



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)

دوره ۴۸، شماره ۱، بهار ۱۳۹۵، صفحه ۱ تا ۸  
Vol. 48, No. 1, Spring 2016, pp. 1-8



نشریه علمی پژوهشی امیرکبیر - مهندسی مکانیک  
AmirKabir Journal of Science & Research  
Mechanical Engineering  
(ASJR-ME)

## حل عددی جریان مایع-بخار با استفاده از روش تفکیک بردار شار در مجاری با مقاطع متغیر

علی نوری<sup>۱\*</sup>، اردلان شفیعی غازانی<sup>۲</sup>

۱- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

۲- دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

(دریافت: ۱۳۹۳/۱/۱۸، پذیرش: ۱۳۹۴/۶/۱۵)

### چکیده

هدف از این مطالعه بررسی حل عددی جریان دوفاز مایع-بخار با روش تفکیک بردار شار در مجاری با سطح مقطع متغیر است. از مدل همگن تعادلی برای مدل‌سازی جریان دوفاز مایع-بخار در داخل یک نازل همگرا-واگرا استفاده شده است. جریان بصورت آدیاباتیک همراه با اصطکاک و خواص سیال با استفاده از جداول ترمودینامیک محاسبه شده است. حل عددی معادلات با روش تفکیک بردار شار و بصورت صریح انجام شده است. نتایج نشان می‌دهند که رفتار تغییرات کیفیت بخار بستگی به مقدار ورودی دارد بطوریکه با کیفیت ورودی بالا (۰/۷۳) رفتار کیفیت بخار در طول نازل قبل از موج ضربه‌ای ماهیت تقطیری و پس از عبور از آن ماهیت تبخیری دارد. در حالی که با کیفیت ورودی پایین (۰/۱۷) رفتار کیفیت بخار در طول نازل قبل از موج ماهیت تبخیری و بعد از آن ماهیت تقطیری دارد. بعلاوه با کیفیت ورودی بیش از ۰/۷ نتایج فشار تطابق بسیار خوبی با مقادیر تجربی دارد و بیشینه اختلاف بین نتایج عددی و تجربی کمتر از ۵ درصد و نزدیک به محل گلوگاه رخ می‌دهد. با کاهش کیفیت ورودی، اختلاف فشار بین نتایج عددی و تجربی افزایش یافته و برای کیفیت ورودی ۰/۱۷ بیشینه اختلاف بین آن‌ها در پایین دست گلوگاه رخ داده و مقدار آن حدود ۲۵ درصد است.

### کلمات کلیدی:

جریان دوفاز مایع-بخار، مدل همگن تعادلی، نازل همگرا-واگرا، روش تفکیک بردار شار

## ۱- مقدمه

از روش عددی طرح "رو"، معادلات مدل همگن تعادلی را حل نمودند. همچنین، حمیدی و همکاران [۱] با روش "رو" جریان تراکم‌پذیر گذرای غیرلزج دوفاز همگن تعادلی آب-بخار در محدوده صوت حاوی شوک را در یک نازل همگرا-واگرا مورد بررسی قرار دادند. آنها از فرض گاز کامل و تراکم‌ناپذیری فاز مایع استفاده کردند. برنارد و دانشیت [۹] مدل همگن تعادلی را برای شبیه‌سازی حرکت قطرات آب در جریان هوا با در نظر گرفتن نیروی گرانشی بکار بردند. آنها یک رابطه جبری را برای سرعت لغزشی بین فازها ارائه دادند.

در مطالعه حاضر، روش تفکیک بردار شار برای حل معادلات مدل دوفاز همگن تعادلی مایع-بخار در یک کانال با سطح مقطع متغیر تعمیم داده شده است. ضمناً برای رفع مشکل معادله حالت و کلیت بخشیدن به آن که باید برای تمام حالت‌های ممکن جریان سیال یعنی فاز مایع، مخلوط دوفاز و فاز بخار خالص صادق باشد از جداول ترمودینامیکی برای تعیین خواص جریان استفاده شده است [۱۰].

## ۲- معادلات حاکم

معادلات حاکم در مدل جریان دوفاز همگن تعادلی با صرفنظر از انتقال حرارت، مشابه معادلات اویلر برای جریان تک‌فاز گاز تراکم‌پذیر خواهد بود. در داخل مجاری با سطح مقطع غیریکنواخت، معادلات اویلر شبه یک بعدی عبارتند از:

$$\frac{\partial(SU)}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} = H \quad (۱)$$

بردار متغیرهای باقیی، بردار شار و جملات منبع هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix} \quad \text{الف (۲)}$$

$$F = S \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix} \quad \text{ب (۲)}$$

$$H = S \begin{bmatrix} 0 \\ p \frac{d \ln S}{dz} - \frac{2f\rho|u|u}{D_H} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ج (۲)}$$

که در آن فشار، چگالی مخلوط، مساحت سطح مقطع، سرعت، قطر هیدرولیکی و ضریب اصطکاک است [۱۱].

$$E = \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (۳)$$

انرژی کل بر واحد حجم برحسب انرژی داخلی بر واحد جرم به صورت زیر معرفی می‌شود:

