	۰/۱۶	۰/۵۶	۰/۵۷	۰/۱	۰/۱	$m_5 = -1$	پلاستیک (m)		
۴۱۲	۲۲۲	۲۷۴	۱۲۱	۲۵۹	۷۸	$m_5 = 0$	سرعت		
۳۹۲	۱۶۵	۴۰۴	۳۱۲	۳۲۳	۲۰۵	$m_5 = -0.5$	زاویه‌ای حد الاستیک		
۳۷۱	۷۱	۴۹۳	۴۰۵	۴۰۲	۳۱۵	$m_5 = -1$	( $\text{rad/s}$ )		

شعاع آغاز این تغییر شکل‌ها به سمت میانه دیسک حرکت می‌کند. در مجموع می‌توان نتیجه گرفت که دیسک با شرط مرزی آزاد-آزاد، شرط مرزی حرارتی  $A$  و  $m_5 = 0$  و دیسک با شرط مرزی تحت قید شعاعی-تحت قید شعاعی، شرط مرزی حرارتی  $A$  و  $m_5 = -1$  کمترین مقادیر سرعت زاویه‌ای را دارند.

#### ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل‌سازی تحلیلی برای بررسی تغییر شکل‌های ترمو-الاستیک در دیسک‌های دوار مدرج تابعی ارائه شد. تمامی خواص هندسی و مکانیکی دیسک دوار در راستای شعاعی آن متغیر در نظر گرفته شدند. معادله انتقال حرارت و معادله ناویر حاکم بر تغییر شکل‌های دیسک دوار به کمک روش تحلیلی هموتوپی پرتوربیشن حل گردید و نتایج با استفاده روش عددی تفاضلات محدود و هم‌چنین نتایج موجود در مراجع راستی آزمایی شدند. مطابق با نتایج جدول ۷، درصد خطا برای حل معادله انتقال حرارت به کمک دو روش هموتوپی پرتوربیشن و تفاضلات محدود برای شرط مرزی  $A$  حداکثر ۰/۰۰۰۴۷٪ و برای شرط مرزی  $B$  حداکثر ۰/۰۰۷۲٪ است. درصد خطا برای حل معادله ناویر حاکم بر تغییر شکل‌ها بر اساس نتایج جدول ۸ برای شرط مرزی حرارتی  $A$  حداکثر ۰/۰۷۴٪

فاصله دارد. اما در شرط مرزی تحت قید شعاعی-تحت قید شعاعی، در تعداد کمی از شعاع‌های دیسک نزدیک به سطح خارجی آن و برای شرط مرزی حرارتی  $A$  تسلیم آغاز شده است.

در ادامه این بخش می‌توان مقادیر دقیق سرعت زاویه‌ای حد الاستیک و شعاعی را که در آن اولین تغییر شکل پلاستیک آغاز می‌گردد برای مقادیر متفاوتی از پارامتر ضخامت  $m_5$ ، شرایط مرزی دیسک و شروط مرزی حرارتی  $A$  و  $B$  در جدول ۱۰ مشاهده کرد. همان‌طور که مشخص است با تغییر شرط مرزی حرارتی از  $A$  به  $B$  برای تمامی شرایط مرزی دیسک، مقدار سرعت زاویه‌ای حد الاستیک افزایش می‌یابد. برای دو شرط مرزی آزاد-آزاد و تحت قید شعاعی-آزاد در دیسک، با افزایش پارامتر ضخامت، مقادیر سرعت زاویه‌ای حدی برای هر دو شرایط مرزی حرارتی افزایش می‌یابد. اما برای شرط مرزی تحت قید شعاعی-تحت قید شعاعی، با افزایش پارامتر ضخامت دیسک مقدار سرعت زاویه‌ای حدی کاهش می‌یابد که این رفتار عکس دو شرط مرزی قبلی است. در مورد شعاع آغاز تغییر شکل‌های پلاستیک، برای شرط مرزی آزاد-آزاد، از سطح داخلی دیسک آغاز می‌گردد. برای شرط مرزی تحت قید شعاعی-تحت قید شعاعی نیز سطح خارجی آغازگر تسلیم است. اما برای شرط تحت قید شعاعی-آزاد، هرچه که مقدار پارامتر ضخامت بیشتر می‌شود