جریان دوفاز مایع-بخار در مجاری با سطح مقطع متغیر کاربردهای صنعتی متعددی از جمله توربین‌های بخار، شیرهای اطمینان و انبساط در سیستم‌های تبرید دارد. مدل‌هایی که اغلب در شبیه‌سازی این نوع جریان استفاده می‌شوند عبارتند از مدل همگن تعادلی، مدل همگن غیرتعادلی و مدل دوسیالی. در مدل همگن تعادلی، مخلوط دوفاز بصورت سیال واحد در نظر گرفته می‌شود. در واقع در این مدل فرض می‌شود که بین فازها لغزش وجود ندارد و از فرض تعادل ترمودینامیکی موضعی (دما، فشار و تابع گیبس محلی یکسان بین فازها) استفاده می‌شود. برای بسته شدن سیستم معادلات از معادله حالت سیال استفاده می‌شود. مزیت اصلی مدل همگن تعادلی نسبت به سایر مدل‌ها عدم استفاده از کمیت‌های ثابت یا روابط تجربی است که نسبت به سایر مدل‌ها کاربرد بیشتری دارد. ولی مشکل اصلی این مدل، معرفی معادله حالت است که باید تمام حالت‌های ممکن سیال یعنی فاز مایع، مخلوط دوفاز و فاز بخار خالص را دربرگیرد. کلرک [۲] با پیاده‌سازی طرح "رو" و پیش‌شرط‌گذاری تورکل [۳]، مدل همگن تعادلی را با ورود سیال مادون اشباع به داخل یک کانال با برآمدگی‌هایی که روی کف آن وجود داشت با روش حجم محدود بکار برد. با وجود نوسانات در ناپیوستگی‌ها، روش عددی آن‌ها نتایج نسبتاً قابل قبولی را بدست داد. ادواردز و فرانکلین [۴] با توسعه‌ی روش تجزیه بالادست جابجایی<sup>۱</sup> یا AUSM، جریان دوفاز همگن تعادلی را در داخل نازل در محدوده وسیعی از اعداد ماخ با استفاده از معادله حالت سانچز-لاکومب<sup>۲</sup> برای توصیف رفتار سیال بررسی کردند. ایهام و کیم [۵] با فرض رفتار گاز کامل برای فاز گاز و استفاده از معادله حالت استیفند گاز<sup>۳</sup> برای فاز مایع، روش‌های عددی تجزیه بالادست جابجایی و روش "رو" را برای حل جریان دوفاز همگن تعادلی توسعه دادند. آنها از این دو روش برای حل جریان در یک کانال با وجود برآمدگی‌ها در کف آن استفاده کردند. سپس با استفاده از پیش‌شرط‌گذاری، حل معادلات مدل همگن تعادلی در محدوده وسیعی از اعداد ماخ انجام گرفت. گرچه حل ارائه شده آنها کارایی مناسبی در تسخیر ناپیوستگی‌های جریان داشت ولی این روش عددی به معادلات حالت نسبتاً ساده و مفروضی محدود می‌شد. هالاما و همکاران [۶] با مدل‌سازی جریان گذر صوتی بخار مرطوب همراه با تقطیر در داخل نازل و بین پره‌های توربین، روش لکس-وندرآف<sup>۴</sup> را بکار گرفتند. در این مقاله از فرض گاز کامل برای فاز بخار و از معادله کمکی برای اندازه قطرات مایع استفاده شده است. کیم و همکاران [۷] توانایی مدل همگن تعادلی را در پیش‌بینی دبی جریان دوفاز داخل لوله بهبود بخشیدند. آن‌ها با تصحیح جمله افت اصطکاک، اختلاف بین نتایج مدل همگن تعادلی و داده‌های تجربی را کاهش دادند. فاکانونی و همکاران [۸] با فرض تبعیت هر یک از فازها از معادله حالت استیفند گاز و استفاده

1 Advection Upstream Splitting Method  
2 Sanchez- Lacombe  
3 Stiffened Gas  
4 Lax- Wendroff

برای جریان دوفاز با فرض تعادل ترمودینامیکی داریم:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial e}\right)_\rho = -\frac{1}{T\left[(1-x)\frac{dv_f}{dT} + x\frac{dv_g}{dT} - \frac{dT}{dp}\left((1-x)\frac{ds_f}{dT} + x\frac{ds_g}{dT}\right)\right]} \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_e = \frac{1}{\rho^2}\left[-p + T\frac{dp}{dT}\left(\frac{\partial p}{\partial e}\right)_\rho\right] \quad (10)$$

که در آن فشار،  $T$  دما،  $v$  حجم مخصوص،  $s$  آنتروپی و  $x$  کیفیت بخار است. زیرنویس‌های  $f$  و  $g$  به ترتیب معرف حالت اشباع مایع و بخار است. مقادیر ویژه ماتریس‌های  $A_h$  و  $A_{nh}$  که ریشه‌های معادله‌ی

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

می باشند به ترتیب عبارتند از:

$$\lambda_1(A_h) = u, \quad \lambda_2(A_h) = u + a, \quad \lambda_3(A_h) = u - a \quad (11)$$

$$\lambda_1(A_{nh}) = 0, \quad \lambda_2(A_{nh}) = 0, \quad \lambda_3(A_{nh}) = 0 \quad (12)$$

که در آن سرعت صوت و به کمک مدل همگن تعادلی برای جریان دوفاز برابر است با:

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{p}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial e}\right)_\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_e = \frac{T}{\rho^2}\frac{dp}{dT}\left(\frac{\partial p}{\partial e}\right)_\rho \quad (13)$$

ماتریس  $A_h$  را می توان با استفاده از ماتریس قطری  $A$  که درایه‌های آن مقادیر ویژه ماتریس  $A_h$  هستند، به صورت زیر تغییر داد:

$$A_h = R\Lambda R^{-1} \quad (14)$$

چون در جریان مادون صوت  $u - a < 0$  است، از اینرو می توان ماتریس را بر حسب علامت مقادیر ویژه به دو مولفه مثبت و منفی به صورت زیر تجزیه کرد:

$$A_h = R(\Lambda^+ + \Lambda^-)R^{-1} = \underbrace{R\Lambda^+R^{-1}}_{A_h^+} + \underbrace{R\Lambda^-R^{-1}}_{A_h^-} \quad (15)$$

چون مقادیر ویژه ماتریس صفر بوده و رفتاری غیر هذلولی دارد، پس بردار شار آن را نمی توان به دو بخش مثبت و منفی تجزیه نمود. در حالیکه مقادیر ویژه ماتریس در بخش همگن غیر صفر و رفتاری هذلولی داشته بطوریکه بردار شار آن را می توان به دو بخش مثبت و منفی به صورت زیر تجزیه نمود:

$$F_h = (A_h^+ + A_h^-)U = \underbrace{A_h^+U}_{F_h^+} + \underbrace{A_h^-U}_{F_h^-} \quad (16)$$

در نتیجه بردار شار کل بصورت زیر به دو مولفه تجزیه می شود:

$$F = F_h + F_{nh} = \underbrace{(F_h^+ + \frac{1}{2}F_{nh})}_{F^+} + \underbrace{(F_h^- + \frac{1}{2}F_{nh})}_{F^-} \quad (17)$$

همانطور که ملاحظه می شود بردار شار به دو مولفه مثبت و منفی تفکیک شده است که مشتق مکانی مولفه‌ی مثبت بردار شار را بصورت پسر و مشتق مکانی مولفه منفی را بصورت پیشرو گسسته می کنیم. عبارت مشتق زمانی هم بصورت صریح گسسته می شود. بنابراین گسسته‌ی

برای بسته شدن معادلات (۱) که شامل مجهولات است از معادله حالت زیر استفاده می شود [۱۰]:

$$p = p[\rho(U), e(U)] \quad (4)$$

شرایط مرزی سیستم معادلات (۱) و (۴) برای جریان داخل یک نازل همگرا-واگرا با فرض معلوم بودن کیفیت بخار و فشار در ورود و معلوم بودن فشار سیال مادون صوت در خروج عبارتند از:

$$p(0) = p_{in} \quad (5)$$

$$x(0) = x_{in}$$

$$p(L) = p_{back} \quad \text{if } M_{out} < 1$$

### ۳- روش حل عددی

برای حل عددی سیستم معادلات (۱) و (۲) از روش تفکیک بردار شار که برای حل عددی معادلات هذلولی بکار می رود استفاده شده است. استیگر و وارمینگ [۱۲] نخستین بار از این روش برای حل معادلات دینامیک گاز استفاده نمودند. تا بحال تحقیقات زیادی برای بهبود آن انجام شده است که می توان به مطالعه بهبهانی نژاد و شکاری [۱۳] اشاره نمود. ژائو و همکاران [۱۴] نیز از این روش برای حل هیدرودینامیک نسبیت خاص استفاده کرده اند. چن و همکاران [۱۵] نیز این روش را برای حل معادلات جریان سه فاز گاز-مایع-جامد در حالت گذرا بکار گرفته اند.

در صورتی که بردار شار برای سیالی تابعی همگن و مرتبه اول از متغیرهای بقایی باشد، به عنوان مثال برای گاز کامل، آنگاه می توان نوشت:

$$F = (\partial F / \partial U)U = A_h U$$

در حالت کلی بردار شار مثلاً برای سیال دو فاز تابع همگنی از متغیرهای جریان نبوده و در نتیجه داریم:

$$F \neq (\partial F / \partial U)U \neq A_h U$$

و یا:

$$F = \frac{\partial F}{\partial U}U + F_{nh} = (A_h + A_{nh})U = F_h + F_{nh} \quad (6)$$

بطوری که  $A = \partial F / \partial U$  ماتریس ژاکوبین بردار شار گفته می شود و ماتریس  $A_{nh} = (F - F_h) / U$  از روابط زیر بدست می آید:

$$A_h = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{u^2}{2}\left[2 - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial e}\right)_\rho\right] + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_e & u\left[2 - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial e}\right)_\rho\right] & \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial e}\right)_\rho \\ u\left[-\frac{(E+p)}{\rho} + \frac{u^2}{2\rho} - \frac{e}{\rho}\right]\left(\frac{\partial p}{\partial e}\right)_\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_e & \frac{E+p}{\rho} - \frac{u^2}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial e}\right)_\rho & u\left[1 + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial e}\right)_\rho\right] \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$A_{nh} = \frac{F - F_h}{U} = S \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{p}{\rho} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_e & 0 & 0 \\ u\left[\frac{p}{\rho} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_e\right] & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