- [3] A. N. Eraslan, Elastic-plastic deformations of rotating variable thickness annular disks with free, pressurized and radially constrained boundary conditions, *International Journal of Mechanical Sciences*, 45 (2003) 643-667.
- [4] L. H. You, X. Y. You, J. J. Zhang, J. Li, On rotating circular disks with varying material properties, *The journal of applied mathematics and physics*, 58 (2007) 1068-84.
- [5] S. A. H. Kordkheili, R. Naghdabadi, Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk, *Composite Structure*, 79 (2007) 508-16.
- [6] M. Bayat, M. Saleem, B. B. Sahari, A. M. S. Hamouda, E. Mahdi, Mechanical and thermal stresses in a functionally graded rotating disk with variable thickness due to radially symmetry loads, *International journal of pressure vessel and piping*, 86 (2009) 357-72.
- [7] M. H. Hojjati, S. Jafari, Semi exact solution of elastic non-uniform thickness and density rotating disks by homotopy perturbation and Adomian's decomposition methods Part I: Elastic Solution, *International journal of pressure vessel and piping*, 85 (2008) 871-8.
- [8] M. H. Hojjati, S. Jafari, Semi-exact solution of non-uniform thickness and density rotating disks Part II: Elastic-strain hardening solution, *International journal of pressure vessel and piping*, 86 (2009) 307-318.
- [9] R. Akbari Alashti, S. Jafari, S. J. Hosseini pour, Experimental and numerical investigation of ductile damage effect on load bearing capacity of a dented API XB pipe subjected to internal pressure, *Engineering Failure Analysis*, 47 (2015) 208-228.
- [10] L. Sondhi, A. K. Thawait, S. Sanyal, S. Bhowmick, Stress and deformation analysis of functionally graded varying thickness profile orthotropic rotating disk, *Materials Today: Proceedings*, [In Press, Corrected Proof](#), Available online 6 April 2020.
- [11] M. Hosseini, M. Shishesaz, K. N. Tahan, A. Hadi, Stress analysis of rotating nano-disks of variable thickness made of functionally graded materials, *International Journal of Engineering Science*, 109 (2016) 29-53.
- [12] A. N. Eraslan, A Class of Nonisothermal Variable Thickness Rotating Disk Problems Solved by
- و برای شرط مرزی حرارتی  $B$  حداکثر  $0.168\%$  است. با این داده‌ها می‌توان نتیجه گرفت که نتایج ارائه شده توسط این دو روش از دقت بسیار خوبی هر دو تحلیل حرارت و تنش برخوردار است. آنالیز عددی نشان داد که دیسک با شرط مرزی حرارتی  $B$  تنش کمتری را در مقایسه با شرط مرزی حرارتی  $A$  برای انواع شرایط مرزی دیسک و مقادیر متفاوتی پارامتر ضخامت  $m_5$  تجربه می‌کند. بنابراین با تعریف گرادین دمایی مناسب در سطح خارجی دیسک همانند شرط مرزی حرارتی  $B$ ، می‌توان سطح تنش‌های حرارتی در آن را کنترل و بهینه کرد. به طوریکه در مقاله حاضر با تعریف شرط مرزی حرارتی در سطح خارجی مطابق با فرمول بندی (۱۱)، سطح تنش‌های حرارتی در دیسک در مقایسه با شرط مرزی حرارتی ثابت حدود  $20\%$  کاهش یافته است. در ادامه ارائه نتایج نشان داده شد که مقدار تسلیم در امتداد شعاعی دیسک دوار مدرج تابعی ثابت نیست و نسبت  $\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_y}$  در امتداد شعاعی دیسک برای پارامترهای متفاوت موجود متغیر است. در مورد شرایط مرزی حاکم، دیسک با دو شرط مرزی آزاد-آزاد و تحت قید شعاعی-آزاد رفتار تقریباً مشابهی را در افزایش پارامتر ضخامت  $m_5$  داشتند و در هر دو آنها با افزایش این پارامتر سطح تنش در دیسک کاهش و سرعت زاویه‌ای حد افزایش پیدا می‌کرد. اما، برای دیسک با شرایط مرزی تحت قید شعاعی-تحت قید شعاعی، رفتار دیسک متفاوت بود و با افزایش پارامتر ضخامت، سطح تنش در دیسک افزایش می‌یافت و به دنبال آن سرعت زاویه‌ای حد الاستیک در دیسک کاهش پیدا می‌کرد. در انتها با در نظر گرفتن تمامی پارامترها، شرایط حرارتی و مرزی موجود در مدل ارائه شده، مشخصات دیسک با کمترین مقدار سرعت زاویه‌ای حد الاستیک شناسایی گردید. در نهایت نتیجه گرفته شد که مدل تحلیلی این مقاله به کمک روش هموتوپای پرتوریشن به خوبی رفتار ترموالاستیک دیسک دوار مدرج تابعی را پیش بینی می‌کند.