معادله (۱) در نقطه‌ی ام بصورت زیر خواهد بود:

(۱۸)

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{S_i \Delta x} [F_i^+ - F_{i-1}^+ + F_{i+1}^- - F_i^-]^n + \frac{\Delta t}{S_i} H_i^n$$

با توجه به مادون صوت بودن سرعت سیال در ورود به نازل، دو تا از مقادیر ویژه مطابق رابطه (۱۱) مثبت بوده که معرف وجود دو منحنی مشخصه جریان با شیب مثبت است. وجود این دو منحنی مشخصه نشان‌دهنده ضرورت معلوم شدن دو شرط مرزی و یک رابطه برونمایی در ورود به کانال است [۱۶] که مطابق رابطه (۵) این دو شرط مرزی شامل کیفیت بخار و فشار سیال است. رابطه برونمایی در هر گام زمانی را نیز می‌توان با تقریب درجه یک بر حسب نقاط داخلی به صورت زیر بدست آورد:

$$u_{in}^n = 2u_2^n - u_3^n \quad (۱۹)$$

حال اگر سرعت سیال در خروج از نازل مادون صوت باشد، در این صورت دو منحنی مشخصه با شیب مثبت از میدان خارج و یک منحنی مشخصه با شیب منفی وارد میدان جریان می‌شود. در این صورت به یک شرط مرزی و دو رابطه برونمایی نیاز است [۱۶]. فشار استاتیک در محل خروجی نازل شرط مرزی و روابط برونمایی برای سرعت و چگالی از داخل میدان دو شرط دیگر را مشخص می‌کنند. با مافوق صوت بودن سرعت خروجی سیال هر کدام از مقادیر ویژه مثبت و در نتیجه شیب سه منحنی مشخصه مثبت خواهد بود. در این صورت نیازی به شرط مرزی نخواهد بود و در عوض به سه رابطه‌ی برونمایی نیاز است که از داخل میدان جریان باید محاسبه شوند. این متغیرهای جریان را می‌توان به صورت

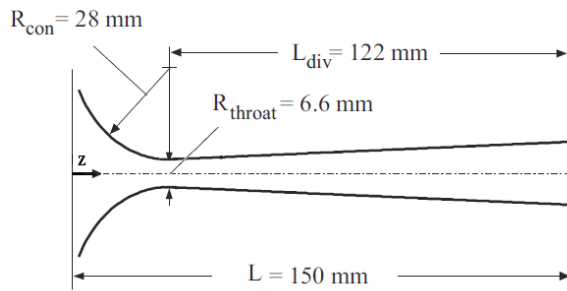
$$U = [\rho, \rho u, E]^T$$

#### ۴- نتایج و بحث

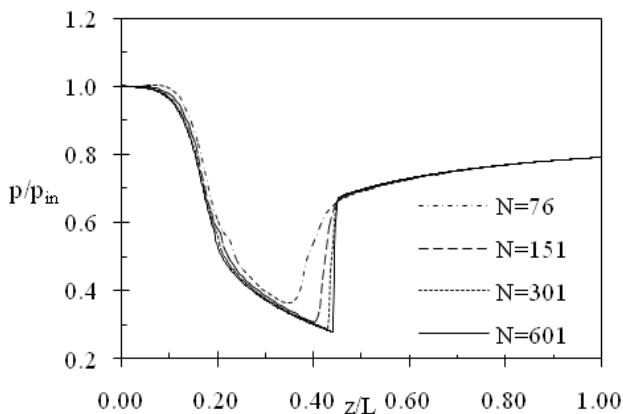
در مطالعه حاضر، جریان دوفاز آب و بخار در داخل نازل دایک [۱۷] مطابق شکل ۱ مورد بررسی قرار گرفته است. قسمت همگرای نازل به شکل دایره با شعاع ۲۸ میلی‌متر و قسمت واگرای آن به شکل مخروط با زاویه راس و طول ۱۲۲ میلی‌متر است. کیفیت ورودی بخار مطابق داده‌های تجربی استاتیک  $x_{in} = 0.17$  و  $x_{in} = 0.73$  [۱۷] و فشار ورودی  $p_{in} = 1/2 \text{ bar}$  انتخاب شده است. از مجذور مجموع مربع اختلاف نسبی بین مقادیر فشار در دو گام متوالی به صورت  $\sqrt{\sum_{i=1}^N \left[ \left| \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{p_i^n} \right|^2 \right]} < 10^{-8}$  به عنوان معیار همگرایی استفاده شده است.

شکل ۲ توزیع فشار مخلوط آب و بخار را در طول نازل با شبکه‌بندی‌های یکنواخت با تعداد سلول‌های ۱۵۱، ۳۰۱ و ۶۰۱ نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود مقدار ویژه  $\lambda_3 = u - a$  در عبور از گلوگاه از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد که باعث عدم پیوستگی مشتق بردارهای تفکیک شار و بروز خطای عددی می‌شود. با کوچک شدن اندازه شبکه می‌توان مقدار خطا را کاهش داد. با توجه به نزدیک بودن نتایج برای اندازه‌های ۳۰۱ و ۶۰۱ در شکل ۲ و به منظور بهینه شدن زمان محاسبات، اندازه ۳۰۱ به

عنوان اندازه بهینه انتخاب و در سایر محاسبات از آن استفاده شده است.



شکل ۱: شماتیک هندسه نازل دایک [۱۷]

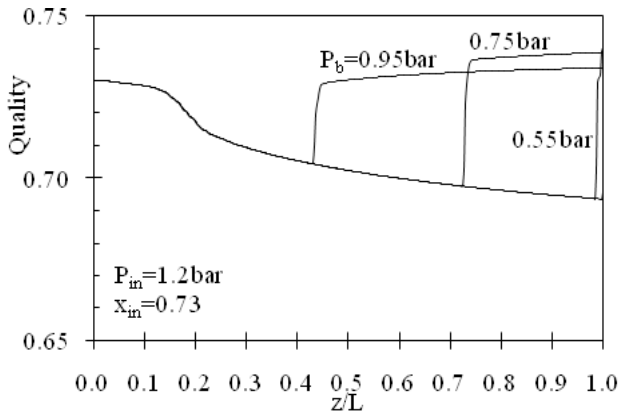


شکل ۲: تاثیر اندازه شبکه بر روی توزیع فشار جریان در محل موج ضربه

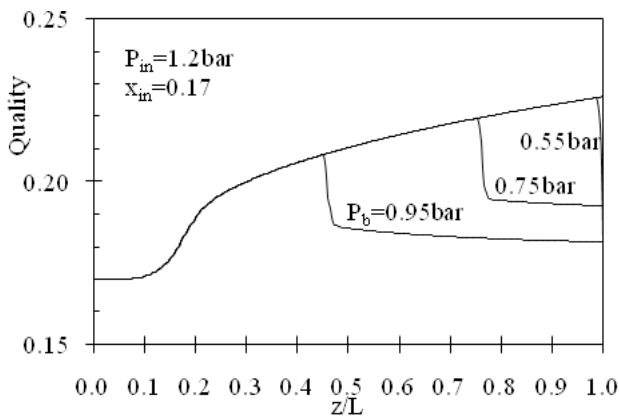
شکل ۳ توزیع فشار بحرانی جریان دو فاز آب-بخار در طول نازل برای دو کیفیت ورودی ۰/۱۷ و ۰/۷۳ و مقایسه آن‌ها با داده‌های تجربی [۱۷] را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود، نتایج حل عددی به ازاء کیفیت ورودی ۰/۷۳ تطابق بسیار خوبی با مقادیر تجربی دارد و بیشینه اختلاف بین آن‌ها در پایین‌دست گلوپی رخ داده و کمتر از ۵ درصد است. با کاهش کیفیت ورودی، اختلاف بین مقادیر بدست آمده و نتایج تجربی افزایش یافته بطوری که به ازاء کیفیت ورودی ۰/۱۷ بیشینه اختلاف بین آن‌ها به حدود ۲۵ درصد افزایش می‌یابد. بنابراین با وجود موفقیت مدل همگن تعادلی در پیش‌بینی جریان دوفاز با کیفیت زیاد بخار، برای کیفیت‌های پایین (کمتر از ۰/۳) لازم است اثرات عدم تعادل ترمودینامیکی بخصوص در نواحی نزدیک به گلوپی در مدل در نظر گرفته شود.

شکل ۴ توزیع فشار را در طول نازل به ازای فشار ورودی  $p_{in} = 1/2 \text{ bar}$  و کیفیت بخار ۰/۷۳ برای سه فشار خروجی (پس فشار)  $p_{in} = 0.95 \text{ bar}$ ،  $0.75 \text{ bar}$ ، و  $0.55 \text{ bar}$  که هر یک بیشتر از فشار بحرانی است، همراه با محل تشکیل سه موج ضربه‌ای مربوطه نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود با کاهش فشار خروجی یا پس‌فشار، محل موج ضربه ای به انتهای نازل نزدیک می‌شود. همچنین بیشترین تغییرات فشار در طول نازل در محدوده گلوگاه نازل رخ می‌دهد و پس از آن با شیب ملایمی کاهش می‌یابد.

مشابهی برای ماهیت تبخیری و تقطیری پس از عبور از موج ضربه ای به ترتیب در کیفیت‌های بالا توسط حمیدی [۸] و در کیفیت‌های پایین توسط ویست و همکاران [۱۸] گزارش شده است.



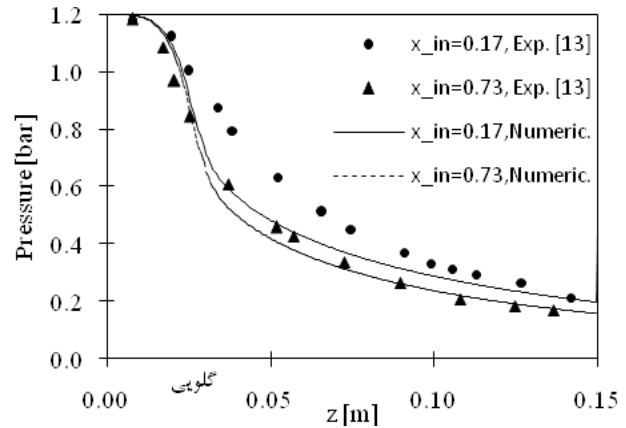
شکل ۵: توزیع کیفیت بخار در طول نازل با ماهیت تبخیری در عبور از موج ضربه‌ای با کیفیت بخار ورودی بالا