## مراجع

- [1] U. Gamer, Tresca's yield condition and the rotating solid disk, *Journal of Applied Mechanics*, 50 (1983) 676-8.
- [2] A. N. Eraslan, Y. Orcan, Elastoplastic analysis of nonlinearly hardening variable thickness annular disks under external pressure, *Mechanics Research Communications*, 32 (2005) 306-315.

- Company, (1975).
- [21] G. H. Paulino, Z. H. Jin, R. Dodds, Failure of functionally graded materials, Reference module in materials science and material engineering, (2017).
- [22] R. Williams, B. Rabin, J. Drake, Finite element analysis of thermal residual stresses at graded ceramic-metal interfaces, Part I. Model description and geometrical effects, Journal of Applied Physics, 74 (1993) 1310-1320.
- [23] J. H. He, Homotopy perturbation technique, Computational Methods Applied Mechanical Engineering, 178 (1999) 257-62.
- [24] J. H. He, Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique, Applied Mathematical Computation, 135 (2003) 73-80.
- [25] J. H. He, Asymptotology by homotopy perturbation method, Applied Mathematical Computation, 6 (2004) 156-591.
- [26] J. H. He, Limit cycle and bifurcation of nonlinear problems, Chaos Solitons Fractals, 26 (2005) 827-33.
- [27] J. H. He, Homotopy perturbation method for bifurcation of nonlinear problems, International Journal Nonlinear Science Numerical Simulations, 6 (2005) 207-8.
- [28] S. Nakamura, Applied Numerical methods with software, Prentice-Hall international Inc, 1991.
- [29] K. Ashok, K., Singh, B. S. Bhadauria, Finite Difference Formulae for Unequal Sub-Intervals Using Lagrange's Interpolation Formula, International Journal of Mathematic Analysis, 3 (2009) 815 - 827.
- Hypergeometric Functions, Turkish journal of engineering environmental sciences, 29 (2005) 241-269.
- [13] T. Dai, H. Dai, H., Thermo-elastic analysis of a functionally graded rotating hollow circular disk with variable thickness and angular speed, Applied Mathematical Modelling, 40 (2016) 7689-7707.
- [14] X. Peng, X. Li, Thermal stress in rotating functionally graded hollow circular disks, Composite Structures, 92 (2010) 1896-1904.
- [15] A. M. Afsar, J. Go, Finite element analysis of thermoelastic field in a rotating FGM circular disk, Applied Mathematical Modeling, 34 (2010) 3309-3320.
- [16] P. Nayak, S. Bhowmick, K. N. Saha, Elasto-plastic analysis of thermo-mechanically loaded functionally graded disks by an iterative variational method, Engineering Science and Technology, an International Journal, 23 (2020) 42-64.
- [17] H. Zharfi, H. Ekhteraei Toussi, Creep analysis of FGM rotating disc with GDQ method, Journal of theoretical and applied mechanics, 55 (2017) 331-341.
- [18] H. Zharfi, [Creep relaxation in FGM rotating disc with nonlinear axisymmetric distribution of heterogeneity, Theoretical and Applied Mechanics Letters](#), 9 (2019) 382-390.
- [19] H. Kaur, N. Gupta, S. B. Singh, [Effect of thermal gradient on the deformation of a rotating composite disk, Materials Today: Proceedings](#), 26 (2020) 3363-3368.
- [20] [A. C. Ugural, Saul K. Fenster](#), Advanced strength and applied elasticity, American Elsevier Publication

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

S. Jafari, Analytical modeling of elastic limit angular velocity in a rotating disk of a functionally graded material under mechanical-thermal loading conditions, AmirKabir J. Mech. Eng., 53(Special Issue 4) (2021) 2589-2612.

DOI: [10.22060/mej.2020.17969.6699](https://doi.org/10.22060/mej.2020.17969.6699)