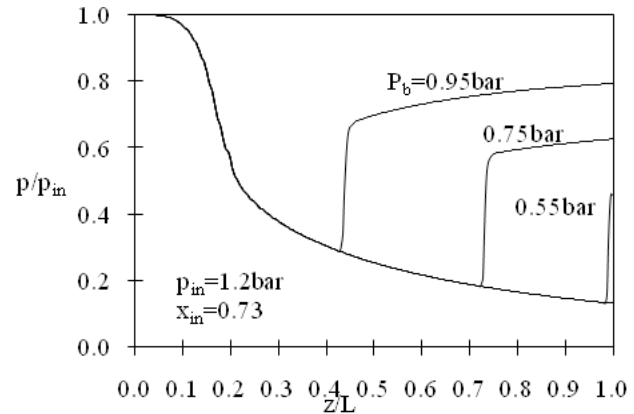
شکل ۶: توزیع کیفیت بخار در طول نازل با ماهیت تقطیری در عبور از موج ضربه‌ای با کیفیت بخار ورودی پایین

شکل ۷ تاثیر کیفیت بخار ورودی را بر روی توزیع فشار جریان در طول نازل برای فشار ورودی  $p_{in} = 1/2 \text{ bar}$  بررسی می‌کند. ملاحظه می‌شود که تاثیر کیفیت ورودی روی توزیع فشار در بالادست گلوگاه ناچیز و در پایین‌دست آن قابل ملاحظه و در گلوگاه نیز از یک شیب نسبتاً تندی برخوردار است. گفتنی است که چون حجم مخصوص بخار به مراتب بزرگتر از مقدار مربوط به مایع مخلوط است، از اینرو با وجود پایین بودن کیفیت بخار، درصد زیادی از مقطع نازل توسط بخار اشغال می‌شود و رفتار فشار در شکل، مشابه رفتار گاز خالص خواهد بود. از این جهت تغییرات فشار در طول نازل برای مخلوط دو فاز غیر معمول به نظر نخواهد رسید.

شکل ۸ توزیع عدد ماخ را در طول نازل برای فشار ورودی  $p_{in} = 1/2 \text{ bar}$  و مقادیر مختلف کیفیت بخار ورودی گزارش می‌کند. مشاهده می‌شود که روند تغییرات عدد ماخ در این شکل مشابه روند تغییرات فشار در شکل قبلی است ولی در جهت مخالف. بطوریکه تاثیر کیفیت ورودی بخار روی عدد ماخ قبل از گلوگاه ناچیز و بعد از آن با شیب ملایمی در حال افزایش



شکل ۳: توزیع فشار بحرانی جریان دو فاز آب-بخار در طول نازل برای کیفیت‌های مختلف ورودی و مقایسه آن‌ها با نتایج استانتکه [۱۷]



شکل ۴: توزیع فشار در طول نازل به ازاء پس فشارهای مختلف

شکل‌های ۵ و ۶ توزیع کیفیت بخار را در طول نازل برای فشار ورودی  $p_{in} = 1/2 \text{ bar}$  به ترتیب برای دو کیفیت ورودی  $0.17$  و  $0.73$  و با سه فشار مختلف خروجی (پس فشار)  $0.55 \text{ bar}$ ،  $0.75 \text{ bar}$  و  $0.95 \text{ bar}$  که هر کدام کمتر از فشار بحرانی هستند، همراه با محل تشکیل سه موج ضربه‌ای مربوطه نشان می‌دهد. مقایسه این دو شکل بیان می‌کند که رفتار تغییرات کیفیت بخار در این دو شکل کاملاً متفاوت بوده و بستگی به مقدار کیفیت ورودی دارد. با کیفیت ورودی بالا ( $0.73$ ) رفتار بخار قبل از وقوع موج ضربه‌ای ماهیت تقطیری و بعد از عبور از آن ماهیت تبخیری دارد. به عبارت دیگر، قبل از موج ضربه‌ای درصد بخار موجود در مخلوط در حال کاهش و باعث کاهش رفتار تراکم‌پذیری مخلوط می‌شود. در حالی که پس از عبور از موج ضربه‌ای رفتار تراکم‌پذیری مخلوط بیشتر می‌شود. مشابه همین نتایج ولی در جهت مخالف برای کیفیت ورودی پایین ( $0.17$ ) رخ می‌دهد. یعنی، رفتار بخار قبل از وقوع موج ضربه‌ای ماهیت تبخیری و پس از عبور از موج، ماهیت تقطیری دارد. به عبارت دیگر، قبل از موج ضربه‌ای درصد بخار موجود در مخلوط در حال افزایش و رفتار تراکم‌پذیری مخلوط بیشتر می‌شود در حالی که پس از عبور از موج ضربه‌ای رفتار تراکم‌پذیری مخلوط کمتر خواهد شد. همچنین نتایج



بخار موجود در مخلوط در حال افزایش و رفتار تراکم‌پذیری مخلوط بیشتر می‌شود در حالی که پس از عبور از موج ضربه ای رفتار تراکم‌پذیری مخلوط کاهش می‌یابد.

### ۶- پیوست

خواص ترمودینامیکی مخلوط دوفاز تعادلی در دمای اشباع بر حسب خواص ترمودینامیکی هر یک از فازها در دمای اشباع عبارتند از:

$$\phi = (1-x)\phi_f + x\phi_g \quad (20)$$

که در آن معرف هر یک از خواص ماده در حالت اشباع مطابق با روابط ارائه شده توسط فرناندز [۱۰] است. زیرنویس‌های  $f$  و  $g$  به ترتیب بیانگر خواص مربوط به مایع و بخار اشباع است.

$$\ln p_r = (1-T_r) \left[ A_1 + B_1 / (T_r + \beta_1) \right] + C_1 (1-T_r^{\alpha_1}) + D_1 \ln T_r \quad (21)$$

$$v_f = v_c / \left[ 1 + (1-T_r) (A_2 + B_2 T_r^{\beta_2}) + (1-T_r)^{\alpha_2} (C_1 + D_1 (1-T_r)^{\alpha_2}) \right] \quad (22)$$

$$h_g = h_c + R_c T_c \left[ (1-T_r) (A_3 + B_3 T_r^{\beta_3}) + C_3 (1-T_r)^{\alpha_3} + D_3 (1-T_r)^{2\alpha_3} \right] \quad (23)$$

$$S_g = S_c + R_c \left[ A_4 (1-T_r)^{\alpha_4} + B_4 (1-T_r)^{2\alpha_4} + C_4 (1-T_r)^2 + D_4 \ln T_r \right] \quad (24)$$

سایر خواص اشباع از روابط ترمودینامیکی زیر بدست می‌آیند:

$$v_g = \frac{dh_g}{dp} - T \frac{ds_g}{dp} = \left( \frac{dh_g}{dT} - T \frac{ds_g}{dT} \right) / \frac{dp}{dT} \quad (25)$$

$$s_f = s_g - (v_g - v_f) \frac{dp}{dT} \quad (26)$$

$$h_f = h_g + T (s_f - s_g) \quad (27)$$

$$e_f = h_f - p v_f \quad (28)$$

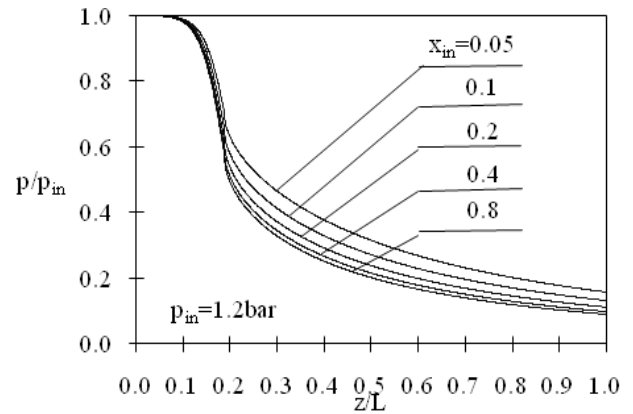
$$e_g = h_g - p v_g \quad (29)$$

زیرنویس‌های  $c$  و  $r$  به ترتیب معرف شرایط بحرانی و خواص کاهیده است و  $R_c$  ثابت بخار آب در شرایط بحرانی است.

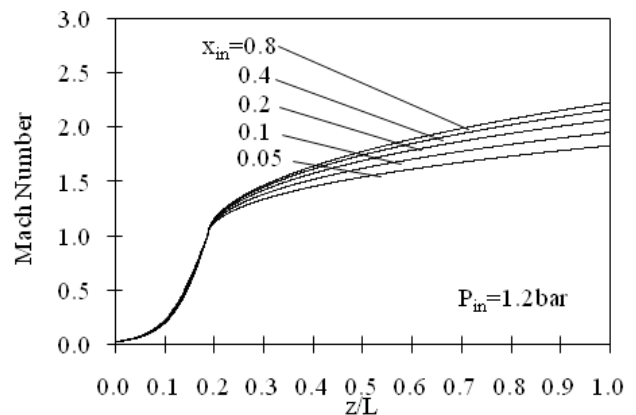
جدول ۱: مقادیر ثوابت معادلات حالت

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
$\alpha_i$	4.37993	0.3308	0.2866	0.4364
$\beta_i$	0.3829	0.4825	3.140	—
$A_i$	79.53183	-1.32454	-7.81895	10.1249
$B_i$	149.253	2.04536	3.97766	-45.4102
$C_i$	-1.67414	2.07176	2.66530	-41.8426
$D_i$	187.786	0.551139	4.75466	-51.5002

است. انتظار است تغییرات عدد ماخ مخلوط با افزایش کیفیت بخار ورودی به سمت هم نزدیکتر شده و رفتار جریان دوفاز به تدریج به سمت رفتار گاز ایده‌آل سوق یابد. همچنین مشاهده می‌شود که نحوه توزیع فشار و عدد ماخ قبل از گلوگاه تقریباً مستقل از کیفیت بخار ورودی و تابعی از فشار ورودی است.



شکل ۷: توزیع فشار جریان در طول نازل برای مقادیر مختلف کیفیت بخار ورودی



شکل ۸: توزیع عدد ماخ در طول نازل برای مقادیر مختلف کیفیت بخار ورودی

### ۵- نتیجه‌گیری

در این مطالعه، روش تفکیک شار برای شبیه‌سازی عددی جریان دوفاز همگن در مجاری با سطح مقطع متغیر تعمیم داده شده است. روابط مربوط به تفکیک بردار شار و سرعت صوت برای جریان دوفاز برحسب خواص ترمودینامیکی مایع و بخار اشباع بدست آمده است. با توجه به نتایج عددی، روش تفکیک بردار شار از دقت قابل قبولی برای پیش‌بینی محل تشکیل موج ضربه ای و تغییر کیفیت بخار برخوردار است. نتایج نشان می‌دهند که رفتار کیفیت بخار به مقدار ورودی آن بستگی دارد بطوریکه بخار با کیفیت ورودی بالا (۰/۷۳) قبل از وقوع موج ضربه‌ای ماهیت تقطیری و بعد از عبور از آن ماهیت تبخیری دارد. ولی با کیفیت ورودی پایین (۰/۱۷) رفتار بخار قبل از موج ماهیت تبخیری و پس از عبور از آن ماهیت تقطیری دارد. در این حالت قبل از موج ضربه درصد

۷- مراجع

- [1] حمیدی، صباح؛ کرمانی، محمد جعفر؛ بهشتی امیری، حسین؛ "شبیه سازی عددی جریان دوفاز حدود صوت حاوی شوک در نازل همگرا-واگرا"، نشریه علمی-پژوهشی امیرکبیر (مهندسی مکانیک)، سال چهل و پنجم، شماره ۱، صفحات ۱۵ تا ۲۷، تابستان ۱۳۹۲.
- [2] Clerc, S., "Numerical simulation of the homogeneous equilibrium model for two-phase flows", *Journal of Computational Physics*, Vol. 161, No. 1, pp. 354– 375, 2000.
- [3] Hejranfar, K., Kamali-Moghadam, R., "Preconditioned characteristic boundary conditions for solution of the preconditioned Euler equations at low Mach number flows", *Journal of Computational Physics*, Vol. 231, No. 12, pp. 4384– 4402, 2012.
- [4] Edwards, J. R., Franklin, R. K., & Liou, M. S., "Low-diffusion flux-splitting methods for real fluid flows with phase transitions", *AIAA journal*, Vol. 38, No. 9, pp. 1624– 1633, 2000.
- [5] Ihm, S.W., and Kim, C., "Computations of homogeneous-equilibrium two-phase flows with accurate and efficient shock-stable schemes", *AIAA journal*, Vol. 46, No. 12, pp. 3012– 3037, 2008.
- [6] Halama, J., Benkhaldoun, F., and Fořt, J., "Numerical modeling of two-phase transonic flow. *Mathematics and Computers in Simulation*", Vol. 80, No. 8, pp. 1624– 1635, 2010.
- [7] Kim, J. S., & Dunsheath, H. J., "A Homogeneous Equilibrium Model Improved for Pipe Flows", *Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science*, 2010.
- [8] Faccanoni, G., Kokh, S., and Allaire, G., "Modelling and simulation of liquid-vapor phase transition in compressible flows based on thermodynamical equilibrium". *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, Vol. 46, No. 5, pp. 1029– 1054, 2012.
- [9] Bernard-Champmartin, A., Poujade, O., Mathiaud, J., Ghidaglia, J. M., "Modelling of an homogeneous equilibrium mixture model (HEM)", *Acta applicandae mathematicae*, Vol. 129, No. 1, pp. 1– 21, 2014.
- [10] Fernandes, J.L.M., "Correlations for fast computation of thermodynamic properties of saturated water and steam", *International journal of energy research*, Vol. 19, No. 6, pp. 507– 514, 1995.
- [11] Ghiaasiaan, S.M., "Two-phase flow, boiling, and condensation: in conventional and miniature systems". Cambridge University Press, 2007.
- [12] Pletcher, R. H., Tannehill, J. C., & Anderson, D., "Computational fluid mechanics and heat transfer", CRC Press, pp. 373– 378, 2012.
- [13] Behbahani-Nejad, M., Shekari, Y., "The accuracy and efficiency of a reduced-order model for transient flow analysis in gas pipelines", *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Vol. 73, No. 1, pp. 13– 19, 2010.
- [14] Zhao, J., He, P., and Tang, H., "Steger-Warming flux vector splitting method for special relativistic hydrodynamics", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Vol. 37, No. 7, pp. 1003– 1018, 2014.
- [15] Chen, M., Jiao, G. W., Deng, S. S., & Wang, J. H., "Flux vector splitting solutions for coupling hydraulic transient of gas-liquid-solid three-phase flow in pipelines", *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 34, pp. 811– 822, 2013.
- [16] Hirsch, C., "Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics", Vol. 1, pp. 579– 583, Butterworth-Heinemann, 2007.
- [17] Städtke, H., "Gasdynamic Aspects of Two-Phase Flow: Hyperbolicity, Wave Propagation Phenomena and Related Numerical Methods", John Wiley & Sons, pp. 188– 190, 2006.
- [18] De Vuyst, F., Ghidaglia, J. M., and Le Coq, G., "On the numerical simulation of multiphase water flows with changes of phase and strong gradients using the Homogeneous Equilibrium Model", *Journal on Finite Volumes*, Vol. 2, No. 1, pp. 1– 36, 2005.

